Spektral- und Streutheorie

Vorlesung SS 96

In dieser Vorlesung werden die Spektraltheorie beschränkter und unbeschränkter Operatoren auf Hilberträumen sowie Elemente der Streutheorie behandelt. Zentrales Problem ist es, Funktionen von Operatoren zu bilden.

Im ersten Kapitel werden holomorphe Funktionen beschränkter Operatoren auf Banachräumen gebildet. Im zweiten Kapitel wird die Ausdehnung dieses Kalküls auf stetige Funktionen normaler Operatoren in C^*-Algebren mit Hilfe der Gelfand-Naimark-Dualität durchgeführt. Nach einer Wiederholung von Grundbegriffen der Maßtheorie im dritten Kapitel wird im vierten Kapitel der Spektralsatz für beschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum auf der Grundlage des Rieszschen Darstellungssatzes gezeigt. Dadurch ergibt sich eine Ausdehnung des Funktionenkalküls auf wesentlich beschränkte meßbare Funktionen.

Im fünften Kapitel wird der Spektralsatz auf unbeschränkte Operatoren ausgedehnt und ein entsprechender Funktionenkalkül entwickelt.

Im letzten Kapitel werden die Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren für Spurklassestörungen und das Invarianzprinzip bewiesen.

Es werden Grundkenntnisse der Hilbert- und Banachraumtheorie, der Funktionentheorie sowie der Maßtheorie vorausgesetzt.

Dieses Skript entstand auf der Grundlage der Notizen von O. Wittich und wurde durch Ch. Wahl in die vorliegende Form gebracht. Ich möchte an dieser Stelle auch M. Olbrich für die kritische Durchsicht der Endfassung danken.

U. Bunke

Inhalt

1 Banachalgebren

1.1 Definitionen und Eigenschaften

Definition. *Eine Norm auf einem $\mathbb{C}$–Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| \;: V \to \mathbb{R}_0^+$ mit*

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| \;=\; |\lambda|\;\|x\|$ *für* $\lambda \in \mathbb{C}$

(iii) $\|x+y\| \;\leq\; \|x\| + \|y\|$ *(Dreiecksungleichung).*

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Aus den Bedingungen (i) und (iii) folgt, daß eine Norm eine Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$ auf V definiertert. Daher kann von der Vollständigkeit eines normierten Raumes gesprochen werden.

Definition. *Ein Banachraum ist ein vollständiger, normierter $\mathbb{C}$ – Vektorraum.*

Beispiele für Banachräume:

- $\mathbb{C},\; \|z\| \;:=\; |z| \;= \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$
- $\mathbb{C}^n,\; \|z\| \;:= \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|^2}$,
- $\mathbb{C}^n,\; \|z\| \;:= \max\limits_{1\leq i\leq n} |z_i|$
- $C([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{C} |\; f \;\text{ stetig}\},\; \|f\| \;:= \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$
- Jeder Hilbertraum ist mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm ein Banachraum.

Definition und Satz. *Seien V und W Banachräume.*

(i) Eine lineare Abbildung $A : V \to W$ heißt beschränkt, falls

$$\|A\| \;:=\; \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V=1}} \|Ax\|_W < \infty.$$

(ii) Die Menge der beschränkten linearen Abbildungen von V nach W wird mit $B(V,W)$ bezeichnet.

Die Operationen $(A,B) \mapsto A+B$ und $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$ mit $A, B \in B(V,W),\; \lambda \in \mathbb{C}$ definieren eine $\mathbb{C}$–Vektorraumstruktur auf $B(V,W)$.

(iii) Mit der Operatornorm $\|\cdot\|$, die in (i) definiert wurde, ist $B(V,W)$ ein Banachraum.

Bemerkung: Die Aussage $\|A\| < \infty$ ist äquivalent mit

$$\exists_{C\in\mathbb{R}}: \ \|Ax\|_W \leq C\|x\|_V \quad \forall_{x\in V}$$

Dies ist gerade die Bedingung für die Stetigkeit von linearen Abbildungen.

Die beschränkten Operatoren sind also genau die stetigen Operatoren zwischen Banachräumen.

Definition. *Eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ ist eine komplexe Algebra mit 1, deren unterliegender Vektorraum ein Banachraum ist und für die gilt:*

$$\|A \cdot B\| \ \leq \ \|A\| \ \cdot \ \|B\| \quad \forall_{A,B\in\mathcal{A}}$$

und

$$\|1\| = 1$$

Beispiel: Sei X ein topologischer Raum. Dann ist

$$C_b(X) := \{f : X \to \mathbb{C} |\ f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_\infty \ := \sup_{x\in X} |f(x)|$$

und der Multiplikation $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ eine kommutative Banachalgebra.

Satz. *Sei V ein Banachraum, sei $B(V) := B(V, V)$.*

(i) Mit der Komposition linearer Abbildungen als Multiplikation erhält $B(V)$ die Struktur einer Algebra.

(ii) Für $A, B \in B(V)$ gilt:

$$\|A \circ B\| \ \leq \ \|A\| \ \cdot \ \|B\|$$

Also ist $B(V)$ eine Banachalgebra.

Definition. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, V eine Banachraum.*

Eine Funktion $f : U \to V$ heißt holomorph, falls sie sich um jedes $\lambda \in U$ in eine Potenzreihe

$$f(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \ (\mu - \lambda)^i$$

entwickeln läßt, die für alle μ aus einer Umgebung von λ konvergiert.

Integral mit Werten in Banachalgebren:

Das Riemannsche Integral kann für Funktionen mit Werten in Banachräumen und –algebren definiert werden. Damit können viele Sätze aus der Funktionentheorie auf holomorphe Funktionen mit Werten in Banachräumen verallgemeinert werden, z.B der

Cauchysche Integralsatz. Außerdem gilt folgende Variation des Maximumsprinzips: Eine ganze Funktion mit Werten in einem Banachraum, die beschränkt ist, ist konstant.

Nachlesen kann man dies bei Rudin, Functional Analysis; es wird im folgenden ohne Beweis benutzt.

Sei ab jetzt $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra.

Definition und Satz. *Gibt es für $B \in \mathcal{A}$ ein Element $C \in \mathcal{A}$ mit der Eigenschaft $BC = CB = 1$, so heißt $B^{-1} := C$ das Inverse zu B und B Einheit in $\mathcal{A}$.*

Die Menge der Einheiten $GL(\mathcal{A})$ ist offen in $\mathcal{A}$.

Beweis:

> Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ konvergiert für $A \in \mathcal{A}$ mit $\|A\| < 1$, denn es gilt $\|A^k\| < \|A\|^k$.
>
> Der Grenzwert ist $(1 - A)^{-1}$.
>
> Sei $B \in GL(\mathcal{A})$ und
>
> $$U_B := \{C \in \mathcal{A} \Big| \; \|C - B\| < \|B^{-1}\|^{-1}\}.$$
>
> Dies ist eine offene Umgebung von B.
>
> Sei $C \in U_B$.
>
> Da dann $\|B^{-1}(C - B)\| < 1$ ist, konvergiert die obige Reihe für $A := -B^{-1}(C - B)$ gegen $(1 + B^{-1}(C - B))^{-1}$. Also existiert das Inverse zu $C = B(1 + B^{-1}(C - B))$.

□

Definition. *Sei $A \in \mathcal{A}$.*

(i) Die Resolventenmenge von A ist

$$\rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} \mid (\mu - A)^{-1} \textit{ existiert in } \mathcal{A}\}.$$

Das Spektrum von A ist

$$\sigma(A) := \mathbb{C} - \rho(A).$$

Lemma. *Für $A \in \mathcal{A}$ gilt:*

(i) $\rho(A)$ ist offen in $\mathbb{C}$.

(ii) $R : \rho(A) \to \mathcal{A}, \quad \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1}$ ist holomorph.

(iii) $\|R(\lambda)\| \; \geq \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))^{-1}$

Beweis:

Sei $\lambda \in \rho(A),\ r := \ \|R(\lambda)\|^{-1}$.

Behauptung: Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} R(\lambda)^{k+1}(\lambda-\mu)^k$ konvergiert für $|\mu-\lambda| < r$ absolut und ergibt $(\mu - A)^{-1}$.

Die absolute Konvergenz folgt aus der Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ \|R(\lambda)\|^{k+1}|\lambda-\mu|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} r^{-(k+1)}|\lambda-\mu|^k \ = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{|\lambda-\mu|}{r}}_{<1}\Big)^k < \infty.$$

Die Reihe ergibt tatsächlich $(\mu - A)^{-1}$, da

$$\begin{aligned}
(\mu - A)\sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda)^{k+1}(\lambda-\mu)^k \ &= \ \sum_{k=0}^{\infty}(\mu-A)R(\lambda)^{k+1}(\lambda-\mu)^k \\
&= \ \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-A)R(\lambda)^{k+1}(\lambda-\mu)^k \\
&\quad\ -(\lambda-\mu)\sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda)^{k+1}(\lambda-\mu)^k \\
&= \ \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda)^{k}(\lambda-\mu)^k - \sum_{k=1}^{\infty} R(\lambda)^{k}(\lambda-\mu)^k \\
&= \ 1.
\end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$|\mu-\lambda| < r \Rightarrow \mu \in \rho(A)$$

Daraus folgen (i), (ii) und (iii). $\square$

Definition. *Man nennt* $R(\lambda) := (\lambda - A)^{-1}$ *für* $\lambda \in \rho(A)$ *die Resolvente von* A.

Lemma. *Für* $A \in \mathcal{A}$ *gilt:*

(i) $\sigma(A) \neq \emptyset$

(ii) $\sigma(A)$ *ist beschränkt.*

(iii) $\sup|\sigma(A)| := \sup\limits_{x\in\sigma(A)} |x| \ = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \ \|A\|$

Beweis:

(ii) Die Laurentreihe um 0

$$f(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$$

konvergiert für $|\lambda| > \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|A^k\|}$ und ergibt $R(\lambda)$ wegen

$$(\lambda - A)f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1}}{\lambda^{k+1}} = 1.$$

Daraus folgt:

$$\sup |\sigma(A)| \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|A^k\|}$$

Da $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra ist, gilt $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ und damit $\sqrt[k]{\|A^k\|} \leq \|A\|$, also

$$\sup |\sigma(A)| \leq \|A\|.$$

Insbesondere ist $\sigma(A)$ beschränkt.

(i) Annahme: $\sigma(A) = \emptyset$.
Dann ist $R(\lambda)$ eine ganze Funktion. Aus der Laurentreihe für $R(\lambda)$ (Teil(ii)) folgt aber $\|R(\lambda)\| \overset{|\lambda|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, deswegen muß nach dem Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen mit Werten in Banachalgebren (s.S.5) $R(\lambda)$ die Nullfunktion sein. Widerspruch.

(iii) Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt für f aus (ii) und $\varepsilon > 0$ mit $r := \sup |\sigma(A)|$:

$$A^k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r+\varepsilon} z^k f(z)\, dz$$

$$\Rightarrow \|A^k\| \leq C_\varepsilon (r+\varepsilon)^k$$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{\|A^k\|} \leq \sqrt[k]{C_\varepsilon}(r+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|A^k\|} \leq r+\varepsilon \quad \text{da } \sqrt[k]{C_\varepsilon} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, ergibt sich:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|A^k\|} \leq r$$

Mit der Ungleichung aus dem Beweis zu (ii) erhält man:

$$\sup\ |\sigma(A)| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|A^k\|}$$

Bleibt noch zu zeigen: $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|A^k\|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|} = r$

Sei $\lambda \in \sigma(A)$.

Dann ist $(\lambda - A)$ nicht invertierbar und damit auch $(\lambda^k - A^k)$ nicht, da

$$(\lambda^k - A^k) = (\lambda - A)(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2}A + \ldots + A^{k-1}).$$

Daraus folgt: $\lambda^k \in \sigma(A^k)$

Demnach ist $|\lambda^k| \leq \|A^k\|$, also $|\lambda| \leq \sqrt[k]{\|A^k\|} \quad \forall_k$ und somit

$$|\lambda| \leq \underline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|A^k\|}.$$

Dies ergibt Aussage (iii). □

Definition. *Die Zahl* $r(A) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ *heißt Spektralradius von* A.

Lemma (Resolventengleichung). *Seien* $\lambda, \mu \in \rho(A)$. *Dann gilt für die Resolventen von* A*:*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

Beweis: Multipliziere beide Seiten mit $(\lambda - A)(\mu - A)$. □

Bemerkung: Das Spektrum eines Elementes hängt von der Algebra ab, in der es betrachtet wird. Ist $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ eine Unteralgebra, so gilt:

$$\sigma_{\mathcal{A}}(A) \subset \sigma_{\mathcal{A}'}(A)$$

Der Spektralradius ändert sich jedoch nicht.

Falls V endlichdimensional ist und $\mathcal{A} = B(V)$, so ist das Spektrum eines Elementes aus $B(V)$ die Menge seiner Eigenwerte. Im allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall.

Sei zum Beispiel $V := C([0,1])$, $g \in V$ streng monoton steigend. Der Operator $M_g : f \mapsto gf$ ist Element von $B(V)$ und hat als Spektrum $\sigma(M_g) = \{g(x) | x \in [0,1]\}$, aber keinen Eigenwert.

1.2 Holomorpher Funktionenkalkül

Im folgenden sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $A \in \mathcal{A}$

Definition. *(i)* $\mathcal{F}(A) := \{f|\ f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph für ein offenes* $U \supset \sigma(A)$ *in* $\mathbb{C}\}$.

(ii) Sei $f \in \mathcal{F}(A)$ *holomorph auf* U. *Wähle ein offenes, beschränktes* U_1 *so, daß* $\sigma(A) \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U$ *und* $\partial\overline{U_1}$ *glatt ist. Dann ist* $f(A) \in \mathcal{A}$ *definiert durch*

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\overline{U}_1} f(\lambda)R(\lambda)d\lambda,$$

wobei $R(\lambda)$ *die Resolvente zu* A *sei.*

Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt, daß $f(A)$ nicht von der Wahl von U_1 abhängt. Wie der folgende Satz zeigt, übertragen sich viele Eigenschaften aus dem Kalkül im Komplexen.

Satz. *Es gilt:*

(i) $\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ f, g \in \mathcal{F}(A) \Rightarrow (\alpha f + \beta g)(A) = \alpha f(A) + \beta g(A)$

(ii) $f, g \in \mathcal{F}(A) \Rightarrow (f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$

(iii) $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\lambda^k$ *auf einer Umgebung von* $\sigma(A) \Rightarrow f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k$.

Beweis:

zu (i): klar

zu (ii): Wähle offene, beschränkte Mengen U, U_1 und U_2 so, daß f und g holomorph auf U sind, $\partial\overline{U}_i$ glatt ist für $i = 1, 2$ und außerdem $\sigma(A) \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U_2 \subset \overline{U}_2 \subset U$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(A) \cdot g(A) &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\partial\overline{U}_1} f(\lambda)R(\lambda)d\lambda \oint_{\partial\overline{U}_2} g(\mu)R(\mu)d\mu \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\partial\overline{U}_1} \oint_{\partial\overline{U}_2} f(\lambda)g(\mu)R(\lambda)R(\mu)d\mu\ d\lambda \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\partial\overline{U}_1} \oint_{\partial\overline{U}_2} f(\lambda)g(\mu)\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\mu - \lambda}d\mu\ d\lambda \text{ (Resolventengleichung)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\partial\overline{U}_1} f(\lambda)R(\lambda) \underbrace{\oint\limits_{\partial\overline{U}_2} \frac{g(\mu)}{\mu-\lambda} d\mu}_{=2\pi i\, g(\lambda)} \, d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\partial\overline{U}_2} g(\mu)R(\mu) \underbrace{\oint\limits_{\partial\overline{U}_1} \frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda} d\lambda}_{=0} \, d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\overline{U}_1} f(\lambda)g(\lambda)R(\lambda) d\lambda \text{ (Cauchyscher Integralsatz)} \\
&= (f\cdot g)(A).
\end{aligned}
$$

zu (iii): Wähle einen Integrationsweg $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ mit $|\gamma(t)| > r(A)$ so, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \lambda^k$ auf γ konvergiert. Dies ist möglich, da nach Voraussetzung der Konvergenzradius der Reihe größer als $r(A)$ ist. Dann gilt:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \lambda^k R(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \oint\limits_{\gamma} \lambda^k R(\lambda)\, d\lambda$$

Mit der Reihenentwicklung $R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$, die für $|\lambda| > r(A)$ absolut konvergiert, erhält man:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^i R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(\frac{1}{2\pi i}\right) \oint_{\gamma} \lambda^{i-k-1} = A^i$$

Daraus folgt: $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k$ □

Satz (Spektrales Abbildungsprinzip). *Für $f \in \mathcal{F}(A)$ gilt:*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$$

Beweis:

zu $\sigma(f(A)) \supset f(\sigma(A))$:

Sei $\lambda \in \sigma(A)$.

Die Funktion

$$g(\xi) := \frac{f(\lambda) - f(\xi)}{\lambda - \xi} \qquad \xi \neq \lambda$$

kann durch $g(\lambda) := f'(\lambda)$ holomorph fortgesetzt werden und ist damit in $\mathcal{F}(A)$.

Für sie gilt:

$$g(A)(\lambda - A) = f(\lambda) - f(A)$$

Da $(\lambda - A)$ nicht invertierbar ist, ist auch $(f(\lambda) - f(A))$ nicht invertierbar, d.h. $f(\lambda) \in \sigma(f(A))$.

zu $\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A))$:

Sei $\mu \in \sigma(f(A))$.

Annahme: $\mu \notin f(\sigma(A))$

$$\Rightarrow h(\xi) := (f(\xi) - \mu)^{-1} \in \mathcal{F}(A),$$

$$\Rightarrow h(A) = (f(A) - \mu)^{-1} \text{ existiert} \Rightarrow \mu \in \rho(f(A)) \quad \text{Widerspruch.}$$

□

Satz. *Seien $f \in \mathcal{F}(A)$, $g \in \mathcal{F}(f(A))$, $F := g \circ f$. Dann gilt:*

(i) $F \in \mathcal{F}(A)$

(ii) $F(A) = g(f(A))$

Beweis:

(i) ist eine Konsequenz des spektralen Abbildungsprinzips.

zu (ii): Sei $U \supset \sigma(f(A))$ offen und beschränkt, $\partial\overline{U}$ glatt, so daß g holomorph auf einer Umgebung von $\overline{U}$ ist. Dann gibt es ein offenes $V \supset \sigma(A)$ mit glattem $\partial\overline{V}$, so daß f holomorph auf einer Umgebung von $\overline{V}$ ist und $f(\overline{V}) \subset U$.

Für $\lambda \in \partial\overline{U}$ ist die Funktion $(\lambda - f(\xi))^{-1}$ holomorph auf einer Umgebung von $\overline{V}$. Daher ist die Resolvente $R_{f(A)}(\lambda) = (\lambda - f(A))^{-1}$ definiert.

Nach Einsetzen folgt:

$$\begin{aligned}
g(f(A)) &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\overline{U}} g(\lambda) R_{f(A)}(\lambda) d\lambda \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{\partial\overline{V}} \oint\limits_{\partial\overline{U}} g(\lambda) R_A(\xi) \frac{1}{\lambda - f(\xi)} d\lambda \, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\overline{V}} g(f(\xi)) R_A(\xi) d\xi \text{ (Cauchyscher Integralsatz)} \\
&= F(A).
\end{aligned}$$

□

2 C^*–Algebren

2.1 Definitionen und Eigenschaften

Definition. *Ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine $\mathbb{R}$–bilineare Abbildung*

$$\langle .,. \rangle \ : \ V \times V \to \mathbb{C}$$

mit

(i) $\langle\, x,\, \lambda y \rangle \,=\langle\, x,\, y\rangle\, \lambda, \quad x,\, y \in V, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

(ii) $\langle\, x,\, y \rangle \,= \overline{\langle\, y, x \rangle}\,, \quad x,\, y \in V$

Ein mit einem Skalarprodukt versehener Raum $(V, \langle \quad \rangle\,)$ heißt Hilbertraum, wenn gilt:

(i) $\langle .,. \rangle$ ist positiv definit, induziert also eine Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ auf V;

(ii) V ist bezüglich der durch $\langle .,. \rangle$ induzierten Norm vollständig.

Mit V' wird der Raum der stetigen linearen Abbildungen von einem topologischen $\mathbb{C}$–Vektorraum V nach $\mathbb{C}$ bezeichnet. Er wird das topologische Dual von V genannt.

