Maß- und Integrationstheorie

Ulrich Bunke*

18. Dezember 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Integration in $\mathbb{R}^n$ 3

2 Algebren 8

3 Prämaße 11

4 Konstruktion von Prämaßen, Partitionen 12

5 Beispiele für Prämaße 14

6 σ-Algebren 17

7 Beispiele meßbarer Räume 18

8 Meßbare Funktionen und punktweise Konvergenz 22

9 Maße 24

10 Beispiele von σ-additiven Prämaßen 25

11 Eindeutigkeit der Ausdehnung von Maßen 29

12 Äußere Maße 32

13 Konstruktion eines Maßes aus einem äußeren Maß 34

14 Das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ 37

15 Das Haarmaß auf $\mathbb{Z}_p$ 40

16 Das Maß auf dem Schiftraum 41

*Regensburg, ulrich.bunke@mathematik.uni-regensburg.de

17 Nullmengen und Vervollständigung **43**

18 Verteilungsfunktionen **46**

19 Integration einfacher Funktionen **48**

20 Unteres Integral **49**

21 Das Lemma von Fatou und der Satz von Lebesgue **50**

22 Die Additivität des Integrals **53**

23 Integrierbare Funktionen **55**

24 Der Satz über die majorisierte Konvergenz **58**

25 Differenzieren unter dem Integral **60**

26 Die Transformationsformel **62**

27 Beispiele **62**

28 L^p-Räume **69**

29 Vollständigkeit **74**

30 Weitere Eigenschaften von $L^p(\Omega, R, \mu)$ **76**

31 $L^2(\Omega, R, \mu)$ als Hilbertraum **80**

32 Produkt von Maßräumen **84**

33 Iterierte Integrale **89**

34 Abzählbare Produkte **93**

35 Reguläre Maße **96**

36 Dichtefunktionen **100**

37 Signierte Maße, Hahnsche Zerlegung **103**

38 Der Satz von Radon-Nikodym **106**

39 Instruktive Argumente **110**

40 Aufgaben **112**

t

1 Integration in $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten ein Interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Wir haben das eindimensionale Integral als eine lineare Abbildung

$$C([a,b]) \ni f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

eingeführt. Wir wollen es zunächst auf alle stetigen Funktionen mit kompakten Träger ausdehnen. Sei $f \in C_c(\mathbb{R})$.

Lemma 1.1. *Die Zahl $\int_a^b f(x)dx$ ist unabhängig von der Wahl des Intervalls $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\operatorname{supp}(f) \subseteq [a,b]$.*

Die folgende Definition liefert die gewünschte Ausdehnung:

Definition 1.2. *Für $f \in C_c(\mathbb{R})$ definieren wir*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx := \int_a^b f(x)dx$$

wobei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, welches den Träger von f enthält.

Unser nächstes Ziel ist die Definition eines Integrals über $\mathbb{R}^n$ für alle $n \geq 0$. Der Fall $n = 0$ ist für induktive Argumente interessant. In diesem Fall ist das Integral die Auswertung der Funktion im Punkt $0 \in \mathbb{R}^0$.

Wir zerlegen $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ und schreiben die Elemente in der Form $x = (x', x_n)$ mit $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x_n \in \mathbb{R}$. Sei nun $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann betrachten wir die Funktion $f_{x'} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch $f_{x'}(x_n) := f(x', x_n)$ gegeben wird.

Lemma 1.3. *Es gilt $f_{x'} \in C_c(\mathbb{R})$ und die Funktion*

$$\mathbb{R}^{n-1} \ni x' \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_{x'}(x_n)dx_n \in \mathbb{R}$$

ist ein Element von $C_c(\mathbb{R}^{n-1})$.

Definition 1.4. *Wir definieren rekursiv*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\int_{\mathbb{R}} f_{x'}(x_n)dx_n)dx' \ .$$

Die Menge $C_c(\mathbb{R}^n)$ ist ein reeller Vektorraum $C_c(\mathbb{R}^n)$ mit einer Halbordnung.

Lemma 1.5. *Die Abbildung*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \_\, dx : C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

ist linear und monoton.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann haben wir eine Abbildung $C_c(U) \to C_c(\mathbb{R}^n)$, welche durch Ausdehnung durch 0 gegeben ist. Wir werden diese Abbildung im folgenden vielfach benutzen ohne sie explizit zu notieren, zum Beispiel um $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ für $f \in C_c(U)$ zu bilden.

