Maß- und Integrationstheorie

Ulrich Bunke*

28. Dezember 2008

Inhaltsverzeichnis

*Regensburg, ulrich.bunke@mathematik.uni-regensburg.de

1 Maß- und Integrationstheorie

1.1 Maße

1.1.1 Algebren

Sei Ω eine Menge. Mit $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von Ω.

Definition 1.1. *Eine Algebra auf Ω ist eine Teilmenge $R \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit :*

1. *$\emptyset \in R$, $\Omega \in R$.*
2. *R ist stabil unter Bildung endlicher Vereinigungen.*
3. *R ist stabil unter Bildung von Komplementen.*

Definition 1.2. *Ein Paar (Ω, R) einer Menge mit ausgezeichneter Algebra heißt* ***prämeßbarer Raum****. Die Elemente von R sind die* ***meßbaren Teilmengen*** *von Ω.*

Hier sind einige elementare Bemerkungen über Algebren.

1. Auf jeder Menge Ω gibt es die trivialen Algebren $\{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{P}(\Omega)$.

2. Ist R eine Algebra, dann ist R abgeschlossen unter der Bildung endlicher Durchschnitte und Komplemente der Form $A \setminus B$ für $A, B \in R$ mit $B \subset A$ ist. In der Tat ist $A \cap B = \Omega \setminus [(\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)]$ und $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B)$

3. Ist $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie von Algebren, dann ist der Durchschnitt $\bigcap_i R_i$ auch eine Algebra.

4. Sei I geordnet und $(R_i)_{i \in I}$ eine aufsteigende Famile von Algebren. Dann ist $\bigcup_i R_i$ eine Algebra. Ist nämlich $A \in \bigcup_i R_i$, dann ist $A \in R_i$ und damit auch $\Omega \setminus A \in R_i \subseteq \bigcup_i R_i$.

   Die Voraussetzung **aufsteigend** ist wichtig für die Abgeschlossenheit unter Vereinigungen. In der Tat sei $A, B \in \bigcup_i R_i$. Dann ist $A \in R_i$ und $B \in R_j$ für $i, j \in I$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $i < j$. Dann ist auch $A \in R_j$ und damit $A \cup B \in R_j \subseteq \bigcup_i R_i$.

Um Algebren zu beschreiben, ist die folgende Konstruktion sehr hilfreich. Sei S eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge von Ω.

Lemma 1.3. *Es gibt eine eindeutig bestimmte minimale Algebra $R(S)$, welche S enthält.*

Proof. Der Durchschnitt von beliebigen Familien von Algebren ist eine Algebra. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist eine S enthaltende Algebra. Wir erhalten also $R(S)$ als Durchschnitt aller S enthaltenden Algebren. □

Definition 1.4. *Die minimale S enthaltende Algebra heißt die **von S erzeugte Algebra**.*

Die Menge $R(S)$ kann man explizit wie folgt beschreiben. Für $U \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mögen ${}^{\backprime}\bigcup{}^{\backprime}U, {}^{\backprime}\bigcap{}^{\backprime}U, {}^{\backprime}C{}^{\backprime}U \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ die Mengen aller Vereinigungen (bzw. Durschnitte oder Komplemente) endlicher Familien in U bezeichnen. Es gelten

$$ {}^{\backprime}\bigcup{}^{\backprime}({}^{\backprime}\bigcup{}^{\backprime}U) = {}^{\backprime}\bigcup{}^{\backprime}U \ , {}^{\backprime}\bigcap{}^{\backprime}({}^{\backprime}\bigcap{}^{\backprime}U) = {}^{\backprime}\bigcap{}^{\backprime}U \ , {}^{\backprime}\bigcup{}^{\backprime}({}^{\backprime}\bigcap{}^{\backprime}U) = {}^{\backprime}\bigcap{}^{\backprime}({}^{\backprime}\bigcup{}^{\backprime}U) $$

und

$$ {}^{\backprime}C{}^{\backprime}({}^{\backprime}\bigcup{}^{\backprime}U) = {}^{\backprime}\bigcap({}^{\backprime}C{}^{\backprime}U) \ , \quad {}^{\backprime}C{}^{\backprime}({}^{\backprime}\bigcap{}^{\backprime}U) = {}^{\backprime}\bigcup({}^{\backprime}C{}^{\backprime}U) \ . $$

Lemma 1.5. *Sei $S \in \mathcal{P}(\Omega)$ abgeschlossen unter Komplementen. Dann ist*

$$R(S) = `\bigcup`(`\bigcap`S) \ .$$

Proof. Klar ist $S \subseteq `\bigcup`(`\bigcap`S) \subseteq R(S)$. Wegen

$$`\bigcup``\bigcup`(`\bigcap`S) = `\bigcup`(`\bigcap`S)$$

ist die beschriebene Menge abgeschlossen unter der Bildung von Vereinigungen. Weiter gilt

$$`C`(`\bigcup`(`\bigcap`S)) = `\bigcap`(`C`(`\bigcap`S)) = `\bigcap`(`\bigcup`(`C`S) = `\bigcup`(`\bigcap`(`C`S) = `\bigcup`(`\bigcap`(S)$$

und $\{\emptyset, \Omega\} \in `\bigcup`(`\bigcap`S)$. Damit ist diese Menge eine Algebra und fällt mit $R(S)$ zusammen. □

Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung zwischen Mengen und $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$, $T \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann setzen wir

$$f^*S := \{f^{-1}(A) | A \in S\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \ , \quad f_*T := \{f(B) | B \in T\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega') \ .$$

Definition 1.6. *Seien (Ω, R) und (Ω', R') prämeßbare Räume und $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung zwischen Mengen. Diese Abbildung heißt **meßbar**, wenn $f^*R' \subseteq R$ gilt.*

1. Die Komposition meßbarer Abbildungen ist meßbar.

2. Ist $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung zwischen Mengen und R' eine Algebra, dann ist auch f^*R eine Algebra auf Ω. Beachte, daß im allgemeinen für eine Algebra R auf Ω die Bildung f_*R keine Algebra ist.

3. Ist $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung zwischen Mengen und $S' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$. Dann gilt

   $$f^*R(S') = R(f^*S') \ .$$

   Das Argument ist eine Übungsaufgabe.

4. Sei $(\Omega_i, R_i)_{i \in I}$ eine Familie prämeßbaren Räumen. Wir betrachten $\Omega := \prod_{i \in I} \Omega_i$ und die Projektionen $p_i : \Omega \to \Omega_i$. Sei $S := \bigcup_{i \in I} p_i^*(R_i)$. Dann ist $(\Omega, R(S))$ das Produkt der Famile $(\Omega_i, R_i)_{i \in I}$. $R(S)$ ist die kleinste Algebra, für welche alle Projektionen p_i meßbar sind.

1.1.2 Prämaße

Wir dehnen die additive Struktur von $\mathbb{R}$ auf $[0,\infty] := [0,\infty) \cup \{\infty\}$ aus, indem wir $\infty + x = \infty$ für alle $x \in [0,\infty]$ setzen. Die Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl λ wird durch $\lambda\infty = \infty$ ausgedehnt.

Sei (Ω, R) ein prämeßbarer Raum.

Definition 1.7. *Eine Funktion $\mu : R \to [0,\infty]$ heißt **endlich additiv**, wenn für jede endliche, paarweise disjunkte Familie $(X_i)_{i\in I}$ in R*

$$\sum_i \mu(X_i) = \mu(\bigcup_i X_i)$$

gilt.

Definition 1.8. *Eine endlich additive Funktion $\mu : R \to [0,\infty]$ heißt **Prämaß**.*

Definition 1.9. *Ein Tripel (Ω, R, μ) bestehend aus einer Menge mit Algebra und Prämaß heißt **Prämaßraum**.*

Beispiel 1.10 (Zählprämaß)**.** *Sei Ω eine Menge und $R := \mathcal{P}(\Omega)$. Das Zählprämaß ist durch $\mu(A) := |A|$ gegeben.*

Beispiel 1.11 (Gewichtetes Zählprämaß)**.** *Sei Ω eine Menge, $R := \mathcal{P}(\Omega)$ und $f : \Omega \to [0,\infty]$ eine Gewichsfunktion. Dann definiert*

$$\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty] \;, \quad \mu(A) := \sum_{x\in A} f(x)$$

ein Prämaß auf Ω.

Beispiel 1.12 (Wahrscheinlichkeitsprämaß)**.** *Im Beipiel 1.11 nehmen wir zusätzlich an, daß Ω endlich und $\sum_{x\in\Omega} f(x) = 1$ ist. Das so entstehende Prämaß hat die Eigenschaft $\mu(\Omega) = 1$. In der Wahrscheinlichkeitstheorie könnte man mit diesem Beipiel einen endlichen Raum von Ereignissen modellieren. Der Wert $f(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Einzelereignisses x. Der Wert $\mu(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis in A liegt.*

Beispiel 1.13 (Diracprämaß)**.** *Sei (Ω, R) ein prämeßbarer Raum und $x \in \Omega$. Das Dirac Prämaß δ_x wird durch*

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in A \\ 0 & \textit{falls } x \notin A \end{cases}$$

definiert.

Lemma 1.14. *Sei I gerichtet und $(R_i)_{i\in I}$ eine aufsteigende Familie von Algebren mit der Vereinigung $R := \cup_{i\in I} R_i$. Sei weiterhin $(\mu_i)_{i\in I}$ eine Familie von Prämaßen mit der Verträglichkeitsbedingung $(\mu_i)_{|R_j} = \mu_j$, falls $j \leq i$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Prämaß μ auf R mit $\mu_{|R_i} = \mu_i$ für alle $i \in I$.*

Proof. Die Eindeutigkeit ist klar. Für $A \in R$ existert $i \in I$ mit $A \in R_i$. Wir müssen also $\mu(A) := \mu_i(A_i)$ setzen. Ist $(A_i)_{i\in J}$ eine endliche paarweise disjunkte Familie und $j \in I$ eine obere Schranke von J, dann sind $A_i \in R_j$ für alle $i \in J$, $\cup_{i\in I} A_i \in R_j$, und es gilt

$$\sum_{i\in J} \mu(A_i) = \sum_{i\in J} \mu_j(A_i) = \mu_j(\cup_{i\in I} A_i) = \mu(\cup_{i\in I} A_i) \ .$$

□

1. Ist (Ω, R, μ) ein Prämeßbarer Raum und $\lambda \in (0, \infty)$. Dann ist durch $(\lambda\mu)(A) := \lambda\mu(A)$ für $A \in R$ ein Prämaß $\lambda\mu$ erklärt.

2. Seien (Ω, R) and (Ω', R') prämeßbare Räume und $f : \Omega \to \Omega'$ eine meßbare Abbildung. Ist μ ein Prämaß auf Ω, dann ist durch

   $$f_*\mu(A') := \mu(f^{-1}(A'))$$

   ein Prämaß $f_*\mu$ auf (Ω', R') definiert. Ist $g : (\Omega', R') \to (\Omega'', R'')$ eine weitere meßbare Abbildung, dann gilt $g_*(f_*\mu) = (g \circ f)_*\mu$. Die Verifikationen sind ein Übungsaufgaben.

3. Ist (Ω, R, μ) ein prämeßbarer Raum und $f : U \hookrightarrow \Omega$ die Inklusion einer meßbaren Teilmenge. Dann ist $f^*R = \{A \in R | A \subseteq U\}$ und durch $\mu_{|U}(A) := \mu(A)$ ein Prämaß auf (U, f^*R) gegeben. Diese heißt Einschränkung von μ auf U.

Im allgemeinen ist es kompliziert, ein Prämaß auf allen Elementen des Ringes R anzugeben. Wird ein Ring von S erzeugt, so ist es naheliegend, ein Prämaß zunächst nur auf S vorzugeben und es dann auf $R(S)$ auszudehnen. Wenn S unter Komplementbilden abgeschlossen ist, dann haben die Elemente von $R(S)$ die Form $A = \bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in I} A_{i,j}$. Im allgemeinen kennen wir μ auf den Durchschnitten nicht. Selbst wenn, dann könnte A auf verschiedene Weise in dieser Form geschrieben werden wodurch sich komplizierte Wohldefiniertheitsfragen ergeben.

Wir sehen aber, daß die Situation sehr einfach wird, wenn die Elemente von S paarweise disjunkt sind.

Definition 1.15. *Eine endliche Teilmenge von $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ heißt **Partition**, wenn die Elemente von S paarweise disjunkt sind und die Vereinigung der Elemente von S ganz Ω ergibt.*

Beispiel 1.16. *Die triviale Partition einer Menge Ω ist $\{\emptyset, \Omega\}$. Die chaotische Partition einer endlichen Menge ist $\{\{x\}|x \in \Omega\}$.*

Es folgen einfache Bemerkungen über Partitionen.

1. Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und S' eine Partition von Ω'. Dann ist

$$f^*S' := \{f^{-1}(A)|A \in S'\}$$

   die induzierte Partition von Ω.

2. Ist $S = (S_i)_{i\in I}$ eine Partition, dann hat jedes Element $A \in R(S)$ eine eindeutige Darstellung als Vereinigung von endlich vielen Elementen aus S.

   Wir dafür zeigen zuerst, daß die Menge $R(S)$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von Elementen aus S ist. In der Tat ist diese abgeschlossen unter der Bildung endlicher Vereinigungen und der Komplemente. Die Eindeutigkeit der Darstellung ist klar.

Lemma 1.17. *Sei S eine Partition und $\mu : S \to [0, \infty]$ vorgegeben. Dann besitzt μ eine eindeutige Ausdehnung zu einem auf $R(S)$ definierten Prämaß.*

Proof. Sei $A \in R$. Dann ist $A = \bigcup_{i\in I} S_i$ für eine eindeutig bestimmte Indexmenge I. Wir definieren $\mu(A) := \sum_{i\in I} \mu(S_i)$. Die endliche Additivität von μ ist klar. □

Seien (Ω_i, R_i, μ_i), $i = 0, 1$ prämeßbare Räume und $(\Omega, R) = (\Omega_0, R_0) \times (\Omega_1, R_1)$.

Lemma 1.18. *Es gibt genau ein Prämaß μ auf (Ω, R) mit $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1)$ für alle $A_i \in R_i$. Dieses wird als das Produkt $\mu := \mu_0 \times \mu_1$ bezeichnet.*

Proof. Zuerst einige allgemeine Vorbemerkungen. Sei (Ω, R) ein prämeßbarer Raum. Die Menge $Part(R) := \{S \subseteq R | S \text{ ist Partition von } \Omega\}$ ist halbgeordnet durch $S \leq S'$, falls $S \subseteq R(S')$. In diesem Fall sagen wir, daß S' eine Verfeinerung von S ist.

Die halbgeordnete Menge $Part(R)$ ist gerichtet. In der Tat gibt es für zwei Partitionen $S, S' \in Part(R)$ eine gemeinsame Verfeinerung $S \sharp S' := \{A \cap A' | A \in S \ , A' \in S'\}$. Es gilt nun offensichtlich $R = \bigcup_{S \in Part(R)} R(S)$.

Wir kommen nun zurück in die Situation des Lemmas. Für Partitionen $S_i \in Part(R_i)$ ist $S_0 \times S_1 \in Part(R)$. Auf $R(S_0 \times S_1)$ wird durch $\mu_{S_0,S_1}(A_0 \times A_1) = \mu(A_0)\mu(A_1)$, $A_i \in S_i$ ein Prämaß festgelegt. Ist $S_0 \leq S_0'$, $S_1 \leq S'$, dann gilt $(\mu_{S_0',S_1'})_{|R(S_0 \times S_1)} = \mu_{S_0,S_1}$. Sei etwa $A_0 \in S_0'$ und $A_1 \in S_1$, dann ist $A_0 = \bigcup_{A_0' \in S_0' \ , A_0' \subseteq A_0} A_0'$ und $A_0 \times A_1 = \bigcup_{A_0' \in S_0' \ , A_0' \subseteq A_0} A_0' \times A_1$. Folglich gilt

$$(\mu_{S_0',S_1'})(A_0 \times A_1) = \sum_{A_0' \in S_0' \ , A_0' \subseteq A_0} \mu_0(A_0')\mu_1(A_1) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1) = \mu_{S_0,S_1}(A_0 \times A_1) \ .$$

Wir halbordnen $Part(R_0) \times Part(R_1)$ durch $(S_0, S_1) \leq (S_0', S_1')$, falls $S_0 \leq S_0'$ und $S_1 \leq S_1'$ gilt. Dann ist erstens $R = \bigcup_{(S_0,S_1) \in Part(R_0) \times Part(R_1)} R(S_0 \times S_1)$ und zweitens induziert das System verträglicher Prämaße μ_{S_0,S_1} das gewünschte Prämaß auf R.

Die Eindeutigkeit ist Übungsaufgabe. □

Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum und $A \subseteq \Omega$ eine meßbareTeilmenge.

Definition 1.19. *Das Prämaß μ ist auf A **getragen**, wenn $\mu(\Omega \setminus A) = 0$ gilt.*

Seien (Ω_i, R_i) prämeßbare Räume und $f : \Omega_0 \to \Omega_1$ meßbar. Sei weiter μ ein Maß auf (Ω_0, R_0). Für jedes $A \in R$ mit $f(\Omega_0) \subseteq A$ ist $f_*\mu$ ein auf A getragenes Maß.

Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum.

Definition 1.20. *Eine (nichttriviale) Zerlegung von μ ist eine Darstellung $\mu = \lambda_0\nu_0 + \lambda_1\nu_1$ von μ mit $\lambda_i > 0$ und Prämaßen ν_i, welche auf zueinander disjunkten Mengen getragen sind. Ein Maß, welches keine nichttriviale Zerlegung besitzt, heißt **unzerlegbar**.*

Das Diracprämaß ist ein Beispiel für ein unzerlegbares Prämaß.

1.1.3 Beispiele für Prämaße

Das dyadische Lebesgueprämaß Für $r \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die Partition D_r^1 von $\mathbb{R}$, welche aus den halboffenen Intervallen $[\frac{p}{2^r}, \frac{p+1}{2^r})$ für $p \in \mathbb{Z}$, $-2^{2r} \le p < 2^{2r}$ und der Menge $\mathbb{R} \setminus [-2^{2r}, 2^{2r})$ besteht. Die Partitition D_r^n von $\mathbb{R}^n$ entsteht als n-faches Produkt von D_1. Für $s \ge r$ gilt $D_r^n \subset R(D_s^n)$ und deshalb $R(D_r^n) \subseteq R(D_s^n)$. Wir erhalten somit eine aufsteigende Familie von Algebren $(R(D_r))_{r \in \mathbb{N}}$.

Wir legen ein Prämaß μ_r^1 auf $R(D_r^1)$ durch die Angabe der Werte

$$\mu_r^1([\frac{p}{2^r}, \frac{p+1}{2^r})) := 2^{-r}$$

und $\mu_r^1(A) := \infty$ für die beiden unbeschränkten Teilmengen fest. Auf $(\mathbb{R}^n, R(D_r^n))$ betrachten wir das Produktprämaß $\mu_r^n := \prod_{i=1}^n \mu_r^1$ (Lemma 1.18).

Wir beobachten nun, daß für $r \ge s$ die Verträglichkeit $(\mu_r^1)_{|D_s^1} = \mu_s^1$ gilt. Dies impliziert $(\mu_r^n)_{|R(D_s^n)} = \mu_s^n$.

Sei $R^n := \bigcup_{r \ge 0} R(D_r^n)$.

Definition 1.21. *Das dyadische Lebesgueprämaß auf* $(\mathbb{R}^n, R^n)$ *ist das eindeutig (entsprechend Lemma 1.14) durch die Folge* $(\mu_r^n)_{r \in \mathbb{N}}$ *bestimmte Prämaß.*

Das Haarprämaß auf den p-adischen Zahlen Für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ betrachten wir die endlichen Ringe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Die Inklusion $p^{n+1}\mathbb{Z} \subset p^n\mathbb{Z}$ induziert Projektionen

$$\mathrm{pr}_{n+1} : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ .$$

Wir betrachten nun das gerichtete System

$$\mathcal{Z} : \dots \to \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \dots \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \{1\} \ .$$

Definition 1.22. *Der Ring der p-adischen Zahlen ist durch* $\mathbb{Z}_p := \lim \mathcal{Z}$ *definiert.*

Im Detail ist $\mathbb{Z}_p \subseteq \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ die Teilmenge derjenigen Familien $(a_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\mathrm{pr}_{n+1}(a_{n+1}) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Ringoperationen werden Komponentenweise definiiert.

Wir haben eine Folge von Auswertungehomomorphismen

$$\pi_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ ,$$

$\pi_n((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := a_n$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Partition

$$S_n := \pi_n^* S_{chaot}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

von $\mathbb{Z}_p$, wobei $S_{chaot}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ die chaotische Partition von $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist. Wir legen das Prämaß $\mu_n : R(S_n) \to [0,\infty]$ durch

$$\mu_n(\pi_n^{-1}(x)) := \frac{1}{p^n}\ , x \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

fest. Da $|S_n|$ gerade p^n Elemente hat, ist dies ein Wahrscheinlichkeitsprämaß.

Wir beobachten nun, daß $S_n \subseteq R(S_{n+1})$ und folglich $R(S_n) \subseteq R(S_{n+1})$. Weiter sehen wir ein, daß $(\mu_{n+1})_{|S_n} = \mu_n$ ist. Wir erhalten also eine aufsteigende Folge von Algebren $(R(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen mit einer Folge von verträglichen Prämaßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei $R := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(S_n)$.

Definition 1.23. *Das Haarprämaß μ auf $(\mathbb{Z}_p, R)$ is das (entsprechend Lemma 1.14) durch die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ eindeutig bestimmte Prämaß auf $\mathbb{Z}_p$.*

Durch $k \mapsto ([k]_{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$ erhalten wir eine Einbettung! von $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$. Zum Beispiel ist $p^k\mathbb{Z}_p = \{(a_n)|a_i = 0\ \forall i \le k\}$. Folglich ist $p^k\mathbb{Z}_p = \pi_k^{-1}(\{0\})$ und deshalb $\mu(p^k\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{p^k}$.

Der Schiftraum Sei A eine endliche Menge und $f : A \to [0,1]$. Wir bilden das unendliche Produkt $A^{\mathbb{N}} := \prod_{n\in\mathbb{N}} A$. Die Elemente in $A^{\mathbb{N}}$ sind also die Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ haben wir eine Projektion $p_i : A^{\mathbb{N}} \to A$, $p((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) := a_i$.

Die ersten n Projektionen zusammen geben eine Abbildung $q_n : A^{\mathbb{N}} \to A^n$, $q_n((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) := (a_1, \ldots, a_n)$. Wir betrachten die Partitionen

$$S_n := q_n^* S_{chaot}(A^n)\ ,$$

wobei $S_{chaot}(A^n)$ die chaotische Partition von A^n bezeichnet. Es gilt $S_n \subseteq R(S_{n+1})$. Die Folge $(R(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine aufsteigende Folge von Algebren. Ihre Vereinigung ist die Algebra der Zylindermengen

$$R := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(S_n)\ .$$

Sei nun eine Funktion $f : A \to [0,1]$ mit $\sum_{a\in A} f(a) = 1$ vorgegeben. Durch die Vorschrift

$$\mu_n(q_n^{-1}(a_i)_{i=1,\ldots,n}) := \prod_{i=1}^{n} f(a)$$

legen wir eine Prämaß auf $R(S_n)$. Man rechnet nach, daß $(\mu_{n+1})_{|S_n} = \mu_n$. Die Folge von Prämaßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also in Sinne von Lemma 1.14 verträglich und definiert ein Prämaß auf dem meßbaren Raum $(A^{\mathbb{N}}, R)$.

Dieses Prämaß ist ein Wahrscheinlichkeitsprämaß, d.h es gilt $\mu(A^{\mathbb{N}})$. Mit diesem Beipiel wird folgender Sachverhalt modelliert.

Wir führen ein Experiment mit endlich vielen Ausgängen. Die Menge A ist ein Modell für die Menge dieser Ausgängen. Wir wiederholen das Experiment immer wieder. Im Ergebniss erhalten wir Folgen von Ausgängen, also Elemente von $A^{\mathbb{N}}$. Der Wert der Funktion f im Punkt a beschreibt die Wahrscheinlichkeit, das ein einzelnes Experiment den Ausgang $f(a)$ hat. Das Prämaß auf dem Schiftraum modelliert den Fall, daß alle Experimente unabhängig sind. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß die ersten n Experimente die Folge $(a_1, \ldots, a_n)$ liefern durch $\mu(X) = \mu_n(X)$ gegeben, wobei $X \in S_n$ die Zylindermenge $q_n^{-1}((a_i)_{i=1,\ldots,n})$ ist.

Die leichte Aufgabe der Maßtheorie Man könnte die Frage stellen, ob es auf dem prämeßbaren Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$ ein auf allen beschränkten Teilmengen endliches Prämaß μ gibt mit den folgenden Eigenschaften :

1. Normierung : $\mu(\times_{i=1}^n [0,1]) = 1$
2. Invarianz : Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kongruent, so gilt $\mu(A) = \mu(B)$.

Satz 1.24 (Banach)**.** *Ist $n = 1$ oder $n = 2$, dann gibt es ein solches μ. Es ist aber nicht eindeutig bestimmt*

Satz 1.25 (Hausdorff)**.** *Ist $n \geq 3$, so gibt es kein solches μ.*

Proof. Die Idee hierbei ist es, die Kugel B^3 in vier Teilmengen $Z \cup A \cup B \cup C$ zu zerlegen, wobei Z eine abzählbare Vereinigung von Strahlen ist und damit $\mu(Z) = 0$ gilt, und A, B, C paarweise kongruent sind, aber auch A kongruent zu $B \cup C$ ist. Siehe [Nat81, X.5] □

1.1.4 σ-Algebren

Sei Ω eine Menge

Definition 1.26. *Eine Algebra R auf Ω ist eine **σ-Algebra**, falls R abgeschlossen unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen ist.*

Eine Algebra R ist also eine σ-Algebra, wenn für jede Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweiser disjunkter Elemente in R auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in R$ gilt.

Lemma 1.27. *Eine σ-Algebra R ist abgeschlossen unter der Bildung abzählbarer Vereinigungen und Durchschnitte.*

Proof. Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen von R, nicht notwendig paarweise disjunkt. Dann ist

$$B_i := A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \ , \quad i = 1, \dots$$

eine Folge paarweise disjunkter Elemente von R. Es gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in R$.

Weiter gilt $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_i) \in R$. □

Sei $(R_i)_{i\in I}$ eine Familie von σ-Algebren. Dann ist $R := \bigcap_{i\in I} R_i$ eine σ-Algebra. Mit dieser Beobachtung kann man interessante σ-Algebren explizit beschreiben.

Lemma 1.28. *Sei $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann existiert genau eine kleinste σ-Algebra $R^\sigma(S)$ welche S enthält.*

Proof. Wir erhalten

$$R^\sigma(S) := \bigcap_{R \text{ ist } \sigma\text{-Algebra},\ S \subseteq R} R$$

□

Definition 1.29. *$R^\sigma(S)$ heißt die **von S erzeugte σ-Algebra**.*

Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung zwischen Mengen.

1. Ist R' eine σ-Algebra auf Ω', dann ist f^*R' eine σ-Algbera auf Ω.

2. Für $S' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ gilt $f^*R^\sigma(S) = R^\sigma(f^*S)$.

3. Sei R eine σ-Algebra auf Ω und $S' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$. Dann ist $f : (\Omega, R) \to (\Omega', R^\sigma(S'))$ genau dann meßbar, wenn $f^*S' \subseteq R$ gilt. Die Notwendigkeit ist klar wegen $S' \subseteq R^\sigma(S')$. Die Bedingung ist auch hinreichend, da aus $f^*S' \subseteq R$ auch $f^*R^\sigma(S') = R^\sigma(f^*S') \subseteq R$ folgt.

Definition 1.30. *Ein **meßbarer Raum** ist ein prämeßbarer Raum (Ω, R) dessen Algebra ein σ-Algebra ist.*

1.1.5 Beispiele meßbarer Räume

Borelsche Räume

Definition 1.31. *Ist $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so ist die **Borelsche σ-Algebra** durch $\mathcal{B}_\mathcal{T} := R^\sigma(\mathcal{T})$ gegeben.*

Die Borelsche σ-Algebra enthält unter anderem alle Teilmengen von Ω der Form $U \cap A$ mit offenem U und abgeschlossenen A. Wenn nichts anderes festgelegt wird, dann betrachten wir für einen topologischen Raum immer den unterliegenden meßbaren Raum mit der Borelschen σ-Algebra.

Eine stetige Abbildung $f : (\Omega_0, \mathcal{T}_0) \to: (\Omega_0, \mathcal{T}_1)$ ist meßbar. In der Tat gilt $f^*(\mathcal{T}_1) \subseteq \mathcal{T}_0 \subseteq R^\sigma(\mathcal{T}_0)$.