In der Funktionalanalysis wird bewiesen:

Lemma. *Sei $(V, \langle \quad \rangle\,)$ ein Hilbertraum. Dann definiert die Zuordnung*

$$V \to V', \quad \varphi \mapsto \langle\, \varphi,\ .\ \rangle$$

einen konjugiert linearen Isomorphismus von V auf V'.

Bemerkung: Wird V' mit der Operatornorm versehen, so ist die im Lemma definierte Abbildung eine Isometrie, da die Cauchy - Schwarzsche Ungleichung liefert:

$$\|\langle y,\ .\ \rangle\| := \sup_{\|x\|=1} |\langle y, x\rangle| = |\langle y, \frac{y}{\|y\|}\rangle| = \|y\|$$

Definition und Lemma. *Sei $(V, \langle \quad \rangle\,)$ ein Hilbertraum, $A \in B(V)$. Der adjungierte Operator $A^* \in B(V)$ wird durch folgende Bedingung definiert:*

$$\langle\, A^* x,\, y\rangle \,= \langle\, x,\, Ay\rangle \quad \forall x,\, y \in V$$

Gilt $A^* = A$, dann heißt A selbstadjungiert.

Beweis:

Die Existenz und Wohldefiniertheit von A^* folgt aus dem vorigen Lemma, insbesondere gilt:

$$\|A^*\| = \sup_{\|x\|=1} \|A^*x\| = \sup_{\|x\|=1,\|y\|=1} |\langle A^*x, y\rangle|$$

$$= \sup_{\|x\|=1,\|y\|=1} |\langle x\,,\, Ay\rangle| = \|A\|$$

Deshalb ist A^* in $B(V)$ und die Abbildung $^* : B(V) \to B(V)$ ist stetig. □

Eigenschaften des $*$–Operators:

(i) $(A+B)^* = A^* + B^*$

(ii) $(AB)^* = B^* A^*$

(iii) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$

(iv) $\|A^*\| = \|A\|$

(v) $(A^*)^* = A$.

Lemma (C^*–Eigenschaft). *Sei V ein Hilbertraum, $A \in B(V)$. Dann gilt:*

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|A^*A\| &= \sup_{\|x\|=1,\|y\|=1} |\langle\, A^*A\,x,\, y\rangle| = \sup_{\|x\|=1,\|y\|=1} |\langle\, Ax,\, Ay\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|=1} |\langle\, Ax,\, Ax\rangle| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2. \end{aligned}$$

□

Definition. *(i) Eine Banachalgebra mit einer $*$–Operation, die den erwähnten Eigenschaften (i) - (v) genügt, heißt involutive Banachalgebra.*

(ii) Eine involutive Banachalgebra mit C^*–Eigenschaft heißt C^*–Algebra.

Beispiele:

1) Sei V ein Hilbertraum. Nach obiger Diskussion ist $B(V)$ eine C^*-Algebra.

2) Jede topologisch abgeschlossene Unteralgebra von $B(V)$, auf der die $*$–Operation definiert ist, ist eine C^*–Algebra.

3) Sei X ein kompakter topologischer Raum. Mit $f^*(x) := \overline{f(x)}$, $\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$ wird $C(X)$ zu einer C^*-Algebra.

Lemma. *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*–Algebra, $A \in \mathcal{A}$.*

(i) $\sigma(A^*) = \{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$

(ii) $A^* = A \Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$

Beweis:

zu (i): Die Behauptung folgt aus:

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(A) &\Leftrightarrow (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{A} \text{ existiert} \\ &\Leftrightarrow [(\lambda - A)^{-1}]^* = [(\lambda - A)^*]^{-1} = (\overline{\lambda} - A^*)^{-1} \in \mathcal{A} \text{ existiert} \\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(A^*) \end{aligned}$$

zu (ii): Sei $\alpha + i\beta \in \sigma(A)$, zu zeigen ist: $\beta = 0$

Nach dem spektralen Abbildungsprinzip gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\alpha + i(\beta + \lambda) \in \sigma(A + i\lambda)$$

Aus

$$\begin{aligned} |\alpha + i(\beta + \lambda)|^2 &\leq \|A + i\lambda\|^2 \quad \text{(Spektralradius)} \\ &= \|(A + i\lambda)^*(A + i\lambda)\| \quad (C^*\text{-Eigenschaft}) \\ &= \|(A - i\lambda)(A + i\lambda)\| \quad (\text{da } A = A^*) \\ &= \|A^2 + \lambda^2\| \\ &\leq \|A\|^2 + |\lambda|^2 \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

folgt

$$2\beta\lambda \leq \|A\|^2 - \alpha^2 - \beta^2 \quad \forall_{\lambda\in\mathbb{R}}.$$

Dies ist nur für $\beta = 0$ erfüllt. □

Quotientenalgebren: Sei I ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{A}$. Die Quotientennorm auf $\mathcal{A}/I$ wird definiert durch

$$\|p(A)\|_{\mathcal{A}/I} = \inf_{B\in I} \|A - B\|_{\mathcal{A}}$$

wobei $p : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ die Projektion ist. Man kann nachrechnen, daß p bezüglich dieser Norm stetig ist und $\mathcal{A}/I$ mit ihr zu einer Banachalgebra wird.

Definition. *Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt kommutativ, falls für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt:*

$$AB = BA$$

Im folgenden sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra.

Definition. *Ein Charakter auf $\mathcal{A}$ ist ein stetiger Algebrenhomomorphismus $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Die Menge der Charaktere auf $\mathcal{A}$ wird mit $X(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}'$ bezeichnet. Dabei ist $\mathcal{A}'$ das topologische Dual von $\mathcal{A}$ als Banachraum.*

Satz. *Sei $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein Charakter, $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt:*

(i) $\chi(A) \in \sigma(A)$

(ii) $\chi(A) \leq \|A\|$, *d.h.* $\|\chi\| \leq 1$

Beweis:

zu (i): Annahme: Für $\lambda := \chi(A)$ existiert die Resolvente $(\lambda - A)^{-1}$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 1 = \chi(1) &= \chi((\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)) \\ &= \chi((\lambda - A)^{-1})\chi(\lambda - A) \\ &= \chi((\lambda - A)^{-1})(\chi(\lambda) - \chi(A)) \\ &= \chi((\lambda - A)^{-1})\underbrace{(\lambda - \chi(A))}_{=0} \qquad \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$

zu (ii): Aus (i) folgt: $|\chi(A)| \leq \sup |\sigma(A)| \leq \|A\|$, d.h. $\|\chi\| \leq 1$ □

Wegen $\chi(1) = 1$ gilt sogar $\|\chi\| = 1$.

Nach der Definition der schwachen Topologie auf dem Banachraumdual $\mathcal{A}'$ konvergiert eine Folge χ_i gegen $\chi \in \mathcal{A}'$ (Schreibweise: $\chi_i \xrightarrow{w} \chi$) genau dann, wenn $\chi_i(A) \to \chi(A) \quad \forall_{A \in \mathcal{A}}$.

Der schwache Grenzwert einer Folge von Charakteren ist ebenfalls ein Charakter, d.h. $X(\mathcal{A})$ ist eine schwach abgeschlossene Teilmenge der Einheitsvollkugel von $\mathcal{A}'$. Der Satz von Alaoglu besagt, daß die Einheitsvollkugel eines Banachraumduals schwach kompakt ist, deshalb erhält man:

Satz. *(i) Die Einheitsvollkugel in $\mathcal{A}'$ ist schwach kompakt. Als abgeschlossene Teilmenge davon ist auch die Menge der Charaktere $X(\mathcal{A})$ schwach kompakt.*

(ii) Ist $\mathcal{A}$ separabel, so ist die Einheitskugel in $\mathcal{A}'$ und damit auch $X(\mathcal{A})$ metrisierbar.

Definition. *Die Menge der Charaktere $X(\mathcal{A})$, versehen mit der schwachen Topologie, heißt Spektrum von $\mathcal{A}$.*

Definition. *Sei $A \in \mathcal{A}$. Die Funktion*

$$G_A : X(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}, \quad G_A(\chi) := \chi(A)$$

heißt Gelfand–Transformierte von A.

Mit Hilfe des folgenden Satzes wird sich zeigen, daß die Gelfandtransformierte von A das Spektrum der Algebra gerade auf das Spektrum von A abbildet.

Satz (Gelfand/Mazur). *Sei $\mathcal{B}$ eine Banachalgebra. Ist $\mathcal{B}$ ein Körper, dann ist $\mathcal{B}$ isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$.*

Beweis:

Sei $x \in \mathcal{B}$. Da $\sigma(x) \neq \emptyset$ ist, gibt es ein $\lambda \in \sigma(x)$, also ist $x - \lambda$ nicht invertierbar. Weil $\mathcal{B}$ ein Körper ist, gilt: $x - \lambda = 0$, d.h. $x = \lambda$ und $\sigma(x) = \{\lambda\}$. Die Abbildung

$$\mathcal{B} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto \lambda \in \sigma(x)$$

ist deshalb wohldefiniert, isometrisch und ein Isomorphismus von Algebren.

□

Satz. *(i) Die Abbildung*

$$G : \mathcal{A} \to C(X(\mathcal{A})), \quad A \mapsto G_A$$

ist ein Homomorphismus von Banachalgebren.

(ii) $G_A(X(\mathcal{A})) = \sigma(A) \quad \forall_{A \in \mathcal{A}}$

Beweis:

zu (i): Die Abbildung $\chi \mapsto \chi(A)$ ist stetig, deshalb ist $G_A \in C(X(\mathcal{A}))$.

Da

$$G_{A+B}(\chi) = \chi(A + B) = \chi(A) + \chi(B) = G_A(\chi) + G_B(\chi)$$

und analog

$$G_{AB}(\chi) = G_A(\chi)G_B(\chi)$$

gilt, ist G ein Algebrenhomomorphismus.

G ist stetig, denn

$$\|G_A\| = \sup_{\chi \in X(\mathcal{A})} |G_A(\chi)| = \sup_{\chi \in X(\mathcal{A})} |\chi(A)| \leq \|A\|$$

Daraus folgt $\|G\| \leq 1$, wegen $\|G_1\| = 1$ gilt sogar $\|G\| = 1$.

zu (ii): Es wurde schon bewiesen: $G_A(\chi) = \chi(A) \in \sigma(A)$.

Sei $\lambda \in \sigma(A)$, zu zeigen bleibt:

$$\exists \chi \in X(\mathcal{A}) : \chi(A) = \lambda$$

Da $\lambda - A$ nicht invertierbar ist, ist $J := \mathcal{A}(\lambda - A)$ ein echtes Ideal in $\mathcal{A}$. Sei

$$J \subset J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset J_\alpha \subset \ldots$$

eine aufsteigende Kette echter Ideale, d.h. $J_\alpha \cap GL(\mathcal{A}) = \emptyset$. Die Vereinigung $\overline{\bigcup_\alpha J_\alpha}$ ist wieder ein Ideal und ist größtes Element der Idealkette. Da $GL(\mathcal{A})$ offen ist, ist sie ein echtes Ideal in $\mathcal{A}$:

$$\left(\overline{\bigcup_\alpha J_\alpha}\right) \cap GL(\mathcal{A}) = \emptyset$$

Nach dem Zornschen Lemma gibt es somit zu J ein echtes maximales Ideal $I_{\max} \supset J$, das zudem abgeschlossen ist, denn: $\overline{I_{\max}} \supset I_{\max} \Rightarrow \overline{I_{\max}} = I_{\max}$.

Der Quotient $\mathcal{A}/I_{\max}$ ist ein Körper und mit der Quotientennorm eine Banachalgebra. Nach dem Satz von Gelfand/Mazur folgt daraus:

$$\mathcal{A}/_{I_{\max}} \cong \mathbb{C}$$

Nach Konstruktion ist $(A - \lambda)$ im Kern von $\chi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/_{I_{max}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, dies ist also der gesuchte Charakter. □

Für kommutative C^*–Algebren können noch präzisere Aussagen über die Eigenschaften der Gelfandtransformation gemacht werden. Der folgende Satz liegt der Konstruktion des Kalküls für stetige Funktionen im nächsten Kapitel zugrunde.

Satz (Gelfand/Naimark). *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative C^*–Algebra. Dann ist die Gelfandtransformation*

$$G : \mathcal{A} \to C(X(\mathcal{A})), \quad A \mapsto G_A$$

ein isometrischer Isomorphismus von C^*–Algebren.

Beweis:

(i) G ist ein Homomorphismus von C^*–Algebren: Jedes $A \in \mathcal{A}$ läßt sich ausdrücken als

$$A = \frac{A + A^*}{2} + i\frac{A - A^*}{2i} =: A_1 + i\ A_2,$$

wobei A_1 und A_2 selbstadjungiert sind.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \chi(A^*) &= \chi(A_1) - i\chi(A_2) \\ &= \overline{\chi(A_1) + i\chi(A_2)} \qquad \text{da } \chi(A_j) \in \mathbb{R} \\ &= \overline{\chi(A)} \end{aligned}$$

Also gilt: $G_{A^*} = \overline{G_A}$

(ii) $G(\mathcal{A})$ ist dicht in $C(X(\mathcal{A}))$:

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß, nämlich:

- $G(\mathcal{A})$ trennt die Punkte von $X(\mathcal{A})$, d.h.

  $$\chi_1,\, \chi_2 \in X(\mathcal{A}) \Rightarrow \exists_{A \in \mathcal{A}} \text{ mit } G_A(\chi_1) \neq G_A(\chi_2).$$

  Dies ist klar, denn $\chi_1 \neq \chi_2 \Rightarrow \exists_A : \chi_1(A) \neq \chi_2(A)$.
- $G(1) \in G(\mathcal{A})$
- $\overline{G(A)} \in G(\mathcal{A})$
- $X(\mathcal{A})$ ist kompakt

Aus dem Satz von Stone-Weierstraß folgt die Behauptung.

(iii) G ist isometrisch:

Sei $B \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} r(B) &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[2^k]{\|B^{2^k}\|} \\ &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[2^k]{\|B\|^{2^k}} \quad (C^*\text{–Eigenschaft}) \\ &= \|B\|. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \|G_B\| &= \sup_{\chi \in X(\mathcal{A})} |\chi(B)| \\ &= \sup|\sigma(B)| \ = r(B) = \ \|B\| \end{aligned}$$

Für ein allgemeines $A \in \mathcal{A}$ folgt die Behauptung aus der Selbstadjungiertheit von A^*A:

$$\|G_A\|^2 \ = \ \|\overline{G}_A G_A\| \ = \ \|G_{A^*A}\| \ = \ \|A^*A\| \ = \ \|A\|^2$$

(iv) Da $\mathcal{A}$ vollständig und G isometrisch ist, ist das Bild von G abgeschlossen in $C(X(\mathcal{A}))$; nach (ii) ist es zudem dicht, also ist G surjektiv.

Die Injektivität erhält man mit

$$G_A = 0 \Rightarrow \|G_A\| = 0 \Rightarrow \|A\| = 0 \Rightarrow A = 0.$$

□

2.2 Der Kalkül für stetige Funktionen

Sei $\mathcal{A}$ eine C^*–Algebra.

Definition. *(i) Ein Operator $A \in \mathcal{A}$, für den $A\,A^* = A^*A$ gilt, heißt normal.*

(ii) Für ein normales $A \in \mathcal{A}$ ist die von A und A^* erzeugte abgeschlossene Unteralgebra

$$C(A) := \overline{\Big\{ \sum_{endl} a_{ij} A^i\, A^{*j} \Big\}} \subset \mathcal{A}.$$

eine kommutative C^*–Algebra.

Beispiele normaler Operatoren sind selbstadjungierte ($A = A^*$) und unitäre ($A\,A^* = A^*A = 1$) Operatoren.

Satz. *Für ein normales $A \in \mathcal{A}$ gibt es einen isometrischen Isomorphismus*

$$T : C(\sigma(A)) \to C(A).$$

Beweis:

Nach dem Satz von Gelfand–Naimark ist $G : C(A) \to C(X(C(A))$ ein Isomorphismus. Gesucht wird ein Isomorphismus $C(X(C(A))) \cong C(\sigma(A))$.

Es wurde schon bewiesen, daß

$$G_A : X(C(A)) \to \sigma(A), \quad \chi \mapsto \chi(A) \in \sigma(A)$$

surjektiv ist. Daraus folgt die Injektivität von

$$T : C(\sigma(A)) \overset{G_A^*}{\to} C(X(C(A))) \overset{G^{-1}}{\to} C(A)$$

wobei $G_A^*(f) := f \circ G_A$.

Behauptung: T ist surjektiv.

Für die Inklusion $I : \sigma(A) \to \mathbb{C},\ \ I(\mu) = \mu$ gilt:

$$G_A^*(I)(\chi) = I \circ G_A(\chi) = I(\chi(A)) = \chi(A), \text{ also } T(I) = A \text{ wegen } G_A(\chi) = \chi(A).$$

Analog erhält man $T(\overline{I}) = A^*$.

Da T ein Homomorphismus ist, folgt

$$T(\sum a_{ij} I^i \overline{I^j}) = \sum a_{ij} A^i A^{*j},$$

$T(C(\sigma(A))$ liegt also dicht in $C(A)$.

Außerdem ist $C(A)$ vollständig und T isometrisch, sein Bild deshalb abgeschlossen in $C(A)$. Dies zeigt die Surjektivität. □

Eine einfache Charakterisierung von T ist gegeben durch:

Lemma. *Sei $A \in \mathcal{A}$ normal.*

Sei $T' : C(\sigma(A)) \to C(A)$ ein stetiger C^*– Algebrenhomomorphismus mit $T'(I) = A$, wobei $I : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ die Inklusion ist. Dann ist $T = T'$.

Beweis:

Die von I und $\overline{I}$ erzeugte Unteralgebra liegt dicht in $C(\sigma(A))$. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt die Behauptung. ☐

Definition. *Sei $A \in \mathcal{A}$ normal, $T : C(\sigma(A)) \to C(A)$ sei wie oben definiert. Für $h \in C(\sigma(A))$ setzt man*

$$h(A) := T(h).$$

Übungsaufgabe: Der so definierte Kalkül für stetige Funktionen stimmt auf holomorphen Funktionen mit dem früher definierten überein.

Aus der Definition können folgende Regeln für Funktionen aus $C(\sigma(A))$ abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}
(\alpha h + \beta h')(A) &= \alpha h(A) + \beta h'(A) \\
hh'(A) &= h(A)h'(A) \\
\overline{h}(A) &= h(A)^* \\
\sigma(h(A)) &= h(\sigma(A)) \\
h(h'(A)) &= h \circ h'(A), \text{ für } h \in C(\sigma(h'(A)))
\end{aligned}$$

3 Grundlagen der Maßtheorie

Definition. *Eine σ–Algebra auf einem Raum X ist eine Menge $\mathcal{R}$ von Teilmengen von X mit*

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(ii) $U \in \mathcal{R} \Rightarrow U^C \in \mathcal{R}$

(iii) $\{U_k | k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{R} \Rightarrow \bigcup_k U_k \in \mathcal{R}$.

Definition. *Ein komplexes Maß auf einer σ–Algebra $\mathcal{R}$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ mit*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) μ ist σ–additiv: für paarweise disjunkte Mengen $A_n, n \in \mathbb{N}$ aus $\mathcal{R}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Definition. *Seien X, Y Räume mit σ–Algebren $\mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y$.*

(i) Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt meßbar, falls gilt:

$$U \in \mathcal{R}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{R}_X$$

(ii) Sei $f : X \to Y$ eine meßbare Funktion, μ ein Maß auf $\mathcal{R}_X$. Dann definiert der Transport des Maßes μ durch f ein Maß $f_*\mu$ auf $\mathcal{R}_Y$:

$$f_*\mu(U) := \mu(f^{-1}(U)) \quad \forall_{U\in\mathcal{R}_Y}$$

Sei X ein Raum mit σ–Algebra $\mathcal{R}_X$, μ ein Maß auf $\mathcal{R}_X$. Das Integral einer charakteristischen Funktion $\chi_A,\ A \in \mathcal{R}_X$ bzgl. μ wird definiert als:

$$\int_X \chi_A(t)\mu(dt) := \mu(\chi_A) := \mu(A)$$

Diese Abbildung kann linear fortgesetzt werden auf den Raum der Treppenfunktionen, der von den charakteristischen Funktionen erzeugt wird.

Durch verschiedene Grenzwertprozesse kann das Integral weiter ausgedehnt werden auf einen Raum $\mathcal{L}^1(X, \mu)$, den Raum der integrierbaren Funktionen.