Wir betrachten einen Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ zwischen offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn $f \in C_c(V)$, dann gilt $\Phi^* f \in C_c(U)$ und damit auch $\Phi^* f\, |\det J(\Phi)| \in C_c(U)$. Ziel dieser Vorlesung ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1.6 (Transformationsformel)**.** *Es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Phi^* f)(x)\, |\det J(\Phi(x))| dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx\ .$$

Wir beweisen die Transformationsformel durch Induktion nach der Dimension n. Der Anfang ist:

Lemma 1.7. *Die Transformationsformel gilt, wenn $n = 1$ ist.*

Proof. Wir nehmen an, daß U und V zusammenhängend sind. Andernfalls betrachten wir die Zusammenhangskomponenten einzeln. Ein Diffeomorphismus ist entweder monoton wachsend oder fallend. Wir betrachten den monoton wachsenden Fall. Sei $[a, b] \subseteq U$ ein Intervall derart, daß $\mathrm{supp}(f) \subseteq \Phi([a, b])$ gilt. Dann gilt die als bekannt vorausgesetzte Transformationsformel für das eindlimensional Integral

$$\int_a^b (\Phi^* f)(x)\Phi'(x) dx = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x) dx\ .$$

Das ist genau die Transformationsformel in Satz 1.6, wenn man beachtet, daß Φ' positiv ist. □

Die Transformationsformel ist mit der Komposition von Diffeomorphismen verträglich.

Lemma 1.8. *Wenn $\Psi : V \to W$ eine weiterer Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist und die Transformationsformel für Φ und Ψ gilt, dann auch für $\Psi \circ \Phi$.*

Proof. Sei $f \in C_c(W)$. Wir benutzen die Gleichungen

$$|\det J(\Psi \circ \Phi)| = \Phi^* |\det J(\Psi)|\, |\det J(\Phi)|$$

und

$$(\Psi \circ \Phi)^* f = \Phi^*(\Psi^* f)\ .$$

Wir wenden zunächst die Transformationsformel für Φ und danach für Ψ an, um die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} ((\Psi \circ \Phi^*) f)(x)\, |\det J(\Psi \circ \Phi(x))| dx = \int_{R^n} (\Psi^* f)(x) |\det J(\Psi(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

zu erhalten. □

Wir nehmen an, daß die Transformationsformel für alle kleineren Dimensionen als n schon gezeigt ist.

Lemma 1.9. *Die Transformationsformel gilt, wenn Φ von der Form $\Phi(x) = (x', \phi(x))$ für eine glatte Funktion $\phi : U \to \mathbb{R}$ ist.*

Proof. In diesem Fall hat die Jacobimatrix eine Blockform

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} (n-1) \times (n-1) & 1 \times (n-1) \\ (n-1) \times 1 & 1 \times 1 \end{pmatrix}\ .$$

Es gilt

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d'\phi & \partial_n \phi \end{pmatrix}\ .$$

Wir sehen, daß $|\det(J(\Phi)(x', x_n))| = |\phi'_{x'}(x_n)|$ gilt. Wir rechnen nun

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi^* f)(x)\, |\det(J(\Phi(x))| dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{x'}(\phi_{x'}(x_n)) |\phi'_{x'}(x_n)| dx_n \right) dx' \\ &\overset{Lemma 1.9}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{x'}(x_n) dx_n \right) dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx\ . \end{aligned}$$

□

Lemma 1.10. *Der Transformationsformel gilt, wenn Φ von der Form $\Phi(x) = (x_1, \psi(x))$ für eine glatte Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}^{n-1}$ ist.*

Proof. Die Jacobimatrix hat eine Blockstruktur

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 1 \times (n-1) \\ (n-1) \times 1 & (n-1) \times (n-1) \end{pmatrix} .$$

Es gilt

$$J(\Phi)(x_1, x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1 \psi(x, x') & J(\psi_{x_1})(x') \end{pmatrix} .$$

Wir sehen, daß $|\det(J(\Phi))(x_1, x')| = |\det(J(\psi_{x_1})(x')|$ gilt. Wir rechnen unter Benutzung der unmittelbar aus der Definition des Integrals folgenden Regel

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x') dx' \right) dx_1$$

und mit der Notation $f_{x_1}(x') := f(x_1, x')$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi^* f)(x) \,|\det(J(\Phi)(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\psi_{x_1}^* f_{x_1})(x') |\det(J(\psi_{x_1})(x'))| dx' \right) dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(x')(x') dx' \right) dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \ . \end{aligned}$$

□

Die symmetrische Gruppe Σ_n wirkt auf $\mathbb{R}^n$ durch Vertauschen der Koordinaten.