Sei $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{T} := \mathcal{T}(S)$, $R := R^\sigma(S)$. Dann gilt immer $R \subseteq \mathcal{B}_\mathcal{T}$, da $S \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}_\mathcal{T}$. Die Menge S heißt **Basis** der Topologie $\mathcal{T}$, wenn für jedes $U \in \mathcal{T}$ gilt $U = \bigcup_{V \in S\ , V \subseteq U} V$. Ist S eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{T}$, dann gilt sogar $R = \mathcal{B}_\mathcal{T}$. In der Tat gilt dann nämlich $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$.

Sei jetzt $D^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die dyadische Algebra aus 1.1.3 und $\mathcal{T}^n$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1.32. *$R^\sigma(D^n)$ stimmt mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}^n := R^\sigma(\mathcal{T}^n)$ von $\mathbb{R}^n$ überein.*

Proof. Wir schreiben $[a,b) := (-\infty,b)\cap[a,\infty)$. Damit gilt $D^1 \subseteq \mathcal{B}^1$. Wir schließen daraus leicht $D^n \subseteq \mathcal{B}^n$. Damit gilt $R^\sigma(D^n) \subseteq \mathcal{B}^n$.

Die Menge D^n ist eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen und damit selbst abzählbar. Wir überzeugen uns nun, daß jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ als abzählbare Vereinigung

$$U = \bigcup_{A\in D^n\ ,A\subseteq U} A$$

geschrieben werden kann. Damit gilt $\mathcal{T}^n \subseteq R^\sigma(D^n)$ und folglich $\mathcal{B}^n \subseteq R^\sigma(D^n)$. □

Aufgabe 1.1. *Gilt $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$?*

Die σ-Algebra von $\mathbb{Z}_p$ Wir betrachten nun die Haarsche Algebra R aus 1.1.3 auf $\mathbb{Z}_p$ und ihren Abschluß $\mathcal{B} := R^\sigma(R)$, welche wir als Haarsche σ-Algebra bezeichnen. Sei

$$S := \{p_n^{-1}(x) | n \in \mathbb{N}\ , x \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_p)\ .$$

Dann gilt $R = R(S)$ und folglich $\mathcal{B} = R^\sigma(R(S)) = R^\sigma(S)$.

Für $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ seien

$$\mathtt{mult}_\lambda, \mathtt{add}_\lambda : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$$

durch $\mathtt{mult}_\lambda(x) := \lambda x$ und $\mathtt{add}_\lambda(x) := \lambda + x$ definiert.

Lemma 1.33. *Für $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ sind die Abbildungen $\mathtt{mult}_\lambda, \mathtt{add}_\lambda : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ meßbar.*

Proof. Sei $p_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ die Projektion und $A := p_n^{-1}(x) \in S$. Dann ist

$$\mathtt{mult}_\lambda^{-1}(A) = \{u \in \mathbb{Z}_p | p_n(\lambda u) = x\} = p_n^{-1}(\{y \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} | p_n(\lambda)y = x\}) \in \mathcal{B}$$

und

$$\mathtt{add}_\lambda^{-1}(A) = \mathtt{add}_{-\lambda}(A) = p_n^{-1}(x - p_n(\lambda)) \in \mathcal{B}\ .$$

□

Man kann auf $\mathbb{Z}_p = \lim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ die Limestopologie einführen. Dies ist die gröbste Topologie, unter welcher die Projektionen $p_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig sind.

Dann wird $\mathbb{Z}_p$ ein topologischer Ring (die Ringoperationen sind stetig). Die Haarsche σ-Algebra ist dann genau die Borelsche σ-Algebra von $\mathbb{Z}_p$. In der Tat ist $S := \{p_n^{-1}(x) | n \geq 0 \, , x \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_p)$ eine abzählbare Basis der Topologie von $\mathbb{Z}_p$ und erzeugt auch die Haarsche σ-Algebra.

Die σ-Algebra der Zylindermengen auf dem Schiftraum Wir betrachten den Schiftraum $A^{\mathbb{N}}$ mit der Algebra der Zylindermengen R, welchen wir in 1.1.3 eingeführt haben. Die σ-Algebra der Zylindermengen ist durch $\mathcal{B} := R^\sigma(R)$ gegeben. Die endliche Menge A versehen wir mit der diskreten Topologie. Dann hat $A^{\mathbb{N}}$ die Produkttopologie, also die gröbste Topologie, für die die Projektionen $p_n : A^{\mathbb{N}} \to A$ stetig sind. Die abzählbare Menge $S := \{p_n^{-1}(a) | n \in \mathbb{N} \, , a \in A\} \subseteq \mathcal{P}(A^{\mathbb{N}})$ ist eine Basis der Produkttopologie und erzeugt die σ-Algebra der Zylindermengen. Folglich ist $\mathcal{B}$ auch die Borelsche σ-Algebra des topologischen Produkts $A^{\mathbb{N}}$.

Wir betrachten nun die Transformation

$$T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}} \ , \quad T(a_i)_{i=1}^\infty = (a_{i+1})_{i=1}^\infty \ ,$$

die Verschiebung.

Lemma 1.34. *Die Verschiebung T ist meßbar (und stetig).*

Proof. Sei $q_n : A^{\mathbb{N}} \to A^n$ die Projektion und $x = (a_i)_{i=1}^n \in A^n$. Die Menge $q_n^{-1}(x)$ ist eine Zylindermenge des Erzeugendensystems sowohl der σ-Algebra als auch der Topologie von $A^{\mathbb{N}}$. Wir sehen nun ein, daß

$$T^{-1}(q_n^{-1}(x)) = \bigcup_{a \in A} q_{n+1}^{-1}(a, a_1, \ldots, a_n)$$

eine endliche Vereinigung von Zylindermengen und damit sowohl meßbar als auch offen ist. □

Hier ist eine andere interessante meßbare Funktion. Wir nehmen an, daß $A := \{+1, -1\}$. Der Raum $A^{\mathbb{N}}$ modelliert eine Folge von Entscheidungen für 1 oder -1. Wir betrachten jetzt den Prozeß in $\mathbb{R}$, in welchem wir im n-ten Schritt entsprechend der n-ten Entscheidung um 2^{-n} Einheiten nach rechts order links wandern. Der Endpunkt der Wanderung wird durch

$$W : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} \ , W((a_i)_{i=1}^{\infty}) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}$$

beschrieben.

Lemma 1.35. *Die Funktion $W : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ ist stetig und damit meßbar.*

Proof. Sei $x \in A^n$ und $\delta > 0$ vorgegeben. Wir wählen $n > 0$ derart, daß $2^{-n} < \delta$. Dann gilt für alle $y \in q_n^{-1}(q_n(x))$ (dies ist eine offene Umgebung von x) die Ungleichung

$$|W(x) - W(y)| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-n} < \delta \ .$$

□

Das Produkt meßbarer Räume Sei $(X_i, R_i)_{i\in I}$ eine Familie meßbarer Räume und $X := \times_{i\in I} X_i$. Seien $p_i : X \to X_i$ die Projektionen. Auf R können wir die kleinste σ-Algebra R betrachten, bezüglich welcher diese Projektionen meßbar sind. Es gilt

$$R := R^{\sigma}(\bigcup_{i\in I} p_i^* R_i) \ .$$

Definition 1.36. *Der meßbare Raum (X, R) ist das* ***Produkt der meßbaren Räume*** *$(X_i, R_i)_{i\in I}$.*

Zum Beispiel ist der meßbare Raum $(A^{\mathbb{N}}, R)$ aus 1.1.5 das Produkt aus abzählbar vielen Kopien von $(A, \mathcal{P}(A))$.

Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $R_i = \mathcal{B}_i$ die Borelsche σ-Algebra. Dann können wir die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf X betrachten:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\bigcup_{i\in I} p^* \mathcal{T}_i) \ .$$

Es ist klar, daß (siehe Beweis von 1.37)

$$\mathcal{B} \subseteq R^{\sigma}(\mathcal{T})$$

gilt. Im allgemeinen ist diese Inklusion aber echt.

Gleichheit gilt unter zusätzlichen Voraussetzungen.

Lemma 1.37. *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$, topologische Räume mit abzählbarer Basis und $(X_1 \times X_2, \mathcal{T})$ das topologische Produkt. Seien $(X_i, \mathcal{B}_i)$ die assoziierten Borelschen Räume mit dem Produkt $(X_1 \times X_2, \mathcal{B})$. Dann gilt $\mathcal{B} = R^\sigma(\mathcal{T})$.*

Proof. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= R^\sigma(p_1^*(\mathcal{B}_1) \cup p_2^*(\mathcal{B}_2)) \\ &= R^\sigma(p_1^*(R^\sigma(\mathcal{T}_1)) \cup p_2^*(R^\sigma(\mathcal{T}_2))) \\ &= R^\sigma(R^\sigma(p_1^*(\mathcal{T}_1)) \cup R^\sigma(p_2^*(\mathcal{T}_2))) \\ &= R^\sigma(p_1^*(\mathcal{T}_1) \cup p_2^*(\mathcal{T}_2)) \\ &\subseteq R^\sigma(\mathcal{T}) \end{aligned}$$

Seien S_i, $i = 1, 2$, abzählbare Basen der Topologien $\mathcal{T}_i$. Dann ist $S = S_1 \times S_2$ eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{T}$. Auf der anderen Seite ist $S \subseteq \mathcal{B}$ (beachte, daß $A \times B = A \times \Omega_2 \cap \Omega_1 \times B$ gilt). Damit ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$ und deshalb $R^\sigma(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{B}$. □

1.1.6 Meßbare Funktionen und punktweise Konvergenz

Wir betrachten einen meßbaren Raum (Ω, R). Den Raum der erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ versehen wir mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$.

Lemma 1.38. *Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist meßbar, falls die Teilmengen $f^{-1}(a, \infty] \subseteq \Omega$ für alle $a \in \bar{\mathbb{R}}$ meßbar sind.*

Proof. Die Mengen $((a, \infty])_{a \in \bar{\mathbb{R}}}$ erzeugen $\mathcal{B}$. □

Lemma 1.39. *Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen, dann sind die Funktion $v := \sup_{n \geq 1} f_n$ und $u := \inf_{n \geq 1} f_n$ meßbar.*

Proof. Wir fixieren $a \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := f_n^{-1}[-\infty, a]$. Nach Voraussetzung gilt $A_n \in R$. Es gilt $v^{-1}[-\infty, a] = \bigcap_{n \geq 1} A_n \in R$. Damit ist v meßbar.

Für u argumentiert man ähnlich oder durch Ersetzen von f durch $-f$. □

Folgerung 1.40. *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (fallende) Folge meßbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist der punktweise Grenzwert $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ auch meßbar.*

Proof. Es gilt $f = \sup_{n\geq 1} f_n$. □

Satz 1.41. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge meßbarer Funktionen. Dann ist $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ meßbar.*

Proof. Wir definieren eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $v_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ durch $v_n(x) := \sup_{i\geq n} f_n(x)$. Nach 1.39 sind die Funktionen v_n meßbar. Die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und es gilt $f = \lim_{n\to\infty} v_n$. Nach Korollar 1.40 ist f meßbar. □

1.1.7 Maße

Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum.

Definition 1.42. *Das Prämaß μ heißt **σ-additiv**, falls für jede paarweise disjunkte abzählbare Familie $(A_i)_{i\in I}$ mit $A_i \in R$ für alle $i \in I$ und $A := \bigcup_{i\in I} A_i \in R$ gilt:*

$$\mu(A) = \sum_i \mu(A_i) \ .$$

Definition 1.43. *Ein **Maß** ist ein σ-additives Prämaß auf einem meßbaren Raum (Ω, R). Das Tripel (Ω, R, μ) heißt **Maßraum**.*

1. Sei (Ω, R, μ) ein σ-additiver Prämaßraum. Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von meßbaren Teilmengen mit $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in R$. Dann gilt

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(A) \ .$$

   In der Tat ist $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $B_i := A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ eine paarweise disjunkte Familie mit $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ und es gilt $\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{i} \mu(B_j)$. Folglich gilt $\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

2. Sei $f : (\Omega, R) \to (\Omega', R')$ meßbar und μ ein Maß auf (Ω, R). Dann ist $f_*\mu$ ein Maß auf (Ω', R').

3. Ist $g : (\Omega', R') \to (\Omega'', R'')$ meßbar, dann gilt $(g \circ f)_*\mu = g_*(f_*\mu)$.

4. Eine Abbildung $f : (\Omega, R, \mu) \to (\Omega', R', \mu')$ zwischen Maßräumen heißt maßerhaltend, wenn $f_*\mu = \mu'$ gilt.

Um die σ-Additivität eines Prämaßes nachzuprüfen, kann man gelegentlich folgendes Kriterium benutzen.

Lemma 1.44. *Sei (Ω, R, μ) ein prämeßbarer Raum und $\mu(\Omega) < \infty$. Dann ist das Prämaß μ ist σ-additiv genau dann, wenn*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$$

für jede absteigende Folge $(A_i)_{i=1}^\infty$, $A_i \in R$,

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

mit $\bigcap_{i=1}^\infty A_i = \emptyset$ gilt.

Proof. Sei μ zunächst σ-additiv und $(A_i)_{i=1}^\infty$ eine absteigende Folge wie oben. Dann ist $(A_i \setminus A_{i+1})_{i=1}^\infty$ eine paarweise disjunkte Folge mit $A_1 = \cup_{i=1}^\infty (A_i \setminus A_{i+1})$. Wir erhalten

$$\mu(A_1) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i \setminus A_{i+1}) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) - \mu(A_{i+1}) = \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \ .$$

Folglich $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$.

Möge nun umgekehrt μ die im Lemma angegebene Bedingung erfüllen. Sei $(A_i)_{i=1}^\infty$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente aus R mit $\bigcup_{i=1}^\infty A_i =: A \in R$. Wir setzen $B_k := A \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_k$. Dann ist $A = B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ absteigend und es gilt $\bigcap_{k=1}^\infty B_k = \emptyset$. Wir betrachten die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \cup B_k = A$ und rechnen

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k-1} \mu(A_k) + \mu(B_k) \ .$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$ gilt $\mu(A) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$. □

Wenn das Maß von Ω nicht endlich ist, dann muß man das Kriterium auf endliche Teilprämaßräume anwenden. Sei (Ω, R) eine (σ-)Algebra und $F \in R$. Mit $i : F \to \Omega$ bezeichnen wir die Einbettung. Dann ist $R_{|F} := i^*R$ eine (σ-)Algebra auf F. Es gilt $R_{|F} = \{A \cap F \mid A \in R\} \subset R$. Die Einschränkung $\mu_{|F} := \mu_{|R_{|F}}$ ist ein Prämaß (Maß) auf $(F, R_{|F})$.

Definition 1.45. *$(F, R_{|F}, \mu_{|F})$ wird die* ***Einschränkung*** *von (Ω, R, μ) auf F genannt.*

Lemma 1.46. *Sei (Ω, R, μ) ein prämeßbarer Raum. Sei $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in R derart, daß $\lim_{i\to\infty} \mu(F_i \cap A) = \mu(A)$ für jedes $A \in R$ und $(F_i, R_{|F_i}, \mu_{|F_i})$ σ-additiv ist. Dann ist das Prämaß μ ist σ-additiv.*

Proof. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare paarweise disjunkte Familie in R und $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in R$. Dann gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap F_i) = \mu(A \cap F_i) \ .$$

Da Summen und monotone Grenwerte vertauscht werden können, gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap F_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A \cap F_i) = \mu(A) \ .$$

□

1.1.8 Beispiele von σ-additiven Prämaßen

Beispiel 1.47. *Sei (Ω, R) ein prämeßbarer Raum und $x \in \Omega$. Das Diracmaß δ_x σ-additiv ist.*

Das Lebesgueprämaß Sei $(\mathbb{R}^n, D^n, \mu^n)$ das dyadische Lebesguesche Prämaß auf $\mathbb{R}^n$ (siehe 1.1.3).

Lemma 1.48. *Das dyadische Lebesguesche Prämaß ist σ-additiv.*

Proof. Wir betrachten den Fall $n = 1$ und schreiben $\mu := \mu^1$. Der höherdimensionale Fall kann mit der gleichen Idee behandelt werden, erfordert aber eine kompliziertere Notation.

Zuerst schöpfen wir $\mathbb{R}$ durch die Folge $F_m := [-2^m, 2^m]$, $m \in \mathbb{N}$ aus. Dann gilt für jedes $A \in D^1$

$$\lim_{m\to\infty} \mu(A \cap F_m) = \mu(A) \ .$$

In der Tat, wenn A beschränkt ist, dann stabilisiert sich die Folge $A \cap F_i$. Ist A unbeschränkt, dann gilt $\lim_{m\to\infty} \mu(A \cap F_m) = \infty = \mu(A)$.

Nach Lemma 1.46 reicht es aus, die σ-Additivität von $\mu_{|F_m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Dazu verwenden wir das Kriterium 1.44.

Wir fixieren nun $m \in \mathbb{N}$. Ein Element $A \in D^1_{|F_m}$ ist eine endliche Vereinigung von dyadischen Intervallen der Form $I = [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k})$. Für ein solches Intervall und $r > k$ definieren wir

$$o_r(I) := [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} - \frac{1}{2^r}) \ .$$

Dann gilt $o_r(I) \in D$, $\overline{o_r(I)} \subset I$ und $\mu(I) - \mu(o_r(I)) = 2^{-r}$.

Sei jetzt $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ eine absteigende Folge von Elementen aus D mit $\bigcap_{i=1}^\infty A_i = \emptyset$. Wir nehmen an, daß $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \alpha > 0$ gilt und konstruieren einen Widerspruch. Wir stellen A_k als Vereinigung von c dyadischen Intervallen $I_1, \dots, I_c$ dar und bilden $A'_k \subset A_k$ durch Ersetzen dieser Intervalle I_j durch $o_r(I_j)$, wobei wir r so groß wählen, daß $c2^{-r} < \alpha 2^{-k-1}$ gilt. Dann ist $A' \in D$, $\bar{A}' \subset A$ und $\mu(A) - \mu(A') < \alpha 2^{-k-1}$. Wir definieren nun $B'_k := \bigcap_{i=1}^k A'_k \in D$. Dann gilt $\bar{B}_k \subset A_k$,

$$A_k \setminus B_k \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_k \setminus A'_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_i \setminus A'_i$$

und damit

$$\mu(B_k) \geq \mu(A_k) - \sum_{i=1}^k \mu(A_i \setminus A'_i) \geq \mu(A_k) - \sum_{i=1}^k \alpha 2^{-i-1} \geq \alpha(1 - \frac{1}{2}) = \frac{\alpha}{2}$$

Insbesondere ist $\bar{B}_k \neq \emptyset$. $(\bar{B}_k)_{k=1}^\infty$ ist eine absteigende Familie nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wegen der Vollständigkeit (Intervallschachtelungsaxiom) von $\mathbb{R}$ ist der Durchschnitt der $\bar{B}_k$ nicht leer. Es folgt

$$\emptyset = \bigcap_{i=k}^\infty A_k \supseteq \bigcap_{i=k}^\infty \bar{B}_k \neq \emptyset$$

und dies ist der gewünschte Widerspruch. □

Das Haarsche Prämaß auf $\mathbb{Z}_p$ Wir betrachten das Haarsche Prämaß $(\mathbb{Z}_p, R, \mu)$ (siehe 1.23)

Lemma 1.49. *Das Haarsche Prämaß auf $\mathbb{Z}_p$ is σ-additiv.*

Proof. Sei $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ eine absteigende Folge aus Elementen aus R mit $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$. Wir zeigen, daß dann $A_i = \emptyset$ für genügend große i gilt. Wir nehmen das Gegenteil an.

Wir konstruieren induktiv eine Folge (x_n), $x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, mit folgenden Eigenschaften:

1. $q_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$ unter $q_{n+1} : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
2. $x_n \in p_n(A_i)$ für alle $i \geq 1$ unter $p_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

Seien $x_1, \dots, x_n$ schon konstruiert. Wir benutzen, daß eine absteigende Folge von nicht-leerenTeilmengen einer endlichen Menge einen nichtleeren Durschschnitt hat. Wir wählen $x_{n+1} \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} q_{n+1}^{-1}(x_n) \cap p_{n+1}(A_i)$. Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ definiert ein Element $x \in \mathbb{Z}_p$.

Sei $i \in \mathbb{N}$ fix. Es gilt

$$p_n(x) = x_n \in p_n(A_i) \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Nun gibt es nach Konstruktion der Algebra R in 1.1.3 ein $m \in \mathbb{N}$ derart, daß $A_i \in R(p_m^*(S_{chaot}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})))$ ist. Folglich ist $A_i = p_m^{-1}(p_m(A_i))$ und damit $x \in p_m^{-1}(x_m) \subseteq p_m^{-1}(p_m(A_i)) = A_i$.

Damit gilt $x \in \bigcap_{i\geq 1} A_i = \emptyset$ liegt. Dies ist ein Widerspruch.

Damit ist $\mu(A_i) = \mu(\emptyset) = 0$ für genügend große i. □

σ-Additivität des Prämaßes auf dem Schiftraum Wir betrachten das Maß μ auf dem Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, R)$ wie in 1.1.3 eingeführt.

Lemma 1.50. *Dieses Maß ist σ-additiv.*

Proof. Ist $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ eine absteigende Folge von Elementen aus R mit $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, dann zeigen wir wie im Fall der p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$, daß es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $A_i = \emptyset$ für $i \geq i_0$ gilt. Daraus folgt die σ-Additivität von μ unmittelbar.

Beispiele für ein nicht σ-additive Maße Wir betrachten die Algebra $P(\mathbb{N})$ auf $\mathbb{N}$ und das Prämaß

$$\mu(A) := \begin{cases} \infty & |A| = \infty \\ \sum_{n\in A} 2^{-n} & |A| < \infty \end{cases} .$$

Dieses Prämaß ist nicht σ-additiv. Zum Beispiel ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 1$, aber $\mu(\mathbb{N}) = \infty$.

Ein weniger triviales, aber wichtiges Beispiel ist mit dem Begriff eines Ultrafilters verbunden.

Definition 1.51. *Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ heißt **nicht-trivialer Filter**, wenn sie folgende Eigenschaften hat.*

1. *$\emptyset \notin \mathcal{F}$*
2. *$A \in \mathcal{F}$ und $A \subset B$ impliziert $B \in \mathcal{F}$.*
3. *Für jede endliche Familie (A_i) in $\mathcal{F}$ ist $\bigcap_i A_i \in \mathcal{F}$.*
4. *Für jeden Punkt $i \in \mathbb{N}$ gibt es ein $A \in \mathcal{F}$ mit $i \notin A$.*

Die Menge der Filter ist durch Inklusion halbgeordnet und nicht leer. Zum Beispiel ist die Menge $\{A \subset \mathbb{N} | |\mathbb{N} \setminus A| < \infty\}$ ein Filter.

Definition 1.52. *Ein maximaler nicht-trivialer Filter heißt nicht-trivialer **Ultrafilter**.*

Die Existenz von Ultrafiltern zeigt man mit dem Zornschen Lemma. Sei $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ eine Kette von nicht-trivialen Filtern. Dann ist $\bigcup_i \mathcal{F}$ ein nicht-triviales Filter und eine obere Schranke der Kette. Dies zeigt die Voraussetzung des Zornschen Lemmas.

Lemma 1.53. *Sei nun $\mathcal{F}$ ein nicht-trivialer Ultrafilter. Dann gilt für eine Partition $\{A, B\}$ von $\mathbb{N}$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$.*

Proof. In der Tat, wenn A und B in $\mathcal{F}$ enthalten wären, so auch $\emptyset = A \cap B$. Sei nun weder A noch B in $\mathcal{F}$. Dann gilt für alle $U \in \mathcal{F}$, daß $U \cap A \neq \emptyset$. Wäre nämlich $A \cap U = \emptyset$, so $U \subseteq B$ und damit $B \in \mathcal{F}$. Wir bilden $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \{U \subset \mathbb{N} \,|\, \exists V \in \mathcal{F} \text{ mit } A \cap V \subseteq U\}$. Dann ist $\mathcal{F}'$ ein Filter und $\mathcal{F}$ wäre nicht maximal. □

Wir definieren nun ein Wahrscheinlichkeitsprämaß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ durch $\mu(A) = 0$ für $A \notin \mathcal{F}$ und $\mu(A) = 1$ für $A \in \mathcal{F}$.

Lemma 1.54. *μ ist additiv, aber nicht σ-additiv.*

Proof. Die Additivität ist klar, da $\mathcal{F}$ kein Paar disjunkter Mengen enthält. Wir wählen nun eine Folge $A_i \in \mathcal{F}$ mit $i \notin A_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann bilden wir $B_i := \bigcap_{j=1}^{i} A_j \in \mathcal{F}$. Die Folge $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ is absteigend und erfüllt $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$. Es gilt weiter $\lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = 1$. Damit kann μ nicht σ-additiv sein. □

1.1.9 Ausdehnung von Maßen, Eindeutigkeit

σ-Endlichkeit Wir hatten gesehen, daß man ein Prämaß von einer Partition S auf die von S erzeugte Algebra $R(S)$ ausdehnen kann. Wir wollen nun die Frage studieren, ob man ein auf einer Algebra R gegebenes Prämaß zu einem Maß auf die von R erzeugte σ-Algebra $R^\sigma := R^\sigma(R)$ ausdehnen kann, und ob diese Ausdehnung eindeutig ist. Für den Nachweis der Eindeutigkeit der Fortsetzung ist der folgende Begriff nützlich.

Definition 1.55. *Ein Prämaßraum (Ω, R, μ) heißt **σ-endlich**, wenn es eine aufsteigende Folge $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in R gibt mit $\Omega = \bigcup_i F_i$ und $\mu(F_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*

Wenn $\mu(\Omega) < \infty$ gilt, so ist (Ω, R, μ) trivialerweise σ-endlich. So sind der Haarsche Prämaßraum $(\mathbb{Z}_p, R, \mu)$ und der Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, R, \mu)$ aus diesem Grund σ-endlich.

Lemma 1.56. *Der dyadische Lebesgueprämaßraum $(\mathbb{R}^n, D^n, \mu^n)$ ist σ-endlich.*

Proof. Wir können die Folge $F_i := [-2^i, 2^i)^n$ nehmen. □

Hier ist Beispiel eines nicht σ-endlichen Prämaßraumes.

Beispiel 1.57. *Sei R die Algebra auf $\mathbb{R}$, welche von allen endlichen Teilmengen erzeugt wird. Wir definieren $\mu : R \to [0, \infty]$ durch $\mu(A) := \sharp(A \cap \mathbb{N})$. Dann ist $(\mathbb{R}, R, \mu)$ nicht σ-endlich.*

Proof. Wir betrachten die Menge $S \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ aller Teilmengen, die entweder endlich sind oder endliches Komplement haben. Dann gilt $R = R(S)$ und jedes Element von R ist eine endliche Vereinigung von endlichen Durchschnitten aus S. Diese Mengen sind entweder selbst endlich oder haben endliches Komplement. Sei $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ überabzählbare Kardinalität hat, muß eine der Mengen F_i unendlich und damit ein endliches Komplement haben. Folglich gilt $|F_i \cap \mathbb{N}| = \infty$.

Ausdehnung von Maßen - Motivation der Voraussetzungen Wir beginnen die Diskussion der Ausdehnung von Maßen mit zwei instruktiven Beispielen.

Wir betrachten den Prämaßraum $(\mathbb{R}, R, \mu)$ aus 1.57. Sei $R^\sigma := R^\sigma(R)$. Wir definieren $\tilde{\mu}_0$ auf R^σ durch $\tilde{\mu}_0(A) = \sharp(A \cap \mathbb{N})$.

Lemma 1.58. *$\tilde{\mu}_0$ ist ein Maß auf R^σ ist, welches μ ausdehnt.*

Proof. Daß $\tilde{\mu}_0$ das Prämaß μ ausdeht, folgt unmittelbar aus der Definition. Sei nun $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Familie in R^σ. Dann gilt offensichlich

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}_0(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |A_i \cap \mathbb{N}| = |\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \cap \mathbb{N}| = \tilde{\mu}_0(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \ .$$

. □

Wir definieren $\tilde{\mu}_1 : R^\sigma \to [0, \infty]$ durch

$$\tilde{\mu}_1(A) := \begin{cases} \tilde{\mu}_0(A) & A \text{ höchstens abzählbar} \\ \infty & A \text{ überabzählbar} \end{cases}$$

Lemma 1.59. *$\tilde{\mu}_1$ ist ein Maß auf R^σ ist, welches μ ausdehnt.*

Proof. Daß $\tilde{\mu}_1$ eine Ausdehnung ist, sieht man wieder unmittelbar ein. Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Folge in R^σ. Wenn einer Ausdrücke

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}_1(A_i) \ , \quad \tilde{\mu}_1(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$$

endlich sind, dann sind alle Mengen A_i höchstens abzählbar. In diesem Fall gilt

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}_1(A_i) = \tilde{\mu}_1(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$$

wie bei $\tilde{\mu}_0$. $\square$

Man sieht leicht ein, daß $\tilde{\mu}_0 \neq \tilde{\mu}_1$. In der Tat gilt $\tilde{\mu}_0(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = 0$ und $\tilde{\mu}_1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = \infty$.