Definition. *Sei μ ein komplexes Maß auf $\mathcal{R}_X$, f eine komplexe, integrierbare Funktion auf X. Dann wird das komplexe Maß ν mit der Dichte f bezüglich μ definiert durch*

$$\nu(A) := \int_A f(t)\mu(dt) \text{ für } A \in \mathcal{R}_X.$$

Der Satz von Radon–Nikodym, der in Kapitel 6.2 aufgeführt wird, gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, wann ein Maß mittels einer Dichte aus einem anderen hervorgeht.

In Kapitel 5.3 wird noch eine andere Eigenschaft gebraucht werden, die Polarzerlegung eines komplexen Maßes heißt:

Für ein komplexes Maß ν gibt es

- eine meßbare Funktion φ mit $|\varphi(x)| = 1 \quad \forall_{x \in X}$,
- ein positives Maß μ,

so daß gilt:

$$\nu(dx) = \varphi(x)\mu(dx)$$

Sei X nun ein topologischer Raum.

Definition. *Die Borelsche σ–Algebra ist die kleinste σ–Algebra, die alle offenen Mengen von X enthält.*

Die Borelalgebra von X wird mit $\mathcal{B}_X$ bezeichnet.

Definition. *(i) Ein positives Borelsches Maß μ auf $\mathcal{B}_X$ ist regulär, falls für alle Mengen $A \in \mathcal{B}_X$ gilt:*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U,\ U \text{ offen}\}$$

und

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}$$

(ii) Ein komplexes Borelsches Maß μ auf $\mathcal{B}_X$ ist regulär, falls sich μ in positive reguläre Borelmaße $\mu_i,\ i = 1, \dots 4$ wie folgt zerlegen läßt:

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4).$$

Ist μ ein reguläres komplexes Maß auf $\mathcal{B}_X$, so enthält $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ z.B. die stetigen Funktionen mit kompakten Träger und ihren Abschluß $C_0(X)$ unter der Supremumsnorm. Mit der Supremumsnorm ist $C_0(X)$ ein Banachraum und es kann gezeigt werden, daß die lineare Abbildung

$$C_0(X) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int\limits_X f(t)\mu(dt)$$

stetig ist.

Andererseits läßt sich nach dem Rieszschen Darstellungssatz (s. z.B. Rudin, Real and Complex Analysis) zu jeder stetigen Linearform $L : C_0(X) \to \mathbb{C}$ genau ein reguläres komplexes Maß μ_L auf $\mathcal{B}_X$ finden, so daß gilt:

$$\mu_L(f) = L(f) \quad \forall_{f \in C_0(X)}$$

Wenn L eine positive Linearform ist – d.h. es gilt $f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0$ –, dann ist das Maß μ_L positiv. Die Umkehrung gilt auch.

Der Raum der regulären komplexen Maße auf $\mathcal{B}_X$ kann also mit dem topologischen Dual zu $C_0(X)$ identifiziert werden; für kompaktes X sogar mit dem topologischen Dual zu $C(X)$.

Näheres zu komplexen Maßen findet man z.B. bei Rudin, Real and Complex Analysis.

4 Beschränkte Operatoren auf Hilberträumen

Im folgenden sei $(V, \langle\ .\ ,\ .\ \rangle)$ ein Hilbertraum.

Für die C^*–Algebra $B(V)$ kann der Funktionenkalkül noch weiter verallgemeinert werden: Jedem normalen Operator A in $B(V)$ wird ein projektorwertiges Maß E_A zugeordnet. Eine beschränkte meßbare Funktion f kann dann bezüglich dieses Maßes integriert werden, das Ergebnis ist ein Operator $f(A) \in B(V)$.

4.1 Projektorwertige Maße

Sei X ein Raum und $\mathcal{R}_X$ eine σ–Algebra auf X.

Definition. *Ein Projektor ist ein Operator $P \in B(V)$ mit*

$$\begin{array}{ll} 1) & P^2 = P \quad \textit{(idempotent)} \\ 2) & P^* = P \quad \textit{(selbstadjungiert).} \end{array}$$

Die Menge der Projektoren wird mit $\mathcal{P}(V) \subset B(V)$ bezeichnet.

Definition. *Ein projektorwertiges Maß auf X ist eine Abbildung*

$$E : \mathcal{R}_X \to \mathcal{P}(V)$$

mit

(i) $E(\emptyset) = 0$

(ii) $E(X) = 1$ *(Zerlegung der Eins)*

(iii) $E(U \cap V) = E(U)\, E(V) \quad \forall_{U,V \in \mathcal{R}_X}$

(iv) $E(U \cup V) = E(U) + E(V) - E(U \cap V)$

(v)
$$E\left(\bigcup_{n=1}^{N} U_n\right) x \overset{N\to\infty}{\to} E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) x \quad \forall_{x \in V},$$
wobei die $U_n \in \mathcal{R}_X$ paarweise disjunkt seien. (starke σ–Additivität).

Beispiel:

Sei $\mu \geq 0$ ein positives Maß auf X, $V := L^2(X, \mu)$. Mit

$$E(U)f := \chi_U \cdot f \quad U \in \mathcal{R}_X, \;\; f \in L^2(X, \mu)$$

wird ein projektorwertiges Maß auf X definiert.

Sei nun $B(X) := \{f : X \to \mathbb{C}$ beschränkt und meßbar$\}$. Mit

$$\|f\| := \sup_{x \in X} \mid f(x) \mid$$

und $f^*(x) := \overline{f(x)}$ wird $B(X)$ eine C^*–Algebra.

Wie in der komplexen Maßtheorie möchte man die Integration von Funktionen aus $B(X)$ bezüglich projektorwertiger Maße definieren - der Wert des Integrals liegt dann in $B(V)$. Dazu nutzt man aus, daß jede solche Funktion durch eine Folge von Treppenfunktionen angenähert werden kann. Deren Integration kann analog zur Integration mit komplexen Maßen konstruiert werden:

Definition. *(i) Eine Funktion*

$$f = \sum_{i \in I} a_i \ \chi_{A_i} \in B(X)$$

mit $A_i \in \mathcal{R}_X$, $a_i \in \mathbb{C}$ und endlicher Indexmenge I heißt einfach.

(ii) Für ein einfaches $f = \sum a_i \chi_{A_i}$ wird definiert:

$$\begin{aligned} E(f) &:= \int f(s) \ E(ds) \\ &:= \sum_{i \in I} a_i \ E(A_i). \end{aligned}$$

Folgendes Lemma aus der Maßtheorie ermöglicht eine Fortsetzung obiger Definition auf Funktionen aus $B(X)$:

Lemma. *Die Menge der einfachen Funktionen liegt dicht in $B(X)$.*

Beweis:

Sei $f \in B(X)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze

$$A_k := f^{-1}(]\varepsilon(k - \frac{1}{2}), \ \varepsilon(k + \frac{1}{2})]) \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

und

$$f_\varepsilon := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon k \ \chi_{A_k}.$$

Da f beschränkt ist, ist f_ε einfach und außerdem gilt nach Konstruktion $\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

$\square$

Um die Konstruktion des Integrals auf $B(X)$ auszudehnen, muß noch sichergestellt werden, daß das Bild $E(f_n)$ einer Cauchyfolge einfacher Funktionen f_n in $B(V)$ konvergiert.

Lemma. *(i) Für ein einfaches* $f = \sum_{i\in I} a_i\,\chi_{A_i}$ *gilt:* $\|E(f)\| \;\leq\; \|f\|$

(ii) E ist ein ∗–Homomorphismus von der Unteralgebra der einfachen Funktionen nach $B(V)$*.*

Beweis:

(i) O.B.d.A. können die Mengen A_i paarweise disjunkt angenommen werden. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\|E(f)\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|E(f)x\|^2 \\
&= \sup_{\|x\|=1} \langle \sum_{i\in I} a_i\,E(A_i)x,\; \sum_{j\in I} a_j\,E(A_j)x\rangle \\
&= \sup_{\|x\|=1} \sum_{i,j\in I} \overline{a}_i\,a_j \langle x,\, E(A_i)E(A_j)x\rangle \\
&= \sup_{\|x\|=1} \sum_{i,j\in I} |a_i|^2 \langle x,\, E(A_i)x\rangle \quad \text{wegen } A_i\cap A_j=\emptyset \text{ für } i\neq j \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \max_{i\in I} |a_i|^2 \sum_{i\in I} \langle x,\, E(A_i)x\rangle \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \underbrace{\left(\max_{i\in I} |a_i|^2\right)}_{=\|f\|^2} \cdot \|x\|^2
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\|E(f)\| \;\leq\; \|f\|.$$

(ii) Die Linearität der Abbildung ist klar.

Zwei einfache Funktionen f und g lassen sich mittels eines gemeinsamen Systems von paarweise disjunkten Mengen $\{A_i|\; i\in I\}\subset \mathcal{R}_X$ darstellen:

$$f = \sum_{i\in I} f_i\,\chi_{A_i},\;\; g = \sum_{i\in I} g_i\,\chi_{A_i}$$

Damit ergibt sich für die Multiplikation:

$$E(fg) = E(\sum_{i\in I} f_i\,g_i\,\chi_{A_i}) = \sum_{i\in I} f_i\,g_i\,E(A_i) = E(f)E(g).$$

Mit $E(\overline{f}) = \sum_{i\in I} \overline{a}_i\,E(A_i)^* = (\sum_{i\in I} a_i\,E(A_i))^* = E(f)^*$ folgt die Behauptung.

□

Aufgrund der beiden Lemmas kann die Integration stetig und eindeutig von den einfachen Funktionen auf ganz $B(X)$ fortgesetzt werden.

4.2 Der Kalkül für wesentlich beschränkte, meßbare Funktionen

Sei X ein lokalkompakter metrischer Raum, $E : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}(V)$ ein projektorwertiges Maß auf X.

Definition. *Eine meßbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt E–wesentlich beschränkt, falls*

$$\|f\|_E := \inf_{U \in \mathcal{B}_X, E(U)=1} \sup_{s \in U} |f(s)| \; < \infty$$

Lemma. *Sei $f : X \to \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion mit $\|f\|_E < \infty$. Dann gibt es eine beschränkte Funktion $f' \in B(X)$ mit $E(\{f \neq f'\}) = 0$.*

Beweis:

Nach Definition gibt es $U \in \mathcal{B}_X$ mit $E(U) = 1$, so daß $\sup_{s \in U} |f(s)| < \infty$ ist.

Setze $f'|_U := f|_U, \; f'|_{X-U} := 0.$ □

Definition und Satz. *Zwei E–wesentlich beschränkte Funktionen f, f' heißen E–äquivalent ($f \sim_E f'$), falls $\|f - f'\|_E = 0$.*

Dies definiert eine Äquivalenzrelation. Auf der Menge der Äquivalenzklassen $EB(X)$ wird $\| \cdot \|_E$ zu einer Norm, mit der $EB(X)$ eine C^*–Algebra ist.

Da $\|f - f'\|_E = 0 \Leftrightarrow E(\{f \neq f'\}) = 0$ gilt, hängt der Wert $E(f)$ (s. 4.1) nur von der Äquivalenzklasse von f ab. Die Abbildung E ist also auf $EB(X)$ definiert, außerdem gilt

$$\|E(f)\| \;\leq\; \|f\|_E,$$

d.h. $E : EB(X) \to B(V)$ ist ein stetiger C^*–Algebrenhomomorphismus.

Beweis:

Der Kern der Abbildung $E : B(X) \to B(V)$ ist $N := \{f \in B(X) : \|f\|_E = 0\}$. Er ist ein abgeschlossenes Ideal in $B(X)$. Die Quotientenalgebra $B(X)/N$ kann daher gebildet werden: Sie ist gerade $EB(X)$ und die induzierte Norm auf $B(X)/N$ gleich der Norm $\| \cdot \|_E$. Daraus folgen die Behauptungen. □

Satz. *Die Abbildung $E : EB(X) \to B(V)$ ist ein stetiger, isometrischer Isomorphismus auf eine abgeschlossene kommutative Unteralgebra von $B(V)$.*

Beweis:

Die Abbildung E ist eine Isometrie, d.h. $\|E(f)\| = \|f\|_E$:

Sei $EB(X) \ni f \geq 0$.

Für $\varepsilon > 0$ gilt: $E(\{f \geq \|f\|_E - \varepsilon\}) \neq 0$.

Wähle

$$0 \neq \varphi \in \operatorname{im}(E(\{f \geq \|f\|_E - \varepsilon\})) \subset V \text{ mit } \|\varphi\| = 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2 \|E(f)\| \geq \langle \varphi, E(f)\varphi \rangle &= \int f(s) \langle \varphi, E(ds)\varphi \rangle \\
&\geq (\|f\|_E - \varepsilon) \int\limits_{\{f \geq \|f\|_E - \varepsilon\}} \langle \varphi, E(ds)\varphi \rangle \\
&= (\|f\|_E - \varepsilon) \langle \varphi, E(\{f \geq \|f\|_E - \varepsilon\})\varphi \rangle \\
&= (\|f\|_E - \varepsilon)\, \|\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

Da ε beliebig war, ist $\|E(f)\| \geq \|f\|_E$. Mit der Ungleichung aus dem vorigen Satz folgt die Gleichheit für positive f.

Für eine beliebige Funktion $f \in EB(X)$ gilt $f^*f \geq 0$, also folgt die Behauptung aus:

$$\|f\|_E^2 = \|f^*f\|_E = \|E(f^*f)\| = \|E(f)^*E(f)\| = \|E(f)\|^2$$

□

4.3 Der Spektralsatz für normale, beschränkte Operatoren

Sei X ein kompakter metrisierbarer Raum, $\mathcal{B}_X$ die Borelalgebra von X

Seien $x, y \in V$. Mit Hilfe der Abbildung $C(X) \hookrightarrow B(X) \xrightarrow{E} B(V)$ definiert ein projektorwertiges Maß E auf $\mathcal{B}_X$ eine stetige Linearform

$$C(X) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \langle x,\, E(f)y \rangle.$$

Das zugehörige komplexe Maß $\mu_{x,y}$ wird Spektralmaß genannt. Da $\mu_{x,y}(\Omega) = \langle x, E(\Omega)y \rangle$ gilt, kann man auch schreiben:

$$\mu_{x,y}(f) = \int f(s) \langle x, E(ds)y \rangle$$

Einem normalen Operator $A \in B(V)$ kann ein Spektralmaß auf $\mathcal{B}_{\sigma(A)}$

$$f \mapsto \langle x,\ f(A)y\rangle =: \mu^A_{x,y}(f)$$

zugeordnet werden. ($f(A)$ ist im vorletzten Kapitel über den Isomorphismus $C(\sigma(A)) \to C(A)$ definiert worden.)

Auf $\mathcal{B}_{\sigma(A)}$ liefert diese Konstruktion jedoch keine anderen Spektralmaße als die vorige, denn der folgende Satz zeigt, daß es für jeden normalen Operator $A \in B(V)$ ein projektorwertiges Maß E_A auf $\mathcal{B}_{\sigma(A)}$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\langle x,\ f(A)y\rangle = \langle x,\ E_A(f)y\rangle$$

Damit kann der Funktionenkalkül nach dem letzten Abschnitt auf E_A-wesentlich beschränkte Funktionen fortgesetzt werden.

Satz. *Sei $\mathcal{B}_{\sigma(A)}$ die Borelalgebra von $\sigma(A)$. Für jeden normalen Operator $A \in B(V)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes projektorwertiges Maß*

$$E_A : \mathcal{B}_{\sigma(A)} \to \mathcal{P}(V)$$

mit

$$f(A) = \int f(s) E_A(ds) \quad \forall_{f \in C(\sigma(A))},$$

wobei $f(A)$ über den Isomorphismus $C(\sigma(A)) \to C(A)$ definiert ist (s. Kap. 2.2).

Beweis:

Seien $x, y \in V$. Da $\sigma(A)$ kompakt ist, definiert die stetige Linearform

$$C(\sigma(A)) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \langle x, f(A)y\rangle$$

nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein eindeutig bestimmtes reguläres komplexes Maß $\mu(x, y)$ auf $\mathcal{B}_{\sigma(A)}$ mit

$$\langle x,\ f(A)y\rangle = \int f(s)\, \mu\,(ds, x, y).$$

Sei $\Omega \in \mathcal{B}_{\sigma(A)}$. Dann ist $(x, y) \mapsto \mu(\Omega, x, y) \in \mathbb{C}$ eine hermitische Sesquilinearform auf V.

Behauptung: $(x, y) \mapsto \mu(\Omega, x, y)$ ist stetig.

Zunächst wird gezeigt: Die Sesquilinearform ist positiv semidefinit, d.h. $\mu(\Omega, x, x) \geq 0$.

Die Linearform

$$f \mapsto \langle x, f(A)x\rangle$$

ist positiv, denn für $f \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle x,\, f(A)x\rangle &= \langle x,\, (\sqrt{f}\,\sqrt{f})(A)x\rangle \\ &= \langle x,\, \sqrt{f}(A)\,\sqrt{f}(A)x\rangle \\ &= \langle\sqrt{f}(A)x,\, \sqrt{f}(A)x\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Daher ist nach dem Rieszschen Darstellungssatz auch das Maß $\mu(x,x)$ positiv, d.h. für $\Omega \in \mathcal{B}_{\sigma(A)}$ ist $\mu(\Omega, x, x) \geq 0$.

Die zugehörige quadratische Form ist stetig bei 0, da für die konstante Funktion $g = 1 \in C(\sigma(A))$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu(\Omega, x, x) &= \int \chi_\Omega(s)\mu(ds, x, x) \\ &\leq \int g(s)\mu(ds, x, x) \\ &= \langle x,\, g(A)x\rangle \\ &\leq \|g(A)\|\;\|x\|^2 \qquad \text{(Cauchy–Schwarz)} \\ &\leq \|g\|\;\|x\|^2 \\ &= \|x\|^2 \qquad (\text{da } g = 1) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit der quadratischen Form $x \mapsto \mu(\Omega, x, x)$ auf ganz V und damit auch die Stetigkeit der Sesquilinearform.

Eine stetige hermitische Sesquilinearform auf einem Hilbertraum läßt sich durch einen eindeutig bestimmten selbstadjungierten beschränkten Operator darstellen (s. Rudin, Functional Analysis, 12.8.).

Die Gleichung

$$\mu(\Omega, x, y) = \langle x,\, E_A(\Omega)y\rangle.$$

definiert also eine Zuordnung $E_A : \mathcal{B}_{\sigma(A)} \to B(V)$ mit folgenden, noch zu zeigenden Eigenschaften:

(i) $E_A(\Omega)^* = E_A(\Omega)$

(ii) $E_A(\emptyset) = 0,\ E_A(\sigma(A)) = 1$

(iii) $\|E_A(\Omega)\|\ \leq 1$

(iv) $E_A(\Omega \cup \Omega') = E_A(\Omega) + E_A(\Omega') - E_A(\Omega \cap \Omega')$

(v) E_A ist schwach σ–additiv, d.h. für paarweise disjunkte Borelmengen $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \langle x,\, E_A\left(\bigcup_{n=1}^{N} \Omega_n\right) y\rangle \;=\; \langle x,\, E_A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\right) y\rangle.$$

(vi) $E_A(\Omega)E_A(\Omega') = E_A(\Omega \cap \Omega')$

(vii) $E_A(\Omega)$ ist ein Projektor, d.h. $E_A^2(\Omega) = E_A(\Omega)$

(viii) E_A ist stark σ–additiv, d.h. für paarweise disjunkte $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{\sigma(A)}$ gilt:

$$E_A\left(\bigcup_{n=1}^{N}\Omega_n\right)x \overset{N\to\infty}{\to} E_A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n\right)x \quad \forall_{x\in V}$$

Die Eigenschaften (ii), (iv) und (v) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von $\mu(x,y)$ als komplexes Maß; (vi) wird unten gezeigt werden, damit erhält man dann auch (vii).

Also gilt:

$$\begin{aligned}\langle E_A(\Omega)x, E_A(\Omega)x\rangle &= \langle x, E_A(\Omega)x\rangle \text{ wegen (i) und (vii)}\\ &= \mu(\Omega,x,x) \le \|x\|^2\end{aligned}$$

Dies zeigt (iii).