Lemma 1.11. *Für $\sigma \in \Sigma_n$ und $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\sigma^* f)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \ .$$

Proof. Wegen Lemma 1.8 reicht es, diese Formel für eine erzeugende Menge von Σ_n nachzuprüfen. Die Gruppe Σ_n wird durch die elementaren Vertauschungen

$$(1, \dots, i, i+1, \dots, n) \mapsto (1, \dots, i+1, i, \dots, n)$$

erzeugt. Folglich kann man alles auf den Fall $n = 2$ und die Transformation $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(x, y) = (y, x)$ reduzieren. Es reicht also, die Regel

$$\int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} f(y, x) dy \right) dx \tag{1}$$

für alle $f \in C([-a, a]^2)$ zu zeigen.

Die Menge $C([-a,a]^2)$ hat die Struktur einer Banachalgebra und

$$f \mapsto \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} f(x,y)dy \right) dx \in \mathbb{R}$$

ist eine stetige Abbildung (beschränkt durch $4a^2$). Es reicht also, (1) für eine dichte Teilmenge von $C([-a,a]^2)$ zu prüfen.

Sei $P \subset C([-a,a]^2)$ die Teilmenge der Funktionen, die sich durch Polynome in zwei Variablen darstellen lassen. Wir sehen, daß P eine Unteralgebra ist, welche die Punkte der kompakten Menge $[-a,a]^2$ trennt und die 1 enthält. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist P in $C([-a,a]^2)$ dicht. Wegen der Linearität des Integrals reicht es schließlich, die Formel (1) für Monome nachzurechnen. In diesem Fall wird (1) durch eine explizite Rechnung bestätigt. □

Wir beenden jetzt den Beweis von Satz 1.6. Sei $y \in U$. Wir zerlegen $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ und schreiben $\Phi(x) := (*, \psi(x))$. Da $\det J(\Phi)(y) \neq 0$ ist, können wir nach eventuellem Umnumerieren der Koordinaten (Lemma 1.11) annehmen, daß $\det(J(\psi_{y_1}))(y') \neq 0$ ist.

Wir definieren $\Psi_1(x) := (x_1, \psi_{x_1}(x'))$. Dann ist $\det(J\Psi_1)(y) = \det(J(\psi_{y_1}))(y') \neq 0$. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion gibt es eine Umgebung $U_y \subset U$ von y derart, daß $\Psi_1 : U_y \to V_y := \Psi_1(U_y)$ invertierbar ist. Wir definieren nun $\Psi_2 : V_y \to U$ durch $\Psi_2 := \Phi \circ \Psi_1^{-1}$. Dann ist $\Psi_2 : V_y \to W_y := \Psi_2(V_y)$ auch invertierbar. Weiterhin gilt $\Phi = \Psi_2 \circ \Psi_1$. Offensichtlich ist hat Ψ_2 die Form $\Psi_2(x) = (\phi(x), x')$ für eine Abbildung $\phi : V_y \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\det J(\Phi) = \Psi_1^*[\det J(\Psi_2)] \det J(\Psi_1) \ .$$

Wenn $\mathrm{supp}(f) \subset V_y$ ist, dann gilt die Transformationsformel wegen der Lemmata 1.8, 1.9, 1.11 und 1.10.

Wir benutzen nun den folgenden Satz:

Satz 1.12. *Sei X ein metrisierbarer topologischer Raum, $f \in C_c(X)$ und $(V_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung. Dann existiert eine endliche Teilmenge $I \subseteq J$ und eine Familie $(f_i)_{i\in I}$, $f_i \in C_c(V_i)$, so daß $f = \sum_{i\in I} f_i$ gilt.*

Proof. Man beweist diesen Satz mit Hilfe von Zerlegungen der Eins. □

Die eben beschriebene Konstruktion liefert eine Überdeckung $(V_y)_{y\in U}$ von V. Wenn $f \in C_c(V)$ ist, dann gibt es nach Satz 1.12 eine endliche Teilmenge $I \subset V$ und eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ mit $f_i \in C_c(V_i)$ derart, daß $f = \sum_{i\in I} f_i$. Die Transformationsformel gilt für die Funktionen f_i und wegen Linearität dann auch für f. □

Wir betrachten nun eine kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. Das Volumen von A sollte durch

$$\mathrm{vol}(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)dx$$

gegeben sein, wobei χ_A die charakteristische Funktion von A ist. Da χ_A nicht stetig ist, ist dieses Integral bisher nicht definiert. Es ist naheliegend, durch folgende Defnitionen untere und obere Schranken für $\mathrm{vol}(A)$ anzugeben:

$$u(A) := \sup\{\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \mid \phi \in C_c(\mathbb{R}^n) \wedge \phi \leq 1 \wedge \mathrm{supp}(\phi) \subset (A \setminus \partial A)\}$$

$$v(A) := \inf\{\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \mid \phi \in C_c(\mathbb{R}^n) \wedge \phi \geq 0 \wedge \phi_{|A} \equiv 1\} \ .$$

Man kann leicht zeigen, daß $u(A) \leq v(A)$ gilt.