Eindeutige Ausdehnung für σ-endliche Prämaße

Satz 1.60. *Sei (Ω, R, μ) ein σ-endlicher Prämaßraum. Wenn μ eine Ausdehnung auf $R^\sigma := R^\sigma(R)$ besitzt, so ist diese eindeutig.*

Proof. Wir zeigen zunächst :

Lemma 1.61. *Die Aussage des Satzes gilt unter der Voraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$.*

Proof. Seien $\mu_i, i = 0, 1$ zwei solche Ausdehnungen. Wir betrachten $T := \{A \in R^\sigma | \mu_0(A) = \mu_1(A)\}$. Klar ist $R \subseteq T$. Wenn wir zeigen, daß T eine σ-Algebra ist, so gilt $T = R^\sigma$ und deshalb $\mu_0 = \mu_1$.

Offensichtlich ist $\emptyset \in T$ und $\Omega \in T$. Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Elemente von T und $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Dann ist

$$\mu_0(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_0(A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_1(A_i) = \mu_1(A) \ .$$

Folglich gilt $A \in T$.

Sei $A \in T$ und $A^c := \Omega \setminus A$. Dann gilt wegen $\mu(\Omega) < \infty$, daß $\mu_0(A^c) = \mu_0(\Omega) - \mu_0(A) = \mu_1(\Omega) - \mu_1(A) = \mu_1(A^c)$. Also gilt $A^c \in T$.

Folglich ist T abgeschlossen unter Komplementen und abzählbaren disjunkten Vereinigungen, also eine σ-Algebra. $\square$

Wir beweisen nun den Satz im allgemeinen Fall. Seien μ_i, $i = 0, 1$, wieder zwei Ausdehnungen. Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in R von Mengen endlichen Prämaßes mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \Omega$. Sei

$$T := \{A \subseteq \Omega \mid A \cap F_n \in R^\sigma(R_{|F_n}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Wir zeigen, daß $R^\sigma \subseteq T$. Erst einmal gilt $R \subseteq T$. In der Tat, wenn $A \in R$ ist, so gilt $A \cap F_n \in R_{|F_n} \subseteq R^\sigma(R_{|F_n})$ für alle n. Sei jetzt $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie in T. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}$, daß $A_i \cap F_n \in R^\sigma(R_{|F_n})$ und damit für jedes n, daß $(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \cap F_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cap F_n) \in R^\sigma(R_{|F_n})$. Also ist T abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen. Sei $A \in T$. Damit gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A^c \cap F_n = F_n \setminus (A \cap F_n) \in R^\sigma(R_{|F_n})$. Damit ist T abgeschlossen unter der Bildung von Komplementen. T ist also eine σ-Algebra welche R enthält und folglich gilt $R^\sigma \subseteq T$.

Wegen $R_{|F_n} \subseteq (R^\sigma)_{|F_n}$ gilt auch $R^\sigma(R_{|F_n}) \subseteq (R^\sigma)_{|F_n}$. Damit sind $(F_n, R^\sigma(R_{|F_n}), \mu_{i|R^\sigma(R_{|F_n})})$ Ausdehnungen von $(F, R_{|F_n}, \mu_{|R_{F_n}})$. Mit dem Lemma schließen wir, daß

$$\mu_{0|R^\sigma(R_{|F_n})} = \mu_{1|R^\sigma(R_{|F_n})} \ .$$

Sei jetzt $A \in R^\sigma$. Dann gilt $A \in T$, also für jedes $n \in \mathbb{N}$, daß $A \cap F_n \in R^\sigma(R_{|F_n})$. Wir schließen aus der σ-Additivität der μ_i, daß

$$\mu_0(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_0(A \cap F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(A \cap F_n) = \mu_1(A) \ .$$

□

1.1.10 Äußere Maße, Ausdehnung von Prämaßen zu Maßen, Vollständigkeit

Äußere Erweiterungen Die Frage der Existenz einer solchen Ausdehnung ist etwas komplizierter und wird im folgenden untersucht. Notwendig ist sicherlich, daß μ schon σ-additiv ist. Wir werden erst jedem Prämaß ein äußeres Maß zuordnen und dann jedem äußeren Maß ein Maß auf einer assoziierten σ-Algebra. Dies liefert dann die Existenzaussage.

Definition 1.62. *1. Eine Abbildung $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ heißt* ***monoton****, falls aus $A \subseteq B$ die Ungleichung $\tilde{\mu}(A) \le \tilde{\mu}(B)$ folgt.*

2. $\tilde{\mu}$ heißt ***(σ-)subadditiv****, falls $\tilde{\mu}(\bigcup_i A) \le \sum_i \tilde{\mu}(A_i)$ für jede endliche (abzählbare) Familie (A_i) von Teilmengen gilt.*

3. Eine monotone und σ-subadditive Abbildung $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ mit $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$ heißt ***äußeres Maß***

Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum.

Definition 1.63. *Wir definieren die* ***äußere Erweiterung*** $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ *durch*

$$\tilde{\mu}(A) := \inf\{\sum_i \mu(F_i)\} \ , A \in \mathcal{P}(\Omega) \ ,$$

wobei das Infimum über alle abzählbaren Familien $(F_i)_i$ *mit* $F_i \in R$ *für alle* i *und* $A \subseteq \bigcup_i F_i$ *gebildet wird.*

Lemma 1.64. *Die äußere Erweiterung* $\tilde{\mu}$ *in 1.63 ist ein äußeres Maß.*

Proof.

1. Die Gleichung $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$ gilt, da das Infimum für eine Familie leerer Mengen angenommen wird.

2. Die Funktion $\tilde{\mu}$ is monoton. Wenn nämlich $A \subseteq B$ gilt, dann ist die Menge, über die das Infimum für $\tilde{\mu}(B)$ gebildet wird, in der entsprechenden Menge für $\tilde{\mu}(A)$ enthalten, woraus $\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(B)$ folgt.

3. Die äußere Erweiterung $\tilde{\mu}$ ist σ-subadditiv: Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Familie von Teilmengen, $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Seien $(F_{i,j})_{j \in J_i}$ abzählbare Familien von Elementen aus R mit $A_i \subseteq \bigcup_{j \in J_i} F_{i,j}$ für alle $i \in I$. Dann gilt $A \subseteq \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} F_{i,j}$ und

$$\tilde{\mu}(A) \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \mu(F_{i,j}) \ .$$

Daraus folgt

$$\tilde{\mu}(A) \leq \sum_{i \in I} \inf \sum_{j \in J_i} \mu(F_{i,j})$$

wobei das Infimum der rechten Seiten über alle Wahlen der Familien $(F_{i,j})_{j \in J_i}$ gebildet wird. Also gilt

$$\tilde{\mu}(A) \leq \sum_{i \in I} \tilde{\mu}(A_i) \ .$$

□

Wir vergleichen nun das Prämaß μ mit seiner äußeren Erweiterung.

Lemma 1.65.

1. *Es gilt* $\tilde{\mu}_{|R} \leq \mu$.

2. *Wenn* (Ω, R, μ) *ein* σ*-additiver Prämaßraum ist, dann gilt* $\tilde{\mu}_{|R} = \mu$.

Proof. Für die erste Ungleichung beobachten wir, daß für $A \in R$ die Familie $\{A\}$ für die Infimumbildung bei $\tilde{\mu}(A)$ zugelassen ist. Daraus folgt $\tilde{\mu}(A) \leq \mu(A)$. Wir nehmen nun an, daß μ ein σ-additives Prämaß ist. Sei $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie in R mit $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$. Wir bilden $B_i := A \cap (F_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} F_j)$. Dann ist $B_i \in R$, die Mengen sind paarweise disjunkt und $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = A$. Wir schließen, daß

$$\mu(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(F_i) \ .$$

Also gilt auch $\mu(A) \leq \tilde{\mu}(A)$. □

Die Voraussetzung der σ-Additivität im zweiten Teil dieses Lemmas ist wichtig. Betrachten wir das erste Beispiel eines nicht σ-additiven Prämaßes auf $\mathbb{N}$ in 1.1.8. In diesem Fall ist

$$\tilde{\mu}(\mathbb{N}) = 1 \ , \quad \mu(\mathbb{N}) = \infty \ .$$

Zerlegende Mengen Sei jetzt $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf Ω. Wir schreiben $S^c := \Omega \setminus S$ für das Komplement von $S \subseteq \Omega$.

Definition 1.66. *Eine Menge $S \in \mathcal{P}(\Omega)$ heißt zerlegend (bez. $\tilde{\mu}$), falls für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt :*

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c) \ .$$

Mit $R_{\tilde{\mu}}$ bezeichnen wir die Menge aller zerlegenden Mengen (bez. $\tilde{\mu}$).

Lemma 1.67. *Eine Menge $S \in \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann zerlegend ist, wenn*

$$\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c)$$

für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt.

Proof. Die Ungleichung $\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c)$ folgt aus der Subadditivität von $\tilde{\mu}$, da $A = (A \cap S) \cup (A \cup S^c)$ gilt. □

Satz 1.68. *Sei $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß auf Ω. Dann ist $(\Omega, R_{\tilde{\mu}}, \tilde{\mu}_{|R_{\tilde{\mu}}})$ ein Maßraum.*

Proof. Wir zeigen zuerst, daß $R_{\tilde{\mu}}$ eine Algebra ist. Mit $S \in R_{\tilde{\mu}}$ ist offensichtlich auch $S^c \in R_{\tilde{\mu}}$. Seien nun $S, T \in R_{\tilde{\mu}}$. Wir zeigen, daß $S \cap T \in R_{\tilde{\mu}}$. Für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ setzen wir

$$A_1 := A \cap S \cap T, \ A_2 := A \cap S \cap T^c, \ A_3 := A \cap S^c \cap T, \ A_4 := A \cap S^c \cap T^c \ .$$

Diese Mengen sind paarweise disjunkt. Da $S, T \in R_{\tilde{\mu}}$ ist, schließen wir

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) &= \tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2) \\ \tilde{\mu}(A_3 \cup A_4) &= \tilde{\mu}(A_3) + \tilde{\mu}(A_4) \ .\end{aligned}$$

Wir schreiben $A_2 \cup A_3 \cup A_4$ als

$$[(A \cap S^c \cup A \cap S \cap T^c) \cap S] \cup [(A \cap S^c \cup A \cap S \cap T^c) \cap S^c]$$

und schließen weiter, daß

$$\tilde{\mu}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \tilde{\mu}(A_2) + \tilde{\mu}(A_3 \cup A_4) = \sum_{i=2}^{4} \tilde{\mu}(A_i) \ . \tag{1}$$

Es gilt auch

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) + \tilde{\mu}(A_3 \cup A_4) = \sum_{i=1}^{4} \tilde{\mu}(A_i) \ .$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(A \cap (S \cap T)) + \tilde{\mu}(A \cap (S \cap T)^c) &= \tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\ &= \sum_{i=1}^{4} \tilde{\mu}(A_i) \\ &= \tilde{\mu}(A) \ .\end{aligned}$$

Dies zeigt $S \cap T \in R_{\tilde{\mu}}$.

Wir zeigen jetzt, daß $\tilde{\mu}_{|R_{\tilde{\mu}}}$ additiv ist. Sei $S, T \in R_{\tilde{\mu}}$ mit $S \cap T = \emptyset$. Wir wählen $A := S \cup T$. Dann folgt aus (1), daß $\tilde{\mu}(S \cup T) = \tilde{\mu}(S) + \tilde{\mu}(T)$.

Sei jetzt $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie in $R_{\tilde{\mu}}$. Wir zeigen, daß $S := \bigcup_i S_i \in R_{\tilde{\mu}}$. Dazu setzen wir $T_i := \bigcup_{j \le i} S_j$. Dann ist $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Familie in $R_{\tilde{\mu}}$ und es gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i = S$. Es gilt $\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A \cap T_i) + \tilde{\mu}(A \cap T_i^c)$. Da $\tilde{\mu}$ monoton ist, gilt

$$\tilde{\mu}(A) \ge \tilde{\mu}(A \cap T_i) + \tilde{\mu}(A \cap S^c) \ . \tag{2}$$

Es gilt weiter, daß

$$\tilde{\mu}(A \cap T_i) = \tilde{\mu}(A \cap T_i \cap T_{i-1}) + \tilde{\mu}(A \cap T_i \cap T_{i-1}^c) = \tilde{\mu}(A \cap T_{i-1}) + \tilde{\mu}(A \cap (T_i \setminus T_{i-1})) \ .$$

Induktiv schließen wir, daß

$$\tilde{\mu}(A \cap T_i) = \sum_{j \le i} \tilde{\mu}(A \cap (T_i \setminus T_{i-1})) \ .$$

Unter Benutzung der σ-Subadditivität erhalten wir

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{\mu}(A \cap T_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(A \cap (T_i \setminus T_{i-1})) \geq \tilde{\mu}(A \cap S) \ . \tag{3}$$

Es folgt

$$\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c) \ .$$

Da A beliebig war, gilt wegen Lemma 1.67 auch $S \in R_{\tilde{\mu}}$.

Wir zeigen nun, daß $\tilde{\mu}$ auf $R_{\tilde{\mu}}$ auch σ-additiv ist. Sei $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Elemente aus $R_{\tilde{\mu}}$. Wir setzen in (2) $A = S$ und erhalten für jedes i, daß $\tilde{\mu}(S) \geq \tilde{\mu}(T_i)$. Damit gilt $\tilde{\mu}(S) \geq \lim_{i\to\infty} \tilde{\mu}(T_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(S_i)$. Wegen der σ-Subadditivität haben wir auch die Ungleichung in der anderen Richtung. Also $\tilde{\mu}(S) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(S_i)$. □

Satz 1.69. *Sei (Ω, R, μ) ein σ-additiver Prämaßraum. Dann besitzt μ eine Ausdehnung zu einem Maß auf $R^\sigma := R^\sigma(R)$. Ist (Ω, R, μ) zusätzlich σ-endlich, dann ist diese Ausdehnung eindeutig.*

Proof. Die Eindeutigkeit der Ausdehnung unter der Voraussetzung der σ-Endlichkeit hatten wir schon in Satz 1.60 gesehen.

Sei $\tilde{\mu}$ die äußere Erweiterung von μ. Für die Existenzaussage müssen wir wegen Lemma 1.65 nur zeigen, daß $R^\sigma \subseteq R_{\tilde{\mu}}$ gilt.

Dazu müssen wir nur $R \subseteq R_{\tilde{\mu}}$ nachprüfen. Sei $S \in R$ und $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Sei $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie aus R mit $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$. Dann gilt

$$\sum_i \mu(F_i) = \sum_i \mu(F_i \cap S) + \sum_i \mu(F_i \cap S^c) \ .$$

Wir bilden das Infimum über alle Wahlen der Familie $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Die linke Seite ergibt $\tilde{\mu}(A)$, während die Summen auf der rechten Seite von unten durch $\tilde{\mu}(A \cap S)$ und $\tilde{\mu}(A \cup S^c)$ abgeschätzt werden. Also gilt $\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c)$. Da A beliebig war, folgt $S \in R_{\tilde{\mu}}$ aus Lemma 1.67. □

Ein Approximationssatz Sei (Ω, R, μ) ein σ-endlicher, σ-additiver Prämaßraum. Dann haben wir eine eindeutige Ausdehnung $(\Omega, \bar{R}, \mu)$ zu einem Maßraum, wobei $R^\sigma = R^\sigma(R)$. Die Elemente von R^σ sind in der Regel unhandlich. Deshalb ist es wichtig zu wissen, daß man sie dem Maße nach durch Elemente aus R approximieren kann.

Satz 1.70. *Ist $E \in R^\sigma$ und gilt $\mu(E) < \infty$, dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $F \in R$ mit $\mu(E \triangle F) < \epsilon$.*

Proof. Sei $\tilde{\mu}$ die äußere Erweiterung von μ. Da $R^\sigma \subseteq R_{\tilde{\mu}}$ ist, gilt

$$\mu(E) = \tilde{\mu}(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T_i) \ ,$$

wobei das Infimum über alle Familien $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (welche o.B.d.A als paarweise disjunkt angenommen werden können) mit $E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$ genommen wird. Wir wählen eine solche Familie derart, daß

$$\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T_i) - \epsilon \ .$$

Wir wählen n so groß, daß $\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(T_i) < \epsilon$ und setzen $F := \bigcup_{i=1}^{n} T_i \in R$. Dann gilt $E \setminus F \subseteq \bigcup_{i=n}^{\infty} T_i$ und $F \setminus E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i \setminus E$. Damit ist $\mu(E \setminus F) \leq \epsilon$, $\mu(F \setminus E) \leq \epsilon$ und deshalb $\mu(E \triangle F) < \epsilon$. □

Das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ In 1.1.3 hatten wir den (dyadischen) Lebesgueprämaßraum $(\mathbb{R}^n, D^n, \mu^n)$ konstruiert. In Lemma 1.48 hatten wir gesehen, daß μ^n auch σ-additiv ist. Schließlich hatten wir in 1.32 eingesehen, daß $R^\sigma(D^n)$ mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt. Sei $\tilde{\mu}^n$ die äußere Erweiterung von μ^n und $(\mathbb{R}^n, R_{\tilde{\mu}^n}, \tilde{\mu}^n)$ der nach 1.68 konstruierte Maßraum. Dann gilt $\mathcal{B} \subset R_{\tilde{\mu}^n}$ und $\tilde{\mu}^n_{|\mathcal{B}}$ ist die nach Satz 1.60 eindeutige Fortsetzung von μ^n auf $\mathcal{B}$.

Um das Symbol μ in Zukunft für andere Maße auf dem $\mathbb{R}^n$ zur Verfügung zu haben, werden wir ab jetzt das Lebesguesche Maß mit $|.|$ bezeichnen.

Definition 1.71. *Der Maßraum $(\mathbb{R}^n, R_{|.|}, |.|)$ heißt Lebesgue Maßraum.*

Die folgenden Eigenschaften des Lebesguemaßes mögen offensichtlich erscheinen, erfordern jedoch im Beweis einige Anstrengungen. Wir betrachten zuerst den eindimensionalen Fall.

Satz 1.72. *1. Für ein beschränktes Intervall $[a,b) \subset \mathbb{R}$ gilt $|[a,b)| = b-a$.*

2. Für eine abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ gilt $|A| = 0$.

3. Für $x \in \mathbb{R}$ und $A \in R_{|.|}$ gilt $x + A \in R_{|.|}$, $|a + A| = |A|$ und $xA \in R_{|.|}$, $|xA| = |x||A|$.

Proof. 1. Für Intervalle in D^1 folgt dies direkt aus der Definition des Lebesgueschen Prämaßes. Sei jetzt a, b allgemein. Für $\epsilon > 0$ wählen wir $k \in \mathbb{N}$ derart, daß $2^{-k+1} < \epsilon$. Weiter wählen wir $p, q \in \mathbb{Z}$ derart, daß $\frac{p}{2^k} < a \leq \frac{p+1}{2^k}$ und $\frac{q}{2^k} \leq b < \frac{q+1}{2^k}$. Dann gilt

$$[\frac{p+1}{2^k}, \frac{q}{2^k}) \subseteq [a,b) \subseteq [\frac{p}{2^k}, \frac{q+1}{2^k}) \ .$$

Wegen der Monotonie des Maßes gilt

$$|b - a - |[a,b)|| \leq \epsilon \ .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt die gewünschte Gleichung.

2. Sei zunächst $A = \{x\}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt wegen der Monotonie des Maßes $|\{x\}| \leq |[x-\epsilon, x+\epsilon)| = 2\epsilon$ für alle $\epsilon > 0$. Folglich ist $|\{x\}| = 0$. Wegen der σ-Additivität gilt damit $|A| = 0$ für alle abzählbaren Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}$.

3. Es ist klar, daß $\mathtt{add}_{-x}$ stetig und damit meßbar auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ wirkt. Ist $A = [a,b)$, dann gilt $\mathtt{add}_{-x}^{-1}(A) = [a+x, b+x)$ und offensichtlich $(\mathtt{add}_{-x})_*|A| = |A|$. Damit stimmen $(\mathtt{add}_{-x})_*|.|$ und $|.|$ auf der von allen Intervallen erzeugten Algebra überein. Die Eindeutigkeit der Ausdehnung zeigt, daß $(\mathtt{add}_{-x})_*|.| = |.|$ auf $\mathcal{B}$ gilt. Damit stimmen auch die äußeren Erweiterungen von $(\mathtt{add}_{-x})_*|.|$ und $|.|$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ überein. Schließlich gilt $\mathtt{add}_{-x}^{-1}(R_{|.|}) = R_{|.|}$ (d.h. $\mathtt{add}_{-x}$ ist meßbar auf $(\mathbb{R}, R_{|.|})$) und es gilt $(\mathtt{add}_{-x})_*|.| = |.|$.

   Analog argumentiert man mit $\mathtt{mult}_{x^{-1}}$ für $x > 0$. Dabei ist $(\mathtt{mult}_{x^{-1}})_*|.| = x|.|$. Der Fall $x = 0$ ist trivial.

□

Den höherdimensionalen Fall dieser Eigenschaften werden wir mit Hilfe der Integrationstheorie auf Eigenschaften des Riemannintegrals zurückführen und später studieren.

Wir zeigen nun, daß es nicht Lebesgue-meßbare Mengen gibt.

Satz 1.73. *Wir betrachten* $(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$. *Es gilt* $R_{|.|} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proof. Auf $A := [-1/2, 1/2]$ betrachten wir die Relation : $x \sim y$, falls $x - y \in \mathbb{Q}$. Diese ist eine Äquivalenzrelation. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Abbildung $f : A/\sim \to A$ derart, daß $f([x]) \in [x]$. Wir betrachten nun $K := f(A/\sim) \subset A$. Wir werden zeigen, daß $K \notin R_{|.|}$.

Wir nehmen das Gegenteil an. Sei $d := |K|$. Sei $B := [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Für $s, r \in B$ mit $r \neq s$ gilt $\mathtt{add}_r(K) \cap \mathtt{add}_s(K) = \emptyset$ und $|\mathtt{add}_r(K)| = d$. Weiterhin gilt $A \subseteq \bigcup_{r \in B} \mathtt{add}_r(K)$. Da B abzählbar und $|A| = 1$ ist, muß $d > 0$ gelten. Andererseits ist $\bigcup_{r \in B} \mathtt{add}_r(K) \subseteq [-3/2, 3/2]$. Also gilt $\sum_{r \in B} d \leq 3$, woraus $d = 0$ folgt, da $\sharp B = \infty$. Das ist ein Widerspruch. $\square$

Cantormengen Sei $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$. Für ein Interval $[a, b]$ setzen wir $P_\lambda([a, b]) := [a, a + \lambda(b - a)] \cup [b - \lambda(b - a), b]$. Ist $U = \bigcup_i [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ eine disjunkte Vereinigung abgeschlossener Intervalle, dann ist $P_\lambda(U) := \bigcup_i P([a_i, b_i])$. Dies ist wieder eine disjunkte Vereinigung abgeschlossener Intervalle. Wir erhalten eine absteigende Folge

$$\cdots \subset P_\lambda^{n+1}(U) \subset P_\lambda^n(U) \subset \cdots \subset P_\lambda(U) \subset U$$

und definieren

$$C_\lambda(U) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_\lambda^n(U) \ .$$

1. Die Menge $C_\lambda(U) \subset \mathbb{R}$ is abgeschlossen.

2. Die Menge $C_\lambda(U)$ hat keine inneren Punkte.

3. $\mathtt{mult}_{\lambda^{-1}} : C_\lambda([0, 1]) \cap [0, \lambda] \to C_\lambda([0, 1])$ ist ein Homöomorphismus. Es gilt

$$C_\lambda = \mathtt{mult}_{\lambda^{-1}}(C_\lambda([0, 1]) \cap [0, \lambda]) \cup (1 - \lambda) + \mathtt{mult}_{\lambda^{-1}}(C_\lambda([0, 1]) \cap [0, \lambda]) \ ,$$

   d.h C_λ ist selbstähnlich.

4. Es gilt

$$|C_\lambda([0, 1])| = 1 - (1 - 2\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \lambda^n = 1 - \frac{1 - 2\lambda}{1 - 2\lambda} = 0$$

Das Haarmaß auf $\mathbb{Z}_p$ Das Haarsche Maß auf $(\mathbb{Z}_p, R_\mu)$ ist das Maß μ, welches man durch die Ausdehnung des Haarschen Prämaßes (siehe 1.1.3) erhält. In der Regel betrachtet man den Maßraum $(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}, \mu)$, wobei jetzt μ die nach Lemma 1.60 eindeutige und nach Satz 1.69 existierende Ausdehnung des Haarschen Prämaßes bezeichnet.

Lemma 1.74. *Für $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ ist $\mathtt{add}_\lambda$ meßbar und es gilt $(\mathtt{add}_\lambda)_*\mu = \mu$.*

Proof. Seien $p_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ die Projektionen für $n \geq 0$. Die Abbildungen $\mathtt{add}_\lambda$ und $\mathtt{mult}_\lambda$ werden durch Familien verträglicher Abbildungen $(\mathtt{add}_{p_n(\lambda)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\mathtt{mult}_{p_n(\lambda)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf dem System $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}_0}$ induziert und sind damit stetig. Folglich sind sie meßbar bezüglich der Borelschen σ-Algebra.

Sei $W \subseteq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ und $A := p_n^{-1}(W)$. Dann gilt wegen der Invarianz des Zählmaßes auf $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ unter Bijektionen

$$\mu((\mathtt{add}_\lambda)^{-1}A) = \mu(\mathtt{add}_{-\lambda}(A)) = \mu(p_n^{-1}(\mathtt{add}_{-p_n(\lambda)}W)) = \mu(p_n^{-1}(W)) = \mu(A)\ .$$

Folglich gilt $(\mathtt{add}_\lambda)_*\mu = \mu$ auf der erzeugenden Algebra. Wegen der Eindeutigkeit der Ausdehnung des Prämaßes gilt diese Gleichung auf $\mathcal{B}$. □

Wir betrachten $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ vermöge der Abbildung $m \mapsto ([m]_{\mod p^n})_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Lemma 1.75. *Für jeden Punkt $x \in \mathbb{Z}_p$ gilt $\mu(\{x\}) = 0$. Insbesondere gilt $\mu(A) = 0$ für jede abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{Z}_p$, z.B. $\mu(\mathbb{Z}) = 0$.*

Proof. Die Topologie auf $\mathbb{Z}_p$ ist Hausdorff. Damit sind einpunktige Mengen abgeschlossen und meßbar. Wenn $\mu(\{x\}) \neq 0$, dann wäre $\mu(\{y\}) = \mu(\{x\})$ für jeden Punkt $y \in \mathbb{Z}_p$ und damit $\mu(\mathbb{Z}_p) = \infty$, da $\mathbb{Z}_p$ unendlich viele Elemente hat. Es gilt aber $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$. □

Wir sehen insbesondere, daß $\mathbb{Z}_p$ nicht abzählbar sein kann.

Das Maß auf dem Schiftraum Wendet man die Ausdehnungskonstruktion 1.69 auf das oben konstruierte Prämaß auf dem Schiftraum über der Zustandsmenge A an (siehe 1.1.3), so erhält man einen Maßraum auf $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ wobei jetzt $\mathcal{B}$ die von den Zylindermengen erzeugte σ-Algebra (die Borelsche σ-Algebra der Produkttopologie) und μ die Ausdehnung des Prämaßes bezeichnet. Beachte, daß μ von der Wahl von $p : A \to [0,1]$ mit $\sum_{a\in A} p(a) = 1$ abhängt.

Lemma 1.76. *Sei $T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ die Verschiebung $T((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) := (a_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$. Dann ist T meßbar und maßerhaltend.*

Proof. Die Meßbarkeit von T hatten wir schon in 1.34 eingesehen. Sei $q_n : A^{\mathbb{N}} \to A^n$ die Projektion auf die ersten n Glieder. Sei $W := q_n^{-1}(a_1, \ldots, a_n)$. Dann gilt

$$T^{-1}(W) = \bigcup_{a\in A} q_{n+1}^{-1}(a, a_1, \ldots, a_n) \ .$$

und damit

$$\mu(T^{-1}(W)) = \sum_{a\in A} p(a) \prod_{i=1}^{n} p(a_i) = \prod_{i=1}^{n} p(a_i) = \mu(W) \ .$$

□

Lemma 1.77. *Sei $B \subseteq A$ eine Teilmenge. Dann ist $B^{\mathbb{N}} \subseteq A^{\mathbb{N}}$ meßbar. Wenn $\sum_{b\in B} p(b) <$ 1 gilt, dann ist $\mu(B^{\mathbb{N}}) = 0$.*

Proof. Sei $q_n : A^{\mathbb{N}} \to A^n$ die Projektion auf die ersten n Folgenglieder und $B_n := q_n^{-1}(B^n)$. Dann gilt $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Damit kann $B^{\mathbb{N}}$ als abzählbarer Durchschnitt von Zylindermengen geschrieben werden und ist meßbar.

Sei $d := \sum_{b\in B} p(b)$. Dann ist $\mu(B_n) = d^n$. Wenn $d < 1$ ist, dann gilt $\mu(B) = 0$. □

Der Schiftraum liefert ein besonders einfaches Beispiel für ein ergodisches dynamisches System. Unter einem **dynamischen System** verstehen wir hier einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, R, μ) mit einer maßerhaltenden meßbaren Selbstabbildung $T : \Omega \to \Omega$. Das System heißt **ergodisch**, wenn für jede Teilmenge $W \in R$ mit $T^{-1}(W) = W$ gilt $\mu(W) \in \{0, 1\}$. Für mehr Information siehe etwa [Wal82].