(viii) ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\|E_A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n\right)x - E_A\left(\bigcup_{n=1}^{N}\Omega_n\right)x\|^2 &= \|E_A\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty}\Omega_n\right)x\|^2\\ &= \langle x, E_A\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty}\Omega_n\right)x\rangle\end{aligned}$$

wobei der letzte Term wegen (v) für $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

zu (vi):

Seien $f, g \in C(\sigma(A))$. Die Gleichung

$$\begin{aligned}\int f(s)\mu(ds,x,g(A)y) &= \langle x, f(A)g(A)y\rangle\\ &= \langle x,(fg)(A)y\rangle\\ &= \int f(s)\cdot g(s)\,\mu(ds,x,y)\end{aligned}$$

besagt, daß gilt:

$$\mu(ds,x,g(A)y) = g(s)\mu(ds,x,y)$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\int g(s)\mu(ds,E_A(\Omega)x,y) &= \langle E_A(\Omega)x, g(A)y\rangle\\ &= \langle x, E_A(\Omega)g(A)y\rangle\\ &= \int_\Omega \mu(ds,x,g(A)y)\\ &= \int_\Omega g(s)\mu(ds,x,y),\end{aligned}$$

also folgt:

$$\mu(ds, E_A(\Omega)x, y) = \chi_\Omega(s)\mu(ds, x, y)$$

Damit erhält man (vi):

$$\begin{aligned}
\langle x, E_A(\Omega)E_A(\Omega')y\rangle &= \langle E_A(\Omega)x, E_A(\Omega')y\rangle \\
&= \mu(\Omega', E_A(\Omega)x, y) \\
&= \int \chi_{\Omega'}(s)\mu(ds, E_A(\Omega)x, y) \\
&= \int \chi_{\Omega'}(s)\chi_\Omega(s)\ \mu(ds, x, y) \\
&= \int \chi_{\Omega'\cap\Omega}(s)\ \mu(ds, x, y) \\
&= \langle x, E_A(\Omega\cap\Omega')y\rangle
\end{aligned}$$

E_A ist also ein projektorwertiges Maß mit

$$f(A) = \int f(s)E_A(ds)$$

für $f \in C(\sigma(A))$.

Da die Maße $\mu(ds, x, y) = \langle x, E_A(ds)y\rangle$ durch ihre Wirkung auf $C(\sigma(A))$ bestimmt sind, ist auch E_A dadurch eindeutig festgelegt. □

Beispiel: Das Spektralmaß des Translationsoperators auf $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Für $q \in \mathbb{R}$ ist der Translationsoperator definiert als

$$A_q : L^2(S^1) \to L^2(S^1), \quad (A_q f)(t) := f(t-q).$$

A_q ist offensichtlich unitär und daher normal. Außerdem gilt $A_q^* = A_{-q}$.

Die Fouriertransformation liefert einen Isomorphismus zwischen $L^2(S^1)$ und dem Hilbertraum l^2 der quadratsummierbaren Folgen:

$$F : L^2(S^1) \xrightarrow{\sim} l^2, \quad f \mapsto \Big(\langle\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, f\rangle\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

Die Wirkung von A im Folgenraum ist:

$$\begin{aligned}
(FA_q f)(n) &= \langle\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, A_q f\rangle \\
&= \langle A_{-q}\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, f\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \frac{e^{in(t+q)}}{\sqrt{2\pi}}, f\rangle \\
&= e^{-inq}\langle \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, f\rangle \\
&= e^{-inq} Ff(n).
\end{aligned}$$

Daraus erhält man das Spektrum, das nur für rationales $q/2\pi$ endlich ist:

$$\sigma(A_q) = \begin{cases} \{|z| = 1\} & q/2\pi \text{ irrational} \\ \{e^{iq\mathbb{Z}}\} & q/2\pi \text{ rational.} \end{cases}$$

Für $\Omega \in \mathcal{B}_{\sigma(A_q)}$ ist $E_{A_q}(\Omega)$ der Projektor auf den von $\{e^{int} |\ n \in \mathbb{Z} \text{ mit } e^{-inq} \in \Omega\}$ aufgespannten abgeschlossenen Unterraum in $L^2(S^1)$.

5 Unbeschränkte Operatoren auf Hilberträumen

Motivation: Leider sind der Spektralsatz und der Funktionenkalkül, die in den letzten Kapiteln entwickelt wurden, gerade auf Differentialoperatoren im allgemeinen nicht anwendbar: Diese sind nämlich oft nicht beschränkt, die Operatornorm ist also für sie nicht definiert. Außerdem ist ihr Definitionsbereich meist kein Hilbertraum, sondern nur ein dichter Teilraum eines Hilbertraums.

Beispiel: Sei $A := i\frac{d}{dt}$.

Dies ist ein unbeschränkter Operator, der auf dem Raum der differenzierbaren Funktionen in $L^2(\mathbb{R})$ wirkt.

Der Operator e^{-irA} kann auf drei Weisen definiert werden:

(i) über die Reihenentwicklung der e–Funktion:

Sei f eine analytische Funktion.

$$(e^{-irA}f)(t) := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(r\frac{d}{dt}\right)^n}{n!} f\right)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n f^{(n)}(t)}{n!} = f(t+r)$$

(ii) über die die e–Funktion definierende Differentialgleichung:

Sei f eine differenzierbare Funktion in $L^2(\mathbb{R})$. Für die Funktion $e^{-irA}f$ wird gefordert, daß sie die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr}(e^{-irA}f(t)) = (-iAe^{-irA}f)(t)$$

mit der Anfangsbedingung $e^{-irA}f = f$ für $r = 0$ erfüllt.

Dies führt zu einer partiellen Differentialgleichung; durch Einsetzen sieht man, daß $e^{-irA}f(t) := f(t+r)$ die Lösung dazu ist.

(iii) über die Fouriertransformation:

Sei f wie oben.

Sei $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ die Fouriertransformation.

Dann gilt:

$$F(Af)(\xi) = \xi F(f)(\xi)$$

d.h. FAF^{-1} ist ein Multiplikationsoperator. Damit kann man nun definieren:

$$Fe^{-irA}F^{-1} := e^{-ir\xi}$$

und daraus den Operator e^{-irA} errechnen: $e^{-irA}f(t) = f(t+r)$

Die letzte Methode erscheint am geeignetsten, da sie keine besonderen Eigenschaften der e–Funktion benutzt.

Sie beruht aber darauf, daß die Funktionen $e^{i\xi t}$ Eigenfunktionen von A zu den Eigenwerten $\xi \in \mathbb{R}$ sind (die allerdings nicht in $L^2(\mathbb{R})$ sind).

Dies erinnert an die Definition des Funktionenkalküls mittels des Spektralsatzes für C^*–Algebren. Das Ziel dieses Kapitels ist es, einen solchen auch für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren, die auf dichten Unterräumen von Hilberträumen wirken, zu beweisen.

Sei im folgenden $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum.

5.1 Definitionen und Eigenschaften

Definition. *(i) Ein Operator $(A, dom\ A)$ ist eine lineare Abbildung $A : dom\ A \to V$, wobei $dom\ A$ ein linearer Unterraum von V ist.*

(ii) $(A, dom\ A) = (B, dom\ B) :\Leftrightarrow dom\ A = dom\ B,\ A = B$.

(iii) $(B, dom\ B)$ heißt Erweiterung von $(A, dom\ A)$, falls $dom\ A \subset dom\ B$ und $B\mid_{dom\ A} = A$.

(iv) Der Graph von $(A, dom\ A)$ ist die Menge

$$\Gamma(A, dom\ A) := \{(x, Ax) \mid x \in dom\ A\} \subset V \oplus V.$$

(v) $(A, dom\ A)$ heißt abgeschlossen, falls $\Gamma(A, dom\ A)$ abgeschlossen in $V \oplus V$ ist.

Definition. *Rechenregeln für Operatoren:*

(i) $(A, \text{dom } A) + (B, \text{dom } B) := (A + B, \text{dom } A \cap \text{dom } B)$

(ii) $(A, \text{dom } A) \circ (B, \text{dom } B) := (AB, \{x \in \text{dom } B \mid Bx \in \text{dom } A\})$

(iii) $\lambda(A, \text{dom } A) := (\lambda A, \text{dom } A),$ *für* $\lambda \neq 0$

(iv) $0 \cdot (A, \text{dom } A) := (0, V)$

(v) $(A, \text{dom } A)^{-1} := (A^{-1}, A(\text{dom } A)),$ *falls* A *injektiv ist.*

Schreibweise: Ab jetzt bedeutet A immer $(A, \text{dom } A)$, und eine Erweiterung B von A wird mit $A \subset B$ bezeichnet.

Lemma. *Für Operatoren* A, B, C *gelten folgende Rechenregeln:*

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(ii) $(AB)C = A(BC)$

(iii) $AB + AC \subset A(B + C)$.

(iv) $(A^{-1})^{-1} = A$

Beweis: Nachrechnen.

Lemma. *Ist* A *ein abgeschlossener invertierbarer Operator, dann ist auch* A^{-1} *abgeschlossen.*

Beweis:

Definiere die Abbildung $F : V \oplus V \to V \oplus V, \ F(x, y) := (y, x)$. Nach Voraussetzung ist $\Gamma(A) = F(\Gamma(A^{-1}))$ abgeschlossen. Da F^{-1} existiert und stetig ist, folgt die Behauptung. $\square$

Theorem vom abgeschlossenen Graphen. *Ein Operator* A *ist genau dann in* $B(V)$, *wenn er abgeschlossen ist und* $\text{dom } A = V$ *gilt.*

Beweis:

$\Rightarrow$: Aus der Stetigkeit von A folgt die Abgeschlossenheit des Graphen.

$\Leftarrow$: Mit dem von V induzierten Skalarprodukt wird $V \oplus V$ zu einem Hilbertraum. $\Gamma(A)$ ist als abgeschlossener Unterraum von $V \oplus V$ auch ein Hilbertraum. Die Projektion $p_1 : \Gamma(A) \to V, \ (x, Ax) \mapsto x$ ist stetig, bijektiv und linear; p_1^{-1} ist also definiert und stetig. Damit ist auch $A = p_2 \circ p_1^{-1}$ stetig und deshalb beschränkt. $\square$

Bemerkung: Die Abgeschlossenheit ersetzt in Beweisen oft Stetigkeitsargumente, die auf unbeschränkte Operatoren nicht anwendbar sind:

Sei A ein abgeschlossener Operator; $x_n \in \text{dom } A$ sei eine Folge, die gegen x_0 konvergiert. Konvergiert die Folge Ax_n gegen y_0, dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von $\Gamma(A)$:

$$x_0 \in \text{dom } A \text{ und } Ax_0 = y_0$$

Unter diesen Voraussetzungen vertauscht also ein abgeschlossener Operator mit Grenzwertbildungen.

Definition. *Sei A ein Operator.*

(i) Die Resolventenmenge von A ist

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid R(\lambda) := (\lambda - A)^{-1} \textit{ existiert, ist beschränkt und dom } R(\lambda) = V\}.$$

(ii) Das Spektrum von A ist

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A).$$

Lemma. *Für einen Operator A gilt:*

(i) $\rho(A)$ ist offen in $\mathbb{C}$.

(ii) Die Abbildung $\rho(A) \to B(V)$, $\lambda \mapsto R(\lambda)$ ist holomorph.

Beweis:

Die Argumentation lehnt sich an die für beschränkte Operatoren an (s. Kap. 1.1):

Für $\lambda \in \rho(A)$ und $|\mu - \lambda| < \|R(\lambda)\|^{-1}$ konvergiert die Reihe

$$\tilde{R}(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda)^{k+1}(\lambda - \mu)^k$$

in $B(V)$.

Außerdem gilt:

$$\tilde{R}(\mu)(\mu - A)\varphi = \varphi \quad \text{für } \varphi \in \text{dom } (\mu - A) = \text{dom } A$$

Also erhält man: $\Big(\tilde{R}(\mu),\ (\mu - A)(\text{dom } A)\Big) = (\mu - A)^{-1}$

Zu zeigen ist noch, daß $\mu - A$ surjektiv ist.

Sei dazu $\varphi \in V$, $\psi := \tilde{R}(\mu)\varphi$. Wenn $\psi \in \text{dom } (\mu - A) = \text{dom } A$ bewiesen werden kann, dann folgt aus $(\mu - A)\psi = \varphi$ (gleiche Rechnung wie in Kap. 1.1) die Surjektivität.

Behauptung: $\psi \in \operatorname{dom} A$

Die Folge

$$\psi_N := \sum_{k=0}^{N} R(\lambda)^{k+1}(\lambda-\mu)^k\varphi$$

liegt in dom A, da $\operatorname{im}(R(\lambda)) = \operatorname{dom} A$ ein Untervektorraum ist, und konvergiert gegen ψ.

Da $R(\lambda)$ beschränkt und daher abgeschlossen ist, ist nach vorigem Lemma auch $(\lambda - A)$ abgeschlossen. Der Grenzwert der Folge

$$\Gamma(\lambda - A) \ni (\psi_N, (\lambda - A)\psi_N) = \left(\sum_{k=0}^{N} R(\lambda)^{k+1}(\lambda-\mu)^k\varphi,\ \sum_{k=0}^{N} R(\lambda)^{k}(\lambda-\mu)^k\varphi\right)$$

existiert in $V \oplus V$, weil die Summen konvergieren. Wegen der Abgeschlossenheit von $\Gamma(\lambda - A)$ liegt er in $\Gamma(\lambda - A)$. Also gilt: $\psi \in \operatorname{dom}(\lambda - A) = \operatorname{dom} A$. □

Übungsaufgabe: Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt die Resolventengleichung:

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

Definition. *Ein Operator A heißt dicht definiert, falls dom $A \subset V$ dicht ist.*

Definition und Satz. *Sei A dicht definiert. Dann ist der adjungierte Operator A^* definiert auf*

$$\textit{dom } A^* := \{x \in V : y \mapsto \langle x, Ay\rangle \textit{ ist stetige Linearform auf dom } A\}$$

durch

$$\langle x, Ay\rangle = \langle A^*x, y\rangle \quad \forall_{x\in \textit{dom } A^*,\ y \in \textit{dom } A}$$

Beweis:

Da für $x \in \operatorname{dom} A^*$ die Linearform $\operatorname{dom} A \ni y \mapsto \langle x, Ay\rangle$ stetig ist und dom A dicht in V ist, läßt sie sich stetig auf V fortsetzen. Der Vektorraum der stetigen Linearformen auf V kann über das Skalarprodukt mit V identifiziert werden; deshalb existiert A^*x in V und ist eindeutig (s.a. analogen Beweis für beschränkte Operatoren in Kapitel 2.1). □

Lemma. *Sei A dicht definiert. Dann gilt:*

(i) A^* *ist abgeschlossen.*

(ii) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, *wenn* A^{-1} *existiert.*

(iii) $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(BA)^* = A^*B^*$, *wenn* B *beschränkt ist.*

(iv) $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$.

Beweis:

zu (i): Definiere $\tilde{F} : V \oplus V \to V \oplus V,\ \tilde{F}(x, y) := (-y, x)$

Wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes ist $\Gamma(A)^\perp$ abgeschlossen. Aus

$$\begin{aligned}(x, y) \in \tilde{F}(\Gamma(A)^\perp) &\Leftrightarrow (y, -x) \in \Gamma(A)^\perp \\ &\Leftrightarrow \langle y, z\rangle - \langle x, Az\rangle = 0 \quad \forall_{z\in \text{ dom } A} \\ &\Leftrightarrow x \in \text{dom } A^* \text{ und } y = A^* x \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma(A^*)\end{aligned}$$

folgt $\tilde{F}(\Gamma(A)^\perp) = \Gamma(A^*)$.

Die Stetigkeit von $\tilde{F}^{-1}$ und die Abgeschlossenheit von $\Gamma(A)^\perp$ liefern die Abgeschlossenheit von $\Gamma(A^*)$.

zu (ii): Die Gleichheit der Operatoren folgt aus der Gleichheit der Graphen.

Diese wird durch folgende Rechnung gezeigt, die benutzt, daß $\tilde{F}$ und $F : V \oplus V \to V \oplus V$, $(x, y) \mapsto (y, x)$ Isometrien sind und $F\tilde{F} = -\tilde{F}F$ erfüllen:

$$\begin{aligned}\Gamma(A^{*-1}) &= F\Gamma(A^*) = F\tilde{F}(\Gamma(A)^\perp) = \tilde{F}F(\Gamma(A)^\perp) \\ &= \tilde{F}(F\Gamma(A)^\perp) = \tilde{F}(\Gamma(A^{-1})^\perp) = \Gamma(A^{-1*})\end{aligned}$$

zu (iii): Die Beschränktheit von B wird gebraucht, damit die Gleichung für die Definitionsbereiche erfüllt ist. Das weitere folgt durch Nachrechnen.

(iv) Sei $x \in \text{dom } B^*$. Nach Definition ist die Linearform $\langle B^* x, \cdot\rangle$ stetig, d.h.

$$|\langle x, By\rangle| \leq C_x \|y\| \quad \forall_{y\in \text{ dom } B}.$$

Daraus folgt:

$$|\langle x, Ay\rangle| \leq C_x \|y\| \quad \forall_{y\in \text{ dom } A}$$

Also ist die Linearform $y \mapsto \langle x, Ay\rangle$ stetig und $x \in \text{dom } A^*$.

Wegen $\langle B^* x, y\rangle = \langle x, By\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle A^* x, y\rangle \ \forall_{y\in \text{ dom } A}$ gilt außerdem $A^* x = B^* x$. □

Definition. *(i) Ein Operator A heißt symmetrisch, falls*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall_{x,y\in \text{ dom } A}.$$

(ii) Ein dicht definierter Operator A heißt selbstadjungiert, falls $A = A^*$.

Lemma. *(i) Wenn A selbstadjungiert ist, so ist A abgeschlossen.*

(ii) Ist A symmetrisch und dicht definiert, dann ist A^* eine abgeschlossene Erweiterung von A.

Beweis: Die Behauptung folgt aus dem vorigen Lemma. □

Definition. *Ein Operator A heißt abschließbar, falls A eine abgeschlossene Erweiterung hat. Nach Zornschen Lemma gibt es dann eine kleinste abgeschlossene Erweiterung $\overline{A}$.*

Lemma. *Ein dicht definierter Operator A ist genau dann abschließbar, wenn dom A^* dicht in V ist.*
Dann gilt $\overline{A} = A^{**}$ und $\overline{A}^* = A^*$.

Beweis:

$\Rightarrow$: Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in (\text{dom } A^*)^\perp &\Leftrightarrow (x,0) \in \Gamma(A^*)^\perp = \tilde{F}(\overline{\Gamma(A)}) \\ &\Leftrightarrow -(0,x) \in \overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(\overline{A}) \\ &\Rightarrow x = \overline{A} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Also ist $(\text{dom } A^*)^\perp = \{0\}$ und daher muß dom A^* dicht in V sein.

$\Leftarrow$: Da dom A^* dicht in V liegt, ist A^{**} definiert und eine abgeschlossene Erweiterung von A mit $\Gamma(A^{**}) = (\Gamma(A)^\perp)^\perp = \overline{\Gamma(A)}$.
Aus $\Gamma(\overline{A}) \subset \Gamma(A^{**}) = \overline{\Gamma(A)}$ folgt $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$ und damit $\overline{A} = A^{**}$.

zu $\overline{A}^* = A^*$: Übungsaufgabe □

Beispiel eines nicht abschließbaren Operators:

Betrachte den Raum der quadratsummierbaren Folgen l^2, der ein Hilbertraum ist mit der Norm

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ein Element in l^2 werde als unendlichdimensionaler Spaltenvektor aufgefaßt.

Definiere den Operator A, geschrieben als Matrix mit unendlich vielen Einträgen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & 0 & \end{pmatrix}$$

und die Folge

$$x_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{n} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow n\text{–te Stelle.}$$

von Elementen in l^2.

Die Folge x_n konvergiert gegen 0, aber $A\,x_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$.

Für die abgeschlossenene Erweiterung $\overline{A}$ müßte $\overline{A}\cdot 0 \neq 0$ gelten, was im Widerspruch zur der Linearität von $\overline{A}$ steht.

Definition. *Ein symmetrischer, dicht definierter Operator A heißt wesentlich selbstadjungiert, falls $\overline{A}$ selbstadjungiert ist.*

Lemma. *Der Operator A sei wesentlich selbstadjungiert. Dann hat A genau eine selbstadjungierte Erweiterung $\overline{A}$.*

Beweis:

Sei $\tilde{A}$ eine selbstadjungierte Erweiterung von A. Dann ist $\tilde{A}$ abgeschlossen und es gilt:

$$A \subset \tilde{A} \Rightarrow \overline{A} \subset \tilde{A} \Rightarrow \overline{A}^* \supset \tilde{A}^* \Rightarrow \overline{A} \supset \tilde{A} \Rightarrow \overline{A} = \tilde{A},$$

wobei beim dritten Schritt die Selbstadjungiertheit von $\overline{A}$ und $\tilde{A}$ genutzt wurde.