Definition 1.13. *Falls $u(A) = v(A)$ ist, definieren wir $\mathrm{vol}(A) := u(A)$.*

Beispielsweise ist das Volumen von kompakten, durch glatte Untermannigfaltigkeiten berandeten Teilmengen definiert. Genauer, sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine eigentliche, von unten beschränkte Abbildung. Dann ist $A := h^{-1}((-\infty, 0]) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

Aufgabe 1.1. *Zeigen Sie: Wenn h auf $h^{-1}(\{0\})$ regulär ist, dann ist $\mathrm{vol}(A)$ wohldefiniert.*

So ist zum Beispiel das Volumen von $\overline{B(0,r)}$ von abgeschlossenen Bällen definiert.

Aufgabe 1.2. *Berechnen Sie $\mathrm{vol}(\overline{B(0,r)})$ explizit.*

Aufgabe 1.3. *Zeigen Sie: Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Teilmengen deren Volumen definiert ist und gilt $A \cap B = \emptyset$, dann ist das Volumen von $A \cup B$ definiert und es gilt $\mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(A \cup B)$.*

2 Algebren

In der Maßtheorie wird der Begriff des Volumens von Teilmengen einer Menge Ω formalisiert, wobei anstelle des Wortes Volumen der Begriff Maß verwendet wird. Ein Maß ist eine auf einer Teilmenge $R \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ der Potenzmenge von Ω definierte Abbildung mit Werten in $[0, \infty]$. Wir lassen also ausdrücklich den Wert ∞ zu, schließen aber negative Werte aus.

Als eine grundlegende Eigenschaft fordern wir die Additivität unter disjunkter Vereinigung, daß also für $A, B \in R$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $A \cup B \in R$ und

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \ .$$

Wir verwenden hierbei die Regel $\infty + x := \infty$. Desweiteren soll auch das Maß des Komplementes eines Elements aus R definiert sein.

Es ist daher natürlich zu fordern, daß der Definitionsbereiche eines Maßes eine Algebra im Sinne der folgende Definition ist.

Definition 2.1. *Eine **Algebra** auf Ω ist eine Teilmenge $R \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit :*

1. *$\emptyset \in R$, $\Omega \in R$.*
2. *Für alle $A, B \in R$ gilt $A \cup B \in R$*
3. *Für alle $A \in R$ gilt $\Omega \setminus A \in R$.*

Definition 2.2. *Ein Paar (Ω, R) aus einer Menge mit Algebra heißt **prämeßbarer Raum**. Die Elemente von R heißen **meßbaren Teilmengen** von Ω.*

Beachte, daß die Eigenschaft einer Teilmenge von Ω, meßbar zu sein, von der Wahl der Algebra R abhängt. Hier sind einige elementare Bemerkungen über Algebren.

1. Auf jeder Menge Ω gibt es die trivialen Algebren $\{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{P}(\Omega)$.
2. Ist R eine Algebra, dann ist R abgeschlossen unter der Bildung endlicher Durchschnitte und Komplemente der Form $A \setminus B$ für $A, B \in R$ mit $B \subset A$ ist. In der Tat ist $A \cap B = \Omega \setminus [(\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)]$ und $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B)$
3. Ist $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie von Algebren, dann ist der Durchschnitt $\bigcap_i R_i$ auch eine Algebra.
4. Vereinigungen von Algebren sind in der Regel keine Algebren.

   Definition 2.3. *Eine **gerichtete Menge** ist eine halbgeordnete Menge $(I, \leq)$ mit der Eigenschaft, daß für je zwei Elemente $i, j \in I$ ein $k \in I$ existiert mit $i \leq k$ und $j \leq k$.*

   Die Menge der Algebren auf einer Menge besitzt eine natürliche Halbordnung gegeben durch Inklusion. Sei I gerichtet und $(R_i)_{i \in I}$ eine monotone Famile von Algebren. Dann ist die Vereinigung
   $$R := \bigcup_{i \in I} R_i$$
   eine Algebra. Seien $A, B \in R$. Dann gibt es $i, j \in I$ so daß $A \in R_i$ und $B \in R_j$ gilt. Wir wählen ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$. Dann gilt $A, B \in R_k$ und damit $A \cup B \in R_k$, also $A \cup B \in R$.