Satz 1.78. *Der Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ mit dem Schift T ist ein ergodisches dynamisches System.*

Proof. Sei $V \in \mathcal{B}$ und gelte $T^{-1}(V) = V$. Wir müssen zeigen, daß dann $\mu(V) \in \{0, 1\}$ gilt.

Sei R die Algebra der Zylindermengen so daß $\mathcal{B} = R^\sigma(R)$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir finden nach Satz 1.70 ein $A \in R$ mit $\mu(V \vartriangle A) \le \epsilon$. Dann gilt auch $|\mu(W) - \mu(A)| \le \epsilon$. Sei $A = q_k^{-1}(U)$ für ein geeignetes $U \subseteq A^k$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $B := T^{-k-1}(A) = q_{2k+1}^{-1}(\times_{i=1}^{k+1} A \times U)$. Insbesondere gilt $\mu(A \cap B) = \mu(A)^2$. Es gilt auch

$$\mu(V \vartriangle B) = \mu(T^{-k-1}(V) \vartriangle T^{-k-1}(A)) = \mu(V \vartriangle A) \le \epsilon \ .$$

Wegen $V \vartriangle (A \cap B) \subseteq V \vartriangle A \cup V \vartriangle B$ gilt $\mu(V \vartriangle (A \cap B)) \le 2\epsilon$. Wir rechnen nun

$$\begin{aligned} |\mu(V) - \mu(V)^2| &\le |\mu(V) - \mu(A \cap B)| + |\mu(A \cap B) - \mu(V)^2| \\ &\le 2\epsilon + |\mu(A)^2 - \mu(V)^2| \\ &\le 2\epsilon + \mu(A)|\mu(A) - \mu(V)| + \mu(V)|\mu(A) - \mu(V)| \\ &\le 4\epsilon \ . \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt $\mu(V) = \mu(V)^2$, also $\mu(V) \in \{0, 1\}$. Die Behauptung folgt aus $\mu(V) = \mu(W)$.

□

Folgerung 1.79. *Sei (Ω, R, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer ergodischen Transformation T. Dann gilt für jedes $W \in R$ mit $T(W) = W$ auch $\mu(W) \in \{0, 1\}$.*

Proof. Sei $W \in R$ und gelte $T(W) = W$. Wir müssen zeigen, daß dann Es gilt $W \subseteq T^{-1}(T(W)) = T^{-1}(W)$ und allgemeiner $T^{-n}(W) \subseteq T^{-n}(T^{-1}(W)) = T^{-n-1}(W)$. Daraus folgt

$$\mu(W) = \mu(T^{-n}(W)) \le \mu(T^{-n-1}(W)) = \mu(W) \ .$$

Also gilt $\mu(T^k(W)) = \mu(W)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wir setzen $V := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^{-n}(W) \in R$. Dann gilt $\mu(V) = \mu(W)$ und $T^{-1}(V) = V$. Aus der Ergodizitätsannahme folgt $\mu(V) \in \{0, 1\}$ und daraus die Behauptung. □

Nullmengen und Vervollständigung Der Unterschied zwischen $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, |.|_{|\mathcal{B}})$ und $(\mathbb{R}^n, R_{|.|}, |.|)$ ist relativ unwesentlich und wird durch den Begriff der Vervollständigung geklärt.

Definition 1.80. *Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Ein Element $A \in R$ heißt* ***Nullmenge****, wenn $\mu(A) = 0$ gilt.*

Definition 1.81. *Ein Maßraum (Ω, R, μ) heißt* ***vollständig****, falls für jede Menge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $A \subseteq \bigcup_i N_i$ für eine abzählbare Familie von Nullmengen auch $A \in R$ gilt.*

Lemma 1.82. *Der zu einem äußeren Maß $\tilde{\mu}$ auf Ω entsprechend 1.68 assoziierte Maßraum ist vollständig.*

Proof. Zuerst beobachten wir, daß $R_{\tilde{\mu}}$ alle $\tilde{\mu}$-Nullmengen enthält. In der Tat ist $\tilde{\mu}(S) = 0$, dann gilt für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ wegen der Monotonie von $\tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c) = \tilde{\mu}(A \cap S^c) \leq \tilde{\mu}(A)$$

und folglich $S \in R_{\tilde{\mu}}$ nach Lemma 1.67.

Sei $A \subseteq \Omega$ so daß $A \subseteq \bigcup_i N_i$ für eine abzählbare Familie von Nullmengen $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Aus Monotonie und σ-Subadditivität folgt $\tilde{\mu}(A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(N_i) = 0$. Damit gilt aber $A \in R_{\tilde{\mu}}$. □

In der Regel muß ein Maßraum (Ω, R, μ) nicht vollständig sein. Mit der folgenden Konstruktion kann man ihn vervollständigen.

Wir definieren $\bar{R}^\mu$ als die Menge derjenigen $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, für welche ein $F \in R$ und eine abzählbare Familie $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Nullmengen existiert, so daß $A \vartriangle F \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i$. Hierbei ist $A \vartriangle F := A \cap F^c \cup F \cap A^c$ die symmetrische Differenz von A und F. Wir definieren ferner $\bar{\mu}(A) := \mu(F)$.

Lemma 1.83. *1. Die Abbildung $\bar{\mu} : \bar{R}^\mu \to [0, \infty]$ ist wohldefiniert.*

2. $(\Omega, \bar{R}^\mu, \bar{\mu})$ ist ein vollständiger Maßraum.

Proof. Sei $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ und $F, G \in R$ derart, daß $A \vartriangle F \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i$ und $A \vartriangle G \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ für Familien von Nullmengen $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in R. Dann gilt $F \subseteq G \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(N_i \cup M_i)$ und $G \subseteq F \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(N_i \cup M_i)$. Daraus folgt $\mu(F) = \mu(G)$.

Wir zeigen weiter, daß $\bar{R}$ eine σ-Algebra ist.

1. Mit $A \in R$ gilt $A^c \in R$. In der Tat gilt $A^c \vartriangle F^c = A \vartriangle F$.

2. Ist $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $A_n \vartriangle F_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_{n,i}$ für Familien von Nullmengen $(N_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$, $n = 1, \ldots$. Dann gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \vartriangle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \vartriangle F_n \subseteq \bigcup_{n,i\in\mathbb{N}} N_{n,i} \ . \tag{4}$$

Folglich ist $\bar{R}$ abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen.

Wir zeigen nun, daß $\bar{\mu}$ auch σ-additiv ist. Sei $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ein Darstellung von A als eine disjunkte Vereinigung. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $F_n \in R$ derart, daß $A_n \vartriangle F_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_{n,i}$ für eine geeignete Familie von Nullmengen $(N_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$. Wir setzen $F'_n := F_n \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_{n,i} \subseteq A_n$. Dann gilt

$$A_n \vartriangle F'_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_{n,i} \ , \quad F'_n \in R \ .$$

Es gilt wegen (4)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F'_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \bar{\mu}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \ .$$

Definition 1.84. *Die* ***Vervollständigung*** *eines Maßraumes* (Ω, R, μ) *ist der Maßraum* $(\Omega, \bar{R}^\mu, \bar{\mu})$.

Aufgabe 1.2. *Zeige : Der Lebeguesche Maßraum* $(\mathbb{R}^n, R_{|.|}, |.|)$ *ist die Vervollständigung von* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, |.|_{|\mathcal{B}})$.

1.1.11 Verteilungsfunktionen

Wir betrachten ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Definition 1.85. *Die Funktion*

$$F_\mu : \mathbb{R} \to [0,1] \ , \quad F_\mu(x) := \mu((-\infty, x))$$

heißt ***Verteilungsfunktion*** *von* μ.

Satz 1.86. *Eine Funktion* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *ist genau dann Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, *wenn*

1. *F linkseitig stetig ist,*
2. *F monoton wachsend ist,*

3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *und* $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ *gilt.*

Das Maß μ ist durch seine Verteilungsfunktion eindeutig bestimmt.

Proof. Es ist einfach zu sehen, daß die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathbb{R}$ diese Eigenschaften hat.

Sei F mit den angegebenen Eigenschaften gegeben. Wir betrachten die dyadischen Partitionen $D_r := D_r^1$, $r \in \mathbb{N}$, aus 1.1.3. Wir definieren $\mu_r : D_r \to [0,1]$ durch $\mu_r([a,b)) := F(b)-F(a)$ für $[a,b) \in D_r$, $\mu((-\infty,-2^r) = F(-2^r)$ und $\mu([2^r,\infty)) = 1-F(2^r)$. Wir erhalten damit ein Prämaß auf $R(D_r)$. Es gilt $(\mu_{r+1})_{|R(D_r)} = \mu_r$. Sei μ das von der Folge (μ_r) induzierte Prämaß auf $R := \bigcup_{r\in\mathbb{N}} R(D_r)$. Wir zeigen nun, daß μ ein σ-additives Prämaß ist. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge in R mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Sind alle A_n unbeschränkt, dann gibt es eine Folge (r_n) in $\mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ derart, daß $A_n \subseteq (-\infty, -2^{-r_n}) \cup [2^r, \infty)$ gilt. Damit gilt $\mu(A_n) \le F(-2^{r_n})+1-F(2^{r_n})$ und wegen $\lim_{n\to\infty} F(-2^{r_n})+1-F(2^{r_n}) = 0$ auch $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Andernfalls können wir annehmen, daß alle A_n beschränkt sind.

Wir nehmen an, daß $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \alpha > 0$ gilt und konstruieren einen Widerspruch.

Ein Element in $R(D_k)$ ist eine endliche Vereinigung von dyadischen Intervallen der Form $I = [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k})$. Für ein solches Intervall und $r > k$ definieren wir

$$o_r(I) := [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} - \frac{1}{2^r})\ .$$

Dann gilt $o_r(I) \in R$, $\overline{o_r(I)} \subset I$ und $\mu(I) - \mu(o_r(I)) = F(\frac{p+1}{2^k}) - F(\frac{p+1}{2^k} - \frac{1}{2^r})$. Da F linksseitig stetig ist, kann man $\mu(I) - \mu(o_r(I))$ durch genügend große Wahl von r beliebig klein machen.

Wir stellen A_k als Vereinigung von c dyadischen Intervallen $I_1, \dots, I_c$ dar und bilden $A'_k \subset A_k$ durch Ersetzen dieser Intervalle I_j durch $o_r(I_j)$, wobei wir r so groß wählen, daß $\mu(A_k \setminus A'_k) < \alpha 2^{-k-1}$ gilt. Dann ist $A' \in R$ und $\bar{A}' \subset A$. Wir definieren nun $B'_k := \bigcap_{i=1}^k A'_k \in D$. Dann gilt $\bar{B}_k \subset A_k$,

$$A_k \setminus B_k \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_k \setminus A'_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_i \setminus A'_i$$

und damit

$$\mu(B_k) \ge \mu(A_k) - \sum_{i=1}^k \mu(A_i \setminus A'_i) \ge \mu(A_k) - \sum_{i=1}^k \alpha 2^{-i-1} \ge \alpha(1 - \frac{1}{2}) = \frac{\alpha}{2}\ .$$

Insbesondere ist $\bar{B}_k \neq \emptyset$. Nun ist $(\bar{B}_k)_{k=1}^{\infty}$ eine absteigende Familie nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wegen der Vollständigkeit (Intervallschachtelungsaxiom) von $\mathbb{R}$ ist der Durchschnitt der $\bar{B}_k$ nicht leer. Es folgt

$$\emptyset = \bigcap_{i=k}^{\infty} A_k \supseteq \bigcap_{i=k}^{\infty} \bar{B}_k \neq \emptyset$$

und dies ist der gewünschte Widerspruch.

Das σ-additive Wahrscheinlichkeitsprämaß μ auf $(\mathbb{R}, R)$ hat nach Satz 1.69 eine eindeutige Ausdehnung zu einem Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, welches wir auch mit μ bezeichnen werden.

Wir zeigen nun, daß $F = F_\mu$ gilt. Es gilt nach Konstruktion $F(\frac{p_r}{2^r}) = F_\mu(\frac{p_r}{2^r})$ für alle $r \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{Z}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Für jedes $r \in \mathbb{N}$ wählen wir $p_r \in \mathbb{Z}$ derart, daß $\frac{p_r}{2^r} < x \leq \frac{p_r+1}{2^r}$. Die Folge $(\frac{p_r}{2^r})_{r\in\mathbb{N}}$ konvergiert von unten gegen x. Damit gilt

$$F(x) = \lim_{r\to\infty} F(\frac{p_r}{2^r}) = \lim_{r\to\infty} F_\mu(\frac{p_r}{2^r}) = F_\mu(x) \ .$$

□

1.2 Das Integration

1.2.1 Das Integral positiver Funktionen

Integration einfacher Funktionen Wir fixieren einen Maßraum (Ω, R, μ).

Definition 1.87. *Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **einfach**, wenn sie meßbar ist und höchstens endlich viele Werte annimmt.*

Mit $\mathcal{E}(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge der einfachen Funktionen auf Ω. Offensichtlich ist $\mathcal{E}(\Omega)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Sei $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Dann definieren wir die Familie $A_r := f^{-1}(\{r\}) \subseteq \Omega$, $r \in \mathbb{R}$. Diese Mengen sind meßbar und für fast alle $r \in \mathbb{R}$ (also bis auf endlich viele) leer. Die Darstellung

$$f = \sum_{r\in\mathbb{R}} r\chi_{A_r}$$

als Linearkombination der charakteristischen Funktionen der Mengen A_r heißt die kanonische Darstellung von f.

Sei

$$\mathcal{E}(\Omega)^{\geq} := \{f \in \mathcal{E}(\Omega) \mid f \geq 0\}$$

die Teilmenge der nicht-negativen einfachen Funktionen. Diese Teilmenge ist abgeschlossen unter der Addition und der Multiplikation mit nicht-negativen reellen Zahlen.

Definition 1.88. *Wir definieren das **Integral***

$$\int' \ldots d\mu : \mathcal{E}(\Omega)^{\geq} \to [0, \infty]$$

durch

$$\int' f d\mu = \sum_{r \in \mathbb{R}} r\mu(f^{-1}(\{r\}) \ .$$

In Termen der kanonischen Darstellung gilt also

$$\int' f d\mu = \sum_{r \in \mathbb{R}} r\mu(A_r) \ .$$

Die Menge $\mathcal{E}(\Omega)$ ist halbgeordnet durch $f \leq g$ genau dann, wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

Lemma 1.89. *Das Integral ist eine monotone, positiv homogene und additive Abbildung.*

Proof. Wir zeigen zuerst die Homogenität. Wenn $f = \sum_{r \in \mathbb{R}} r\chi_{A_r}$ die kanonische Darstellung von f ist, dann ist für $\mathbb{R} \ni \lambda > 0$ die kanonische Darstellung von λf durch $\lambda f = \sum_{r \in \mathbb{R}} \lambda r \chi_{A_r}$ gegeben. Es gilt

$$\int' \lambda f d\mu = \sum_{r \in \mathbb{R}} \lambda r \mu(A_r) = \lambda \sum_{r \in \mathbb{R}} r\mu(A_r) = \lambda \int' \lambda f d\mu \ .$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist Übungsaufgabe. Seien nun $f, g \in \mathcal{E}(\Omega)^{\geq}$ und $f = \sum_{r \in \mathbb{R}} r\chi_{A_r}$, $g = \sum_{r \in \mathbb{R}} r\chi_{B_r}$ die kanonischen Darstellungen. Dann ist

$$f + g = \sum_{p \in \mathbb{R}} p\chi_{\bigcup_{s \in \mathbb{R}} A_{p-s} \cap B_s}$$

die kanonische Darstellung von $f+g$. Die Familien $(A_r)_{r\in\mathbb{R}}, (B_s)_{s\in\mathbb{R}}, (A_r\cap B_s)_{s,r\in\mathbb{R}}$ sind jeweils paarweise disjunkt. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\int'(f+g)d\mu &= \sum_{p\in\mathbb{R}} p\mu(\bigcup_{s\in\mathbb{R}} A_{p-s}\cap B_s) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{R}} p\sum_{s\in\mathbb{R}}\mu(A_{p-s}\cap B_s) \\
&= \sum_{r\in\mathbb{R}}(r+s)\sum_{s\in\mathbb{R}}\mu(A_r\cap B_s) \\
&= \sum_{r\in\mathbb{R}} r\sum_{s\in\mathbb{R}}\mu(A_r\cap B_s)+\sum_{s\in\mathbb{R}} s\sum_{r\in\mathbb{R}}\mu(A_r\cap B_s) \\
&= \sum_{r\in\mathbb{R}} r\mu(A_r\cap\cup_{s\in\mathbb{R}}B_s)+\sum_{s\in\mathbb{R}} s\mu(\cup_{r\in\mathbb{R}}A_r\cap B_s) \\
&= \sum_{r\in\mathbb{R}} r\mu(A_r)+\sum_{s\in\mathbb{R}} s\mu(B_s) \\
&= \int' fd\mu+\int' gd\mu\ .
\end{aligned}$$

Ist $f\geq g$, dann ist $f-g\in\mathcal{E}(\Omega)^{\geq}$ und damit $\int'(f-g)d\mu\geq 0$. Es gilt also

$$\int' fd\mu\geq\int' gd\mu\ .$$

□

Unteres Integral Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Sei $A\subseteq\Omega$ und $f:\Omega\to[0,\infty]$

Definition 1.90. *Wir definieren das **untere Integral** von f bezüglich μ durch*

$$\int_A fd\mu=\sup_{\phi\in\mathcal{E}(\Omega)^{\geq},\phi\leq f\chi_A}\int'\phi d\mu\ .$$

Wenn $A=\Omega$, dann schreiben wir

$$\int fd\mu:=\int_\Omega fd\mu\ .$$

Lemma 1.91. *Seien $f,g:\Omega\to[0,\infty]$ und $A,B\subseteq\Omega$. .*

1. *Für $\phi\in\mathcal{E}(\Omega)^{\geq}$ und $A\in R$ gilt $\int_A\phi d\mu=\int'\phi\chi_A d\mu$.*

2. *Wenn* $\mu(A) = 0$, *so gilt* $\int_A f d\mu = 0$.

3. *Wenn* $\{f > 0\}$ *eine Nullmenge ist, so gilt* $\int_\Omega f d\mu = 0$.

4. *Wenn* $f \leq g$, *so gilt* $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$.

5. *Für* $r \geq 0$ *gilt* $\int_A r f d\mu = r \int_A f d\mu$.

6. *Wenn* $A \subseteq B$, *so gilt* $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

Proof.

1. Wegen der Monotonie von $\int' \dots d\mu$ wird das Supremum von $\phi\chi_A \in \mathcal{E}(\Omega)^{\geq}$ realisiert.

2. Wenn $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)^{\geq}$ mit $\phi \leq f\chi_A$ und $\phi = \sum_{r \in \mathbb{R}} r\chi_{A_r}$ eine kanonische Darstellung von ϕ ist, dann ist $A_r = \emptyset$ für $r < 0$ und $A_r \subseteq A$ für $r > 0$. Folglich gilt $\mu(A_r) = 0$ für alle $0 \neq r \in \mathbb{R}$ und $\int' \phi d\mu = 0$.

3. Sei $B := \{f > 0\}$. Dann gilt $f\chi_A = f\chi_{B \cap A}$ und damit $\int_A f d\mu = \int_{A \cap B} f d\mu = 0$ nach 2., da $\mu(A \cap B) = 0$.

4. Wenn $f \leq g$, dann ist $f\chi_A \leq g\chi_A$. Folglich gilt $\{\phi \in \mathcal{E}(\Omega)^{\geq} | \phi \leq f\chi_A\} \subseteq \{\phi \in \mathcal{E}(\Omega)^{\geq} | \phi \leq g\chi_A\}$, woraus die Behauptung folgt.

5. Für $r > 0$ gilt $\{\phi \in \mathcal{E}(\Omega)^{\geq} | \phi \leq r f\chi_A\} = r^{-1}\{\phi \in \mathcal{E}(\Omega)^{\geq} | \phi \leq f\chi_A\}$. Daraus folgt die Behauptung.

6. Es gilt $\{\phi \in \mathcal{E}(\Omega)^{\geq} | \phi \leq f\chi_A\} \subset \{\phi \in \mathcal{E}(\Omega)^{\geq} | \phi \leq f\chi_B\}$, woraus die Behauptung folgt.

□

Beachte, daß das Integral im allgemeinen nicht additiv ist. Für ein Beispiel betrachten wir den folgenden Maßraum : $\Omega := \{x, y\}$, $R := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mu = \delta_x$. Sei $f := \chi_{\{x\}}$ und $g := \chi_{\{y\}}$. Es gilt $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu = 0$, aber auch $\int_\Omega (f + g) d\mu = 1$.

Der Grund ist, daß f und g nicht meßbar sind. So ist zum Beispiel $f^{-1}(\{1\}) = \{x\} \notin R$.

Der meßbare Raum $\bar{\mathbb{R}}$ und arithmetische Operationen Zur Definition der Rechenoperationen machen wir die Konventionen $\infty - \infty := 0$, $-\infty + \infty := 0$ und $0\infty := 0$, $0^{-1} := \infty$.

Wir betrachten nun $\bar{\mathbb{R}}^2 := \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$. Da die Topologie von $\bar{\mathbb{R}}$ eine abzählbare Basis hat, stimmt nach Lemma 1.37 die Borelsche Struktur auf $\bar{\mathbb{R}}^2$ mit dem Produkt der Borelschen Strukturen auf $\bar{\mathbb{R}}$ überein.

Lemma 1.92. *Die folgenden Abbildungen $\bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}$ sind meßbar.*

1. $(x, y) \mapsto x + y$,
2. $(x, y) \mapsto xy$,
3. $(x, y) \mapsto \max(x, y)$,
4. $(x, y) \mapsto \min(x, y)$,

Weiter sind die Abbildungen $\bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$

1. $x \mapsto x^{-1}$
2. $x \mapsto |x|$
3. $x \mapsto x^r$ *für* $r \geq 0$

meßbar.

Proof. In allen Fällen gibt es eine Partition des Definitionsbereiches der entsprechenden Abbildung in Teilmengen, auf welchen diese stetig und damit meßbar sind. □

Meßbare Funktionen

Definition 1.93. *Mit $\mathcal{L}(\Omega, R)$ bezeichnen wir die Menge der meßbaren Abbildungen von Ω nach $\bar{\mathbb{R}}$.*

Um die Meßbarkeit von $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ zu prüfen, reicht es aus zu zeigen, daß $\{f > a\} \in R$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Operationen für Funktionen werden punktweise definiert.

Satz 1.94. *1. Für $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ gilt $f + g \in \mathcal{L}(\Omega, R)$.*

2. *Für* $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ *gilt* $fg \in \mathcal{L}(\Omega, R)$.

3. *Für* $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ *gilt* $\frac{1}{f} \in \mathcal{L}(\Omega, R)$.

4. *Für* $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ *mit* $f \geq 0$ *und für* $r \geq 0$ *gilt* $f^r \in \mathcal{L}(\Omega, R)$.

5. *Für eine endliche oder durch* $\mathbb{N}$ *indizierte Familie* $(f_i)_i$ *aus* $\mathcal{L}(\Omega, R)$ *gilt*

$$\sup_j f_j,\ \inf_j f_j,\ \liminf_j f_j,\ \limsup_j f_j \in \mathcal{L}(\Omega, R)\ .$$

   Wenn $\lim_j f_j =: f$ *(punktweise) existiert, dann ist* $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$.

6. *Es gilt für* $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ *auch* $f \wedge g, f \vee g, |f|, fg \in L(\Omega, R)$.

Proof. Sind $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\Omega, R)$, dann ist $(f_1, f_2) : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^2$ meßbar, da $p_i \circ (f_1, f_2) = f_i$ meßbar ist für $i = 1, 2$. Nun benutzt man, daß die Komposition meßbarere Abbildungen meßbar ist.

Die Aussagen über die Grenzwerte hatten wir schon in 1.39, 1.40 und 1.41 eingesehen. □

1.2.2 Sätze über Approximation meßbarer Funktionen

Wir betrachten einen meßbaren Raum (Ω, R).

Lemma 1.95. 1. *Ist* $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ *beschränkt, so existiert eine Folge* (ϕ_i) *einfacher Funktionen, welche gleichmäßig gegen* f *konvergiert.*

2. *Eine Funktion* $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ *ist genau dann meßbar, wenn es eine Folge einfacher Funktionen* (ϕ_i) *gibt, welche punktweise gegen* f *konvergiert.*

3. *Sei* $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ *nichtnegativ. Dann existiert eine monotone Folge einfacher Funktionen* (ϕ_i) *mit* $\lim_i \phi_i = f$.

Proof. Zu 1.: Für $i \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $I_i(n) := [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}) \subset \mathbb{R}$. Wir setzen $\phi_n := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{i}{2^n} \chi_{f^{-1}(I_i(n))}$. Da f meßbar und beschränkt ist, ist diese Summe endlich und definiert eine einfache Funktion. Es gilt $\sup_\Omega |f - \phi_n| \leq 2^{-n}$.

Zu 2.: Ist f punktweiser Grenzwert einer Folge meßbarer Funktionen, dann ist f meßbar, wie in 1.41 schon gezeigt wurde. Sei jetzt umgekehrt $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ gegeben. Wir definieren $f_n := f\chi_{\{|f|\leq n\}} + n(\chi_{\{f=\infty\}} - \chi_{\{f=-\infty\}})$ Die Folge (f_n) von beschränkten Funktionen konvergiert punktweise gegen f. Wir finden nach 1. Folgen einfacher Funktionen $(\phi(n)_i)$ für $n \in \mathbb{N}$, welche gleichmäßig gegen f_n konvergieren so daß $\sup_\Omega |f_n - \phi(n)_i| \leq 2^{-i}$. Die Folge $(\phi(n)_n)$ konvergiert dann punktweise gegen f.

Zu 3.: Wir setzen

$$\phi_i := \sum_{j=0}^{4^i-1} \frac{j}{2^i}\chi_{f^{-1}([\frac{j}{2^i},\frac{j+1}{2^i}))} + 2^i\chi_{f^{-1}([2^i,\infty])} \ .$$

Für $x \in \Omega$ gilt $f(x) \geq \phi_{i+1}(x) \geq \phi_i(x) \geq f(x) - 2^{-i}$ falls $f(x) < 2^i$. Wenn $f(x) \geq 2^i$, so gilt $f(x) \geq \phi_{i+1}(x) \geq \phi_i(x) = 2^i$. □

Fast überall... Sei jetzt (Ω, R, μ) ein vollständiger Maßraum.

Definition 1.96. *Sei $P : \Omega \to \{w, f\}$ (wahr und falsch) eine Eigenschaft der Punkte von Ω. Wir sagen, daß **fast alle** (bez. μ) Punkte die Eigenschaft P haben, wenn $\mu(\{P = f\}) = 0$.*

Es folgen konkrete Beispiele für diese Begriffsbildung.

Definition 1.97.

1. *Zwei Funktionen f, g auf Ω **stimmen fast überall (bez. μ) überein**, falls fast alle Punkte $x \in \Omega$ die Eigenschaft $f(x) = g(x)$ haben, also $\mu(\{f \neq g\}) = 0$ gilt. Wir schreiben diese Relation als $f =_\mu g$.*

2. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Folge von Abbildungen (f_i), $f_i : \Omega \to X$ **konvergiert fast überall (bez. μ)** gegen $f : \Omega \to X$, falls fast alle Punkte $x \in \Omega$ die Eigenschaft $\lim_i f_i(x) = f(x)$ haben. Wir schreiben diese Relation als $f_i \to_\mu f$.*

Als Extremfall betrachten wir den Maßraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_x)$ mit dem Dirac-Maß δ_x. Ein Folge von Funktionen $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall gegen f, falls $\lim_{i\in\mathbb{N}} f_i(x) = f(x)$ gilt. Das Verhalten in allen anderen von x verschiedenen Punkten kann ganz beliebig sein.

Lemma 1.98. *Sei (Ω, R) ein meßbarer Raum und (f_i) eine Folge meßbarer Abbildungen $f_i : \Omega \to X$, wobei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum ist und Meßbarkeit bezüglich* *der Borelschen σ-Algebra verstanden wird. Dann ist die Menge*

$$A := \{x \in \Omega \mid (f_i(x)) \text{ konvergiert}\}$$

eine meßbare Menge.

Proof. Wir betrachten die Mengen

$$C_{i,j,m} := \{d(f_i, f_j) < \frac{1}{m}\} \subseteq \Omega \ , \quad i, j, m \in \mathbb{N} \ .$$

Da f_i, $i \in \mathbb{N}$ meßbar und $d : X \times X \to \bar{\mathbb{R}}$ stetig ist, sind diese Mengen meßbar. Dann ist die meßbare Menge

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{i,j \geq n} C_{i,j,m}$$

die Menge der Punkten $x \in \Omega$, in welchen $((f_i)(x))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. □

Ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit ist diese Aussage falsch. Sei $M \subset [0,1] =: I$ eine nicht-meßbare Menge mit dichtem Komplement. Es ist leicht, eine Familie $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von einfachen Abbildungen $f_i : I \to M^c$ zu konstruieren, so daß $f_i \to \mathrm{id}_I$ punktweise (wenn mit Werten in I betrachtet). Die Menge $M \subset I$ ist genau diejenige Menge, auf welcher $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (betrachtet mit Werten in M^c) nicht konvergiert.