□

Folgerung. *Ein symmetrischer, dicht definierter Operator A ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn A^* selbstadjungiert ist.*

Beweis:

$\Rightarrow$: $A^{**} = \overline{A} = \overline{A}^* = A^*$

$\Leftarrow$: $A^* = A^{**} = \overline{A}$ □

Beispiel:

(i) Betrachte den dicht definierten Operator

$$A_1 := i\frac{d}{dt} \text{ auf dom } A_1 := \{f \in C^\infty([a,b]) : \; f(a) = f(b) = 0\} \subset L^2([a,b]).$$

Mit partieller Integration gilt für $f, g \in \text{dom } A_1$:

$$\begin{aligned} \langle f, i\frac{d}{dt}g\rangle &= \int_a^b \overline{f(x)}(i\frac{d}{dt}g)(x)\; dx \\ &= \int_a^b \overline{(i\frac{d}{dt}f)(x)}g(x)\; dx \\ &= \langle i\frac{d}{dt}f, g\rangle \end{aligned}$$

Dieser Operator ist also symmetrisch. Er ist aber nicht selbstadjungiert, da eine analoge Rechnung zeigt, daß

$$\{f \in L^2([a,b]) : f \text{ differenzierbar und } f' \in L^2([a,b])\} \subset \text{dom } A^*.$$

Außerdem ist A_1^* nicht einmal symmetrisch. Also ist A_1 auch nicht wesentlich selbstadjungiert, hat aber eine selbstadjungierte Erweiterung:

(ii) Sei nun $A_2 := i\frac{d}{dt}$ und

$$\text{dom } A_2 := \{f \in L^2([a,b]) : f(a) = f(b), \; f \text{ differenzierbar und } f' \in L^2([a,b])\}.$$

Dieser Operator ist eine wesentlich selbstadjungierte Erweiterung von A_1. (Dies kann z.B. mit dem nächsten Satz, Teil (c), bewiesen werden.)

Dieses Beispiel zeigt, wie wesentlich der Definitionsbereich die Eigenschaften eines unbeschränkten Operators mitbestimmt.

Satz. *Sei $A : dom\ A \to V$ ein symmetrischer Operator. Dann sind die unter (i) bzw. (ii) stehenden Aussagen zueinander äquivalent:*

(i) *(a) A ist wesentlich selbstadjungiert.*
(b) $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$
(c) $\text{im}(A \mp i) \subset V$ *ist dicht.*

(ii) *(a) A ist selbstadjungiert.*
(b) A ist abgeschlossen, $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$.
(c) $\text{im}(A \mp i) = V$

Dabei gelten die Aussagen jeweils für + und − gleichzeitig.

Beweis:

Im Beweis sind das obere und das untere Zeichen unabhängig voneinander zu lesen.

(a) $\Rightarrow$ (b): zu (i):

Ist A wesentlich selbstadjungiert, so ist A^* selbstadjungiert.

Sei $\varphi \in \mathrm{dom}\, A^*$ mit $(A^* \pm i)\varphi = 0$. Dann gilt:

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \pm i \langle \varphi, A^* \varphi \rangle = \pm i \langle A^* \varphi, \varphi \rangle = -\langle \varphi, \varphi \rangle$$

und somit $\varphi = 0$.

zu (ii): Die Aussage folgt aus (i).

(b) $\Rightarrow$ (c): zu (i):

Sei $x \in (\mathrm{im}(A \mp i))^\perp \subset V$, d.h. $\langle x, (A \mp i)\varphi \rangle = 0 \quad \forall_{\varphi \in \ dom \ A}$.

$$\Rightarrow \langle x, A\varphi \rangle = \langle x, \pm i\varphi \rangle = \langle \mp ix, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow x \in \mathrm{dom}\, A^* \text{ und } A^* x = \mp ix$$

$$\Rightarrow x \in \ker(A^* \pm i).$$

Nach Voraussetzung ist dann $x = 0$, also liegt $\mathrm{im}(A \pm i)$ dicht in V.

zu (ii):

Aus (i) folgt, daß $\mathrm{im}(A \mp i)$ dicht in V ist.

Zu zeigen ist noch, daß $\mathrm{im}(A \mp i)$ abgeschlossen in V ist, wenn A ein abgeschlossener Operator ist.

Sei dazu $x_n \in \mathrm{dom}\, A$ eine Folge mit $(A \mp i)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in V$.

Zu zeigen ist: $y \in \mathrm{im}(A \mp i)$

Aus der Symmetrie von A folgt:

$$\|(A \mp i)x\|^2 = \|Ax\|^2 \ + \ \|x\|^2 + \underbrace{\langle Ax, \mp ix \rangle + \langle \mp ix, Ax \rangle}_{=0} = \|Ax\|^2 \ + \ \|x\|^2$$

Daher gilt:

$$\|(A \mp i)x_n - (A \mp i)x_m\|^2 = \|A(x_n - x_m)\|^2 \ + \ \|x_n - x_m\|^2$$

Dies zeigt, daß $(x_n, Ax_n) \in \Gamma(A)$ eine Cauchyfolge in $V \oplus V$ ist, denn $(A \mp i)x_n$ ist eine Cauchyfolge in V. Da A abgeschlossen ist, liegt ihr Grenzwert (x_0, y_0) in $\Gamma(A)$.

Aus $Ax_0 = y_0$ folgt

$$y = y_0 \mp i\, x_0 = (A \mp i)x_0 \in \mathrm{im}(A \mp i).$$

Also ist $\mathrm{im}(A \mp i)$ abgeschlossen.

(c) $\Rightarrow$ (a): Zuerst zu (ii):

Es reicht zu zeigen, daß dom A^* in dom A liegt. Der Rest folgt aus der Symmetrie von A.

Sei also $x \in$ dom A^*. Nach Voraussetzung gibt es $y \in$ dom $A \subset$ dom A^* mit $(A^* + i)x = (A + i)y$.

Weil A symmetrisch ist, gilt:

$$(A^* + i)(x - y) = 0$$

Da $\mathrm{im}(A - i) = V$ ist, enthält der Kern des adjungierten Operators $(A^* + i)$ nur den Nullvektor. Daraus folgt

$$x = y \text{ und deshalb } x \in \text{dom } A.$$

zu (i):

Da $\mathrm{im}(A \pm i)$ dicht in V liegt, ist auch $\mathrm{im}(\overline{A} \mp i)$ dicht in V. Außerdem ist $\overline{A}$ symmetrisch und abgeschlossen. In Teil (ii), *(b)* $\Rightarrow$ *(c)* wurde gezeigt, daß dann $\mathrm{im}(\overline{A} \mp i)$ abgeschlossen ist; also gilt: $\mathrm{im}(\overline{A} \mp i) = V$

Damit folgt aus (ii), daß $\overline{A}$ selbstadjungiert und deshalb A wesentlich selbstadjungiert ist. ☐

Lemma. *Sei A selbstadjungiert. Dann gilt:*

(i) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

(ii) $R(i)^* = R(-i)$, *und* $R(i) = (i - A)^{-1}$ *ist normal.*

Beweis:

zu (i): Sei $x \in$ dom A und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Im $(\lambda) \neq 0$.

Dann ist

$$\frac{1}{\mathrm{Im}\,\lambda}(\mathrm{Re}(\lambda) - A)$$

selbstadjungiert, da A selbstadjungiert ist.

Nach dem vorigen Lemma ist

$$\frac{1}{\mathrm{Im}\,\lambda}(\mathrm{Re}\lambda - A) + i = \frac{\lambda - A}{\mathrm{Im}\,\lambda}$$

bijektiv: Die Injektivität folgt aus (ii), (a) $\Rightarrow$ (b), die Surjektivität aus (a)$\Rightarrow$(c). Also ist auch $(\lambda - A)$ bijektiv, und $(\lambda - A)^{-1}$ ist definiert.

Die Beschränktheit von $(\lambda - A)^{-1}$ muß noch gezeigt werden:

Aus

$$\begin{aligned}\|(\lambda - A)x\|^2 &= \|(\text{Re }(\lambda) - A)x\|^2 + |\text{Im }\lambda|^2 \; \|x\|^2 \\ &\quad + i \text{ Im }(\lambda) \underbrace{\big(\langle(\text{Re }(\lambda) - A)x, x\rangle - \langle x, (\text{Re }(\lambda) - A)x\rangle\big)}_{=0, \text{ da } A \text{ selbstadjungiert ist}} \\ &\geq |\text{Im }(\lambda)|^2 \; \|x\|^2.\end{aligned}$$

folgt:

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\text{Im }\lambda|}$$

und damit die Beschränktheit von $(\lambda - A)^{-1}$.

Also gilt: Im $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ und deshalb $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

zu (ii): Aus

$$\begin{aligned}\langle R(i)x, y\rangle &= \langle R(i)x, (-i - A)R(-i)y\rangle \\ &= \langle (i - A)R(i)x, R(-i)y\rangle = \langle x, R(-i)y\rangle\end{aligned}$$

folgt $R(i)^* = R(-i)$.

Die Resolventenidentität besagt, daß gilt:

$$-2iR(i)R(-i) = R(i) - R(-i) = -(R(-i) - R(i)) = -2iR(-i)R(i)$$

Also kommutieren $R(i)$ und $R(i)^* = R(-i)$ miteinander, d.h. $R(i)$ ist normal. □

5.2 Der Spektralsatz für unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren

Satz. *Sei A selbstadjungiert und unbeschränkt. Dann existiert ein projektorwertiges Maß E_A auf $\mathbb{C}$ mit*

(i) supp $E_A \subset \mathbb{R}$

(ii) dom $A = \{x \in V \mid \int_{\sigma(A)} \lambda^2 \langle x, E_A(d\lambda)x\rangle < \infty\}$

(iii) $Ax = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-n}^{n} \lambda E_A(d\lambda) \right) x$ für $x \in$ dom A

Beweis: Betrachte die umkehrbare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \to & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ \lambda & \mapsto & \frac{1}{i-\lambda} \\ i & \mapsto & \infty \\ \infty & \mapsto & 0 \end{array}$$

1) **Behauptung:** $h(\sigma(A) \cup \{\infty\}) = \sigma(R(i))$

Zuerst wird gezeigt: $i \neq \lambda \in \rho(A) \Rightarrow h(\lambda) \in \rho(R(i))$

Sei also $i \neq \lambda \in \rho(A)$.

Der beschränkte Operator $T(\lambda) = (i-\lambda)^2 R(\lambda) + (i-\lambda)$ ist das Inverse zu $h(\lambda) - R(i)$, denn mit Hilfe der Resolventenidentität erhält man

$$(h(\lambda) - R(i))T(\lambda) = (i-\lambda)R(\lambda) + 1 - \underbrace{(i-\lambda)^2 R(i)R(\lambda)}_{(i-\lambda)(R(i)-R(\lambda))} - (i-\lambda)R(i) = 1.$$

Genauso ergibt sich:

$$T(\lambda)(h(\lambda) - R(i)) = 1$$

Also gilt: $h(\lambda) \in \rho(R(i))$

Sei nun $\mu \in \rho(R(i))$, zu zeigen ist $\lambda := h^{-1}(\mu) \in \rho(A)$.

Das Inverse zu $(\lambda - A)$ ist $\mu R(i)(\mu - R(i))^{-1} = \mu R(i)T(\lambda)$, denn

$$\begin{aligned} (\lambda - A)\mu R(i)T(\lambda) &= (\lambda - i + (i - A))\, \mu R(i)T(\lambda) \\ &= (\lambda - i)\mu R(i)T(\lambda) + \mu T(\lambda) \\ &= (-R(i) + \mu)T(\lambda) = 1. \end{aligned}$$

Da $\mu R(i)T(\lambda)$ außerdem beschränkt ist, ist $\lambda \in \rho(A)$.

Es bleibt noch zu zeigen: $0 \in \sigma(R(i))$

Das Inverse zu $(0 - R(i)) = R(i)$ ist $(i - A)$. Dies ist aber für ein unbeschränktes A auch nicht beschränkt. Deshalb gilt: $0 \in \sigma(R(i))$

2) **Konstruktion von E_A:**

Sei $\mathcal{B}$ die Borelalgebra von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wobei $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ als topologischer Raum die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}$ sei.

Die Resolvente $R(i)$ ist beschränkt und normal und definiert deshalb ein projektorwertiges Maß E_1 auf $\mathcal{B}$ mit $E_1(U) := 0$ für $U \subset \rho(R(i)) \cup \{\infty\}$.

Mit h^{-1} kann E_1 auf ein Maß $E'_A := (h^{-1})_* E_1$ auf $\mathcal{B}$ abgebildet werden.

Für dieses gilt dann:

$$E'_A(U) := E_1(h(U)) \quad \forall_{U \in \mathcal{B}}$$

Da $\ker(R(i)) = \{0\}$ ist, ist $E'_A(\{\infty\}) = E_1(\{0\}) = 0$.

Außerdem gilt: $\operatorname{supp} E'_A = h^{-1} \operatorname{supp} E_1 = h^{-1}(\sigma(R(i)) = \sigma(A) \cup \{\infty\} \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Sei E_A durch Einschränkung von E'_A auf $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ definiert. Dann erfüllt E_A die Axiome eines projektorwertigen Maßes und $\operatorname{supp} E_A \subset \mathbb{R}$. Die Integration E_A–meßbarer Funktionen ist in Kapitel 4.2 definiert worden.

3) Behauptung:

$$V_0 := \{x \in V | \int \lambda^2 \langle x, E_A(d\lambda)x\rangle < \infty\}$$

$$= \{x \in V | \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \lambda E_A(d\lambda)x \text{ existiert}\} =: V_1$$

Sei $U_n := [-n, n] \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$. Die Abschätzung

$$\int \lambda^2 \langle E_A(U_n)x,\ E_A(d\lambda)E_A(U_n)x\rangle = \int_{U_n} \lambda^2 \langle x, E_A(d\lambda)x\rangle < \infty$$

für $x \in V$ zeigt, daß dann gilt: $E_A(U_n)V \subset V_0$

Außerdem existiert wegen der Beschränktheit von U_n das Integral $\int_{U_n} \lambda E_A(d\lambda)$ und es gilt:

$$\| \int_{U_n} \lambda E_A(d\lambda)x\|^2 = \int_{U_n} \lambda^2 \langle x, E_A(d\lambda)x\rangle$$

Für $x \in V_1$ konvergiert die linke Seite und damit auch die rechte; also folgt $x \in V_0$.

Sei nun $x \in V_0$. Dann ist die rechte Seite eine Cauchyfolge. Die Gleichung besagt außerdem, daß folgendes gilt:

$$\| \int_{U_{n+k}} \lambda E_A(d\lambda)x\|^2 - \| \int_{U_n} \lambda E_A(d\lambda)x\|^2 = \| \int_{U_{n+k}-U_n} \lambda E_A(d\lambda)x\|^2$$

Daraus folgt, daß auch $\int_{U_n} \lambda E_A(d\lambda)x$ eine Cauchyfolge ist. Somit ist $V_0 \subset V_1$ gezeigt.

4) Behauptung: dom $A \subset V_0$

Sei $x \in \text{dom } A,\ y := (i - A)x$

Mit der Gleichung

$$x = R(i)y = \int\limits_{\sigma(R(i))} \mu E_1(d\mu)y = \int\limits_{\sigma(A)} \frac{1}{i-\lambda} E_A(d\lambda)y$$

erhält man:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-n}^{n} \lambda E_A(d\lambda)x &= \int\limits_{-n}^{n} \lambda E_A(d\lambda)R(i)y \\ &= \int\limits_{-n}^{n} \lambda E_A(d\lambda) \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{i-\lambda'} E_A(d\lambda')y \\ &= \int\limits_{-n}^{n} \frac{\lambda}{i-\lambda} E_A(d\lambda)y\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Eigenschaft $E_1(f)E_1(g) = E_1(fg)$, die im Kapitel über beschränkte Operatoren gezeigt wurde.

Da die Funktion $\frac{\lambda}{i-\lambda}$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist, existiert der Grenzwert für $n \to \infty$ und es gilt: $x \in V_0$

5) Integraldarstellung von A

Behauptung: $V_0 \subset$ dom A

Es gilt:

$$\begin{aligned}R(i) \int\limits_{-n}^{n} (i-\lambda)E_A(d\lambda) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \mu E_1(d\mu) \int\limits_{h([-n,n])} \frac{1}{\mu'} E_1(d\mu') \\ &= E_1(h([-n,n])) = E_A([-n,n])\end{aligned}$$

Damit ergibt sich: $E_A([-n,n])V \subset \text{im}R(i) = \text{dom } A$

Weiter errechnet man:

$$\begin{aligned}A \circ E_A([-n,n]) &= (i - (i - A))R(i) \int\limits_{-n}^{n} (i-\lambda)E_A(d\lambda) \\ &= i\, E_A[-n,n] - \int\limits_{-n}^{n} (i-\lambda)E_A(d\lambda) \\ &= \int\limits_{-n}^{n} \lambda E_A(d\lambda)\end{aligned}$$

Für $x \in V_0$ konvergiert die Folge $AE_A([-n,n])x = \int\limits_{-n}^{n} \lambda E_A(d\lambda)x$ für $n \to \infty$.

Da A abgeschlossen ist und $\lim\limits_{n\to\infty} E_A([-n,n])x = x$, gilt:

$$x \in \text{dom } A \text{ und } Ax = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \lambda E_A(d\lambda)x.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Außerdem liefert dies eine Integraldarstellung des Operators A. □

5.3 Der Kalkül für unbeschränkte, meßbare Funktionen

Sei A ein selbstadjungierter Operator, E_A das zugehörige projektorwertige Maß, auch Spektralschar von A genannt.

In Kapitel 4.2 wurde eine Abbildung konstruiert, die einer E_A-wesentlich beschränkten Funktion einen beschränkten Operator $f(A)$ zuordnet:

$$EB = \{E_A\text{–wesentlich beschränkte Funktionen}\} \to B(V)$$

$$f \mapsto f(A) = \int\limits_{\sigma(A)} f(\lambda)E_A(d\lambda)$$

Dies ist ein isometrischer Homomorphismus von C^*–Algebren.

Diese Abbildung soll erweitert werden auf unbeschränkte meßbare Funktionen. Ihr Bild wird unbeschränkte Operatoren enthalten.

Definition. *Sei A ein selbstadjungierter Operator. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine meßbare Funktion und es gelte: $E_A(f^{-1}(\infty)) = 0$*

Mit

$$f_n(\lambda) := \begin{cases} f(\lambda) & |f(\lambda)| \leq n \\ 0 & |f(\lambda)| > n \end{cases}$$

wird der Operator $f(A)$ definiert als:

$$\textit{dom } f(A) := \{x \in V|\ f_n(A)x \textit{ konvergiert für } n \to \infty\}$$

$$f(A)x := \lim_{n\to\infty} f_n(A)x \qquad \textit{für } x \in \textit{dom } f(A)$$

Bemerkung: Im Beweis des Spektralsatzes wurde gezeigt, daß für die Inklusion

$I : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gilt: $\text{dom } I(A) = \text{dom } A$ und $I(A) = A$

Denn $I(A)$ ist gerade die Integraldarstellung von A.