   Die Voraussetzung **monoton** ist wichtig für die Abgeschlossenheit unter Vereinigungen.

   Aufgabe 2.1. *Finde eine Beispiel für den Fakt, daß die Vereinigung zweier Algebren auf Ω keine Algebra sein muß.*

In der Regel ist es unhandlich, eine Algebra durch Angabe aller ihrer Elemente zu beschreiben. Oft ist deshalb die folgende Konstruktion sehr hilfreich. Sei $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine beliebige Teilmenge.

Lemma 2.4. *Es gibt eine eindeutig bestimmte minimale Algebra $R(S)$, welche S enthält.*

Proof. Der Durchschnitt von beliebigen nichtleeren Familien von Algebren ist eine Algebra. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist eine S enthaltende Algebra. Wir erhalten also

$$R(S) := \bigcap_{R \subseteq \mathcal{P}(\Omega) | R \text{ ist Algebra und } S \subseteq R} R \ .$$

□

Definition 2.5. *Die $R(S)$ heißt die **von S erzeugte Algebra**.*

Die Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$ ist durch $\emptyset$ erzeugt.

Aufgabe 2.2. *Finde eine explizite konstruktive Beschreibung der Elemente von $R(S)$.*

Aufgabe 2.3. *Sei $S := \{\{x\} \mid x \in \Omega\}$. Gilt $R(S) = \mathcal{P}(\Omega)$?*

Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung zwischen Mengen. Weiter betrachten wir Teilmengen $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ und $T \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ der entsprechenden Potenzmengen. Wir definieren

$$f^*S := \{f^{-1}(A) | A \in S\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \ , \quad f_*T := \{f(B) | B \in T\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega') \ .$$

Definition 2.6. *Seien (Ω, R) und (Ω', R') prämeßbare Räume und $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung zwischen Mengen. Diese Abbildung heißt **meßbar**, wenn $f^*R' \subseteq R$ gilt.*

1. Die Komposition meßbarer Abbildungen ist meßbar. Wir haben also eine Kategorie der prämeßbaren Räume und meßbaren Abbildungen.

2. Ist $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung zwischen Mengen und R' eine Algebra, dann ist auch f^*R eine Algebra auf Ω. Beachte, daß im allgemeinen für eine Algebra R auf Ω die Teilmenge $f_*R \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ keine Algebra ist.

3. Ist $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung zwischen Mengen und $S' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$. Dann gilt

   $$f^*R(S') = R(f^*S') \ .$$

   Um zu überprüfen, daß $f : (\Omega, R) \to (\Omega', R(S'))$ meßbar ist, reicht es aus, $f^*S' \subseteq R$ zu zeigen.

4. Sei $(\Omega_i, R_i)_{i\in I}$ eine Familie prämeßbaren Räumen. Wir betrachten $\Omega := \prod_{i\in I} \Omega_i$ und die Projektionen $p_i : \Omega \to \Omega_i$. Sei $S := \bigcup_{i\in I} p_i^*(R_i)$. Dann ist
$$\prod_{i\in I}(\Omega_i, R_i) := (\Omega, R(S))$$
das kategorielle Produkt der Familie $(\Omega_i, R_i)_{i\in I}$. Die Algebra $R(S)$ ist die kleinste Algebra, für welche die Projektionen p_i für alle $i \in I$ meßbar sind.

3 Prämaße

Wir dehnen die additive Struktur von $\mathbb{R}$ auf $[0,\infty] := [0,\infty) \cup \{\infty\}$ aus, indem wir $\infty + x := \infty$ für alle $x \in [0,\infty]$ setzen. Die Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl λ wird durch $\lambda\infty := \infty$ ausgedehnt. Schließlich setzen wir $0\infty := 0$.

Sei (Ω, R) ein prämeßbarer Raum.

Definition 3.1. *Eine Funktion $\mu : R \to [0,\infty]$ heißt **additiv**, wenn für $A, B \in R$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt*
$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) \ .$$
*Eine additive Funktion $\mu : R \to [0,\infty]$ heißt **Prämaß**. Ein Tripel (Ω, R, μ) bestehend aus einer Menge mit Algebra und Prämaß heißt **Prämaßraum**.*

Hier sind einige einfache Beispiele für Prämaße.

1. (**Zählmaß**) Sei Ω eine Menge und $R := \mathcal{P}(\Omega)$. Das Zählprämaß ist durch $\mu(A) := |A|$ gegeben.