Beinahe... Sei jetzt (Ω, R, μ) ein vollständiger Maßraum.

Definition 1.99. *Eine Eigenschaft P der Elemente von R gilt **beinahe für** Ω **(bez.** μ**),** wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $A \in R$ gibt mit $P(A) = w$ und $\mu(A^c) < \epsilon$.*

Hier ist ein Beispiel für diese Begriffsbildung.

Definition 1.100. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Abbildungen $f_i : \Omega \to X$ konvergiert **beinahe gleichmäßig** gegen $f : \Omega \to X$, wenn die Eigenschaft $P(A) := \{(f_{i|A})$ konvergiert gleichmäßig gegen $f_{|A}\}$ beinahe für Ω (bez. μ) gilt.*

Lemma 1.101. *1. Wenn $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ beinahe gleichmäßig gegen f konvergiert, dann konvergiert (f_i) fast überall gegen f.*

2. Wenn $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt auch umgekehrt, daß $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ beinahe gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ fast überall gegen f konvergiert.

Proof. Möge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ beinahe gleichmäßig gegen f konvergieren. Wir wählen Teilmengen $A_k \in R$ derart, daß $(f_{i|A_k})$ gleichmäßig gegen $f_{|A_k}$ konvergiert und $\mu(A_k^c) < \frac{1}{k}$ gilt. Sei $A := \bigcup_k A_k$. Dann konvergiert $(f_{i|A})$ punktweise gegen $f_{|A}$, und es gilt $\mu(A^c) = 0$.

Sei jetzt $\mu(\Omega) < \infty$ und $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ fast überall gegen f konvergent. Dann ist f meßbar. Sei N eine Nullmenge so daß $(f_{i|N^c})$ gegen $(f_{|N^c})$ punktweise konvergiert. Wir betrachten die meßbaren Mengen

$$A_j(k) := \bigcap_{m\geq j} \{d(f_j, f) < 2^{-k-1}\} \ .$$

Die Folge $(A_j(k))_{j\in\mathbb{N}}$ ist aufsteigend und es gilt $N^c \subseteq \bigcup_j A_j(k)$, also $\bigcap_j A_j(k)^c \subseteq N$.

Für $\epsilon > 0$ wählen wir $j_\epsilon(k)$ derart, daß $\mu(A_j(k)^c) < \epsilon 2^{-k-1}$ für alle $j \geq j_\epsilon(k)$. Dann setzen wir $A_\epsilon := \bigcap_k A_{j_\epsilon(k)}(k)$. Es gilt $\mu(A_\epsilon^c) < \epsilon$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $j \geq j_\epsilon(k)$, daß $\sup_{x\in A_\epsilon} d(f_j(x), f(x)) < 2^{-k-1}$. □

Die Aussage 2. gilt nicht mehr, wenn man die Endlichkeit des Gesamtmaßes nicht voraussetzt. Als Beispiel betrachten wir den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei $\mu(A) := \sharp(A)$. Sei $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch $f_i(x) = \frac{x}{i+1}$ gegeben. Dann konvergiert $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ punktweise aber nicht beinahe gleichmäßig auf $\mathbb{N}$.

Stochastisch... Hier ist eine weiterer Konvergenzbegriff, welcher sich direkt aus der Konvergenz in Integralnormen ablesen läßt.

Definition 1.102. *Sei $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Abbildungen von Ω in einen metrischen Raum (X, d). Dann konvergiert die Folge* ***stochastisch*** *(bez. μ) ((dem Maße nach) gegen f, falls für alle $\epsilon > 0$ gilt :*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{d(f, f_n) > \epsilon\}) = 0 \ .$$

Lemma 1.103. *Diese Konvergenzbegriffe stehen wie folgt in Beziehung.*

$$\begin{tikzcd}
\textit{punktweise fast überall} \arrow[rr, bend left, "\mu(\Omega)<\infty"] \arrow[dr, "\mu(\Omega)<\infty"'] & & \textit{beinahe gleichmäßig} \arrow[ll] \arrow[dl] \\
& \textit{stochastisch} \arrow[ul, bend left, "\textit{Teilfolge}"] &
\end{tikzcd}$$

Proof. Die Folge $f_i := \chi_{[i,i+1]}$, $i \in \mathbb{N}$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ fast überall gegen Null, aber nicht stochastisch oder beinahe gleichmäßig.

Sei $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ beinahe gleichmäßig gegen f konvergent. Wir zeigen, daß diese Folge dann stochastisch konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Menge $A_k \in R$ mit $\mu(A_k^c) < \frac{1}{k}$ auf welcher $f_{i|A_k} \to f_{|A_k}$ gleichmäßig gilt. Dann gilt für genügend große $n \in \mathbb{N}$ die Inklusion $\{d(f, f_n) > \epsilon\} \subseteq A_k$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{d(f, f_n) > \epsilon\}) \le \mu(A_k) \le \frac{1}{k} \ .$$

Da k beliebig groß gewählt werden kann, gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(\{d(f, f_n) > \epsilon\}) = 0$. □

1.2.3 Grenzwertsätze für das Integral

Das Lemma von Fatou Wir betrachten eine Maßraum (Ω, R, μ).

Satz 1.104 (Lemma von Fatou, 1906)**.** *Sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer nichtnegativer Funktionen auf Ω. Es gilt*

$$\int_\Omega \liminf_j f_j d\mu \le \liminf_j \int_\Omega f_j d\mu \ .$$

Proof. Wir setzen $g_k := \inf_{j\ge k} f_j$. Sei $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$ mit $0 \le \phi \le \liminf_j f_j$. Wir müssen zeigen, daß dann $\int_\Omega \phi d\mu \le \liminf_j \int_\Omega f_j d\mu$ gilt. Die Meßbarkeit der f_j und ϕ sichert die Meßbarkeit von g_k und aller unten gebildeten Mengen.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß $\int_\Omega \phi d\mu = \infty$. Dann gibt es ein $a > 0$ derart, daß für $A := \{\phi > a\}$ gilt $\mu(A) = \infty$. Wir setzen $A_k := \{g_k > a\}$. Die Folge (A_k) ist monoton aufsteigend, da (g_k) monoton steigt. Weiter ist $A \subseteq \bigcup_k A_k$. Es gilt also $\lim_k \mu(A_k) = \infty$. Nun ist für $j \ge k$ $\int_\Omega f_j d\mu \ge \int_\Omega g_k d\mu \ge a\mu(A_k)$. Damit gilt $\liminf_j \int_\Omega f_j d\mu = \infty$.

Sei jetzt $\int_\Omega \phi d\mu < \infty$, $0 < \epsilon < 1$ und $P := \{\phi > 0\}$. Dann gilt $\mu(P) < \infty$. Wir setzen $P_k := \{g_k > (1-\epsilon)\phi\}$. Die Folge (P_k) ist aufsteigend und es gilt $P \subseteq \bigcup_k P_k$. Es gilt $\lim_k \mu(P \setminus P_k) = 0$. Sei k_1 derart, daß $\mu(P \setminus P_k) < \epsilon$ für alle $k \ge k_1$.

Dann gilt für $k \geq k_1$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g_k d\mu &\geq \int_{P_k} g_k d\mu \\
&\geq \int_{P_k} (1-\epsilon)\phi d\mu \\
&= (1-\epsilon)\int_{P_k} \phi d\mu \\
&= (1-\epsilon)\left[\int_P \phi d\mu - \int_{P\setminus P_k} \phi d\mu\right] \\
&\geq (1-\epsilon)\int_P \phi d\mu - \int_{P\setminus P_k} \phi d\mu \\
&\geq \int_P \phi d\mu - \epsilon \int_P \phi d\mu - \epsilon \sup \phi
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\liminf_j \int_\Omega f_j d\mu \geq \liminf_j \int_\Omega g_j d\mu \geq \int_\Omega \phi d\mu - \epsilon \left[\int_P \phi d\mu + \sup \phi\right] .$$

Das ϵ beliebig klein sein darf, gilt $\liminf_j \int_\Omega f_j d\mu \geq \int_\Omega \phi d\mu$. □

Lemma 1.105. *Die Aussage des Lemmas von Fatou wird im allgemeinen falsch, wenn man die Forderung, daß die f_j meßbar seien, fallen läßt,*

Proof. Wir betrachten den Maßraum $\mathbb{N}$ mit der σ-Algebra $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$ und dem Zählmaß. Sei $f_j = \chi_{\mathbb{N}\setminus\{j\}}$. Dann gilt $\liminf_j f_j = \lim f_j = 1$, also $\int_\mathbb{N} \liminf_j f_j = \infty$. Auf der anderen Seite gilt $\int_\mathbb{N} f_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$, also $\liminf_j \int_\mathbb{N} f_j = 0$. □

Lemma 1.106. *Die Ungleichung im Lemma von Fatou kann im allgemeinen nicht zu einer Gleichung verschärft werden.*

Proof. Auf $(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$ betrachten wir die Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$

$$f_j := \begin{cases} \chi_{[0,1]} & j \equiv 1(2) \\ \chi_{[1,2]} & j \equiv 0(2) \end{cases} .$$

Dann gilt $\int_\Omega \liminf_j f_j d\mu = 0$ und $\liminf_j \int_\Omega f_j d\mu = 1$. □

Der Satz von Lebesgue Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum.

Satz 1.107 (Lebesguescher Satz über monotone Konvergenz, 1902)**.** *Sei (f_i) eine monoton wachsende Folge meßbarer nichtnegativer Funktionen auf Ω. Dann gilt*

$$\int_\Omega \lim_j f_j d\mu = \lim_j \int_\Omega f_j d\mu \ .$$

Proof. Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$\int_\Omega \lim_j f_j d\mu = \int_\Omega \liminf_j f_j d\mu \leq \liminf_j \int_\Omega f_j d\mu \ .$$

Wegen $f_k \leq \lim_j f_j$ gilt $\int_\Omega f_k d\mu \leq \int_\Omega \lim_j f_j d\mu$ und damit

$$\limsup_k \int_\Omega f_k d\mu \leq \int_\Omega \lim_j f_j d\mu \ .$$

Es folgt $\int_\Omega \lim_j f_j d\mu = \lim_j \int_\Omega f_j d\mu$. □

Lemma 1.108. *Die Voraussetzung der Monotonie der Folge im Satz über monotone Konvergenz kann nicht weggelassen werden kann.*

Proof. Wir betrachten den Maßraum $[0,1]$ als Einschränkung des Lebesgueschen Maßraumes. Sei $f_j := j\chi_{[0,\frac{1}{j}]}$. Dann gilt $\lim_j f_j = \chi_{\{0\}}$. Folglich ist $\int_{[0,1]} \lim_j f_j d|.| = 0$. Auf der anderen Seite gilt $\int_{[0,1]} f_j d|.| = 1$, also auch $\lim_j \int_{[0,1]} f_j d|.| = 1$. □

Die Additivität des Integrals Wir betrachten einen Maßraum (Ω, R, μ).

Satz 1.109. *Seien $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegative Funktionen.*

1. *Es gilt*

$$\int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu \ .$$

2. *Wenn $f \leq g$ fast überall (bez. μ), dann gilt*

$$\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu \ .$$

Proof. Zu 1.: Mit 1.95, 3., wählen wir monotone Folgen einfacher Funktionen (ϕ_i) und (ψ_i) mit $\lim_i \phi_i = f$ und $\lim_i \psi_i = g$. Dann ist $(\phi_i + \psi_i)$ monoton und es gilt $\lim_i (\phi_i + \psi_i) = f + g$. Mit dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz schließen wir, daß

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f+g) d\mu &= \lim_i \int_\Omega (\phi_i + \psi_i) d\mu \\
&= \lim_i \int_\Omega \phi_i \mu + \lim_i \int_\Omega \psi_i d\mu \\
&= \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu
\end{aligned}$$

Zu 2.: Sei $U := \{f \leq g\}$. Dann gilt $\mu(\Omega \setminus U) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f d\mu &= \int_U f d\mu + \int_{\Omega \setminus U} f d\mu \\
&= \int_U f d\mu \\
&\leq \int_U g d\mu \\
&= \int_\Omega g d\mu \ .
\end{aligned}$$

□

Satz 1.110 (Levi, 1906)**.** *Sei (f_i) eine Folge nichtnegativer Funktionen auf Ω. Dann gilt $\int_\Omega \sum_j f_j d\mu = \sum_j \int_\Omega f_j d\mu$.*

Proof. Die Folge der Partialsummen ist monoton. Wir wenden Additivität und 1.109, 1.107 an. □

1.2.4 Integrierbare Funktionen

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum.

Definition 1.111. *Sei $A \in R$ und $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Dann heißt f über A integrierbar, falls $\int_A |f| d\mu < \infty$ gilt. Im Fall $A = \Omega$ sagen wir einfach, daß f integrierbar sei. Mit $\mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ bezeichnen wir die Menge der integrierbaren Funktionen.*

Für $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ sei $f^+ = f\chi_{\{f \geq 0\}}$ und $f^- := -f\chi_{\{f \leq 0\}}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ genau dann integrierbar ist, wenn $\int_\Omega f^+ d\mu < \infty$ und $\int_\Omega f^- d\mu < \infty$ gilt.

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $A \in R$, dann ist $f_{|A} \in \mathcal{L}^1(A, R_{|A}, \mu_{|R_{|A}})$.

Definition 1.112. *Sei $A \subseteq \Omega$. Wir definieren $\int_A : \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu) \to \mathbb{R}$ durch*

$$\int_A f d\mu := \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \ .$$

Satz 1.113. *1. Wenn $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $r \in \mathbb{R}$, so gilt auch $rf + g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.*

2. Sei $A \in R$. Dann gilt für $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $r \in \mathbb{R}$, daß

$$\int_A (rf + g) d\mu = r \int_A f d\mu + \int_A g d\mu \ .$$

3. Ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ fast überall gleich Null oder A eine Nullmenge, so gilt

$$\int_A f d\mu = 0 \ .$$

4. Wenn $A, B \in R$ disjunkt sind und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ ist, so gilt

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu \ .$$

5. Gilt für $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ daß $f \leq_\mu g$, dann ist für jedes $A \in R$

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu \ .$$

6. Für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $A \in R$ gilt $|\int_A f d\mu| \leq \int_A |f| d\mu$. Gleichheit gilt hier genau dann, wenn f fast überall nichtnegativ oder fast überall nichtpositiv ist.

Proof. Zu 1.: Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, so ist für $r \in \mathbb{R}$ wegen $\int_\Omega |rf| d\mu = |r| \int_\Omega |f| d\mu < \infty$ auch $rf \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, so gilt $|f+g| \leq |f|+|g|$, also $\int_\Omega |f+g| d\mu \leq \int_\Omega |f| d\mu + \int_\Omega |g| d\mu < \infty$. Folglich ist $f + g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.

Zu 2.: Es gilt für $r \geq 0$, daß

$$\int_A rf d\mu = \int_A (rf)^+ d\mu - \int_A (rf)^- d\mu = r \int_A f^+ d\mu - r \int_A f^- d\mu = r \int_A f d\mu \ .$$

Der Fall $r \leq 0$ geht analog. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Sei $N := \{|f| = \infty\} \cup \{|g| = \infty\}$. Dann ist N eine Nullmenge. Auf $\Omega \setminus N$ gilt

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \ .$$

Daraus schließen wir

$$\int_A (f+g)^+ d\mu + \int_A f^- d\mu + \int_A g^- d\mu = \int_A (f+g)^- d\mu + \int_A f^+ d\mu + \int_A g^+ d\mu \ .$$

Es folgt

$$\int_A (f+g)^+ d\mu - \int_A (f+g)^- d\mu = \left(\int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \right) + \left(\int_A g^+ d\mu - \int_A g^- d\mu \right) \ .$$

Zu 3.: Folgt aus 1.91.

Zu 4.: Wir benutzen $\int_A f d\mu = \int_\Omega \chi_A f$ und $\chi(A \cup B) = \chi_A + \chi_B$ sowie 2.

Zu 5.: Sei $N := \{f < g\}$. Dann ist N eine Nullmenge. Auf $\Omega - N$ gilt dann $f^+ \leq g^+$ und $g^- \leq f^-$. Wir schließen, daß

$$\int_{A \setminus N \cap A} f d\mu = \int_{A \setminus N \cap A} f^+ d\mu - \int_{A \setminus N \cap A} f^- d\mu \leq \int_{A \setminus N \cap A} g^+ d\mu - \int_{A \setminus N \cap A} g^- d\mu = \int_{A \setminus N \cap A} g d\mu \ .$$

Da die Integrale über $A \cap N$ verschwinden, folgt die Behauptung.

Zu 6.: Klar $\square$

Wir müssen beachten, daß der Raum $\mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ ist kein Vektorraum ist. Die Addition ist zum Beispiel nicht assoziativ (da unendliche Werte auftreten können).

Wir haben folgende weitere Eigenschaften.

1. Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und gilt $f =_\mu g$, so gilt $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu$.
2. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $h \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Wenn $f =_\mu h$, so ist $h \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.

3. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, $f \geq 0$ und $h \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Dann folgt aus $|h| \leq_\mu f$ auch $h \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.

4. Sei (f_i) eine Folge in $\mathcal{L}(\Omega, R)$. Dann ist $\{x \in \Omega \mid \lim_n f(x) \text{ existiert nicht}\}$ eine meßbare Menge (1.98).

5. Sei (f_i) eine Folge in $\mathcal{L}(\Omega, R)$, $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ und gelte $f_i \to_\mu f$. Ist (Ω, R, μ) vollständig, so ist f meßbar (vergl. 1.41 und Beweis von 1.114).

Der Satz über die majorisierte Konvergenz Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum.

Satz 1.114 (Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz)**.** *Sei (f_i) eine Folge in $\mathcal{L}(\Omega, R)$, $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, und gelte $|f_i| \leq_\mu g$ und $f_i \to_\mu f$. Ist (Ω, R, μ) vollständig oder gilt $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$, so ist*

1. $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ *und*
$$\lim_i \int_\Omega f_i d\mu = \int_\Omega f d\mu \ .$$

2. $\lim_i \int |f - f_i| d\mu = 0$.

Proof. Zu 1.: Wir zeigen zuerst, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß $|f_i| \leq g$ und $f_i \to f$ gilt. Sei $A_i = \{|f_i| > g\}$ und $A := \{f_i \not\to f\}$. Dann ist $N := A \cup \bigcup_i A_i$ eine Nullmenge. Wir setzen $\tilde{f} := f\chi_{\Omega \setminus N}$ und $\tilde{f}_i := f_i \chi_{\Omega \setminus N}$. Diese erfüllen die stärkeren Voraussetzungen. Die Behauptung für $\tilde{f}$, $(\tilde{f}_i)$ impliziert sofort die Behauptung für f, (f_i).

Wir nehmen jetzt $|f_i| \leq g$ und $f_i \to f$ an. Es folgt $f_i \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und die Meßbarkeit von f. Weiterhin gilt $|f| \leq g$, womit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ gilt. Wir schließen mit dem Lemma von Fatou, daß

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g d\mu + \int_\Omega f d\mu &= \int_\Omega (g + f) d\mu \\
&= \int_\Omega \liminf_i (g + f_i) d\mu \\
&\leq \liminf_i \int_\Omega (g + f_i) d\mu \\
&= \int_\Omega g d\mu + \liminf_i \int_\Omega f_i d\mu \ .
\end{aligned}$$

Weiterhin

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g d\mu - \int_\Omega f d\mu &= \int_\Omega (g-f) d\mu \\
&= \int_\Omega \liminf_i (g - f_i) d\mu \\
&\leq \liminf_i \int_\Omega (g-f_i) d\mu \\
&= \int_\Omega g d\mu - \limsup_i \int_\Omega f_i d\mu \ .
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt wegen $\int_\Omega g d\mu \in \mathbb{R}$, daß

$$\limsup_i \int_\Omega f_i d\mu \leq \int_\Omega f d\mu \leq \liminf_i \int_\Omega f_i d\mu \ ,$$

also

$$\lim_i \int_\Omega f_i d\mu = \int_\Omega f d\mu \ .$$

Zu 2.: Es gilt $|f - f_i| \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, $|f - f_i| \to_\mu 0$ und $|f - f_i| \leq_\mu g$. Nach 1. gilt

$$\lim_i \int_\Omega |f - f_j| d\mu = \int_\Omega 0 d\mu = 0 \ .$$

□

Lemma 1.115. *Im allgemeinen gilt für eine Folge (f_i) in $\mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ mit $f_i \to_\mu f$ und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ nicht*

$$\lim_i \int_\Omega f_i d\mu = \int_\Omega f d\mu \ .$$

Proof. Siehe Beispiel 1.108. □

Lemma 1.116. *Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ so gilt*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{A \in R, \mu(A) < \epsilon} \int_A f d\mu = 0 \ .$$

Proof. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es eine Folge $A_i \in R$ mit $\mu(A_i) < 2^{-i-1}$ derart, daß $\int_{A_i} f d\mu \geq \delta$ für ein $\delta > 0$ und alle $i \geq 1$ gilt. Wir betrachten $B_i := \bigcup_{j \geq i} A_j$. Dann gilt $\mu(B_i) \leq 2^{-i}$ und $\int_{B_i} f d\mu \geq \delta$ für alle $i \geq 1$. Weiter ist gilt $\chi_{B_i} f \to 0$ fast überall (nämlich außerhalb der Nullmenge $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$). Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz gilt wegen $|\chi_{B_i} f| \leq |f|$ und $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, daß $\lim_{i\to\infty} \int \chi_{B_i} f d\mu = 0$. Das ist ein Wiederspruch. □

1.2.5 Differenzieren unter dem Integral

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Wir betrachten eine Funktion $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$, wobei $U \subset \mathbb{R}$ eine zusammenhängende offene Umgebung von 0 ist. Wir nehmen an, daß für jedes $u \in U$ die Funktion ${}_uf : \Omega \to \mathbb{R}$, ${}_uf(x) := f(u, x)$ integrierbar ist. Dann können wir die Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ durch

$$F(u) := \int_\Omega {}_uf \, d\mu$$

definieren. Für $x \in \Omega$ sei $f_x : U \to \mathbb{R}$ durch $f_x(u) := f(u, x)$ gegeben.

Satz 1.117. *Wenn f_x für fast alle $x \in \Omega$ differenzierbar ist, so ist die Funktion ${}_uf'$, welche durch*

$${}_uf'(x) := \begin{cases} f_x'(u) & f_x \textit{ differenzierbar} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist, meßbar. Wenn es ein $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ gibt mit $\sup_u |{}_uf'| \leq g$, dann ist F in $u = 0$ differenzierbar, ${}_0f'$ integrierbar und es gilt

$$F'(0) = \int_\Omega {}_0f' d\mu \ .$$

Proof. Sei $N := \{f_x \text{ ist nicht differenzierbar}\}$. Nach Voraussetzung ist N eine Nullmenge. Auf $\Omega \setminus N$ gilt

$${}_uf' = \lim_{n\to\infty} n({}_{u+\frac{1}{n}}f - {}_uf) \ .$$

Damit ist ${}_uf'$ als punktweiser Limes meßbarer Funktionen auf $\Omega \setminus N$ selbst meßbar.

Sei (h_i) eine Nullfolge. Nach dem Mittelwertsatz gilt für $x \in \Omega \setminus N$ daß $|{}_{h_i}f(x) - {}_0f(x)| \leq g(x)|h_i|$. Damit gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ daß $|\frac{1}{h_i}({}_{h_i}f - {}_0f)| \leq_\mu g$. Wir wenden nun den Satz über majorisierte Konvergenz an.

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} \frac{F(h_i) - F(0)}{h_i} &= \lim_{i\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{h_i}({}_{h_i}f - {}_0f) d\mu \\ &= \int_\Omega {}_0f' d\mu \end{aligned}$$

$\square$

Hier ist ein Beispiel, welches die Notwendigkeit der Voraussetzungen im Satz 1.117 illustriert. Sei $f : (-1,1)\times[0,1) \to \mathbb{R}$ durch $f(u,x) := \frac{\chi_{(-x,x)}(u)}{x}$. Dann ist $F(u) = -\ln(|u|)$. Diese Funktion ist in Null sicher nicht differenzierbar. Auf der anderen Seite ist ${}_0f'(x) = 0$ fast überall.

1.2.6 Die Transformationsformel

Sei $\Phi : (\Omega_0, R_0) \to (\Omega_1, R_1)$ eine meßbare Abbildung und μ_0 ein Maß auf Ω_0. Dann können wir das Maß $\mu_1 := \Phi_*\mu_0$ bilden. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, R_1, \mu_1)$.

Satz 1.118. *Es gilt* $\Phi^*f \in \mathcal{L}^1(\Omega_0, R_0, \mu_0)$ *und*

$$\int_{\Omega_0} \Phi^* f d\mu_0 = \int_{\Omega_1} f d\mu_1 \ . \tag{5}$$

Proof. $\Phi^*f = f \circ \Phi$ is meßbar als Komposition meßbarer Abbildungen. Es gilt weiter $\Phi^*|f| = |\Phi^*f|$ sowie $(\Phi^*f)^\pm = \Phi^*(f^\pm)$. Es reicht deshalb aus, die Gleichung (5) für das Integral nicht-negativer meßbarer Funktionen zu zeigen.

Sei nun f nicht negativ und meßbar. Dann existiert nach Lemma 1.95, 3., eine monotone Folge $(\phi_i)_i$ in $\mathcal{E}(\Omega_1)^\geq$ derart, daß $\lim_i \phi_i = f$ punktweise gilt. Dann ist auch $(\Phi^*\phi_i)$ eine monotone Folge in $\mathcal{E}(\Omega_0)^\geq$ und es gilt $\lim_i \Phi^*\phi_i = \Phi^*f$ punktweise.

Für $\phi \in \mathcal{E}(\Omega_1)^\geq$ gilt $\Phi^*\phi \in \mathcal{E}(\Omega_0)^\geq$ und $\Phi^*\phi \leq \Phi^*f$. Sei $\phi = \sum_{r\in[0,\infty]} r\chi_{\{\phi=r\}}$ die kanonische Darstellung. Dann ist $\Phi^*\chi = \sum_{r\in[0,\infty]} r\chi_{\Phi^{-1}\{\phi=r\}}$ die kanonische Darstellung von $\Phi^*\phi$. Es folgt

$$\int_{\Omega_0} \Phi^*\phi d\mu = \sum_{r\in[0,\infty]} r\mu_0(\Phi^{-1}\{\phi=r\}) = \sum_{r\in[0,\infty]} r\mu_1(\{\phi=r\}) = \int_{\Omega_1} \phi d\mu_1 \ .$$

Wir schließen mit dem Satz 1.107 über monotone Konvergenz, daß

$$\int_{\Omega_0} \Phi^* f d\mu_0 = \lim_i \int_{\Omega_0} \Phi^*\phi_i d\mu_0 = \lim_i \int_{\Omega_1} \phi_i d\mu_1 = \int_{\Omega_1} f d\mu_1 \ .$$

$\square$

Für das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ erhalten wir beispielsweise die Transformationsformel

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda x + t) d|x| = \frac{1}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} f(x) d|x| \ .$$

In der Tat ist für $\Phi(x) =: \lambda x + t = \mathtt{add}_t \circ \mathtt{mult}_\lambda$ nach Lemma 1.72

$$\Phi_*|.| = \mathtt{add}_{t*}(\mathtt{mult}_{\lambda *}|.|) = \mathtt{add}_{t*}(\frac{1}{|\lambda|}|.|) = \frac{1}{|\lambda|}|.| \ .$$

1.3 L^p-Räume

1.3.1 Definitionen

Wir betrachten einen Maßraum (Ω, R, μ). Das Hauptziel dieses Abschnittes ist es, Banachräume von zur Potenz p integrierbaren Funktionen auf Ω zu definieren.

Definition 1.119. *1. Für $p \in (0, \infty)$ setzen wir*

$$\mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu) := \{f \in \mathcal{L}(\Omega, R) \mid |f|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)\}.$$

Für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ setzen wir

$$\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \ .$$

2. Für $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ definieren wir das wesentliche Supremum

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{r \in \bar{\mathbb{R}} \mid f \leq_\mu r\} \ .$$

Weiter setzen wir

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu) := \{f \in \mathcal{L}(\Omega, R) \mid \operatorname{ess\,sup}|f| < \infty\}$$

und definieren für $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu)$

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}|f| \ .$$

Beachte, daß $\|f\|_\infty$ vom Maß abhängt. Als Beispiel betrachten wir den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, |.|)$ und die Funktion $f = x\chi_{\mathbb{Q}}$. Dann gilt $\|f\|_\infty = 0$. Wenn wir allerdings anstelle des Lebesguemaßes das Diracmaß δ_a, $a \in \mathbb{R}$, betrachten, dann ist $\|f\|_\infty = |a|$ für $a \in \mathbb{Q}$ und $\|f\|_\infty = 0$ für $a \notin \mathbb{Q}$.