Satz. *Sei A ein selbstadjungierter Operator, f wie oben. Dann gilt:*

(i) $f(A)$ *ist dicht definiert und abgeschlossen.*

(ii) $\operatorname{dom} f(A) = V_0 := \{x \in V | \int |f(\lambda)|^2 \langle x, E_A(d\lambda)x\rangle < \infty\}$

(iii) $\langle x, f(A)y\rangle = \int f(\lambda)\langle x, E_A(d\lambda)y\rangle$ *für* $y \in \operatorname{dom} f(A)$

(iv) $\|f(A)x\|^2 = \int |f(\lambda)|^2\langle x, E_A(d\lambda)x\rangle$ *für* $x \in \operatorname{dom} f(A)$

(v) $f(A)^* = \overline{f}(A)$

(vi) $R(\mu) = (\mu - A)^{-1} = \int \frac{1}{\mu - \lambda} E_A(d\lambda)$ *für* $\mu \in \rho(A)$

Beweis:

zu (iv): Setze $U_n := \{|f| \leq n\}$. Für $x \in \operatorname{dom} f(A)$ erhält man (iv) aus

$$\begin{aligned} \|f(A)x\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \|f_n(A)x\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{U_n} |f(\lambda)|^2\langle x, E_A(d\lambda)x\rangle \\ &= \int |f(\lambda)|^2\langle x, E_A(d\lambda)x\rangle < \infty. \end{aligned}$$

Außerdem zeigt dies die Inklusion $\operatorname{dom} f(A) \subset V_0$ von (ii).

zu (ii): Es bleibt, die Inklusion $V_0 \subset \operatorname{dom} f(A)$ zu zeigen.
Sei dazu $x \in V_0,\ y_n := f_n(A)x$ und

$$u_n := y_n - y_{n-1} = \int_{U_n - U_{n-1}} f(\lambda)E_A(d\lambda)x.$$

Da $(U_n - U_{n-1}) \cap (U_{n-1} - U_{n-2}) = \emptyset$ ist, sind die u_n paarweise orthogonal zueinander. Mit

$$f_n(A)x = \sum_{m\leq n} u_m$$

ergibt sich für $n \geq l$:

$$\begin{aligned} \|f_n(A)x - f_l(A)x\|^2 &= \|\sum_{m=l+1}^{n} u_m\|^2 \\ &= \sum_{m=l+1}^{n} \|u_m\|^2 \end{aligned}$$

Dies und die Konvergenz der Summe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|^2 \;=\; \int |f(\lambda)|^2 \langle x, E_A(d\lambda)x\rangle$$

zeigen, daß die Folge der $f_n(A)x$ eine Cauchyfolge ist. Also ist $x \in \operatorname{dom} f(A)$.

zu (i): Sei $x \in V$.

Da $\bigcup_{n\geq 0} U_n = \{|f| < \infty\}$ und somit $E_A(\bigcup_{n\geq 0} U_n) = 1$ ist, konvergiert die Folge $E_A(U_n)x$ gegen x. Nach (ii) liegt die Folge in $\operatorname{dom} f(A)$. Also ist $\operatorname{dom} f(A)$ dicht in V.

Zu zeigen bleibt die Abgeschlossenheit von $f(A)$:

Sei $(x_n, f(A)x_n)$ eine Folge in $\Gamma(f(A))$, die gegen $(x_0, y_0) \in V \oplus V$ konvergiert. Zu zeigen ist, daß $x_0 \in \operatorname{dom} f(A)$ ist und $y_0 = f(A)x_0$.

Da $f_m(A)$ beschränkt und deshalb stetig ist, gilt:

$$\begin{aligned} f_m(A)x_0 &= \lim_{n\to\infty} f_m(A)x_n = \lim_{n\to\infty} f(A)E_A(U_m)x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} E_A(U_m)f(A)x_n \\ &= E_A(U_m)y_0 \end{aligned}$$

Für $m \to \infty$ ergibt sich also:

$$\lim_{m\to\infty} f_m(A)x_0 = \lim_{m\to\infty} E_A(U_m)y_0 = y_0$$

Daraus folgt $x_0 \in \operatorname{dom} f(A)$ und $y_0 = f(A)x_0$.

zu (iii): Zuerst wird die Existenz des Integrals bewiesen.

Jedes komplexe Maß läßt sich polarzerlegen. Für $x \in V$ und $y \in \operatorname{dom} A$ gibt es daher

- eine meßbare Funktion φ mit $|\varphi(\lambda)| = 1 \quad \forall_{\lambda\in\mathbb{R}}$,
- ein positives Maß μ,

so daß gilt:

$$\langle x, E_A(d\lambda)y\rangle = \varphi(\lambda)\mu(d\lambda)$$

Das Integral ist definiert, wenn der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_{U_n} |f(\lambda)|\mu(d\lambda)$ existiert.

Definiere die meßbare Funktion $\tilde{f}(\lambda) := \varphi(\lambda)^{-1}|f(\lambda)|$.

Für $y \in \text{dom } f(A) = \text{dom } \tilde{f}(A)$ (dies folgt aus (ii)) erhält man

$$\begin{aligned}\int_{U_n} |f(\lambda)|\mu(d\lambda) &= \int |f_n(\lambda)|\mu(d\lambda) \\ &= \int \tilde{f}_n(\lambda)\langle x, E_A(d\lambda)y\rangle \\ &= \langle x, \tilde{f}_n(A)y\rangle \stackrel{n\to\infty}{\to} \langle x, \tilde{f}(A)y\rangle.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Existenz des Integrals.

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}\langle x, f(A)y\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x, f_n(A)y\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{U_n} f(\lambda)\langle x, E_A(d\lambda)y\rangle \\ &= \int f(\lambda)\langle x, E_A(d\lambda)y\rangle\end{aligned}$$

Damit folgt (iii).

zu (v): Teil (ii) zeigt, daß $\text{dom } f(A) = \text{dom } \overline{f}(A)$ ist; und für $x, y \in \text{dom } f(A)$ gilt wegen (iii):

$$\langle x, f(A)y\rangle = \langle \overline{f}(A)x, y\rangle$$

Daraus folgt: $\overline{f}(A) \subset f(A)^*$.

Zu zeigen ist die umgekehrte Inklusion.

Sei $x \in \text{dom } f(A)^*$. Da für alle $y \in V$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\langle y, \overline{f}_m(A)x\rangle &= \langle f_m(A)y, x\rangle \\ &= \langle f(A)E_A(U_m)y, x\rangle \\ &= \langle y, E_A(U_m)f(A)^*x\rangle\end{aligned}$$

gilt, folgt daraus $\overline{f}_m(A)x = E_A(U_m)f(A)^*x$, d.h. $\overline{f}_m(A)x \stackrel{m\to\infty}{\to} f(A)^*x$.

Deshalb ist $x \in \text{dom } \overline{f}(A)$ und $\overline{f}(A)x = f(A)^*x$.

zu (vi): Übungsaufgabe. □

5.4 Der Zusammenhang zwischen Spektralprojektoren und Resolventen

Definition. *Die starke Operatortopologie auf $B(V)$ ist die gröbste Topologie, bei der für alle $x \in V$ die Abbildung $B(V) \to V,\ A \mapsto Ax$ stetig ist.*

Grenzwerte in der starken Topologie werden mit s–lim *bezeichnet.*

Satz. *Sei A ein selbstadjungierter Operator, seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\operatorname*{s-lim}_{\delta \downarrow 0} \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \Big(R(\mu - i\varepsilon) - R(\mu + i\varepsilon) \Big) d\mu = E_A\Big((a,b) \Big)$$

Beweis:

Sei

$$\begin{aligned} f(\delta, \varepsilon, \lambda) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left(\frac{1}{\mu - i\varepsilon - \lambda} - \frac{1}{\mu + i\varepsilon - \lambda} \right) d\mu \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{b - \delta - \lambda}{\varepsilon} \right) - \arctan\left(\frac{a + \delta - \lambda}{\varepsilon} \right) \right). \end{aligned}$$

Es gilt punktweise:

$$\begin{aligned} f(\delta, \varepsilon, \cdot) &\overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \chi_{(a+\delta, b-\delta)} + \frac{1}{2} \chi_{\{a+\delta, b-\delta\}} \\ &\overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} \chi_{(a,b)} \end{aligned}$$

Für alle offenen Umgebungen U von $\{a\} \cup \{b\}$ konvergiert $f(\delta, \varepsilon, \cdot)$ auf $\mathbb{R} - U$ gleichmäßig gegen $\chi_{(a,b)}$ für $\delta, \varepsilon \downarrow 0$.

Außerdem ist $f(\delta, \varepsilon, \cdot)$ in $EB(\mathbb{R})$, d.h. dom $f(\delta, \varepsilon, A) = V$.

(i) Behauptung: $\operatorname*{s-lim}_{\delta \downarrow 0} \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon \downarrow 0} f(\delta, \varepsilon, A) = E_A\Big((a,b) \Big)$

Zu zeigen ist also für $x \in V$:

$$\| f(\delta, \varepsilon, A)x - E_A\Big((a,b) \Big) x \| \overset{\delta, \varepsilon \downarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Mit $x = E_A(\{a\})x + E_A(\{b\})x + E_A(\mathbb{R} - \{a,b\})x =: x_a + x_b + x_c$ gilt:

$$\begin{aligned} \| f(\delta, \varepsilon, A)x - E_A\Big((a,b) \Big) x \| \ \leq\ & \| f(\delta, \varepsilon, A) E_A(U^c) x - E_A\Big((a,b) \Big) E_A(U^c) x \| \\ & + \| f(\delta, \varepsilon, A) E_A(U) x_b \| \ + \ \| f(\delta, \varepsilon, A) E_A(U) x_a \| \\ & + \| f(\delta, \varepsilon, A) E_A(U) x_c \| \ + \ \| E_A\Big((a,b) \Big) E_A(U) x_c \| \end{aligned}$$

Für ein beliebiges $\sigma > 0$ läßt sich U so wählen, daß gilt:

$$\|E_A(U)x_c\| < \frac{\sigma}{5}$$

Wähle δ so, daß $[a, a+\delta] \cup [b-\delta, b] \subset U$ ist, und ε sei so klein, daß gilt:

$$|f(\delta, \varepsilon, a)| < \frac{\sigma}{5} \text{ und } |f(\delta, \varepsilon, b)| < \frac{\sigma}{5}$$

$$\text{und für } \lambda \in U^c: \ |f(\delta, \varepsilon, \lambda) - \chi_{(a,b)}(\lambda)| \le \frac{\sigma}{5}$$

.

Da außerdem überall $|f(\delta, \varepsilon, \lambda)| \le 1$, also $\|f(\delta, \varepsilon, A)\| \le 1$ ist, ergibt sich insgesamt die Abschätzung

$$\|f(\delta, \varepsilon, A)x - E_A\big((a,b)\big)x\| < \sigma.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung: Wird die Reihenfolge der Grenzwertbildung vertauscht, dann ist die Grenzfunktion eine andere!

(ii) Behauptung:

$$f(\delta, \varepsilon, A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \Big(R(\mu - i\varepsilon) - R(\mu + i\varepsilon)\Big) d\mu$$

Der Integrand von $f(\delta, \varepsilon, \cdot)$ ist beschränkt bzgl. μ und λ, deshalb kann die Integration nach μ mit der nach dem Maß $E_A(d\lambda)$ vertauscht werden:

$$\begin{aligned}
f(\delta, \varepsilon, A) &= \int \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left(\frac{1}{\mu - i\varepsilon - \lambda} - \frac{1}{\mu + i\varepsilon - \lambda} \right) d\mu \; E_A(d\lambda) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \left[\int \frac{1}{\mu - i\varepsilon - \lambda} E_A(d\lambda) - \int \frac{1}{\mu + i\varepsilon - \lambda} E_A(d\lambda) \right] d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \Big(R(\mu - i\varepsilon) - R(\mu + i\varepsilon)\Big) d\mu
\end{aligned}$$

□

6 Streutheorie

6.1 Das wesentliche Spektrum

Sei V ab jetzt ein separabler Hilbertraum.

Stabilitätsproblem: Seien H_0, H_1 selbstadjungierte, beschränkte Operatoren und $H_0 - H_1$ sei „klein". Wie hängen $\sigma(H_0)$ und $\sigma(H_1)$ zusammen?

Dieser Frage wird in diesem Kapitel nachgegangen werden. Dabei treten häufig kompakte Operatoren als „kleine Störung" auf:

Definition. *Ein kompakter Operator ist ein Operator, der beschränkte Mengen auf präkompakte Mengen abbildet.*

Satz. *Ein kompakter Operator bildet schwach konvergente Folgen auf normkonvergente Folgen ab.*

Beweis:

Sei C ein kompakter Operator; x_n sei eine Folge in V, die schwach gegen x_0 konvergiert,

Annahme: In der Normtopologie divergiert Cx_n.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge Cx_{n_k} mit $\forall n_k : \|Cx_{n_k} - Cx_0\| > \varepsilon$.

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt, daß schwach konvergente Folgen beschränkt sind. Die Menge $\overline{\{Cx_{n_k}\}}$ ist also kompakt. Daher hat die Teilfolge einen Häufungspunkt.

Da sie aber auch schwach gegen Cx_0 konvergiert, muß der Häufungspunkt Cx_0 sein. Dies steht im Widerspruch zu $\|Cx_{n_k} - Cx_0\| > \varepsilon$. □

Satz. *Die kompakten Operatoren bilden eine Banachalgebra.*

Beweis: Übungsaufgabe.

Definition. *Sei $H \in B(V)$ mit $H = H^*$.*

(i) Eine Weylfolge zu H und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist eine Folge $\varphi_n \in V$, für die gilt:

$\|\varphi_n\| = 1$,

φ_n *konvergiert schwach gegen* 0,

$(H - \lambda)\varphi_n$ *konvergiert gegen* 0 *(in der Normtopologie).*

(ii) Das wesentliche Spektrum von H ist definiert als

$$\sigma_{ess}(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \text{ es gibt eine Weylfolge zu } \lambda \text{ und } H\}.$$

Bemerkung:

(i) Jede orthonormale Folge $\varphi_n \in V$ konvergiert schwach gegen 0, da für alle $\psi \in V$ die Summe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi, \varphi_n \rangle^2$$
existiert. Daher ist λ genau dann in $\sigma_{ess}(H)$, wenn es eine orthonormale Folge $\varphi_n \in V$ gibt, für die $(H - \lambda)\varphi_n$ gegen 0 konvergiert. Das wesentliche Spektrum kann auch auf diese Weise definiert werden.

(ii) Da die Bedingung für $\lambda \in \sigma_{ess}(H)$ impliziert, daß $(H - \lambda)$ in $B(V)$ nicht invertierbar ist, gilt:
$$\sigma_{ess}(H) \subset \sigma(H)$$
In $\sigma(H) - \sigma_{ess}(H)$ sind genau die isolierten Eigenwerte endlicher Vielfachheit.

Lemma. *Seien $H_0, H_1 \in B(V)$ selbstadjungiert und $H_1 - H_0$ sei kompakt. Dann gilt:*
$$\sigma_{ess}(H_0) = \sigma_{ess}(H_1)$$

Beweis:

Gezeigt wird $\sigma_{ess}(H_0) \subset \sigma_{ess}(H_1)$, die andere Inklusion folgt aus Symmetriegründen.

Sei φ_n eine Weylfolge zu H_0 und $\lambda \in \sigma_{ess}(H_0)$.

Aus $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$ folgt dann weiter:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \varphi_n \rangle \to 0 \ \forall_{\psi \in V} \quad &\Rightarrow \quad \langle (H_1 - H_0)^* \psi, \varphi_n \rangle \to 0 \ \forall_{\psi \in V} \\ &\Rightarrow \quad \langle \psi, (H_1 - H_0)\varphi_n \rangle \to 0 \ \forall_{\psi \in V} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß $(H_1 - H_0)\varphi_n$ schwach gegen 0 konvergiert.

Da $H_1 - H_0$ kompakt ist, konvergiert $(H_1 - H_0)\varphi_n$, gegen 0 in der Normtopologie. Dann konvergiert auch

$$(H_1 - \lambda)\varphi_n = (H_0 - \lambda)\varphi_n + (H_1 - H_0)\varphi_n$$

gegen 0. Daher ist φ_n auch eine Weylfolge zu H_1 und λ. □

6.2 Der Wellen- oder Mølleroperator

Die Streutheorie untersucht, ob es für Operatoren A, B, die „nahe beieinander“ liegen, eine unitäre Äquivalenz W zwischen ihnen gibt, d.h. es soll gelten $WA = BW$. Es wird sich herausstellen, daß diese Äquivalenz für die Einschränkungen von A, B auf die Unterräume $V_{ac}(A)$ und $V_{ac}(B)$ (s.u.) existiert, falls $A - B$ ein Spurklasseoperator ist.

Die Motivation und die Bezeichnung „Streutheorie“ kommen aus der Quantenmechanik: Die Streuung von Teilchen an schwachen, lokalisierten Potentialen wird auf diese Weise beschrieben (s. Reed/Simon, Scattering Theory).

Sei A ein selbstadjungierter Operator und E_A seine Spektralschar.

Definition. *Ein Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ heißt absolut stetig bzgl. des Lebesguemaßes λ, falls für alle meßbaren Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}$ gilt:*

$$|\Omega| := \lambda(\Omega) = 0 \Rightarrow \mu(\Omega) = 0$$

Der Satz von Radon/Nikodym aus der Maßtheorie besagt:

Ein Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ ist genau dann absolut stetig bzgl. λ, wenn es eine meßbare Funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)$ gibt mit

$$\mu(d\lambda) = f(\lambda)d\lambda.$$

Definition. $V_{ac}(A) := \{x \in V \mid$ *für alle* $y \in V$ *ist* $\langle y, E_A(.)x\rangle$ *absolut stetig bzgl.* $\lambda\}$

Definition. *Ein Teilraum $V' \subset V$ heißt A-invariant, falls gilt:*

$$f(A)V' \subset V' \quad \forall_{f \in EB(\mathbb{R})}$$

Lemma. *Der Raum $V_{ac}(A)$ ist ein abgeschlossener, A–invarianter Teilraum von V.*

Beweis:

(i) Es ist leicht zu sehen, daß $V_{ac}(A)$ ein Untervektorraum von V ist.

(ii) $V_{ac}(A)$ ist abgeschlossen:

Sei $x_i \in V_{ac}(A)$ eine Folge, die gegen x_0 konvergiert.

Für $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit $|\Omega| = 0$ und $y \in V$ gilt dann wegen der Beschränktheit von $E_A(\Omega)$:

$$\langle y, E_A(\Omega)x_0\rangle = \lim_{i\to\infty} \langle y, E_A(\Omega)x_i\rangle = 0$$

(iii) A-Invarianz von $V_{ac}(A)$:

Für $x \in V_{ac}(A)$ und $f \in EB(\mathbb{R})$ ist zu zeigen: $f(A)x \in V_{ac}(A)$

Sei dazu $y \in V$ und $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit $|\Omega| = 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle y, E_A(\Omega) f(A) x\rangle &= \langle y, f(A) E_A(\Omega) x\rangle \\ &= \langle \overline{f}(A) y, E_A(\Omega) x\rangle = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt $f(A)x \in V_{ac}(A)$. □

Definition. *Seien A und B selbstadjungierte Operatoren.*
Falls der Grenzwert

$$W^{\pm}(A,B) := \operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itA} e^{-itB} P_{ac}(B)$$

existiert, wird er Wellen- oder Mølleroperator genannt. Dabei bezeichne $P_{ac}(B)$ den Projektor auf $V_{ac}(B)$.

Satz. *Existiert für die selbstadjungierten Operatoren A und B der Wellenoperator $W^{\pm}(A,B)$, dann gilt:*

(i) $W^{\pm}(A,B) : V_{ac}(B) \to \operatorname{im}(W^{\pm}(A,B)) =: V_{\pm} \subset V$ *ist isometrisch.*

(ii) $f(A)\ W^{\pm}(A,B) = W^{\pm}(A,B)\ f(B)$ *für* $f \in EB(\mathbb{R})$

(iii) $V_{\pm}$ *ist A–invariant.*

(iv) $W^{\pm}(A,B) \mathit{dom}\ (B) \subset \mathit{dom}\ (A)$ *und* $AW^{\pm}(A,B) = W^{\pm}(A,B)B$

(v) $V_{\pm} \subset V_{ac}(A)$.

Beweis:

zu (i): Sei $\varphi \in V_{ac}(B)$. Daß $W^{\pm}(A,B)|_{V_{ac}(B)}$ eine Isometrie ist, folgt aus

$$\|W^{\pm}(A,B)\varphi\| = \lim_{t\to\mp\infty} \|e^{itA} e^{-itB} P_{ac}(B)\varphi\| = \|\varphi\|.$$

Daraus ergibt sich außerdem, daß $W^{\pm}(A,B) \in B(V)$ ist.

zu (ii): Aus

$$\begin{aligned} \operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itA} e^{-itB} P_{ac}(B) &= \operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{i(t+s)A} e^{-i(t+s)B} P_{ac}(B) \\ &= e^{isA} \operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itA} e^{-itB} P_{ac}(B) e^{-isB} \end{aligned}$$

folgt
$$e^{isA}W^{\pm}(A,B) = W^{\pm}(A,B)e^{isB}.$$

Sei nun g aus dem Raum der Schwartzfunktionen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, Fg sei die Fouriertransformierte von g.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} g(A)\ W^{\pm}(A,B) &= \int e^{isA}Fg(s)ds\ W^{\pm}(A,B) \\ &= \int e^{isA}Fg(s)W^{\pm}(A,B)\ ds \\ &= \int W^{\pm}(A,B)e^{isB}Fg(s)\ ds \\ &= W^{\pm}(A,B)\ g(B) \end{aligned}$$

Die erste und letzte Gleichung folgen aus dem Satz von Fubini angewandt auf die Maße ds und $< x, E_A(d\lambda)y >$ für $x, y \in H$.