2. (**Gewichtetes Zählprämaß**) Sei Ω eine Menge, $R := \mathcal{P}(\Omega)$ und $f : \Omega \to [0,\infty]$ eine Abbildung. Dann definiert
$$\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty] \ , \quad \mu(A) := \sum_{x\in A} f(x)$$
ein Prämaß auf Ω.

3. (**Wahrscheinlichkeitsprämaß**) Im Beipiel 2 nehmen wir zusätzlich an, daß Ω endlich und $\sum_{x\in\Omega} f(x) = 1$ ist. Das so entstehende Prämaß hat die Eigenschaft $\mu(\Omega) = 1$. In der Wahrscheinlichkeitstheorie könnte man mit diesem Beipiel einen endlichen Raum von Ereignissen modellieren. Der Wert $f(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Einzelereignisses x. Der Wert $\mu(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis in A liegt.

4. (**Diracprämaß**) Sei (Ω, R) ein prämeßbarer Raum und $x \in \Omega$. Das Dirac Prämaß δ_x wird durch
$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$
definiert.

5. (**Das Bild eines Prämaßes**) Seien (Ω, R) and (Ω', R') prämeßbare Räume und $f : \Omega \to \Omega'$ eine meßbare Abbildung. Ist μ ein Prämaß auf Ω, dann ist durch
$$f_*\mu(A') := \mu(f^{-1}(A'))$$
ein Prämaß $f_*\mu$ auf (Ω', R') definiert. Wir nennen $f_*\mu$ das Bild von μ unter f.

   Ist $g : (\Omega', R') \to (\Omega'', R'')$ eine weitere meßbare Abbildung, dann gilt $g_*(f_*\mu) = (g \circ f)_*\mu$.

   Beispiel 3.2. Sei μ das Zählprämaß. Dann ist $(f_*\mu)(A')$ die Anzahl der Punkte im Urbild $f^{-1}(A')$.

6. (**Einschränkung**) Ist (Ω, R, μ) ein prämeßbarer Raum und $f : U \hookrightarrow \Omega$ die Inklusion einer meßbaren Teilmenge. Dann gilt $f^*R \cong \{A \in R | A \subseteq U\}$. Folglich kann man f^*R als eine Teilmenge von R auffassen und das Prämaß einschränken zu einem Prämaß auf (U, f^*R), welches durch $\mu_{|U} := \mu_{|f^*R}$ notiert wird.

Seien (Ω_i, R_i, μ_i), $i = 0, 1$ zwei Prämaßräume und $(\Omega, R) := (\Omega_0, R_0) \times (\Omega_1, R_1)$ ihr Produkt.

Lemma 3.3. *Es gibt genau ein Prämaß μ auf (Ω, R) mit $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1)$ für alle $A_i \in R_i$. Dieses wird als das Produktprämaß $\mu := \mu_0 \times \mu_1$ bezeichnet.*

Proof. Die Produkte $A_0 \times A_1$ mit $A_i \in R_i$, $i = 0, 1$ erzeugen R. Wir haben damit das Maß μ auf einem Erzeugendensystem vorgegeben. Man kann zeigen, daß es eine Fortsetzung auf ganz R gibt. Diese ist dann natürlich eindeutig. □

Aufgabe 3.1. *Führe den Existenzbeweis in Lemma 3.3.*

4 Konstruktion von Prämaßen, Partitionen

In diesem Kapitel studieren wir eine weitere Möglichkeit, Prämaße zu beschreiben. In den bisher betrachteten Beispielen haben wir $\mu(A)$ direkt explizit beschrieben. Im allgemeinen ist es aber zu kompliziert, ein Prämaß auf allen Elementen einer Algebra R explizit anzugeben.

Wird eine Algebra von S erzeugt, so ist es naheliegend, ein Prämaß zunächst nur auf S vorzugeben und es dann auf $R(S)$ auszudehnen. Im allgemeinen ergeben sich dabei aber komplizierte Wohldefiniertheitsfragen. Dieses Problem wird deutlich, wenn man versucht, Lemma 3.3 zu beweisen. Wenn allerdings die Elemente von S paarweise disjunkt sind, dann wird die Situation sehr einfach.

Definition 4.1. *Eine endliche Teilmenge von $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ heißt* ***Partition****, wenn die Elemente von S paarweise disjunkt sind und die Vereinigung der Elemente von S ganz Ω ergibt.*

Es folgen einfache Bemerkungen über Partitionen.