Wir haben weiter folgende einfache Tatsachen.

1. Wenn $p \in (0, \infty)$ und $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$, dann ist $f^{-1}(\{-\infty, \infty\})$ eine Nullmenge.

2. Wenn $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu)$, dann ist $\{|f| > \operatorname{ess\,sup}|f|\}$ eine Nullmenge.

3. Wenn $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt für $0 < q \leq p \leq \infty$, daß

$$\mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega, R, \mu) \ .$$

   Die Voraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$ kann hier im allgemeinen nicht weggelassen werden.

Die Relation $f =_\mu g$ auf $\mathcal{L}(\Omega, R)$ ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 1.120. *Für $p \in (0, \infty]$ setzen wir*

$$L^p(\Omega, R, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu) / \text{“} =_\mu \text{“} \ .$$

Wir werden jetzt schrittweise erst eine Vektorraumstruktur auf diesem Raum einführen, dann einsehen, daß $\|.\|_p$ eine Norm induziert und schließlich die Vollständigkeit von $L^p(\Omega, R, \mu)$ in dieser Norm zeigen.

Eine Abbildung $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt endlich, wenn $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ gilt.

Lemma 1.121. *Jede Klasse $[f] \in L^p(\Omega, R, \mu)$ enthält einen endlichen Vertreter $\tilde{f}$.*

Proof. Sei $p < \infty$. Dann setzen wir $\tilde{f}(x) := f\chi_{f^{-1}(\{-\infty,\infty\}^c)}$. Dann ist $\tilde{f}$ endlich, $f =_\mu \tilde{f}$, und es gilt $\int_\Omega |\tilde{f}|^p d\mu = \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty$. Also $\tilde{f} \in [f]$.

Sei nun $p = \infty$. Wir setzen $\tilde{f} := f\chi_{\{|f| > \operatorname{ess\,sup}|f|\}^c}$. Dann ist $\tilde{f}$ endlich, $\tilde{f} =_\mu f$, und es gilt $\operatorname{ess\,sup}|\tilde{f}| = \operatorname{ess\,sup}|f| < \infty$. Also $\tilde{f} \in [f]$. □

Wir erklären nun die Vektorraumstruktur auf $L^p(\Omega, R, \mu)$.

Definition 1.122. *Seien $[f], [g] \in L^p(\Omega, R, \mu)$, wobei $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ endlich sind. Dann definieren wir für $r \in \mathbb{R}$*

$$[f] + r[g] = [f + rg] \ .$$

Lemma 1.123. *Diese Operationen sind wohldefiniert und bilden eine Vektorraumstruktur auf $L^p(\Omega, R, \mu)$.*

Proof. Sei $p \in (0, \infty)$. Dann gilt $|f + rg|^p \leq (|f| + |r||g|)^p \leq (2(|f| \vee |r||g|))^p \leq 2^p(|f|^p + |r|^p|g|^p)$. Damit gilt $f + rg \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$.

Ist $p = \infty$, so gilt $\operatorname{ess\,sup}|f + rg| \leq \operatorname{ess\,sup}(|f| + |r||g|) \leq \operatorname{ess\,sup}|f| + |r|\operatorname{ess\,sup}|g|$. Also ist auch in diesem Fall $f + rg \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$.

Seien $\tilde{f} \in [f]$ und $\tilde{g} \in [g]$ andere endliche Vertreter. Dann gilt $f(x)+rg(x) = \tilde{f}(x)+r\tilde{g}(x)$ auf dem Komplement der Nullmenge $\{f \neq \tilde{f}\} \cup \{g \neq \tilde{g}\}$. Also $[f + rg] = [\tilde{f} + r\tilde{g}]$.

Daß $L^p(\Omega, R, \mu)$ mit diesen Operationen ein Vektorraum ist, ist nun einfach einzusehen. □

Wir studieren nun die Norm. Die folgenden Eigenschaften sind einfach zu zeigen.

1. $\|.\|_p : L^p(\Omega, R, \mu) \to [0, \infty)$ ist durch $\|[f]\|_p := \|f\|_p$ wohldefiniert.
2. $\|r[f]\|_p = |r|\|[f]\|_p$ gilt für alle $r \in \mathbb{R}$.
3. $\|[f]\|_p = 0$ gilt genau dann, wenn $[f] = 0$.

Lemma 1.124. $(L^\infty(\Omega, R, \mu), \|.\|)$ *ist ein normierter Vektorraum.*

Proof. Die Dreiecksungleichung für $\|.\|_\infty$ ist einfach zu zeigen. □

Für den Nachweis der Dreiecksungleichung für $\|.\|_p$ brauchen wir etwas Vorbereitung.

Satz 1.125 (Hölderungleichung)**.** *Seien $q, p \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Sei weiter $[f] \in L^p(\Omega, R, \mu)$, $[g] \in L^q(\Omega, R, \mu)$, wobei f, g endliche Vertreter sind. Dann ist $[fg]$ eine wohldefinierte Klasse in $L^1(\Omega, R, \mu)$, und es gilt*

$$\|[fg]\|_1 \leq \|[f]\|_p \|[g]\|_q \ .$$

Proof. Sei $p = 1$ und $q = \infty$. Dann gilt $|fg| \leq_\mu (\operatorname{ess\,sup}|g|) \ |f|$. Folglich ist $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, und es gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 \ .$$

Sei jetzt $p \in (1, \infty)$. Wenn $f =_\mu 0$ oder $g =_\mu 0$, dann ist $fg =_\mu 0$, und es gilt $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, $\|fg\|_1 = 0 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Sei also $f \neq_\mu 0$ und $g \neq_\mu 0$. Für alle $a, b \in (0, \infty)$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \; .$$

Mit dieser Ungleichung schließen wir, daß

$$\frac{|f||g|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \; .$$

Wir schließen, daß $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und nach Integration und Multiplikation mit $\|f\|_p \|g\|_q$

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p} \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\|g\|_q^q} \|g\|_q^q \leq \|f\|_p \|g\|_q (\frac{1}{q} + \frac{1}{p}) = \|f\|_p \|g\|_q \; .$$

Sind $\tilde{f} \in [f]$ und $\tilde{g} \in [g]$ andere Vertreter, so gilt $\tilde{f}\tilde{g} =_\mu fg$ und somit $[\tilde{f}\tilde{g}] = [fg]$. Damit ist die Klasse $[fg]$ wohldefiniert. □

Satz 1.126. *Für $p \in [1, \infty)$ ist $(L^p(\Omega, R, \mu), \|.\|_p)$ ein normierter Vektorraum.*

Proof. Wir müssen die Dreiecksungleichung zeigen. Der Fall $p = 1$ ist klar. Sei jetzt $p \in (1, \infty)$ und $q \in (1, \infty)$ derart, daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt.

Seien $[f], [g] \in L^p(\Omega, R, \mu)$ mit endlichen Vertretern f, g. Es gilt (beachte, daß $\frac{p}{p-1} = q$ ist) $(|f+g|^{p-1})^q = |f+g|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Wie schließen, daß $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\Omega, R, \mu)$. Nach der Hölderungleichung gilt $(|f| + |g|)|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f+g||f+g|^{p-1} d\mu \\
&\leq \int_\Omega (|f| + |g|)|f+g|^{p-1} d\mu \\
&= \||f||f+g|^{p-1}\|_1 + \||g||f+g|^{p-1}\|_1 \\
&\leq \|f\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{\frac{p}{p-1}}
\end{aligned}$$

Daraus schließen wir $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. □

Für $\|.\|_p$ mit $p \in (0, 1)$ gilt die Dreiecksungleichung im allgemeinen nicht .

1.3.2 Vollständigkeit

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum.

Folgendes Kriterium ist zum Nachweis der Vollständigkeit eines normierten Vektorraumes $(V, \|.\|)$ nützlich.

Lemma 1.127. *$(V, \|.\|)$ ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente Reihe in V konvergiert.*

Proof. Sei (v_i) eine Folge in V. Die Reihe $\sum_i v_i$ konvergiert definitionsgemäß absolut, falls $\sum_i \|v_i\| < \infty$ gilt.

Wenn $(V, \|.\|)$ vollständig ist, so konvergiert jede absolut konvergente Reihe in V. Wir zeigen die andere Richtung.

Sei (f_i) eine Cauchyfolge in V. Wir wählen für jedes $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n, m \geq N(\epsilon)$ gilt $\|f_n - f_m\| \leq \epsilon$. Wir setzen nun $v_0 := f_{N(1/2)}$ und weiter induktiv

$$v_i := f_{N(2^{-i-1})} - f_{N(2^{-i})} \ .$$

Dann gilt $\|v_i\| \leq 2^{-i}$. Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ ist absolut konvergent. Sei $f := \sum_{i \geq 0} v_i$ der Genzwert dieser Reihe, welcher nach Vorraussetzung existiert. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann wählen wir $j \in \mathbb{N}$ so daß $2^{-j+1} < \epsilon$. Es gilt dann $\| \sum_{0 \leq i \leq j} v_i - f\| \leq 2^{-j} < \frac{1}{2}\epsilon$, also $\|f_{N(2^{-j-1})} - f\| < \frac{1}{2}\epsilon$. Für alle $m \geq N(2^{-j})$ gilt dann $\|f_m - f\| < \epsilon$. Wir haben also gezeigt, daß $\lim f_i = f$. □

Satz 1.128 (Fischer, Riesz 1907)**.** *Für $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(\Omega, R, \mu)$ ein Banachraum.*

Proof. Sei $([f_i])$ eine Folge in $L^p(\Omega, R, \mu)$ derart daß $\sum_i [f_i]$ absolut konvergiert. Sei $F_k := \sum_{i \leq k} |f_k|$. Dann existiert $F := \lim_k F_k \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Es gilt $\|F_k\|_p \leq \sum_{i \leq k} \|f\|_p \leq \sum_i \|f\|_p =: M$.

Sei vorerst $p = \infty$: Für jedes k ist $\{F_k > M\}$ eine Nullmenge. Es gilt $\{F > M\} \subseteq \bigcup_k \{F_k > M\}$ und damit $F \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu)$. Wir definieren $f(x) := \sum_i f_i(x)$ für $x \in \{F > M\}$ und $f(x) := 0$ sonst. Dann ist $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu)$ und $\|f\|_\infty \leq M$.

Sei jetzt $p \in [1, \infty)$. Es gilt nach dem Satz über monotone Konvergenz, daß

$$\int_\Omega F^p d\mu = \lim_k \int_\Omega F_k^p d\mu \le M^p \ .$$

Damit ist $A := F^{-1}(\{\infty\})$ eine Nullmenge. Für $x \in \Omega \setminus A$ definieren wir $f(x) := \sum_i f_i(x)$, und wir setzen $f(x) := 0$ für $x \in A$. Dann ist f als punktweiser Grenzwert meßbarer Funktionen meßbar. Wir schließen weiter $|f|^p \le F^p$ und damit $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ und $\|f\|_p \le M$.

Wir zeigen nun, daß $[f] = \sum_i [f_i]$ gilt. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $L \in \mathbb{N}$ derart, daß $\sum_{i>L} \|f_i\|_p < \epsilon$

Sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt für alle $m \ge L$ nach dem Lemma von Fatou :

$$\begin{aligned}
\|[f] - \sum_{i \le m} [f_i]\|_p^p &= \int_\Omega |f - \sum_{i \le m} f_i|^p d\mu \\
&= \int_\Omega |\sum_{i>m} f_i|^p d\mu \\
&= \int_\Omega \liminf_n |\sum_{i=m+1}^n f_i|^p d\mu \\
&\le \liminf_n \int_\Omega |\sum_{i=m+1}^n f_i|^p d\mu \\
&= \liminf_n \|\sum_{i=m+1}^n f_i\|_p^p \\
&\le \liminf_n (\sum_{i=m+1}^n \|f_i\|_p)^p \\
&\le \epsilon^p \ .
\end{aligned}$$

Für $p = \infty$ gilt für alle $m \ge L$ und $x \in \{F \le M\}$, daß

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sum_{i \le m} f_i(x)| &= \lim_n |\sum_{i>m}^n f_i(x)| \\
&\le \lim_n \sum_{i>m}^n |f_i(x)| \\
&\le \sum_{i>L} |f_i(x)|
\end{aligned}$$

Dann gilt für x im Komplement der Nullmenge $\{F > M\} \cup \bigcup_i \{f_i > \|f_i\|_\infty\}$, daß $|f(x) - \sum_{i \le m} f_i(x)| < \epsilon$. Also $\|f - \sum_{i \le m} f_i\|_\infty < \epsilon$. $\square$

1.3.3 Weitere Eigenschaften

1. Das Bild von $\mathcal{E}(\Omega, R) \cap \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu) \to L^p(\Omega, R, \mu)$, $\phi \mapsto [\phi]$, ist dicht
2. Sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist $C_c(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$ dicht.
3. Sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist $C_c^\infty(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$ dicht.
4. $C_c(\mathbb{R})$ ist nicht dicht in $L^\infty(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$.

Definition 1.129. *Ein metrischer Raum heißt* ***separabel****, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

Definition 1.130. *Sei* (Ω, R, μ) *ein Maßraum,* $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ *die äußere Erweiterung von* μ *und* $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$*. Der Raum* (Ω, R, μ) *heißt von innen* S*-regulär, falls für jedes* $A \in R$ *gilt*

$$\inf_{B \in S, B \subseteq A} \tilde{\mu}(A \setminus B) = 0 \ .$$

Wenn $(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$ die Vervollständigung von (Ω, R, μ) ist, dann ist $(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$ von innen R-regulär.

1. $(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$ ist von innen D-regulär.
2. Der Haarsche Maßraum $(\mathbb{Z}_p, R, \mu)$ ist von innen S regulär ist, wobei S die durch die Urbilder $p_r^{-1}(\{x\})$, $x \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, $p_r : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ erzeugte Algebra ist.
3. Der Bernoullische Schiftraum über A mit Verteilung $p : A \to [0, 1]$ (Ω, R, μ) ist bezüglich der Algebra der Zylindermengen von innen regulär.

Lemma 1.131. *Sei* (Ω, R, μ) *von innen* S *regulär und* S *abzählbar. Für* $p \in [1, \infty)$ *ist dann der Raum* $L^p(\Omega, R, \mu)$ *separabel ist.*

Sei $p \in [1, \infty)$.

1. $L^p(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$ ist separabel.
2. $L^p(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}, \mu)$ ist separabel.

3. $L^p(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ ist separabel.

Sei $(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$ eine Erweiterung des Maßraumes (Ω, R, μ). Dann haben wir eine natürliche Abbildung

$$I : \mathcal{L}(\Omega, R) \to \mathcal{L}(\Omega, \bar{R}) \ .$$

Lemma 1.132. *Wenn $(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$ von innen R-regulär und $p \in [0, \infty)$ ist, dann ist I : $L^p(\Omega, R) \to L^p(\Omega, \bar{R})$ eine isometrische Isomorphie.*

Proof. Wir nehmen an, daß $(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$ von innen R-regulär ist. Dann gelten folgende aufeinander aufbauende Tatsachen.

1. Für jede nichtnegative einfache Funktion $\phi \in \mathcal{E}(\Omega, \bar{R})$ und jedes $\epsilon > 0$ existiert eine nichtnegative einfache Funktion $\tilde{\phi} \in \mathcal{E}(\Omega, R)$ mit $\tilde{\phi} \leq \phi$ und

$$\int_\Omega \phi d\bar{\mu} - \epsilon \leq \int_\Omega \tilde{\phi} d\mu \leq \int_\Omega \phi d\bar{\mu}$$

2. Für jede nichtnegative Funktion $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f d\bar{\mu} \ .$$

3. Mögen $[f]$ und $[f\rceil$ die Äquivalenzklassen bezüglich $=_\mu$ und $=_{\bar{\mu}}$ bezeichnen. Sei $p \in [1, \infty]$. $[f] \mapsto [f\rceil$ definiert eine lineare Abbildung $I : L^p(\Omega, R, \mu) \to L^p(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$.

4. I ist eine isometrischer Isomorphismus. Sei $[f\rceil \in L^p(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$ gegeben. Approximiere f in der $\|.\|_p$-Norm durch eine Folge einfacher Funktionen in $\mathcal{E}(\Omega, \bar{R})$. Approximiere dann jede dieser einfachen Funktionen in der $\|.\|_p$-Norm durch einfache Funktionen aus $\mathcal{E}(\Omega, R)$. Bilde eine geeignete Diagonalfolge, deren Grenzwert einen Vertreter $\tilde{f} \in [f\rceil$ mit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ liefert.

Aufgabe 1.3. *Zeige, daß für jedes $p \in [1, \infty]$ die Banachräume $L^p(\mathbb{R}^n, R_{|.|}, |.|)$ und $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, |.|)$ natürlich isomorph sind.*

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oder $p = 1$ und $q = \infty$ oder $p = \infty$ und $q = 1$. Wir definieren eine Abbildung

$$I : L^q(\Omega, R, \mu) \to L^p(\Omega, R, \mu)'$$

durch

$$I(g)(f) := \int_\Omega gf \, d\mu$$

(hierbei ist V' der duale Raum zu V). Die Hölderungleichung zeigt, daß $|I(g)(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$ gilt. Damit ist $I(g)$ tatsächlich eine stetiges Funktional auf $L^p(\Omega, R, \mu)$. Weiter sehen wir, daß $\|I\| \leq 1$. In der Tat gilt nun folgendes:

Satz 1.133 (ohne Beweis). *1. Wenn $p \in (1, \infty)$, dann ist I ein isometrischer Isomorphismus.*

2. Wenn $p = 1$ und (Ω, R, μ) σ-endlich ist, so ist I eine isometrischer Isomorphismus.

3. Wenn $p = \infty$, dann ist I eine isometrische Einbettung.

1.4 Produkt von Maßräumen, Satz von Fubini

1.4.1 Produkt von Maßräumen

Wir erinnern an die Definition des Produktes einer Familie meßbarer Räume 1.1.5. Wir betrachten nun zwei Maßräume (Ω_i, R_i, μ_i), $i = 0, 1$. Sei $(\Omega, R) := (\Omega_0, R_0) \times (\Omega_1, R_1)$ das Produkt der unterliegenden meßbaren Räume. Es stellt sich die Frage, ob und wieviele Maße μ auf (Ω, R) existieren mit $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1)$ für $A_i \in R_i$. Beachte, daß hier R von Produkten der Form $A_0 \times A_1$ erzeugt wird.

Satz 1.134. *Wenn (Ω_1, R_1, μ_1) σ-endlich ist, dann gibt es solche Maße.*

Proof. Sei $\mathcal{F}_0$ der von den charakteristischen Funktionen $\chi_{A_0 \times A_1}$ aufgespannte Unterraum von $\mathcal{L}(\Omega, R)$. Für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ ist $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto \chi_{A_0 \times A_1}(\omega_0, \omega_1) = \chi_{A_0}(\omega_0)\chi_{A_1}(\omega_1)$ meßbar. Weiter ist für $B \in R_1$ die Funktion

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_B \chi_{A_0 \times A_1}(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \in \bar{\mathbb{R}}$$

durch $\omega_0 \mapsto \chi_{A_0}(\omega_0)\mu_1(B \cap A_1)$ gegeben und deshalb auch meßbar. Wir betrachten nun den Raum $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{L}(\Omega, R)$ der beschränkten Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

1. für jedes $\omega_0 \in \Omega$ ist die Funktion $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto f(\omega_0, \omega_1)$ in $\mathcal{L}^1(\Omega_1, R_1, \mu_1)$

2. für jedes $B \in R_1$ ist die Funktion

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_B f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

meßbar

Offensichtlich ist $\mathcal{F}_1$ ein Vektorraum. Wir setzen

$$\mathcal{F}_2 := \{ f \in \mathcal{L}(\Omega, R) \mid fg \in \mathcal{F}_1 \ \forall g \in \mathcal{F}_1 \text{ und } \sup |f| < \infty \} \ .$$

Dann ist $\mathcal{F}_2$ ein Ring. Man prüft weiter leicht nach, daß $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_2$ gilt.

Wir setzen jetzt $U := \{ A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \chi_A \in \mathcal{F}_2 \}$. Diese Teilmenge ist eine Algebra, da $\mathcal{F}_2$ ein Ring ist. Wir definieren $\mu : U \to [0, \infty]$ durch

$$\mu(A) = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \chi_A(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu(\omega_0) \ .$$

Wir zeigen nun, daß U eine σ-Algebra und μ ein σ-additives Maß ist.

Sei $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Teilmengen $B_i \in R_1$ mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \Omega_1$ und $\mu(B_i) < \infty$ (existiert wegen der Voraussetzung an (Ω_1, R_1, μ_1).) Sei $\kappa_i = \chi_{\Omega_0 \times B_i} \in \mathcal{F}_0$. Dann ist $\kappa_i \in \mathcal{F}_1$. Für $A \in U$ ist also $\kappa_i \chi_A \in \mathcal{F}_1$ und damit $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto \kappa_i(\omega_0, \omega_1)\chi_A(\omega_0, \omega_1)$ meßbar und integrierbar, und $\Omega_0 \ni \omega_0 \to \int_{\Omega_1} \kappa_i(\omega_0 . \omega_1)\chi_A(\omega_0, \omega_1) d\mu(\omega_1)$ meßbar. Die Folge $\kappa_i \chi_A$ ist monoton wachsend und konvergiert gegen χ_A. Aus dem Satz über monotone Konvergenz schließen wir, daß $\Omega_0 \ni \omega_0 \to \int_{\Omega_1} \chi_A(\omega_0, \omega_1) d\mu(\omega_1)$ meßbar ist. Für disjunkte $A, A' \in U$ gilt $\chi_{A \cup A'} = \chi_A + \chi_{A'}$ und wir schließen, daß $\mu(A \cup A') = \mu(A) + \mu(A')$. Damit ist μ ein Prämaß auf der Algebra U.

Wir betrachten die σ-Additivität. Sei (A_k) eine aufsteigende Folge in U und $A := \bigcup_k A_k$. Sei $g \in \mathcal{F}_1$. Dann ist für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ die Funktion

$$\omega_1 \mapsto \chi_A(\omega_0, \omega_1) g(\omega_0, \omega_1) = \lim_k \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1) g(\omega_0, \omega_1)$$

als Grenzwert einer Folge meßbarer Funktionen meßbar. Weiter ist $|(\chi_A g)(\omega_0, \omega_1)| \leq |g(\omega_0, \omega_1)|$ und damit die Funktion $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto (\chi_A g)(\omega_0, \omega_1)$ für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ integrierbar. Für jedes $B \in R_1$ ist die Funktion

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_B \lim_k \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1) g(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) = \lim_k \int_B \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1) g(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

meßbar (hier haben wir den Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz mit Majorante $|g|$ angewendet). Wir schließen, daß $\chi_A \in \mathcal{F}_2$ und $A \in U$.

Wir sehen, daß U abgeschlossen unter der Bildung von abzählbaren Vereinigungen und folglich eine σ-Algebra ist.

Weiterhin gilt nach mehrfacher Anwendung des Satzes über monotone Konvergenz :

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \lim_k \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&= \int_{\Omega_0} \lim_k \left(\int_{\Omega_1} \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&= \lim_k \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&= \lim_k \mu(A_k) \ .
\end{aligned}$$

Dies zeigt die σ-Additivität von μ.

Es folgt nun direkt aus der Definition, daß $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu(A_1)$. Wegen $R \subseteq U$ haben wir damit den Beweis der Existenz von Maßen mit dieser Eigenschaft erbracht. □

Der folgende Satz beantwortet die Frage nach der Eindeutigkeit.

Satz 1.135. *Wenn (Ω_i, R_i, μ_i) σ-endlich sind, dann gibt es genau ein Maß auf (Ω, R) mit $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu(A_1)$.*

Proof. Die Mengen der Form $A_0 \times A_1$ erzeugen eine Algebra R^0. Das Prämaß auf R^0 ist durch $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu(A_1)$ und Additivität eindeutig bestimmt. Der Prämaßraum $(\Omega, R^0, \mu_{|R^0})$ ist σ-endlich und σ-additiv. Damit besitzt μ eine eindeutige Ausdehnung auf R. □

Wir ziehen nun eine Folgerung aus dem Beweis des Existenzsatzes. Sei U die σ-Algebra, welche im Beweis konstruiert wurde.

Folgerung 1.136. *Sei (Ω_1, R_1, μ_1) σ-endlich. Wenn $f \in \mathcal{L}(\Omega, U)$, dann ist für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ die Funktion $\Omega_1 \ni \omega_1 \to f(\omega_0, \omega_1)$ meßbar.*

Proof. Wir finden eine aufsteigende Folge $A_\alpha \in R_1$ mit $\bigcup_\alpha A_\alpha = \Omega_1$ und $\mu_1(A_\alpha) < \infty$. Ist $B \in U$, dann ist mit $B_\alpha := B \cap \Omega_0 \times A_\alpha$ auch $\chi_{B_\alpha} = \chi_B \chi_{\Omega_0 \times A_\alpha} \in \mathcal{F}_1$. Damit ist

$\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto \chi_{B_\alpha}(\omega_0, \omega_1)$ für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ meßbar. Wegen $\chi_B = \lim_{\alpha\to\infty} \chi_{B_\alpha}$ gilt diese Eigenschaft auch für χ_B.

Damit gilt diese Eigenschaft für die einfachen Funktionen auf (Ω, U). Für allgemeine f folgt die Aussage durch Darstellung von f als punktweiser Grenzwert einer Folge einfacher Funktionen. $\square$

Hier ist ein Beispiel. Der Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, |.|_\mathbb{R})$ ist σ-endlich. Wir können also $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, |.|_\mathbb{R})^2 = (\mathbb{R}^2, U, \mu)$ bilden. Wir hatten schon gesehen, daß $R^\sigma(\mathcal{B}_\mathbb{R} \times \mathcal{B}_\mathbb{R}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ gilt. Weiter ist wegen $\mathcal{B}_\mathbb{R} \times \mathcal{B}_\mathbb{R} \subset U$ auch $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subseteq U$. Für $A, B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ gilt $|A \times B|_{\mathbb{R}^2} = |A|_\mathbb{R}|B|_\mathbb{R} = \mu(A \times B)$. Damit ist

$$\mu_{|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = |.|_{\mathbb{R}^2} \ .$$

Damit stimmen die Vervollständigungen von $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, |.|_{\mathbb{R}^2})$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, |.|_\mathbb{R})^2$ überein.

1.4.2 Iterierte Integrale

In diesem Abschnitt nehmen wir an, daß (Ω, R, μ) das Produkt zweier σ-endlicher Maßräume (Ω_i, R_i, μ_i), $i = 0, 1$ ist.

Lemma 1.137. *Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegativ. Dann ist*

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

meßbar und es gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \ .$$

Proof. Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nicht-negativ. Wir wählen eine Folge (ϕ_i) einfacher nichtnegativer Funktionen welche monoton wächst und punktweise gegen f konvergiert. Nach Folgerung 1.136 sind die Funktionen $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto f(\omega_0, \omega_1)$, $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto \phi_i(\omega_0, \omega_1)$ für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ meßbar. Es gilt nach dem Satz über monotone Konvergenz

$$\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) = \lim_i \int_{\Omega_1} \phi_i(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \ .$$

Da die Funktionen

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} \phi_i(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

wegen $R \subseteq U$ (siehe Beweis von Satz 1.134) meßbar sind, ist es auch

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \ .$$

Die Formel

$$\int_\Omega \phi d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \phi(\omega_0, \omega_1) d\mu(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0)$$

gilt für charakteristische Funktionen $\phi = \chi_A$, $A \in R$, und damit für alle einfachen Funktionen ϕ. Weiter gilt wieder mit dem Satz über monotone Konvergenz, daß

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f d\mu &= \lim_i \int_\Omega \phi_i d\mu \\
&= \int_{\Omega_0} \lim_i \left(\int_{\Omega_1} \phi_i(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \ .
\end{aligned}$$

□

Satz 1.138 (Satz von Fubini). *Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Die Funktionen*

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} f^\pm(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

sind genau dann in $\mathcal{L}^1(\Omega_0, R_0, \mu_0)$, wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. In diesem Fall ist die Funktion $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto f(\omega_0, \omega_1)$ für fast alle $\omega_0 \in \Omega_0$ integrierbar und es gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \ .$$

Proof. Wir nehmen zunächst an, daß $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Wir wenden das obige Lemma auf $f^\pm$ an und sehen, daß

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} f^\pm(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

in $\mathcal{L}^1(\Omega_0, R_0, \mu_0)$ sind. Insbesondere ist damit für fast alle $\omega_0 \in \Omega_0$ die Funktion $\Omega_1 \ni$

$\omega_1 \mapsto f(\omega_0, \omega_1)$ integrierbar. Dies begründet die Richtigkeit der folgenden Rechnung.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f d\mu &= \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f^+(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&\quad - \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f^-(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} (f^+(\omega_0, \omega_1) - f^-(\omega_0, \omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0)
\end{aligned}$$

Seien nun die Funktionen

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} f^\pm(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

in $\mathcal{L}^1(\Omega_0, R_0, \mu_0)$. Dann gilt nach dem Lemma

$$\int_\Omega f^\pm d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f^\pm(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) < \infty \ ,$$

also $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. $\square$

Wir halten als Folgerung fest.