Da der Raum der Schwartzfunktionen dicht in $C_0(\mathbb{R})$ liegt, stimmen die stetigen Linearformen
$$C_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{C},\ g \mapsto < x, g(A)W^{\pm}(A,B)y >$$
und
$$g \mapsto < x, W^{\pm}(A,B)g(B)y >$$
für alle $x, y \in H$ überein. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gilt dann für $f \in EB(\mathbb{R})$
$$< x, f(A)W^{\pm}(A,B)y > = < x, W^{\pm}(A,B)f(B)y > .$$

Daraus folgt
$$f(A)W^{\pm}(A,B) = W^{\pm}(A,B)f(B).$$

zu (iii): Aus (ii) folgt $f(A)V^{\pm} \subset V^{\pm}$.

zu (iv): Sei $x \in \operatorname{dom} B$. Dann gilt:
$$Bx = \lim_{n\to\infty} BE_B([-n,n])x$$

Da $W^{\pm}(A,B)$ beschränkt ist, erhält man:
$$\begin{aligned} W^{\pm}(A,B)Bx &= \lim_{n\to\infty} W^{\pm}(A,B)BE_B([-n,n])x \\ &= \lim_{n\to\infty} AE_A([-n,n])W^{\pm}(A,B)x \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus (ii) mit $f(\lambda) := \lambda \cdot \chi_{[-n,n]}(\lambda)$.

Also konvergiert $AE_A([-n,n])W^{\pm}(A,B)x$. Da A abgeschlossen ist, ist $W^{\pm}(A,B)x \in \operatorname{dom} A$ und es gilt:
$$\lim_{n\to\infty} AE_A([-n,n])W^{\pm}(A,B)x = AW^{\pm}(A,B)x$$

zu (v): Sei $x \in V_\pm$, d.h. es gibt ein $z \in V_{ac}(B)$ mit $x = W^\pm(A,B)z$

Für $y \in V$ und $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit $|\Omega| = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle y, E_A(\Omega)x\rangle &= \langle y, E_A(\Omega)W^\pm(A,B)z\rangle \\ &= \langle y, W^\pm(A,B)E_B(\Omega)z\rangle \text{ nach (ii)} \\ &= \langle W^\pm(A,B)^* y, E_B(\Omega)z\rangle = 0 \end{aligned}$$

Also ist $x \in V_{ac}(A)$. □

Satz. *Seien A, B und C selbstadjungierte Operatoren, für die $W^\pm(A,B)$ und $W^\pm(B,C)$ existieren.*

Dann existiert auch $W^\pm(A,C)$ und es ist

$$W^\pm(A,C) = W^\pm(A,B)W^\pm(B,C).$$

Beweis:

Nach Teil (v) des vorigen Satzes ist $W^\pm(B,C)V \subset V_{ac}(B)$.

Also gilt für $\varphi \in V$:

$$\lim_{t\to\mp\infty} (1 - P_{ac}(B))e^{itB}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi = 0$$

Mit

$$\begin{aligned} e^{itA}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi &= e^{itA}e^{-itB}P_{ac}(B)e^{itB}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi \\ &\quad + e^{itA}e^{-itB}(1 - P_{ac}(B))e^{itB}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} W^\pm(A,C)\varphi &= \lim_{t\to\mp\infty} e^{itA}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi \\ &= \lim_{t\to\mp\infty} e^{itA}e^{-itB}P_{ac}(B)e^{itB}e^{-itC}P_{ac}(C)\varphi \\ &= W^\pm(A,B)W^\pm(B,C)\varphi \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. □

Bemerkung: Für einen Beweis der obigen Beziehung würde schwache Konvergenz nicht ausreichen. Dies ist der Grund, starke Konvergenz zu fordern.

Definition. *Seien A, B selbstadjungierte Operatoren.*

Der Wellen- oder Mølleroperator $W^\pm(A,B)$ heißt vollständig, falls

$$\mathrm{im}(W^\pm(A,B)) = V_{ac}(A).$$

Lemma. *Der Wellenoperator $W^{\pm}(A,B)$ für zwei selbstadjungierte Operatoren A und B ist genau dann vollständig, wenn $W^{\pm}(B,A)$ existiert.*

Beweis:

$\Leftarrow$: Aus der Existenz von $W^{\pm}(B,A)$ folgt:

$$W^{\pm}(A,B)W^{\pm}(B,A) = W^{\pm}(A,A) = P_{ac}(A)$$

Damit erhält man: $\mathrm{im}(W^{\pm}(A,B)) = V_{ac}(A)$

$\Rightarrow$: Sei $\varphi \in V_{ac}(A)$. Da $W^{\pm}(A,B)$ vollständig ist, gibt es $\psi \in V_{ac}(B)$ mit $\varphi = W^{\pm}(A,B)\psi$.

Dann gilt:

$$\|\varphi - e^{itA}e^{-itB}\psi\| \overset{t\to\mp\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dies ist äquivalent zu

$$\|e^{itB}e^{-itA}\varphi - \psi\| \overset{t\to\mp\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also existiert der Grenzwert $\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itB}e^{-itA}P_{ac}(A) = W^{\pm}(B,A)$. □

6.3 Der Satz von Kato/Rosenblum

Der Wellenoperator $W^{\pm}(A,B)$ existiert, wenn $A-B$ bestimmten Bedingungen genügt. Der Beweis hiervon ist das Ziel des nächsten Abschnittes.

Satz. *Sei C ein kompakter Operator. Dann läßt sich C darstellen als*

$$C = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle\varphi_n, \cdot\rangle\psi_n.$$

Dabei sind φ_n, ψ_n zwei Orthonormalbasen von V und $\lambda_n \in \mathbb{C}$ strebt gegen 0 für $n\to\infty$. Die Summe konvergiert bzgl. der Operatornorm.

Beweis: Siehe z.B. Reed/Simon, Functional Analysis.

Definition. *Ein kompakter Operator C heißt Spurklasseoperator, falls für die Darstellung*

$$C = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle\varphi_n, \cdot\rangle\psi_n,$$

die im vorigen Satz definiert wurde, gilt: $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < \infty$

Es kann bewiesen werden, daß diese Definition nicht von der Darstellung von C abhängt, die Eigenschaft „Spurklasseoperator" also wohldefiniert ist (s. Reed/Simon, Functional Analysis).

Satz (Kato/Rosenblum). *Seien A und B selbstadjungierte Operatoren, $A-B$ sei ein Spurklasseoperator.*
Dann existiert $W^{\pm}(A,B)$ und ist vollständig.

Definiere

$$\mathcal{M}(B) := \{\varphi \in V \mid \langle \varphi, E_B(d\lambda)\varphi\rangle = |f_\varphi(\lambda)|^2 d\lambda \text{ mit } f_\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})\} \subset V_{ac}(B)$$

mit der Norm $|||\varphi||| \ := \ \|f_\varphi\|_\infty$.

1. Hilfslemma. *$\mathcal{M}(B)$ ist dicht in $V_{ac}(B)$.*

Beweis:

Sei $\psi \in V_{ac}(B)$.
Da das Maß $\langle \psi, E_B(d\lambda)\psi\rangle$ endlich und positiv ist, gibt es eine Funktion $f_\psi \in L^2(\mathbb{R})$, so daß gilt (vgl. S.54 oben):

$$\langle \psi, E_B(d\lambda)\psi\rangle = |f_\psi(\lambda)|^2 d\lambda$$

Gegeben sei $\varepsilon > 0$.
Sei $K \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Menge mit

$$\int\limits_{\mathbb{R}-K} |f_\psi(\lambda)|^2 d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}.$$

und $C(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ sei so groß, daß gilt:

$$\int\limits_{\{|f_\psi|>C(\varepsilon)\}} |f_\psi(\lambda)|^2 d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für

$$\varphi := E_B\left(K \cap \{|f_\psi| \leq C(\varepsilon)\}\right)\psi$$

erfüllt die Funktion

$$f_\varphi := \begin{cases} f_\psi & \text{auf } K \cap \{|f_\psi| \leq C(\varepsilon)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Gleichung

$$\langle \varphi, E_B(d\lambda)\varphi\rangle = |f_\varphi(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Da außerdem $f_\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ ist, ist $\varphi \in \mathcal{M}(B)$ und es gilt:

$$\|\psi - \varphi\|^2 = \int\limits_{(\mathbb{R}-K)\cup\{|f_\psi|>C(\varepsilon)\}} |f_\psi(\lambda)|^2 d\lambda \quad < \varepsilon$$

□

2. Hilfslemma. *Für $\varphi \in \mathcal{M}(B)$ und $\psi \in V$ gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi,\, e^{-itB}\varphi\rangle|^2 dt \leq 2\pi \; \|\psi\|^2 \; |||\varphi|||^2$$

Beweis:

Sei $\varphi \in \mathcal{M}(B)$. Der zyklische Teilraum

$$H_\varphi(B) := \{s(B)\varphi \mid s \in L^2(\mathbb{R}, \langle \varphi, E(d\lambda)\varphi\rangle)\} \subset V$$

ist wohldefiniert, denn es gilt:

$$\begin{aligned} s \in L^2(\mathbb{R}, \langle \varphi, E_B(d\lambda)\varphi\rangle) \;\; &\Leftrightarrow \;\; \int |s(x)|^2 \langle \varphi, E_B(d\lambda)\varphi\rangle < \infty \\ &\Leftrightarrow \;\; \varphi \in \mathrm{dom}\; (s(B)) \end{aligned}$$

Außerdem ist $H_\varphi(B)$ abgeschlossen:

Sei nämlich $s_i \in L^2(\mathbb{R}, \langle \varphi, E_B(d\lambda)\varphi\rangle)$ eine Folge von Funktionen, so daß $s_i(B)\varphi$ konvergiert; der Grenzwert sei $\psi \in V$.

Dann ist $s_i(B)\varphi$ eine Cauchyfolge in V.

Aus der Gleichung

$$\|s_i(B)\varphi - s_j(B)\varphi\|^2 \; = \int |s_i(\lambda) - s_j(\lambda)|^2 \langle \varphi, E_B(d\lambda)\varphi\rangle$$

folgt, daß s_i eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}, \langle \varphi, E_B(d\lambda)\varphi\rangle)$ ist.

Ihr Grenzwert sei $s_0 \in L^2(\mathbb{R}, \langle \varphi, E(d\lambda)\varphi\rangle)$.

Schließlich ergibt sich aus obiger Gleichung auch $\psi = s_0(B)\varphi \in H_\varphi(B)$.

Nun zum eigentlichen Beweis des Hilfslemmas:

Sei dazu $\psi \in V$.

Der Projektor auf $H_\varphi(B)$ wird mit $Q : V \to H_\varphi(B)$ bezeichnet.

Nach Definition von $H_\varphi(B)$ gibt es eine Funktion $\eta \in L^2(\mathbb{R}, \langle \varphi, E_B(d\lambda)\varphi\rangle)$ mit

$$Q\psi = \eta(B)\varphi.$$

Mit $e^{-itB}\varphi \in H_\varphi(B)$ erhält man:

$$\begin{aligned} \langle \psi, e^{-itB}\varphi\rangle &= \langle Q\psi, e^{-itB}\varphi\rangle \\ &= \langle \varphi, \overline{\eta}(B) e^{-itB}\varphi\rangle \end{aligned}$$

Da $\varphi \in \mathcal{M}(B)$ vorausgesetzt wurde, existiert $f_\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\langle \varphi, E_B(d\lambda)\varphi \rangle = |f_\varphi(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Das Maß $|f_\varphi(\lambda)|^2 d\lambda$ ist endlich, deshalb ist $\eta \in L^1(\mathbb{R}, |f_\varphi(\lambda)|^2 d\lambda) \cap L^2(\mathbb{R}, |f_\varphi(\lambda)|^2 d\lambda)$ und

$\eta |f_\varphi|^2 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Daher gilt weiter

$$\langle \psi, e^{-itB}\varphi \rangle = \int e^{-it\lambda} \overline{\eta}(\lambda)\ |f_\varphi(\lambda)|^2\ d\lambda$$

und dies ist gerade die Fouriertransformierte der Funktion $\overline{\eta}|f_\varphi|^2 \in L^2(\mathbb{R})$.

Das Plancherel–Theorem liefert die Behauptung:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi, e^{-itB}\varphi \rangle|^2\ dt &= 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\eta(\lambda)|^2\ |f_\varphi(\lambda)|^4\ d\lambda \\
&\leq 2\pi\ \|f_\varphi\|_\infty^2 \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\eta(\lambda) f_\varphi(\lambda)|^2\ d\lambda}_{\|\eta(B)\varphi\|^2} \\
&= 2\pi\ |||\varphi|||^2\ \cdot\ \|Q\psi\|^2 \\
&\leq 2\pi\ |||\varphi|||^2\ \cdot \|\psi\|^2,\ \text{da } Q \text{ ein Projektor ist.}
\end{aligned}$$

□

3. Hilfslemma. *Sei $\varphi \in V_{ac}(B)$. Dann gilt:*

(i) $e^{-itB}\varphi \ \underset{t\to\pm\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}}\ 0$

(ii) $Ce^{-itB}\varphi \ \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow}\ 0$ *für einen kompakten Operator* C

Beweis:

zu (i): Sei $\varphi \in \mathcal{M}(B)$, sei mit $\langle \varphi, E_B(d\lambda)\varphi \rangle = |f(\lambda)|^2 d\lambda$.

Im Beweis des vorigen Hilfslemmas wurde gezeigt, daß es Funktionen $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $\eta \in L^2(\mathbb{R}, |f(\lambda)|^2 d\lambda)$ gibt mit $\overline{\eta}|f|^2 \in L^1(\mathbb{R})$, die folgende Gleichung erfüllt:

$$\langle \psi, e^{-itB}\varphi \rangle = \int e^{-it\lambda}\ \overline{\eta}(\lambda)|f(\lambda)|^2 d\lambda$$

Dies ist die Fouriertransformation von $\overline{\eta}|f|^2$, daher gilt nach dem Lemma von Riemann/Lebesgue die Abfallbedingung

$$\langle \psi, e^{-itB}\varphi \rangle \ \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow}\ 0.$$

Damit ist (i) gezeigt für den dichten Teilraum $\mathcal{M}(B) \subset V_{ac}(B)$.

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und aus $\|e^{-itB}\| = 1$ folgt, daß die Abbildung

$$V \to \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \langle \psi, e^{-itB}\varphi \rangle$$

gleichmäßig in t stetig ist. Deshalb gilt die Behauptung auf ganz $V_{ac}(B)$.

zu (ii): Ein kompakter Operator bildet schwach konvergente Folgen auf normkonvergente Folgen ab (s. 6.1). □

Zum Beweis des Satzes von Kato/Rosenblum:

Es reicht, die Existenz von $W^{\pm}(A, B)$ zu zeigen, denn durch Vertauschen von A und B folgt dann die Existenz von $W^{\pm}(B, A)$ und damit die Vollständigkeit.

Sei

$$W(t) := e^{iAt}e^{-iBt}.$$

Für den Beweis genügt es, nur den Grenzwert

$$\lim_{t\to\pm\infty} W(t)\varphi \text{ für } \varphi \in \mathcal{M}(B)$$

zu betrachten; dieser setzt sich auf $V_{ac}(B)$ stetig fort, denn $W(t)$ ist gleichmäßig in t beschränkt.

Nach dem Cauchyfolgenkriterium ist dies äquivalent dazu, daß $\sup\limits_{s\geq t} \|(W(t) - W(s))\varphi\|^2$ für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert (für $t \to -\infty$ analog).

Da $W(t)$ unitär ist, ergibt Ausklammern von $W(t)$:

$$\|(W(t) - W(s))\varphi\|^2 = \|(1 - W(t)^*W(s))\varphi\|^2$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} 1 - W(t)^*W(s) &= \underbrace{e^{iaB}W(t)^*(W(t) - W(s))e^{-iaB}}_{=:D_a} \\ &\quad + \underbrace{e^{iaB}W(t)^*W(s)e^{-iaB} - W(t)^*W(s)}_{=:E_a}. \end{aligned}$$

Zu D_a:

Seien $\psi \in \operatorname{dom} A,\ \varphi \in \operatorname{dom} B$.

Da A und B dicht definiert sind, folgt mit $C := B - A$ aus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \psi, W(t)\varphi \rangle &= \frac{d}{dt}\langle e^{-iAt}\psi,\ e^{-iBt}\varphi \rangle \\ &= i(\langle A\ e^{-iAt}\psi,\ e^{-iBt}\varphi \rangle - \langle e^{-iAt}\psi,\ B\ e^{-iBt}\varphi \rangle) \\ &= -i\langle \psi,\ e^{iAt}C\ e^{-iBt}\varphi \rangle \end{aligned}$$

nach Integration:

$$W(t)-W(s)=-i\int\limits_s^t e^{iA\tau}C\ e^{-iB\tau}d\tau$$

Der Integrand ist kompakt, denn C ist kompakt. Die kompakten Operatoren bilden eine Banachalgebra, deshalb ist das Integral wieder ein kompakter Operator (zur Definition des Integrals s. Kap. 1), also auch die Differenz $W(t)-W(s)$.

Aus dem 3. Hilfslemma folgt:

$$\lim_{a\to\infty} D_a\varphi=\lim_{a\to\infty} e^{iaB}W(t)^*(W(t)-W(s))e^{-iaB}\varphi=0.$$

Damit gilt $1-W(t)^*W(s)=\operatorname{s-}\lim\limits_{a\to\infty} E_a$. Dies wird jetzt ausgerechnet. Dabei ist die folgende Ableitung in der schwachen Operatortopologie definiert – wie bei der vorigen Rechnung.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}E_a &= \frac{d}{da}(e^{iaB}W(t)^*W(s)e^{-iaB})\\
&= iB\ e^{iaB}W(t)^*W(s)e^{-iaB}-i\ e^{iaB}W(t)^*W(s)B\ e^{-iaB}\\
&= i\ e^{iaB}(e^{itB}B\ e^{i(s-t)A}e^{-isB}-e^{itB}e^{i(s-t)A}B\ e^{-isB})e^{-iaB}\\
&= i\ e^{iaB}\underbrace{(e^{itB}C\ e^{i(s-t)A}e^{-isB}-e^{itB}e^{i(s-t)A}C\ e^{-isB})}_{=:Y(t,s)}\ e^{-iaB}
\end{aligned}$$

Mit $F_a(x):=i\int\limits_0^a e^{i\alpha B}x\ e^{-i\alpha B}d\alpha$ ergibt sich

$$E_a=F_a(Y(t,s))$$

und damit

$$1-W(t)^*W(s)=\operatorname{s-}\lim_{a\to\infty} F_a(Y(t,s)).$$

Dies liefert:

$$\begin{aligned}
\|(W(t)-W(s))\varphi\|^2 &= \langle\varphi,W(t)^*(W(t)-W(s))\varphi\rangle\\
&\quad+\langle\varphi,W(s)^*(W(s)-W(t))\varphi\rangle\\
&= \lim_{a\to\infty}\Big(\langle\varphi,F_a(Y(t,s))\varphi\rangle+\langle\varphi,F_a(Y(s,t))\varphi\rangle\Big)
\end{aligned}$$

Die Gesamtaussage ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann:

$$\lim_{t\to\infty}\ \sup_{s\geq t}\lim_{a\to\infty}\ \langle\varphi,F_a(Y(t,s))\varphi\rangle=0$$

denn es gilt $F_a(Y(s,t))=F_a(Y(t,s))^*$.

Um eine möglichst gute Abschätzung des Skalarproduktes zu gewinnen, wird $F_a(Y(t,s))$ weiter zerlegt: Als Spurklasseoperator hat $C = B - A$ eine Nukleardarstellung

$$C = \sum_n \underbrace{|\lambda_n|\langle\varphi_n,\cdot\rangle\psi_n}_{=:C_n}$$

wobei φ_n und ψ_n Orthonormalbasen von V sind und $\sum\limits_n |\lambda_n| < \infty$.