1. Die triviale Partition einer Menge Ω ist $\{\Omega\}$. Die chaotische Partition einer endlichen Menge Ω ist $\{\{x\}|x \in \Omega\}$.

2. Wenn S eine Partition ist, dann hat $R(S)$ genau $2^{|S|}$ Elemente.

3. Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und S' eine Partition von Ω'. Dann ist
$$f^*S' := \{f^{-1}(A)|A \in S'\}$$
die induzierte Partition von Ω.

4. Ist S eine Partition, dann hat jedes Element $A \in R(S)$ eine eindeutige Darstellung als disjunkte Vereinigung von Elementen aus S:
$$A = \bigcup_{X \in S \mid X \subseteq A} X \ .$$

Lemma 4.2. *Sei S eine Partition von Ω und $\mu : S \to [0, \infty]$ vorgegeben. Dann besitzt μ eine eindeutige Ausdehnung zu einem auf $R(S)$ definierten Prämaß.*

Proof. Für $A \in R(S)$ definieren wir
$$\mu(A) := \sum_{\{X \in S \mid X \subseteq A\}} \mu(X) \ .$$
Die Additivität von μ ist klar genauso wie die Eindeutigkeit. □

Mit Hilfe von Partitionen kann man immer nur endliche Algebren definieren. Kompliziertere Beispiele bekommt man mit folgendem Lemma.

Lemma 4.3. *Sei I eine gerichtete Menge und $(R_i)_{i \in I}$ eine aufsteigende Familie von Algebren mit der Vereinigung $R := \bigcup_{i \in I} R_i$. Sei weiterhin $(\mu_i)_{i \in I}$ eine Familie von Prämaßen mit der Verträglichkeitsbedingung $(\mu_i)_{|R_j} = \mu_j$, falls $j \leq i$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Prämaß μ auf R mit $\mu_{|R_i} = \mu_i$ für alle $i \in I$.*

Proof. Für $A \in R$ existert $i \in I$ mit $A \in R_i$. Wir müssen also $\mu(A) := \mu_i(A)$ setzen. Die Additivität von μ ist leicht einzusehen. □

Beispiel 4.4. Mit Hilfe von Partitionen kann man Aufgabe 3.1 wie folgt lösen. Die Menge $\mathcal{P}art(\Omega)$ auf einer Menge Ω ist halbgeordnet, wobei $S \leq S'$ falls $S \in R(S')$ gilt. Man überzeugt sich davon, daß $\mathcal{P}art(\Omega)$ sogar gerichtet ist.

Wir benutzen nun die Notation aus der Aufgabe. Wenn $S_i \subset R_i$, $i = 0, 1$ Partitionen sind, dann ist es leicht einzusehen, daß μ auf $(\Omega_0, R(S_0)) \times (\Omega_1, R(S_1))$ wohldefiniert ist. Dazu beachte man, daß die Menge der Produkte aus Elementen von S_0 und S_1 eine Partition von Ω ist. Abschließend überzeugt man sich davon, daß jedes Element aus R schon meßbar in $(\Omega_0, R(S_0)) \times (\Omega_1, R(S_1))$ für geeignete Partitionen S_i ist. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.3

5 Beispiele für Prämaße

Das dyadische Lebesgueprämaß Für $r \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Partition

$$S_r := \{[\frac{p}{2^r}, \frac{p+1}{2^r}) \mid p \in \mathbb{Z}\ , -2^{2r} \leq p < 2^{2r}\} \cup \{\mathbb{R} \setminus [-2^r, 2^r)\}$$

von $\mathbb{R}$. Wir zerlegen also das Intervall $[-2^r, 2^r)$ disjunkt in halboffene Intervalle der Länge 2^{-r}. Diese endlich vielen Teilmengen zusammen mit dem Komplement von $[-2^r, 2^r)$ bilden die Partition S_r von $\mathbb{R}$.

Wir legen ein Prämaß μ_r auf $R(S_r)$ durch die Angabe der Werte

$$\mu_r([\frac{p}{2^r}, \frac{p+1}{2^r})) := 2^{-r}\ , \quad \mu_r(\mathbb{R} \setminus [-2^r, 2^r)) := \infty$$

fest. Das Maß eines Intervalls ist hier also genau die Länge.