Folgerung 1.139. *Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, dann gilt*

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_0} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_0(\omega_0) \right) d\mu_1(\omega_1)$$

Hier ist eine Anwendung des Satzes von Fubini (und der noch nicht gezeigten Transformationsformel für das Lebesguesche Maß unter Diffeomorphismen)

Lemma 1.140. *Es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \ .$$

Proof. Wir haben

$$\begin{aligned}
(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}|dx|)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}|dx|)^2)|dy| \\
&\overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}|dx|)|dy| \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\|z\|^2}{2}}|dz| \\
&\overset{Fubini}{=} \int_{0\infty}(\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}|d\phi|)r|dr| \\
&= 2\pi\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}r|dr| \\
&= -2\pi\int_0^{\infty}\frac{d}{dr}e^{-\frac{r^2}{2}}|dr| \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

□

1.4.3 Mehrfache und abzählbare Produkte

Wir haben das Produkt zweier σ-endlicher Maßräume konstruiert. Die Konstruktion erweitert sich leicht auf endlich viele Faktoren.

Sei nun $(\Omega_i, R_i, \mu_i)_{i\in I}$ eine abzählbare Familie von Maßräumen mit $\mu_i(\Omega_i) = 1$ und (Ω, R) daß Produkt der unterliegenden meßbaren Räume.

Satz 1.141. *Es gibt genau ein Maß μ auf (Ω, R) mit der Eigenschaft, daß für jede endliche Familie $(A_s)_{s\in S}$, $S \subset I$, $A_s \in R_s$, gilt*

$$\mu(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{s\in S}\mu_s(A_s)$$

wobei wir $A_i := \Omega_i$ für alle $i \in I \setminus S$ gesetzt haben.

Proof. Für jede endliche Teilmenge $S \subseteq I$ sei $R^S \subseteq R$ die σ-Algebra, welche von den Projektionen $p_s : \Omega \to \Omega_s$, $s \in S$, erzeugt wird. Weiter sei

$$R_0 := \bigcup_{S\subset I, \sharp S<\infty} R^S .$$

Dann ist R^0 eine Algebra und es gilt $R^\sigma(R^0) = R$ gilt.

Wir konstruieren μ zuerst als ein Prämaß auf R^0 und zeigen, daß dieses eindeutig bestimmt ist. Wir zeigen dann, daß μ σ-additiv ist. Daraus folgt die eindeutige Ausdehnung zu einem Maß auf R.

Für eine endliche Teilmenge $S \subseteq I$ sei (Ω_S, R_S, μ_S) das Produkt von $(\Omega_s, R_s, \mu_s)_{s\in S}$. Sei $T_S : \Omega \to \Omega_S$ die Projektion. T_S ist meßbar.

Seien μ und μ' zwei verschiedene solche Prämaße auf R^0. Dann existiert $U \in R^0$ mit $\mu(U) \neq \mu'(U)$. Sei $S \subseteq I$ endlich derart, daß $U \in R^S$. Nun sind $T_{S*}\mu$ und $T_{S*}\mu'$ zwei Prämaße auf (Ω_S, R_S). Dann gilt $T_{S*}\mu = T_{S*}\mu' = \mu_S$.

Nun ist $U = T_S^{-1}(\bar{U})$ für ein geeignetes $\bar{U} \in R_S$. Damit gilt aber $\mu(U) = \mu_S(\bar{U}) = \mu'(U)$. Widerspruch. Folglich ist das Prämaß μ eindeutig bestimmt.

Jetzt zeigen wir die Existenz. Sei $S \subseteq I$ endlich. Wenn $A \in R^S$ so ist es von der Form $T_S^{-1}(\bar{A})$ für ein eindeutiges $\bar{A} \in R_S$. Wir setzen

$$\mu^S(A) := \mu_S(\bar{A}) \ .$$

Da die μ_i Wahscheinlichkeitsmaße sind, hängt $\mu^S(A)$ nicht von der Wahl von S mit $A \in R^S$ ab. Weiter ist μ^S additiv.

Aus diesen beiden Fakten folgt die Existenz von μ. In der Tat setzen wir $\mu(A) := \mu^S(A)$, wobei $S \subseteq I$ geeignet mit $A \in R^S$ gewählt wird.

Wir zeigen nun die σ-Additivität von μ. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß $I = \mathbb{N}$. Sei (A_i) eine disjunkte Familie in R^0 derart, daß $\bigcup_i A_i \in R^0$. Sei $B_n := \cup_{i>n} A_i$. Dann gilt $\cap_n B_n = \emptyset$. Wir müssen zeigen, daß $\lim_n \mu(B_n) = 0$ gilt. Sei $S_n \subset \mathbb{N}$ derart gewählt, daß $B_n \in R^{S_n}$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $S_n = \{0, \dots, m_n\}$ für eine monoton wachsende Folge (m_n) ist. Sei $\bar{B}_n \in R_{S_n}$ derart, daß $T_{S_n}^{-1}(\bar{B}_n) = B_n$. Dann gilt $\mu(B_n) = \mu_{S_n}(\bar{B}_n)$.

Wir nehmen nun an, daß nicht $\lim_n \mu(B_n) = 0$ gilt. Da die Folge $(\mu(B_n))$ monoton fällt, gilt dann $\lim_n \mu(B_n) > 0$. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\mu(B_n) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_{S_n \setminus \{1\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \tilde{x}) d\mu_{S_n\setminus\{1\}}(\tilde{x}) \right) d\mu_1(x_1) \ .$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz gibt es einen Punkt $x_1 \in \Omega_1$ mit

$$\lim_n \int_{\Omega_{S_n \setminus \{1\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \tilde{x}) d\mu_{S_n \setminus \{1\}}(\tilde{x}) \neq 0 \ .$$

Wir wenden wieder Fubini an und schreiben für große n (mit $m_n \geq 2$)

$$\int_{\Omega_{S_n \setminus \{1\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \tilde{x}) d\mu_{S_n \setminus \{1\}}(\tilde{x}) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_{S_n \setminus \{1,2\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, x_2, \tilde{x}) d\mu_{S_n \setminus \{1,2\}}(\tilde{x}) \right) d\mu_2(x_2) \ .$$

Wir finden wieder mit dem Satz über monotone Konvergenz ein $x_2 \in \Omega_2$ mit

$$\lim_n \int_{\Omega_{S_n \setminus \{1,2\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, x_2, \tilde{x}) d\mu_{S_n \setminus \{1,2\}}(\tilde{x}) \neq 0 \ .$$

In der gleichen Weise verfahren wir weiter und finden eine Folge (x_m) mit

$$\lim_n \int_{\Omega_{S_n \setminus \{1,\dots,m\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \dots, x_m, \tilde{x}) d\mu_{S_n \setminus \{1,\dots,m\}}(\tilde{x}) \neq 0 \ .$$

Wir haben

$$\{x_1\} \times \cdots \times \{x_{m_n}\} \times \Omega_{m_n+1} \times \Omega_{m_n+2} \times \cdots \subseteq B_n \ .$$

Damit ist aber $(x_i) \in \bigcap_i B_i$. Widerspruch! □

Sei (Ω, R, μ) der Bernoullische Schiftraum über einer endlichen Menge A mit Dichte $p : A \to [0,1]$. Wir betrachten das Maß $\lambda := \sum_{a \in A} p(a)\delta_a$. Dann ist (Ω, R, μ) das Produkt von abzählbar vielen Kopien des Maßraumes $(A, \mathcal{P}(A), \lambda)$ ist.

1.5 Der Satz von Radon-Nikodym

1.5.1 Dichtefunktionen

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Ist $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegativ, dann definieren wir

Definition 1.142.

$$f\mu : R \to [0, \infty], \quad f\mu(A) := \int_A f d\mu \ .$$

Lemma 1.143. *$f\mu$ ist ein Maß auf (Ω, R).*

Proof. Aus den elementaren Eigenschaften des Integrals folgt die endliche Additivität. Wir müssen zeigen, daß $f\mu$ auch σ-additiv ist. Sei (A_i) eine aufsteigende Familie in R mit $A := \bigcup_i A_i$. Dann ist $(\chi_{A_i} f)$ eine aufsteigende Familie nichtnegativer Funktionen in $\mathcal{L}(\Omega, R)$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz gilt

$$f\mu(A) = \lim_i \int_\Omega \chi_{A_i} f d\mu = \lim_i f\mu(A_i) \ .$$

□

Es gilt $f\mu(A) = 0$ für jede Nullmenge $A \in R$.

Definition 1.144. *Ein Maß ν auf (Ω, R) ist absolutstetig bezüglich μ, falls für jedes $A \in R$ mit $\nu(A) < \infty$ gilt*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{B \in R, B \subseteq A, \mu(B) < \epsilon} \nu(B) = 0 \ .$$

Lemma 1.145. *Das Maß $f\mu$ ist absolutstetig bezüglich ν ist.*

Proof. Das folgt unmittelbar aus 1.116. □

Lemma 1.146. *Sei ν σ-endlich und absolutstetig bezüglich μ. Dann gilt $\nu(A) = 0$ für alle μ-Nullmengen.*

Diese Aussage wird im allgemeinen falsch, wenn man die Voraussetzung, daß ν σ-endlich ist, wegläßt.

Proof. Sei (A_i) eine monotone Ausschöpfung von Ω durch meßbare Mengen endlichen ν-Maßes. Sei $A \in R$ eine μ-Nullmenge. Wäre $\nu(A) \neq 0$, dann wäre $\nu(A \cap A_i) \neq 0$ für ein i. Damit wäre aber

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{B \subseteq A, \mu(B) < \epsilon} \nu(B) \geq \nu(A \cap A_i) \neq 0 \ .$$

Den zweiten Teil des Beweises überlassen wir als Übungsaufgabe. □

Die Gleichung $\nu = f\mu$ bestimmt die Klasse $[f]$ bezüglich der Äquivalenzrelation "$=_\mu$" eindeutig.

Sei $(\mathbb{Z}_p, R, \mu)$ der Haarsche Maßraum auf den p-adischen ganzen Zahlen und $x \in \mathbb{Z}_p$. Sei $T(x) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ die Multiplikation mit x. Dann ist $T(x)_*\mu$ absolutstetig bezüglich μ ist. In der Tat gilt $T(x)_*\mu = f_x\mu$ mit

$$f_x(y) = \begin{cases} p^{\nu_p(x)} & \nu_p(y) \geq \nu_p(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

wobei $\nu_p(x) \in \mathbb{N}_0$ die Valuation ist mit $\nu_p(p^n) = n$.

Sei $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1.147. *Das Maß $f_*|.|_{|U}$ ist absolutstetig zu $|.|_{|V}$, und es gilt*

$$f_*|.|_{|U} = \frac{1}{|\det(df)| \circ f^{-1}} |.|_{|V} \ .$$

Proof. Wir haben die Transformationsformel für das iterierte Riemannintegral

$$\begin{aligned} \int_V f(x) df_*|.|_{|U}(x) &= \int_U \phi(f(x))dx \\ &= \int_U \phi(f(x))|\det(df)|(x)^{-1}|\det(df)|(x)dx \\ &= \int_V \phi(x)|\det(df)|(f^{-1}(x))^{-1}dx \ . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Formel

$$\int_V \chi_A(x) df_*|.|_{|U}(x) = \int_V \chi_A(x)|\det(df)|(f^{-1}(x))^{-1}dx$$

durch monotone Approximation zuerst für Rechtecke $A \subseteq V$ und schließlich für alle meßbaren Mengen. $\square$

1.5.2 Signierte Maße, Hahnsche Zerlegung

Bisher hatten wir immer positive Maße betrachtet. In der Physik beschreibt man zum Beispiel Ladungsverteilungen als Maße. So wird ein Elektron am Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ durch $e\delta_x$ beschrieben, wobei $e < 0$ die Ladung des Elektron ist. Nun gibt es auch positiv geladene

Teilchen. Ein System aus endlich vielen solchen Ladungen e_i an den Orten x_i ist dann durch $\sum_i e_i \delta_{x_i}$ modelliert, wobei die $e_i \in \mathbb{R}$ verschiedene Vorzeichen haben.

Dies ist ein typisches Beispiel eines signierten Maßes. Sei (Ω, R) ein meßbarer Raum.

Definition 1.148. *Eine σ-additive Funktion $\mu : R \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt signiertes Maß.*

Bei der Betrachtung signierter Maße entsteht das folgende Problem. Sei $\mu(A) = \infty$ und $\mu(B) = -\infty$ für disjunkte $A, B \in R$. Was ist dann $\mu(A \cup B) = \infty - \infty$? Damit der die σ-Additivität beschreibende Ausdruck überhaupt definiert ist, muß also μ genau in eine der folgenden drei Klassen fallen

1. $\mu \in M^+$, falls $\mu(A) > -\infty$ für alle $A \in R$ und $\mu(\Omega) = \infty$.
2. $\mu \in M^-$, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in R$ und $\mu(\Omega) = -\infty$.
3. $|\mu(A)| < \infty$ für alle $A \in R$.

Lemma 1.149. *1. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Dann ist $f\mu$ ein signiertes Maß in M, wobei*

$$f\mu(A) := \int_A f d\mu \ .$$

2. Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegativ. Dann ist $\pm f\mu$ ein signiertes Maß in $M^\pm$, wobei

$$\pm f\mu(A) := \pm \int_A f d\mu \ .$$

Sei μ ein signiertes Maß auf (Ω, R).

Definition 1.150. *Eine Partition $\{S, T\} \subset R$ von Ω heißt Hahnsche Zerlegung von Ω zu μ, falls für alle $A \in R$ gilt*

$$\mu(A \cap S) \leq 0, \quad \textit{und} \quad \mu(A \cap T) \geq 0 \ .$$

Lemma 1.151. *Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R)$. $f\mu$. Wir zerlegen $f = f^+ - f^-$ und setzen $S := \{f^+ > 0\}$ und $T := \{f^- \geq 0\}$. Dann ist $\{S, T\}$ eine Hahnsche Zerlegung.*

Proof. Offensichtlich. □

Satz 1.152. *Sei μ ein signiertes Maß auf (Ω, R). Dann besitzt μ eine Hahnsche Zerlegung.*

Proof. Wir nehmen o.B.d.A. an (ersetze notfalls μ durch $-\mu$), daß $\mu(A) > -\infty$ für alle $A \in R$. Wir definieren

$$\mu^+(A) := \sup_{B\in R,\, B\subseteq A} \mu(B)\ .$$

Wegen $\mu(\emptyset) = 0$ gilt $\mu^+(A) \geq 0$. Weiter gilt für $B \subseteq A$, daß $\mu^+(B) \leq \mu^+(A)$.

Wir setzen

$$R^- := \{A \in R \mid \mu^+(A) = 0\}\ .$$

Dann gilt für $A \in R^-$, daß $\mu(A) \leq 0$. Sei $a := \inf_{A\in R^-} \mu(A)$. Dann ist $-\infty < a \leq 0$. In der Tat, wäre $a = -\infty$, dann gäbe es eine Folge (A_i) in R^- mit $\lim_i \mu(A) = -\infty$ und damit $\mu(\bigcup_i A) = -\infty$.

Sei (S'_i) eine Folge in R^- derart, daß $\mu(A_i)$ monoton fällt und $\lim_i \mu(S'_i) = a$ gilt. Wir setzen $S_j = S'_j \setminus \bigcup_{i<j} S'_i$. Sei ferner $S := \bigcup_i S'_i$ und $T := \Omega \setminus S$. Dann ist (S_i) eine paarweise disjunkte Zerlegung von S.

Für $A \in R$ gilt nun (beachte, daß $A \cap S_i \subseteq S'_i$ und deshalb $\mu(A \cap S_i) \leq \mu^+(S'_i)$ gilt)

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap S) &= \mu(A \cap \bigcup_i S_i) \\
&= \sum_i \mu(A \cap S_i) \\
&\leq \sum_i \mu^+(S'_i) \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß auch $\mu(A \cap T) \geq 0$ gilt.

Sei

$$F := \{A \in R \mid A \subseteq T \text{ und } \mu(A) < 0\}\ .$$

Wir müssen zeigen, daß $F = \emptyset$. Wir nehmen das Gegenteil an.

Zuerst zeigen wir, daß für alle $A \in F$ die Ungleichung $\mu^+(A) > 0$ gilt. Es gilt $\mu(S) = \mu(S \setminus S_i) + \mu(S_i)$. Wegen $\mu(S \setminus S_i) = \mu(S \cap (S \setminus S_i)) \leq 0$ gilt $\mu(S) \leq \mu(S_i)$ für alle

i und damit $-\infty < \mu(S) \leq \lim_i \mu(S_i) \leq a$. Aus der Definition von a, $S \cap A = \emptyset$ (da $A \subseteq T$) und $a \geq \mu(S) > \mu(A) + \mu(S) = \mu(A \cup S)$ (wegen $A \in F$ gilt $\mu(A) < 0$) folgt, daß $A \cup S \notin R^-$. Damit ist $\mu^+(A \cup S) > 0$. Also gibt es ein $B \subseteq A \cup S$ mit $0 < \mu(B)$. Dann gilt (wegen $S \cap A = \emptyset$) $0 < \mu(B) = \mu(B \cap (A \cup S)) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap S) \leq \mu(B \cap A)$ (da $\mu(B \cap S) \leq 0$). Also ist $\mu^+(A) > 0$.

Wir konstruieren nun induktiv eine absteigende Folge (A_i) in R. Sei $A_0 \in F$ beliebig. Eine solche Menge existiert nach unserer Annahme. Seien jetzt die A_i für $i \leq n$ schon konstruiert. Wir wählen $B_n \subseteq A_n$ derart, daß

$$\mu(B_n) \geq \left\{ \begin{array}{c|l} 1 & \mu^+(A_n) = \infty \\ \frac{1}{2}\mu^+(A_n) & \mu^+(A_n) < \infty \end{array} \right. .$$

Wir setzen $A_{n+1} := A_n \setminus B_n$. und $A := A_0 \setminus \bigcup_n B_n$. Es gilt dann

$$0 > \mu(A_0) = \mu(A) + \sum_n \mu(B_n) \geq \mu(A) > -\infty \ .$$

Damit ist $A \in F$ und $0 < \mu^+(A) \leq \mu^+(A_n)$ für alle n. Weiterhin konvergiert die Reihe $\sum_n \mu(B_n)$. Also gilt $\lim_n \mu(B_n) = 0$. Daraus folgt aber auch $\lim_n \mu^+(A_n) = 0$. Also gilt $\mu^+(A) = 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

1.5.3 Der Satz von Radon-Nikodym

Wir betrachten einen Maßraum (Ω, R, μ). Sei λ ein signiertes Maß auf (Ω, R).

Definition 1.153. *1. Eine Menge $T \subseteq R$ heißt Träger von λ, falls $\lambda(A) = 0$ für alle meßbaren $A \subseteq T^c$ gilt.*

2. λ heißt singulär zu μ, falls λ eine Trägermenge besitzt, welche eine μ-Nullmenge ist.

1. δ_0 singulär zu $|.|$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, |.|)$.

2. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, so ist $\{f \neq 0\}$ eine Trägermenge von $f\mu$.

3. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und (λ_n) eine Folge von zu μ singulären Maßen. Dann ist $\sum_i \lambda_i$ ein zu μ singuläres Maß.

4. Sei (Ω, R, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Dann gibt es höchstens abzählbar viele Punkte $x \in \Omega$ mit $\mu(\{x\}) \neq 0$. Es gibt ein eindeutig bestimmtes Maß ν, welches zu $\sigma := \sum_{x\in\Omega} \mu(\{x\})\delta_x$ singulär ist, so daß $\nu + \sigma = \mu$ gilt.

Aufgabe 1.4 (Etwas in Richtung des Riemann-Stieltjesschen Integrales)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Wir ordnen jedem Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ die Zahl $\mu((a, b)) := f(b) - f(a)$ zu. Zeige :*

1. *μ dehnt sich eindeutig zu einem Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ aus.*
2. *Ist f stetig, so ist $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*
3. *Ist f differenzierbar, so gilt $\mu = f'|.|$.*
4. *Wenn f stetig ist, dann gilt $\mu = f_*^{-1}|.|$.*
5. *Ist f stetig, so gilt für jedes $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $g \geq 0$, daß*
$$\int_{\mathbb{R}} f^* g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} g \, d|.| \ .$$
6. *Ist $g \in C_c^1(\mathbb{R})$, so gilt*
$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu = -\int_{\mathbb{R}} g' \, f d|.| \ .$$
7. *Sei $f := \chi_{(0,\infty)}$. Zeige, daß $\mu = \delta_0$ gilt.*

Satz 1.154. *Sei (Ω, R, μ) ein σ-endlicher Maßraum und ν ein weiteres σ-endliches Maß auf (Ω, R). Dann existiert ein nichtnegatives $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ und ein zu μ singuläres Maß λ derart, daß $\nu = f\mu + \lambda$. Dabei sind ν eindeutig und f bis auf $'' =_\mu''$ eindeutig bestimmt.*

Proof. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeitsaussagen. Seien f_i und λ_i, $i = 0, 1$, wie im Satz. Seien Z_i Trägermengen von λ_i mit $\mu(Z_i) = 0$. Wir setzen $Z := Z_0 \cup Z_1$. Dann ist Z eine μ-Nullmenge und damit auch eine $f\mu$-Nullmenge. Es gilt für $A \subseteq Z$, daß $\lambda_0(A) = \nu(A) = \lambda_1(A)$. Für $A \subseteq Z^c$ haben wir $\lambda_0(A) = 0 = \lambda_1(A)$. Damit gilt $\lambda_0 = \lambda_1$. Weiter gilt für solche Mengen $f_0\mu(A) = \nu(A) = f_1\mu(A)$. Damit gilt $f_{0|Z^c} =_\mu f_{1|Z^c}$. Da Z selbst eine μ-Nullmenge ist, gilt $f_0 =_\mu f_1$.

Wir erbringen nun den Existensbeweis. Zunächst nehmen wir an, daß $\nu(\Omega) < \infty$ ist. Sei $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{L}(\Omega, R) \,|\, f \geq 0 \,\text{und}\, f\mu \leq \nu\}$. Diese Menge ist halbgeordnet durch folgende Relation :
$$f'' \geq'' g \Leftrightarrow f\mu \geq g\mu \ .$$

Wir zeigen, daß $\mathcal{F}$ ein maximales Element enthält, welches wir mit f bezeichnen werden.

Seien $h, g \in \mathcal{F}$. Dann ist auch $h \vee g \in \mathcal{F}$. In der Tat gilt für alle $A \in R$, daß

$$\begin{aligned} (h \vee g)\mu(A) &= \int_A (h \vee g) d\mu \\ &= \int_{A\cap\{h\geq g\}} h\, d\mu + \int_{A\cap\{h<g\}} g\, d\mu \\ &\leq \nu(A \cap \{h \geq g\}) + \nu(A \cap \{h < g\}) \\ &= \nu(A) \ . \end{aligned}$$

Sei (g_n) eine aufsteigende (im Sinne der Ordnung von Funktionen) Folge in $\mathcal{F}$. Dann ist auch $\lim_n g_n =: g \in \mathcal{F}$. Sei $A \in R$. In der Tat gilt $g_n\mu(A) = \int_A g_n\, d\mu \leq \nu(A)$. Mit dem Satz über monotone Konvergenz schließen wir

$$g\mu(A) = \int_A g\, d\mu = \int_A \lim_n g_n\, d\mu = \lim_n \int_A g_n\, d\mu \leq \nu(A) \ .$$

Sei nun $K := \sup_{g\in\mathcal{F}} g\mu(\Omega)$. Klar ist $K \leq \nu(\Omega) < \infty$. Sei (h_n) eine Folge in $\mathcal{F}$ mit $\lim_n h_n\mu(\Omega) = K$. Wir setzen $g_n := \bigvee_{i\leq n} h_i$. Dann gilt wegen $h_n \leq g_n$ auch $\lim_n g_n\mu(\Omega) = K$. Weiterhin ist (g_n) monoton wachsend. Wir setzen $f := \lim_n g_n$. Es gilt

$$\infty > \nu(\Omega) \geq K = \lim_n \int_\Omega g_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu \ .$$

Sei jetzt $g \in \mathcal{F}$ und $A \in R$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g\mu(A) + f\mu(A^c) &\leq (g \vee f)\mu(A) + (g \vee f)\mu(A^c) \\ &\leq K \\ &= f\mu(A) + f\mu(A^c) \ . \end{aligned}$$

Da $f\mu(A^c) < \infty$ ist, gilt $g\mu(A) \leq f\mu(A)$. Wir schließen, daß $g\,'' \leq'' f$ ist. Dies zeigt, daß f maximal in $\mathcal{F}$ ist.

Wir definieren nun das Maß $\lambda := \nu - f\mu$. Wir müssen zeigen, daß λ zu μ singulär ist. Wir betrachten dazu die signierten Maße $\alpha_n := \frac{1}{n}\mu - \lambda = (f + \frac{1}{n})\mu - \nu$. Sei (S_n, T_n) eine Hahnsche Zerlegung zu α_n. Wir setzen $S := \bigcup S_n$. Wir werden zeigen, daß S eine Trägermenge von λ mit $\mu(S) = 0$ ist. Es gilt für $A \in R$, daß

$$\begin{aligned} (f + \frac{1}{n}\chi_{S_n})\mu(A) &= f\mu(A) + \frac{1}{n}\mu(A \cap S_n) \\ &= f\mu(A) + \lambda(A \cap S_n) + \alpha_n(A \cap S_n) \\ &\leq f\mu(A) + \lambda(A) \\ &= \nu(A) \ . \end{aligned}$$

Damit ist $f + \frac{1}{n}\chi_{S_n} \in \mathcal{F}$. Wegen der Maximalität von f gilt $\chi_{S_n}\mu = 0$, also $\mu(S_n) = 0$. Wir sehen, daß $\mu(S) = 0$.

Sei $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω mit durch meßbare Mengen mit $\mu(\Omega_i) < \infty$. Wir betrachten $A \subseteq S^c = \bigcap_n T_n$. Dann gilt $\alpha_n(A\cap\Omega_i) = \alpha_n(A\cap\Omega_i\cap T_n) \geq 0$. Wir sehen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt :

$$\frac{1}{n}\mu(A\cap\Omega_i) = \lambda(A\cap\Omega_i) + \alpha_n(A\cap\Omega_i) \geq \lambda(A\cap\Omega_i) \geq 0 \ .$$

Wir schließen, daß $\lambda(A\cap\Omega_i) = 0$. Damit gilt auch $\lambda(A) = \lim_i \lambda(A\cap\Omega_i) = 0$.

Wir haben jetzt den Satz unter der Voraussetzung, daß ν endlich ist, gezeigt. Wir nehmen nun an, daß ν nur σ-endlich ist. Sei (X_n) eine abzählbare paarweise disjunkte Zerlegung von Ω mit $\nu(X_n) < \infty$. Wir wenden den Satz auf $\nu_n := \chi_{X_n}\nu$ an und erhalten Funktionen f_n und Maße λ_n derart, daß $\nu_n = f_n\mu + \lambda_n$. Sei $f := \sum_n f_n$ und $\lambda = \sum_n \lambda_n$. Dann ist λ zu μ singulär und es gilt $\nu = f\mu + \lambda$. □

Folgerung 1.155 (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Sei (Ω, R, μ) ein σ-endlicher Maßraum und ν ein σ-endliches bezüglich μ absolutstetiges Maß. Dann existiert eine bis auf $'' =_\mu''$ eindeutig bestimmte nichtnegative Funktion $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ derart, daß*

$$\nu = f\mu \ .$$

Proof. Wir schreiben $\nu = f\mu + \lambda$, wobei λ zu μ singulär ist. Sei Z eine Trägermenge von λ mit $\mu(Z) = 0$. Dann gilt $\lambda(Z^c) = 0$ und $\lambda(Z) = \nu(Z) = 0$. Damit gilt $\lambda = 0$. □

Folgerung 1.156 (Lebesguesche Zerlegung)**.** *Sei μ ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{R}^n, R_{|.|}, |.|)$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes atomares Maß μ_p, ein atomfreies zu $|.|$ singuläres Maß μ_{sing} und ein $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, R_{|.|})$, $f \geq 0$, so daß*

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing} + \mu_p$$

gilt, wobei $\mu_{ac} := f|.|$ ist.

Hier ist ein Beispiel für ein singulärstetiges Maß. Sei $C \subset [0,1]$ die Cantormenge derejenigen Zahlen, welche in ihrer triadischen Darstellung keine 1 enthalten. Es gilt

$$|C| = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = 1 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 0 \ .$$

Wir betrachten die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + \dots) := \sum_{i=1}^{\min\{i, a_i = 1\}} a_i 2^{-i}$$

gegeben wird. Diese Funktion ist monoton wachsend und stetig und erfüllt $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Damit ist sie Verteilungsfunktion eines Maßes μ, welches durch

$$\mu([a,b)) := f(b) - f(a)$$

bestimmt ist. Es gilt $\mu([0,1] \setminus C) = 0$. In der Tat ist $\mu([1/3, 2/3)) = 0$, $\mu[1/9, 2/9)) = 0$ etc. Folglich ist C ein Trägermenge von μ. Das Maß μ hat keine Atome.