Damit läßt sich schreiben:

$$Y(t,s) = \sum_n Y_n(t,s)$$

mit

$$Y_n(t,s) := i(e^{itB}\underbrace{C_n e^{i(s-t)A}}_{=:X_n(t,s)}e^{-isB} - e^{itB}\underbrace{e^{i(s-t)A}C_n}_{=:X_n'(t,s)}e^{-isB})$$

Wird der Ausdruck $C_n = |\lambda_n|\langle\varphi_n,\cdot\rangle\psi_n$ (s.o.) eingesetzt, so gilt:

$$\begin{aligned}
&|\langle\varphi, F_a(e^{itB}X_n(t,s)e^{-isB})\varphi\rangle| \\
&\quad = |\langle\varphi, \int_0^a e^{i(t+\alpha)B}X_n(t,s)e^{-i(s+\alpha)B}\varphi\; d\alpha\rangle| \\
&\quad = |\int_t^{t+a} \langle\varphi, e^{i\alpha B}\psi_n\rangle|\lambda_n|\langle\varphi_n,\; e^{i(s-t)A}e^{i(s-t+\alpha)B}\varphi\rangle\; d\alpha| \\
&\quad \le |\lambda_n| \left(\int_t^{t+a} |\langle\varphi, e^{i\alpha B}\psi_n\rangle|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\langle e^{i(t-s)A}\varphi_n,\; e^{i(s-t+\alpha)B}\varphi\rangle|^2\; d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung.

Mit Hilfe des 2. Hilfslemmas können wegen $\|e^{i(t-s)(A-B)}\varphi_n\| = \|\varphi_n\| = 1$ beide Integrale abgeschätzt werden durch $\sqrt{2\pi}|||\varphi|||$.

Zuerst wird das Hilfslemma auf das zweite Integral angewandt:

$$\begin{aligned}
|\langle\varphi, F_a(e^{itB}X_n(t,s)e^{-isB})\varphi\rangle| &\le \sqrt{2\pi}|\lambda_n|\;|||\varphi|||\left(\int_t^{t+a} |\langle\varphi, e^{i\alpha B}\psi_n\rangle|^2 d\alpha\right)^{\frac{1}{2}} && (1)\\
&\le 2\pi\;|\lambda_n|\;|||\varphi|||^2 && (2)
\end{aligned}$$

Ein analoges Ergebnis gilt für X_n'.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\sum_{n \ge N(\varepsilon)} |\lambda_n| \; < \varepsilon.$$

Mit Abschätzung (2) folgt:

$$\sum_{n\geq N(\varepsilon)} |\langle\varphi, F_a(e^{itB}(X_n(t,s)+X_n'(t,s))e^{-isB})\varphi\rangle| \ \leq 4\pi\varepsilon\ |||\varphi|||^2 \quad \forall_{a,t,s}.$$

Die Anfangsglieder der Summe sind nach (1) folgendermaßen nach oben beschränkt – dabei sei $K\in\mathbb{R}$ genügend groß:

$$\lim_{a\to\infty} \sum_{n<N(\varepsilon)} |\langle\varphi, F_a(e^{itB}(X_n(t,s)+X_n'(t,s))e^{-isB})\varphi\rangle|$$
$$\leq K\ |||\varphi|||\ \sum_{n<N(\varepsilon)} \left(\int_t^\infty |\langle\psi_n,\ e^{-i\alpha B}\varphi\rangle|^2\ d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dieser Term ist unabhängig von s und strebt für $t\to\infty$ gegen 0. Insgesamt erhält man:

$$\lim_{t\to\infty}\ \sup_{s\geq t}\ \lim_{a\to\infty}\ |\langle\varphi, F_a(Y(t,s))\varphi\rangle|\ \leq (4\pi\ |||\varphi|||^2+K)\varepsilon$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt die Behauptung:

$$\lim_{t\to\infty}\ \sup_{s\geq t}\ \lim_{a\to\infty}\ |\langle\varphi, F_a(Y(t,s))\varphi\rangle| = 0.$$

$\square$

Die Voraussetzung, die im Satz von Kato/Rosenblum an A und B gestellt wird – nämlich daß $A-B$ ein Spurklasseoperator ist – ist sehr einschränkend. Der folgende Satz gibt eine Möglichkeit, diese Bedingung zu umgehen.

Satz. *Seien A und B selbstadjungierte Operatoren, $A-B$ sei ein Spurklasseoperator.*

Sei $\varphi\in C^2((a,b))$ eine streng monoton steigende Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$, wobei $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ gegeben seien mit

$$(a,b)\supset(\sigma(A)\cup\sigma(B)).$$

Falls a (bzw. b) ein isolierter Punkt von $\sigma(A)$ (bzw. $\sigma(B)$) ist, dann sei φ auf $[a,b[$ (bzw. $]a,b]$) stetig fortsetzbar.

Damit gilt:

$$W^\pm(\varphi(A),\ \varphi(B)) \textit{ existiert und } W^\pm(A,B)=W^\pm(\varphi(A),\ \varphi(B)).$$

Der Beweis wird nur für W^- durchgeführt, für W^+ verläuft er bis auf einige Vorzeichenänderungen analog.

Hilfslemma. *Für $w\in L^2((a,b),d\lambda)$ gilt:*

$$\int_0^\infty \Big|\int_a^b e^{-i(\lambda t+s\varphi(\lambda))}w(\lambda)d\lambda\Big|^2 dt \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Beweis:

Das innere Integral ist gerade die Fouriertransformierte der Funktion f_w mit den Werten $f_w(\lambda) := e^{-is\varphi(\lambda)}w(\lambda)$ für $\lambda \in (a,b)$ und $f_w(\lambda) := 0$ sonst. Die Zuordnung

$$L^2((a,b),d\lambda) \to \mathbb{R}_0^+$$
$$w \mapsto \int_0^\infty |Ff_w(t)|^2 dt$$

ist stetig, da sie eine Verkettung stetiger Abbildungen ist.

Deshalb reicht es, die Behauptung für die Treppenfunktionen, die dicht in $L^2((a,b),d\lambda)$ sind, zu zeigen.

Da außerdem

$$\int_0^\infty |Ff_{w+w'}(t)|^2 dt \le \int_0^\infty |Ff_w(t)|^2 dt + \int_0^\infty |Ff_{w'}(t)|^2 dt$$

gilt, genügt der Beweis der Behauptung für eine Basis der Treppenfunktionen, nämlich die charakteristischen Funktionen von abgeschlossenen Intervallen.

Sei also

$$w := \chi_{[a',b']} \qquad \text{mit } [a',b'] \subset (a,b) \text{ und } |a'|,\ |b'| < \infty,$$

$$\gamma := \inf_{\lambda\in[a',b']} \varphi'(\lambda) > 0.$$

Wegen

$$e^{-i(\lambda t+s\varphi(\lambda)}) = i(t+s\varphi'(\lambda))^{-1}\frac{d}{d\lambda}e^{-i(\lambda t+s\varphi(\lambda))}$$

folgt mit partieller Integration für $s,t>0$

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b e^{-i(t\lambda+s\varphi(\lambda))}\chi_{[a',b']}(\lambda)d\lambda\Big| &= \Big|\int_{a'}^{b'}(t+s\varphi'(\lambda))^{-1}\frac{d}{d\lambda}e^{-i(\lambda t+s\varphi(\lambda))}d\lambda\Big| \\
&\le (t+s\varphi'(b'))^{-1} + (t+s\varphi'(a'))^{-1} + \int_{a'}^{b'} \Big|(t+s\varphi'(\lambda))^{-2}s\varphi''(\lambda)\Big|\,d\lambda \\
&\le 2(t+s\gamma)^{-1} + s(t+s\gamma)^{-2}\cdot C \qquad \text{mit genügend großem } C \\
&=: 2f_s(t) + Csf_s(t)^2
\end{aligned}$$

Für $f_s(t) = (t+s\gamma)^{-1}$ mit $s>0$ gilt: $f_s,\ sf_s^2 \in L^2((0,\infty),\,dt)$

Die Behauptung folgt schließlich daraus, daß f_s und sf_s^2 in der $L^2((0,\infty),\,dt)$–Norm gegen 0 konvergieren für $s\to\infty$. □

Zum Beweis des Satzes:

Es gilt

$$\varphi_* E_B(\Omega) = E_B(\varphi^{-1}(\Omega)) = \chi_{\varphi^{-1}(\Omega)}(B) = \chi_\Omega \circ \varphi(B) = E_{\varphi(B)}(\Omega)$$

und deshalb

$$\varphi_* \langle y, E_B(d\lambda)x\rangle = \langle y, E_{\varphi(B)}(d\lambda)x\rangle.$$

Da φ streng monoton ist, also $\sigma(B)$ bijektiv auf $\varphi(\sigma(B)) = \sigma(\varphi(B))$ abbildet, gilt außerdem:

$$\langle y, E_B(d\lambda)x\rangle = (\varphi^{-1})_* \langle y, E_{\varphi(B)}(d\lambda)x\rangle$$

Daraus folgt:

$$V_{ac}(B) = V_{ac}(\varphi(B))$$

Es genügt also, die Operatoren nur auf $V_{ac}(B)$ zu betrachten.

Zu zeigen ist, daß folgender Ausdruck in der starken Operatortopologie gegen 0 konvergiert:

$$\begin{aligned} W^-(A,B) - e^{i\varphi(A)t} e^{-i\varphi(B)t} &= e^{i\varphi(A)t}\left(e^{-i\varphi(A)t} W^-(A,B) - e^{i\varphi(B)t}\right) \\ &= e^{i\varphi(A)t}\left(W^-(A,B) - 1\right) e^{-i\varphi(B)t} \text{ (S. 55)} \end{aligned}$$

Es reicht, den Grenzwert für $f \in \mathcal{M}(B)$ zu betrachten, da $\mathcal{M}(B)$ dicht in $V_{ac}(B)$ ist (s. 1. Hilfslemma des Satzes von Kato/Rosenblum).

Behauptung:

$$\| \left(W^-(A,B) - e^{i\varphi(A)t} e^{-i\varphi(B)t}\right) f\| = \|(W^-(A,B) - 1) e^{-i\varphi(B)t} f\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Mit $W(q) = e^{iAq} e^{-iBq}$ gilt:

$$\|(W^-(A,B) - 1) e^{-i\varphi(B)t} f\| = \lim_{q\to\infty} \|(W(q) - 1) \underbrace{e^{-i\varphi(B)t} f}_{=:\Phi\in\mathcal{M}(B)}\|.$$

Im Beweis des Satzes von Kato/Rosenblum wurde folgende Abschätzung bewiesen (S.64 (1) ff):

$$\|(W(q) - 1)\Phi\| \le C \sum_n |\lambda_n| \, |||\Phi||| \left(\int_0^\infty |\langle \psi_n, \, e^{-iB\alpha} \, \Phi\rangle|^2 \, d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nach Anwendung des Spektralsatzes nimmt das Integral folgende Form an:

$$\int_0^\infty \left|\int_b^a e^{-i(\lambda\alpha + t\varphi(\lambda))} \langle \psi_n, \, E_B(d\lambda) f\rangle\right|^2 d\alpha$$

Da $f \in \mathcal{M}(B)$ ist, gibt es eine Funktion $g \in L^2((a,b), d\lambda)$ mit

$$\langle \psi,\, E_B(d\lambda)f \rangle = g(\lambda)d\lambda.$$

Das Hilfslemma besagt mit $w := g$, daß der obige Ausdruck für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Die Konvergenz

$$\lim_{t\to\infty} \|(W(q) - 1)e^{-i\varphi(B)t}f\| = 0$$

ist gleichmäßig in q, da die rechte Seite der obigen Abschätzung nicht von q abhängt.

Also gilt

$$\lim_{t\to\infty} \|(W^-(A,B) - 1)e^{-i\varphi(B)t}f\| = 0 \quad \forall_{f\in\mathcal{M}(B)},$$

und somit

$$W^-(A,B) = W^-(\varphi(A),\, \varphi(B)).$$

$\square$

Beispiel: Berechnung von $W^\pm(A,B)$ für eine eindimensionale Störung

Sei B ein selbstadjungierter Operator auf V mit $V_{ac}(B) = V$.

Für einen normierten Vektor $h \in V$ schreibt sich der Projektor auf den von h aufgespannten Unterraum:

$$P_h = \langle h,\ \cdot\ \rangle h, \text{ d.h. } P_h\varphi = \langle h, \varphi\rangle h$$

Den selbstadjungierten Operator A erhalte man, indem man B mit P_h stört:

$$A := B + \kappa P_h \text{ (eindimensionale Störung)}$$

Offensichtlich ist dann $A - B$ ein Spurklasseoperator.

Da der Teilraum $H := \overline{C_c(\mathbb{R})(B)h} \subset V$ abgeschlossen ist, gilt: $H \oplus H^\perp = V$

Außerdem hat man

$$BH \subset H \text{ und } BH^\perp \subset H^\perp.$$

Dabei folgt die zweite Aussage aus

$$\begin{aligned} \psi \in H^\perp \quad &\Rightarrow \quad \langle f(B)h, \psi\rangle = 0 \quad \forall_{f\in C_c(\mathbb{R})} \\ &\Rightarrow \quad \langle Bf(B)h, \psi\rangle = 0 \quad \forall_{f\in C_c(\mathbb{R})} \\ &\Rightarrow \quad \langle f(B)h, B\psi\rangle = 0 \quad \forall_{f\in C_c(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Mit $A|_{H^\perp} = B|_{H^\perp}$ gilt auch

$$AH \subset H \text{ und } AH^\perp \subset H^\perp$$

und

$$W^{\pm}(A,B)|_{H^\perp} = id_{H^\perp}.$$

Zur Berechnung von $W^{\pm}(A,B)|_H$:

Sei $\mu_B(d\lambda) := \langle h, E_B(d\lambda)h\rangle$.

Betrachte die Abbildung

$$\Phi_B : H \to L^2(\mathbb{R}, \mu_B),$$

die für $f \in C_c(\mathbb{R})$ definiert ist als

$$f(B)h \mapsto f$$

Damit ist Φ_B auf einer dichten Teilmenge von H wohldefiniert und außerdem isometrisch, denn es gilt:

$$\|\Phi_B(f(B)h)\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mu_B)} = \int |f(\lambda)|^2 \langle h, E_B(d\lambda)h\rangle = \|f(B)h\|^2.$$

Deshalb läßt sich Φ_B stetig auf ganz H fortsetzen. Außerdem ist Φ_B ein Isomorphismus, da die Umkehrabbildung existiert.

Analoges gilt für A:

Mit $H_A := \overline{C_c(\mathbb{R})(A)h} = H$ lautet die Abbildung dann:

$$\Phi_A : H \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}, \mu_A), \quad f(A)h \mapsto f$$

Anstelle von $W^{\pm}(A,B)|_H$ reicht es also,

$$W^{\pm} := \Phi_A W^{\pm}(A,B)\Phi_B^{-1} : L^2(\mathbb{R}, \mu_B) \to L^2(\mathbb{R}, \mu_A)$$

zu untersuchen:

Da

$$\Phi_B B \Phi_B^{-1} = \Phi_A A \Phi_A^{-1} = M_\lambda$$

gilt mit $(M_\lambda f)(\lambda) := \lambda f(\lambda)$, ergibt sich aus

$$AW^{\pm}(A,B) = W^{\pm}(A,B)B$$

die Gleichung

$$M_\lambda W^{\pm} = W^{\pm} M_\lambda.$$

Dies kann nur erfüllt sein, wenn auch $W^{\pm}$ ein Multiplikationsoperator ist. (Dies ist nicht trivial, wird hier aber nicht bewiesen werden.) Es gibt also eine Funktion $w^{\pm}(\lambda)$ mit

$$W^{\pm} = M_{w^{\pm}(\lambda)}.$$

Diese wird weiter berechnet für $g, f \in (\mathcal{M}(B) \cap H)$:

$$\begin{aligned}
\langle g, W^{\pm}(A,B)f\rangle &= \lim_{t\to\mp\infty} \langle g,\ e^{itA}e^{-itB}f\rangle \\
&= \lim_{t\to\mp\infty} (\langle g, f\rangle + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\langle g,\ e^{i\tau A}e^{-i\tau B}f\rangle d\tau \\
&= \langle g, f\rangle + \lim_{t\to\mp\infty} i \int_0^t \langle g,\ (e^{i\tau A}\underbrace{A-B}_{=\kappa P_h}e^{-i\tau B})f\rangle d\tau \\
&= \langle g, f\rangle + i\kappa \lim_{t\to\mp\infty} \int_0^t \langle g,\ e^{i\tau A}h\rangle\ \langle h,\ e^{-i\tau B}f\rangle d\tau \\
&= \langle g, f\rangle + i\kappa \lim_{t\to\mp\infty} \langle g, \int_0^t e^{i\tau A}h\langle h,\ e^{-i\tau B}f\rangle d\tau\rangle
\end{aligned}$$

Da Φ_A eine Isometrie ist und außerdem $\Phi_A(e^{i\tau A}h\langle h,\ e^{-i\tau B}f\rangle)(\lambda) = e^{i\tau\lambda}\langle h,\ e^{-i\tau B}f\rangle$, läßt sich die letzte Zeile als Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{R}, \mu_A)$ schreiben:

$$= \langle g, f\rangle + i\kappa \lim_{t\to\mp\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi_A(g)(\lambda)} \int_0^t e^{i\tau\lambda}\langle h,\ e^{-i\tau B}f\rangle d\tau\ \mu_A(d\lambda)$$

Außerdem ist $f \in \mathcal{M}(B)$ und damit $\langle h, e^{-i\tau B}f\rangle \in L^2(\mathbb{R}, \mu_A)$; die Theorie der Fouriertransformationen stellt dann folgende Gleichheit zur Verfügung:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\mp\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi_A(g)(\lambda)} \int_0^t e^{i\tau\lambda}\langle h,\ e^{-i\tau B}f\rangle d\tau\ \mu_A(d\lambda) \\
&\qquad = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi_A(g)(\lambda)} \int_0^{\mp\infty} e^{i\tau\lambda}e^{\pm\varepsilon\tau}\langle h,\ e^{-i\tau B}f\rangle d\tau\ \mu_A(d\lambda) \\
&\qquad = i \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi_A(g)(\lambda)}\langle h, (\lambda \mp i\varepsilon - B)^{-1}f\rangle \mu_A(d\lambda) \\
&\qquad =: i \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi_A(g)(\lambda)}\langle h, (\lambda \mp i0 - B)^{-1}f\rangle \mu_A(d\lambda)
\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\langle g, W^{\pm}(A,B)f\rangle = \langle g, f\rangle - \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi_A(g)(\lambda)}\langle h, (\lambda \mp i0 - B)^{-1}f\rangle \mu_A(d\lambda).$$

Mit $1 \in L^2(\mathbb{R}, \mu_A)$ gilt:

$$w^{\pm}(\lambda) = (W^{\pm}1)(\lambda) = (\Phi_A W^{\pm}(A,B)\Phi_B^{-1})(1)(\lambda) = (\Phi_A W^{\pm}(A,B)h)(\lambda)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\int \overline{\Phi_A(g)(\lambda)} w^{\pm}(\lambda)\mu_A(d\lambda) &= \langle g, W^{\pm}(A,B)h\rangle \\ &= \int \overline{\Phi_A(g)(\lambda)} 1 \ \mu_A(d\lambda) \\ &\quad -\kappa \int \overline{\Phi_A(g)(\lambda)} \langle h, (\lambda \pm i0 + B)^{-1} h\rangle \mu_A(d\lambda)\end{aligned}$$

Diese Gleichung setzt sich stetig fort auf $g \in H$. Da Φ_A ein Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R}, \mu_A)$ ist, ist $w^{\pm}$ durch die Gleichung bestimmt:

$$w^{\pm}(\lambda) = 1 - \kappa \langle h, (\lambda \pm i0 - B)^{-1} h\rangle.$$

Literatur

H.Baumgärtel + M.Wollenberg, Mathematical Scattering Theory, Birkhäuser Verlag, Basel 1983

N.Dunford + J.T.Schwartz, Linear Operators, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, Inc., New York, Bd. I 1958, Bd. II 1963

M.Reed + B.Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Academic Press, Inc., New York, Bd. I Functional Analysis 1980, Bd. III Scattering Theory 1979

W.Rudin, Functional Analysis, McGraw–Hill Book Company, New York 1966

W.Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw–Hill Book Company, New York 1973

H.Schröder, Funktionalanalysis, Akademie–Verlag, Berlin 1997

K.Yoshida, Functional Analysis, Springer–Verlag, New York Inc., New York 1968