Die Funktion f ist fast überall differenzierbar und es gilt $f' = 0$. Sie ist aber dennoch nicht konstant. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kann auf f nicht angewendet werden.

1.6 Instruktive Argumente

Satz 1.157. *Für jedes endliche $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$ gilt $\int_{\mathbb{R}} f \, d|.| = 0$.*

Proof. Wir betrachten die Funktion $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch $h(t,x) = \chi_{\{x \le t\}}(x) f(x)$ gegeben ist. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R} \ni x \mapsto h(t,x)$ integrierbar. Wir setzen

$$\psi(t) := \int_{\mathbb{R}} h(t,x) d\,|x| \ .$$

Weiter gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$, daß $\lim_{t \to -\infty} h(t,x) = 0$ und $\lim_{t \to \infty} h(t,x) = f(x)$. Dann gilt nach dem Satz über majorisierte Konvergenz (mit integrierbarer Majorante $|f|$) daß

$$\begin{aligned} \lim_{t \to -\infty} \psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \to -\infty} h(t,x) d|x| &= 0 \\ \lim_{t \to \infty} \psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \to \infty} h(t,x) d|x| &= \int_{\mathbb{R}} f \, d|.| \ . \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun sofort aus der folgenden Tatsache : Die Funktion ψ ist in jedem $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dt}\psi(t) = 0$.

Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt $\psi(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{t_0\}} h(t,x)d|x|$ weil $\{t_0\}$ eine $|.|$-Nullmenge ist. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ existiert ein Intervall $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, so daß $\frac{d}{dt}h(t,x) = 0$ für alle $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$.

Die Funktion $h(t,x)$ ist also für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ in einer Umgebung von t_0 bezüglich x differenzierbar. Dabei ist die Ableitung gleich Null und hat insbesondere eine Majorante, nämlich die Nullfunktion, welche natürlich integrierbar ist. Damit können wir die Ableitung unter das Integral ziehen. Es gilt

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{|t=t_0} \psi(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{t_0\}} \left(\frac{d}{dt}\right)_{|t=t_0} h(t,x)d|x| = 0 \ .$$

Die Behauptung folgt nun, da wir t_0 beliebig vorgeben können. □

Satz 1.158. *Für jedes reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ gilt $r = 0$.*

Proof. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $r > 0$ annehmen. Wir betrachten die folgenden beiden Maßräume :

1. $(\Omega_1, R_1, \mu_1) = (\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$,

2. $(\Omega_2, R_2, \mu_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu_2)$, wobei $\mu_2(A) := \sharp A$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, das Zählmaß ist .

Sei nun $(\Omega, R, \mu) = (\Omega_1, R_1, \mu_1) \times (\Omega_2, R_2, \mu_2)$. Insbesondere gilt $\Omega = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die nichtnegative Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 0 & x = y \text{ und } x \notin [0,1] \\ r & x = y \text{ und } x \in [0,1] \end{cases}$$

gegeben ist. Diese Funktion nimmt nur zwei Werte an. Die Menge $f^{-1}(\{r\}) = \{(x,x) \,|\, x \in [0,1]\}$ ist meßbar. In der Tat ist sie abgeschlossen. Sie ist meßbar, weil $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset R$. In der Tat ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ sogar in der Algebra $\tilde{R}$ von $(\mathbb{R}, R_{|.|}) \times (\mathbb{R}, R_{|.|}) = (\mathbb{R}^2, \tilde{R})$ enthalten. Da nun sicherlich $R_{|.|} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt, haben wir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset R$. Die Funktion f ist somit sogar einfach.

Wir berechnen nun
$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x) = r \ .$$
Das innere Integral ergibt
$$\int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_2(y) = \begin{cases} r & x\in[0,1] \\ 0 & x\notin[0,1] \end{cases}$$
In der Tat, für $x\in[0,1]$ ist $y\mapsto f(x,y)$ gleich $r\chi_{\{x\}}$. Sie ist gleich Null falls $x\notin[0,1]$. Es gilt aber $\mu_2(\{x\})=1$. Damit ist $x\mapsto\int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_2(y)$ gleich $r\chi_{[0,1]}$. Diese hat Lebesgueintegral r.

Aus der Endlichkeit dieser Integrale schließen wir mit dem Satz von Fubini, daß $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,R,\mu)$ und
$$\int_\Omega f d\mu = r$$
gilt. Natürlich können wir die Integrationen auch in der anderen Reihenfolge ausführen. Es gilt
$$\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right) d\mu_2(y) = 0 \ .$$
In der Tat ist für ein festes $y\in[0,1]$ die Funktion $x\mapsto f(x,y)$ gleich $r\chi_{\{x\}}$. Sie ist Null für $y\notin[0,1]$. Da $\{y\}$ aber eine $|.|=\mu_1$-Nullmenge ist, gilt schon $\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x)=0$. Damit haben wir
$$0=\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right) d\mu_2(y) = \int_\Omega f d\mu$$
gezeigt. Folglich muß $r=0$ gelten. □

Satz 1.159. *Jedes σ-endliche Maß ist atomar.*

Folgerung 1.160. $\mathbb{R}$ *ist abzählbar.*

Proof. Sei (Ω,R,ν) ein σ-endlicher Maßraum. Wir betrachten daß Zählmaß μ auf R mit $\mu(A):=\sharp(A)$. Dann gilt für jede Menge $A\in R$, daß
$$\mu(A)=0\Rightarrow A=\emptyset\Rightarrow\nu(A)=0 \ .$$
Wir wenden nun den Satz von Radon-Nikodym an, welcher eine Darstellung $\nu=f\mu$ für eine meßbare nichtnegative Funktion f liefert. Da $\mu=(\sum_{x\in\Omega}\delta_x)_{|R}$ ist, gilt $\nu=(\sum_{x\in\Omega}f(x)\delta_x)_{|R}$. □

Proof. (der Folgerung) Das Lebesguemaß ist σ-endlich und damit atomar. Das es nicht verschwindet, gibt es einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit $c := |\{x\}| \neq 0$. Wegen der Translationsinvarianz gilt dann $|\{x\}| = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da das Lebesguemaß σ-endlich ist, muß also $\mathbb{R}$ abzählbar sein. $\square$

2 Aufgaben

1. Sei Ω eine Menge und $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Sei weiter $\mathbb{Z}^\Omega$ der Ring der $\mathbb{Z}$-wertigen Funktionen auf Ω. Für $A \subseteq \Omega$ sei $\chi_A \in \mathbb{Z}^\Omega$,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} ,$$

die charakteristische Funktion von A. Sei $U \subseteq \mathbb{Z}^\Omega$ der kleinste Unterring mit 1, welcher alle χ_A mit $A \in S$ enthält. Zeige, daß $A \in R(S)$ genau dann gilt, wenn $\chi_A \in U$.

2. Seien Ω_i, $i \in \{0,1\}$ Mengen und $S_i \subseteq \mathcal{P}(\Omega_i)$ unter Komplementbildung abgeschlossene Teilmengen. Dann bilden wir

$$S_0 \times S_1 := \{A \times B | A \in S_0 \ , B \in S_1\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega_0 \times \Omega_1) \ .$$

Zeigen Sie, daß

$$R(S_0 \times S_1) = R((S_0 \times \{\Omega_1\}) \bigcup (\{\Omega_0\} \times S_1)) \ .$$

3. Sei $f : \Omega_0 \to \Omega_1$ eine Abbildung zwischen Mengen und $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega_1)$. Zeigen Sie, daß $f^*R(S) = R(f^*S)$ gilt. Zeigen Sie weiter, daß mit S auch f^*S eine Partition ist.

4. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine durch ein quadratisches Polynom gegebene Abbildung. Sei μ das Zählprämaß auf $(\mathbb{C}, \mathcal{P}(\mathbb{C}))$. Finden Sie die maximale Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ derart, daß $f_{|f^{-1}(U)*}\mu_{|f^{-1}(U)} = 2\mu_{|U}$ ist.

5. Sei $f : \Omega_0 \to \Omega_1$ eine Abbildung endlicher Mengen. Für $A \in \mathcal{P}(\Omega_1)$ und $B \in \mathcal{P}(\Omega_0)$ definieren wir $\mu(A) := \sharp f^{-1}(A)$ und $\nu(B) := \sharp f(B)$. Untersuchen Sie, ob ν oder μ auf jeweils der ganzen Potenzmenge definierte Prämaße sind.

6. Seien (Ω_i, R_i, μ_i), $i = 0, 1$ prämeßbare Räume und $(\Omega, R) = (\Omega_0, R_0) \times (\Omega_1, R_1)$. Zeigen Sie, daß es genau ein Prämaß μ auf (Ω, R) mit $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1)$ für alle $A_i \in R_i$ gibt.

7. Sei R die in der Vorlesung definierte Algebra auf $\mathbb{Z}_p$ (p-adische Zahlen). Finde eine Menge $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ mit $A \notin R$.

8. Sei $(A^{\mathbb{N}}, R, \mu)$ der Prämaßraum mit der Algebra der Zylindermengen R und dem durch eine Funktion $f : A \to [0, 1]$ gegebenen Maß (siehe Vorlesung). Wir definieren $T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ durch $T((a_n)) := (b_n)$ mit $b_n := a_{n+1}$ für alle $n \geq 0$. Zeigen Sie, daß $T_*\mu = \mu$ gilt.

9. Wir betrachten den meßbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (Borelsche σ-Algebra). Zeigen Sie, daß eine stückweise stetige reellwertige Funktion $(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ meßbar ist.

10. Wir betrachten den meßbaren Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ (Borelsche σ-Algebra) und einen weiteren meßbaren Raum (X, R). Zeigen Sie, daß aus der Meßbarkeit von $f, g : (X, R) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ auch die Meßbarkeit von $f + g$ folgt.

11. Sei (X, R) ein meßbarer Raum und $f : X \to X$ eine meßbare Bijektion. Ist dann auch $f^{-1} : X \to X$ meßbar?

12. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit der Hausdorff-Eigenschaft und $\mathcal{B}$ die dazugehörige σ-Algebra. Zeigen Sie, daß alle abzählbaren Teilmengen von X meßbar sind. Kann man die Hausdorff-Voraussetzung weglassen?

13. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, daß man jedem Element $(a_i) \in \mathbb{Z}_p \subseteq \prod_{i \geq 0} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ eine wohlbestimmte Folge $(b_i) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$ zuordnen, so daß $a_i = [\sum_{k=0}^{i-1} b_k p^k]_{\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}}$ für alle i gilt. Zeigen Sie, daß die so definierte Abbildung $\mathbb{Z}_p \to \{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$ bijektiv, stetig und meßbar ist. Ist die Umkehrabbildung auch stetig?

14. Wir betrachten $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und die Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ mit
$$\mu(A) := \begin{cases} \infty & |A| = \infty \\ \sum_{a \in A} 2^{-a} & |A| < \infty \end{cases} .$$
Zeigen Sie, daß μ endlich additiv ist. Gilt auch die σ-Additivität?

15. Sei A eine endliche Menge und $P \in [0,1]^{A\times A}$ eine stochastische Matrix, d.h es gilt $\sum_{b\in A} P(a,b) = 1$ für alle $a \in A$. Sei weiter $p : A \to [0,1]$ eine Funktion (Anfangsverteilung) derart, daß $\sum_{a\in A} p(a) = 1$ gilt. Wir betrachten den meßbaren Raum $(A^{\mathbb{N}}, R)$ (Algebra der Zylindermengen) und definieren

$$\mu(q_n^{-1}(a_1,\ldots,a_n)) := p(a_1)\prod_{i=1}^{n-1} P(a_i,a_{i+1}) \ ,$$

wobei $q_n : A^{\mathbb{N}} \to A^n$ die Projektion auf die ersten n Komponenten ist. Zeigen Sie, daß dadurch ein σ-additives Wahrscheinlichkeitsprämaß auf $(A^{\mathbb{N}}, R)$ festgelegt wird.

16. Sei $(\mathbb{R}^n, R^n)$ der n-dimensionale euklidische Raum mit der dyadischen Algebra. Zeigen Sie, daß jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine Vereinigung einer abzählbaren paarweise disjunkten Familie von Elementen aus R^n ist.

17. Wir betrachten eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Folgen nichtnegativer reeller Zahlen. Wir schreiben $x_n(i)$ für das i-te Glied der Folge x_n. Wir nehmen an, daß für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und den Genzwert $y(i)$ hat und daß $S := \sum_{i=0}^{\infty} y(i)$ existiert. Zeigen Sie, daß dann $S_n := \sum_{i=0}^{\infty} x_n(i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ existiert und $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ gilt.

18. Für eine Menge Ω betrachten wir den meßbaren Raum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Sei $f : \Omega \to [0,\infty]$ gegeben und $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ das f-gewichtete Zählprämaß

$$\mu(A) := \sum_{x\in A} f(x) \ , \quad A \in \mathcal{P}(\Omega) \ .$$

Zeigen Sie, daß μ ein Maß ist.

19. Wir betrachten den Prämaßraum (R, D^1, μ) mit der dyadischen Algebra und dem Lebesgueschen Prämaß μ. Sei $F_m := [-2^m, 2^{-m})$ und $A \in D^1$ unbeschränkt. Zeigen Sie, daß für alle $m \in \mathbb{N}$ die Relation $A \cap F_m \in D^1$ gilt und $\lim_{m\to\infty} \mu(A \cap F_m) = \infty$ ist.[1]

20. Wir betrachten den Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{T})$ mit der von den Zylindermengen erzeugten Topologie. Zeigen Sie, daß $A^{\mathbb{N}}$ kompakt ist (Hinweis: Satz von Tychonov benutzen). Zeigen Sie weiter, daß für jede absteigende Familie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener nichtleerer Teilmengen gilt $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset$.

[1] Das wurde im Nachweis der σ-Additivität von μ in der Vorlesung benutzt!

21. Wir betrachten die Teilmenge $A \subseteq [0,1]$ derjenigen reellen Zahlen, deren Dezimalbruchentwicklung die Ziffern $3, 5, 7$ nicht enthält. Zeigen Sie, daß $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ (Borelsche σ-Algebra). Nehmen Sie an, daß das Lebesgueprämaß eine Ausdehnung zu einem Maß μ auf $\mathcal{B}$ hat. Berechnen Sie $\mu(A)$.

22. Sei Ω eine Menge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Ω. Für $A \subseteq \Omega$ definieren wir [2]

$$\mu(A) := \limsup_n \frac{\sharp\{i \in \{1, \ldots, n\} | x_i \in A\}}{n} .$$

Zeigen Sie, daß $\mu(A)$ wohldefiniert ist. Ist μ ein Prämaß?

23. Sei Ω eine Menge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Ω. Wir setzen

$$R := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) | \mu(A) := \lim_n \frac{\sharp\{i \in \{1, \ldots, n\} | x_i \in A\}}{n} \text{ existiert}\} .$$

Zeigen Sie, daß R eine Algebra und μ ein Prämaß auf R ist. Ist R eine σ-Algebra und μ ein Maß?

24. Wir betrachten das Einheitsintervall $[0,1]$. Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ derart, daß für jede stetige Funktion $f \in C([0,1])$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n} = \int_0^1 f(x)dx .$$

25. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige nicht-negative Funktion mit kompaktem Träger. Wir betrachten $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq f(x)\}$. Zeigen Sie, daß A eine Borelmenge mit dem Lebesguemaß $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ist.

26. Für $a, b > 0$ betrachten wir die Menge $E := \{ax^2 + by^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß E eine Borelmenge ist und berechnen Sie ihr Lebesguemaß.

27. Sei A eine endliche Menge und $f : A \to [0,1]$ derart, daß $\sum_{a\in A} f(a) = 1$. Sei $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ der zu diesen Daten gehörende Schiftraum. Ein Element $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ heißt letzlich periodisch, wenn es $i_0, p \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $i \geq i_0$ gilt $a_{i+p} = a_i$. Sei $P \subseteq A^{\mathbb{N}}$ die Teilmenge der letzlich periodischen Elemente. Zeigen Sie, daß $P \in \mathcal{B}$ ist und bestimmen Sie $\mu(A)$.

28. Sei A eine endliche Menge und $f : A \to [0,1]$ derart, daß $\sum_{a\in A} f(a) = 1$. Sei $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ der zu diesen Daten gehörende Schiftraum. Mit $T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ bezeichnen wir die Verschiebung. Zeigen Sie, daß für jede unter T invariante (d.h. $T(W) = W$ erfüllende) Teilmenge $W \in \mathcal{B}$ gilt $\mu(W) \in \{0,1\}$.

[2] $\sharp X$ bezeichnet die Anzahl der Elemente von X

29. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ein nicht-trivialer Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ und $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & A \in \mathcal{F} \\ 0 & A \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie die äußere Erweiterung von μ.

30. Sei $C_c(\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Für $A \subseteq R$ sei χ_A die charakteristische Funktion von A und

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} \inf_{f \in C_c(\mathbb{R}) \ , \chi_A \leq f} \int f(x)dx & A \text{ beschränkt} \\ \infty & A \text{ unbeschränkt} \end{cases} .$$

Ist $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{P}([0,1])$?

31. Wir betrachten den Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, R, \mu)$ zu $A := \{-1, 1\}$ und $f : \{-1,1\} \to [0,1]$, $f(-1) := a$, $f(1) := 1 - a$ mit $a \in [0,1]$. Sei $W : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ durch $W((a_i)) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}$ gegeben. Bestimmen Sie $W_*(\mu)((\frac{1}{16}, \frac{3}{16}))$.

32. Wir betrachten einen Prämaßraum (Ω, R, μ) und bilden die äußere Erweiterung $\tilde{\mu}$ und die Menge der bez. $\tilde{\mu}$ zerlegenden Mengen $R_{\tilde{\mu}}$. Sei $U \subseteq R_{\tilde{\mu}}$ eine Algebra und $\hat{\mu}$ die äußere Erweiterung von $\tilde{\mu}_{|U}$. Zeigen Sie, daß $\hat{\mu} = \tilde{\mu}$ gilt.

33. Sei μ ein Wahscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(x) := \mu((-\infty, x))$ heißt Verteilungsfunktion von μ. Zeigen Sie, daß

    (a) F linkseitig stetig ist,

    (b) F monoton wachsend ist,

    (c) und $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ gilt.

34. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion des Diracmaßes δ_0 auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

35. Zeigen Sie, daß eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit den Eigenschaften

    (a) F ist linkseitig stetig

    (b) F ist monoton wachsend

    (c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

    die Verteilungsfunktion eines eindeutig bestimmten Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. *(Hinweis: Konstruieren Sie μ ähnlich wie das Lebesgue Maß ausgehend vom Prämaß, welches den dyadischen Intervallen $[a, b)$ das Maß $F(b) - F(a)$ zuordnet.)*

36. Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion derart, daß $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ gilt. Zeigen Sie, daß es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ gibt mit $\mu([a, b)) = \int_a^b f(x)dx$ (*Sie können Aufgabe 35 benutzen.*).

37. Sei $A := \{-1, 1\}$ und $p : A \to [0, 1]$ durch $p(-1) = p(1) = \frac{1}{2}$ gegeben. Wir betrachten den durch diese Daten festgelegten Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$. Wir defineren die Teilmenge $C \subseteq A^{\mathbb{N}}$ durch

$$C := \{(a_i) \in A^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i} \text{ konvergiert}\} \ .$$

   (a) Zeigen Sie, daß C meßbar ist.

   (b) Zeigen Sie, daß $\mu(C) \in \{0, 1\}$ gilt.

   Entscheiden Sie, ob $\mu(C) = 1$ oder $\mu(C) = 0$ gilt[3].

38. Sei $A := \{-1, 1\}$ und $p : A \to [0, 1]$ durch $p(-1) = p(1) = \frac{1}{2}$ gegeben. Wir betrachten den durch diese Daten festgelegten Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_{A^{\mathbb{N}}}, \mu)$ und die Abbildung $f : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$,

$$f((a_i)) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \ .$$

   Zeigen Sie, daß $f : (A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_{A^{\mathbb{N}}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ meßbar ist und bestimmen Sie die Verteilungsfunktion (siehe Aufgabe 1) des Wahrscheinlichkeitsmaßes $f_*\mu$.

39. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und $A \in R$ mit $0 < \mu(R) < \infty$. Wir definieren

$$\nu(B) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)} \ , \quad B \in R \ .$$

   Zeigen Sie, daß (Ω, R, ν) auch ein Maßraum ist.

40. Wir betrachten den Lebesgue Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, |.|)$. Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig. Zeigen Sie, daß

$$\int_{[a,b]} f d|.| = \int_a^b f(x)dx$$

   gilt, wobei auf der linken Seite das untere Integral und auf der rechten Seite das Riemannintegral steht.

[3] Ich kenne die Antwort bisher auch nicht!

41. Sei $\mathcal{F}$ ein nicht-trivialer Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die folgende Vorschrift ein stetiges, positives lineares Funktional

$$\lim_{\mathcal{F}} : l^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$$

definiert, wobei $l^\infty(\mathbb{N})$ den Banachraum der beschränkten reellen Folgen auf $\mathbb{N}$ mit der Supremumnorm bezeichnet. *Sei $a := (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$ und $0 < L \in \mathbb{R}$ derart, daß $-L < \inf_i a_i \le \sup_i a_i < L$ gilt. Ist $P = \{P_1, \dots, P_r\}$ eine Partition des Intervalls $(-L, L)$, dann definieren wir die Partition $A = \{A_1, \dots, A_r\}$ von $\mathbb{N}$ durch $A_i := \{i \in \mathbb{N} | a_i \in P_i\}$. Dann gehört genau ein Element von A zu $\mathcal{F}$.*

Mit

$$l(P) := \max_{i=1,\dots,r} (\sup_{x\in P_i} x - \inf_{x\in P_i} x)$$

bezeichnen wir den Durchmesser der Partition. Wir wählen nun eine Folge von Verfeinerungen von Partitionen $P(n) = \{P_1(n), \dots, P_{r(n)}(n)\}$ derart, daß $\lim_{n\to\infty} l(P(n)) = 0$ gilt. Wir erhalten damit eine Folge von Partitionen $A(n)$ von $\mathbb{N}$ und eine Folge $A_{i(n)}(n) \in \mathcal{F} \cap P(n)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $i_n \in A_{i(n)}(n)$. Wir definieren

$$\lim_{\mathcal{F}}(a_i) := \lim_{n\to\infty} a_{i_n} \ .$$

Diese Definition ist unabhängig von den Wahlen.

42. Sei A eine endliche Menge. Wir betrachten den meßbaren (Schift-)Raum $(A^{\mathbb{N}}, R)$ mit dem Schift T. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$, $x \in A^{\mathbb{N}}$ und eine stetige Funktion $f \in C(A^{\mathbb{N}})$

$$M_n(x; f) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^i x) \ .$$

Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter. Zeigen Sie *(1. Aufgabe benutzen)*, daß

$$f \mapsto \lim_{\mathcal{F}}((M_n(x; f))_{n\in\mathbb{N}})$$

ein stetiges positives T-invariantes lineares Funktional $\phi_{\mathcal{F},x} : C(A^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}$ definiert *(hierbei wird $C(A^{\mathbb{N}})$ als Banachraum mit der Supremumnorm betrachtet).*

43. Sei μ das Maß auf $(A^{\mathbb{N}}, R)$, welches durch die Gleichverteilung auf A induziert wird. Zeigen Sie, daß es ein $x \in A^{\mathbb{N}}$ gibt, für welches $\phi_{\mathcal{F},x}(f) = \int_{A^{\mathbb{N}}} f(x) d\mu(x)$ *(Aufgabe 2.)* gilt.

44. Seien $p, q : A \to [0, 1]$ zwei Verteilungen auf A und μ_p, μ_q die dazugehörigen Maße auf dem Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, R)$. Zeigen Sie: Wenn $p \neq q$, dann gibt es eine meßbare Teilmenge $B \subseteq A^{\mathbb{N}}$ mit $\mu_p(B) = 1$ und $\mu_q(B) = 0$.

45. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum, $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nicht-negativen meßbaren Funktionen und gelte $\lim_{i\to\infty}\int_\Omega f_i d\mu = 0$. Zeigen Sie, daß dann $f_i \to 0$ dem Maße nach (also stochastisch) gilt, nicht notwendig aber auch $f_i \to 0$ fast überall (bez. μ).

46. Untersuche folgende Folgen meßbarer Funktionen auf $(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$ auf Konvergenz (fast überall, beinahe gleichmäßg, stochastisch):

    (a) $f_i := \chi_{[i,i+1]}$

    (b) $f_i = \chi_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]}$, wobei $i = 2^k + j$ mit $j \in [0, 2^k)$, $k \in \mathbb{N}$

    (c) $f_i := \chi_{[0,1]}x^i$.

47. Welche der folgenden Funktionen sind in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$?

    (a) $f := \frac{1}{1+x^2}$

    (b) $f := \frac{1}{1+|x|}\sin(x)$

    (c) $f := \frac{1}{x}\chi_{(-1,1)\setminus\{0\}}$

    (d) $f := \frac{1}{|x|^{1/2}}\chi_{(-1,1)\setminus\{0\}}$

    (e) $f := x\chi_{\mathbb{Q}}$.

48. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbarer Diffeomorphismus. Dann gilt die Transformationsformel
$$\int_{\mathbb{R}} f(\phi(x))|\phi'(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$
für das Riemannsche Integral. Wir hatten schon gesehen (im wesentlichen Aufgabe 4, Blatt 5), daß eine nicht-negative stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ein eindeutig bestimmtes Maß μ_h auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definiert, für welches $\mu_h([a, b]) = \int_a^b h(x)dx$ gilt. Zeigen Sie unter Benutzung dieser Tatsachen, daß
$$\phi_*|.| = \mu_{\frac{1}{|\phi'|}}$$
gilt.

49. Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $\phi(x, y) = x + y$ gegeben. Für endliche Maße p, q auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ betrachten wir das Produktmaß $p \times q$ auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ und definieren
$$p * q := \phi_*(p \times q) .$$
Zeigen Sie:

(a) $p * q$ ist endlich.

(b) $p * q = q * p$

(c) $r * (p * q) = (r * p) * q$ (für ein drittes endliches Maß r auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$)

(d) $\delta_0 * p = p$ für das Dirac maß δ_0 in 0.

50. Für $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, |.|)$ betrachten wir das endliche signierte Maß $\mu_f := f|.|$. Zeigen Sie, daß es für $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, |.|)$ eine eindeutig bestimmte Funktion $f * g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, |.|)$ derart gibt, daß $\mu_f * \mu_g = \mu_{f*g}$ gilt (siehe Aufgabe 49, ausgedehnt auf signierte Maße). Zeigen Sie weiter, daß für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ auch $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\mu_{f'} * g = \mu_{(f*g)'}$ gilt, wobei f' die Ableitung von f bezeichnet.

51. Sei $f \in C_c^\infty$ mit $\int_\mathbb{R} f(x)dx = 1$. Wir setzen $f_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon} f(\frac{x}{\epsilon})$ für $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, daß für jedes $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, |.|)$ in der Norm $\|.\|_1$ gilt:

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} f_\epsilon * g = g \ .$$

52. Sei $b > 0$. Zeigen Sie, daß durch

$$\mathcal{B}_\mathbb{R} \ni A \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_A e^{-\frac{bx^2}{2}} |dx|$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_b auf $\mathbb{R}$ definiert wird. Bestimmen Sie $b_3 > 0$ als Funktion von $b_1, b_2 > 0$ so daß für $\mu_{b_1} * \mu_{b_2} = \mu_{b_3}$ gilt (siehe Aufgabe 49).

53. Sei B eine symmetrische positiv-definite $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, daß durch

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \ni A \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(B)}} \int_A e^{-\frac{<Bx,x>}{2}} |dx|$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_B auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

54. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten. Bestimmen eine symmetrische positiv-definite $m \times m$-Matrix C derart, daß $\phi_* \mu_B = \mu_C$. Ist C eindeutig.

55. Sei μ_B wie in Aufgabe 53. Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 d\mu_B(x)$.

56. Sei

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2 + 1 \ , |z| \leq 1\} \ .$$

Skizzieren Sie diese Menge und berechnen Sie ihr Lebesguemaß $|A|$.

Literatur

[BFWW78] Joachim Bellach, Peter Franken, Elke Warmuth, and Walter Warmuth. *Mass, Integral und bedingter Erwartungswert*. Akademie-Verlag, Berlin, 1978. Wissenschaftliche Taschenbücher: Reihe Mathematik, Physik, Band 226.

[Jac78] Konrad Jacobs. *Measure and integral*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978. Probability and Mathematical Statistics, With an appendix by Jaroslav Kurzweil.

[Nat81] I. P. Natanson. *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*. Mathematische Lehrbücher und Monographien, I. Abteilung: Mathematische Lehrbücher [Mathematical Textbooks and Monographs, Part I: Mathematical Textbooks], VI. Akademie-Verlag, Berlin, russian edition, 1981. Edited by Karl Bögel. 1.1.3

[Wal82] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982. 1.1.10