Wir wollen später das Maß beliebiger Teilmengen von $\mathbb{R}$ durch Approximation durch Vereiningung von dyadischen Intervallen definieren. Mit Elementen aus $R(S_r)$ für ein festes $r \in \mathbb{N}$ ist nur eine ganz grobe Approximation möglich. Besser ist es, alle die Algebren $R(S_r)$ für $r \in \mathbb{N}$ zusammen betrachten. Für $r, r' \in \mathbb{N}$ mit $r \leq r'$ gilt

$$S_r \leq R(S_{r'})\ , \quad (\mu_{r'})_{|S_r} = \mu_r\ .$$

Wir erhalten also nach Lemma 4.3 einen Prämaßraum $(\mathbb{R}, R^1, \mu^1)$ mit der Algebra $R^1 = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} R(S_r)$ auf $\mathbb{R}$ und dem Prämaß μ^1 auf R mit der Eigenschaft $\mu_{|R(S_r)} = \mu_r$ für alle $r \in \mathbb{N}$.

Wir definieren den dyadischen Lebesgueprämaßraum $(\mathbb{R}^n, R^n, \mu^n)$ als das n-fache Produkt von $(\mathbb{R}, R^1, \mu^1)$ mit sich selbst.

Das Prämaß auf den p-adischen Zahlen Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. In der Zahlentheorie, aber auch in der harmonischen Analysis spielt der Ring der p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ eine wichtige Rolle. Dieser Ring trägt eine mit der Ringstruktur verträgliche Topologie. Die unterliegende additive Gruppe ist eine kompakte topologische Gruppe und trägt ein kanonisches invariantes Wahrscheinllichkeitsmaß, das Haarsche Maß. Wir werden die p-adischen Zahlen in dieser Vorlesung als ein grundlegendes Beispiel für die Maß- und Integrationstheorie schrittweise mitentwickeln. Wir beginnen mit einem Prämaßraum.

Zunächst beschreiben wir $\mathbb{Z}_p$ als Menge. Wir betrachten die endlichen Ringe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Inklusionen $p^{n+1}\mathbb{Z} \subset p^n\mathbb{Z}$ induzieren Projektionen

$$\mathrm{pr}_{n+1} : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ .$$

Wir betrachten den Funktor $\mathcal{Z}$ von $\mathbb{N}^{op}$ in die Kategorie der Ringe, welcher am einfachsten durch das folgende Diagram beschrieben werden kann:

$$\mathcal{Z} : \dots \to \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \dots \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \{1\} \ .$$

Definition 5.1. *Der Ring der* ***p-adischen Zahlen*** *ist durch $\mathbb{Z}_p := \lim_{\mathbb{N}^{op}} \mathcal{Z}$ definiert.*

Explizit kann man $\mathbb{Z}_p$ als die Teilmenge $\mathbb{Z}_p \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ derjenigen Familien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschreiben, welche $\mathrm{pr}_{n+1}(a_{n+1}) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Die Ringoperationen werden komponentenweise definiert.

Wir versehen die endlichen Ringe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie. Dann wird $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ein topologischer Raum welcher die Topologie auf $\mathbb{Z}_p$ induziert. Nach dem Satz von Tychonoff ist ein Produkt kompakter Räume kompakt. Folglich ist $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ kompakt. Da die Teilmenge $\mathbb{Z}_p$ durch stetige Gleichungen definiert wird, ist die Teilmenge $\mathbb{Z}_p$ abgeschlossen und damit auch kompakt. Die Stetigkeit der Ringoperationen sieht man leicht ein.

Wir betrachten auf $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ die Algebra $\tilde{R}$ derart, daß

$$(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \tilde{R}) = \prod_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathcal{P}(Z/p^n\mathbb{Z}))$$

gilt. Wir erhalten eine Algebra $R := \{A \cap \mathbb{Z}_p \mid A \in \tilde{R}\}$. Wir beschreiben R explizit, weil wir auf R ein Prämaß angeben wollen.

Wir haben eine Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Auswertungshomomorphismen

$$\mathrm{pr}_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ ,$$

$\mathrm{pr}_n((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := a_n$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Partition

$$S_n := \mathrm{pr}_n^* S_{chaot}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

von $\mathbb{Z}_p$, wobei $S_{chaot}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ die chaotische Partition von $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist. Wir legen das Prämaß $\mu_n : R(S_n) \to [0,\infty]$ durch

$$\mu_n(\mathrm{pr}_n^{-1}(x)) := \frac{1}{p^n} \ , \quad x \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

fest. Da $|S_n|$ gerade p^n Elemente hat, ist dies ein Wahrscheinlichkeitsprämaß.

Wir beobachten nun, daß $S_n \subseteq R(S_{n+1})$ und folglich $R(S_n) \subseteq R(S_{n+1})$ gilt. Es gilt $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(S_n)$. Weiter sehen wir ein, daß $(\mu_{n+1})_{|S_n} = \mu_n$ ist. Wir erhalten also eine aufsteigende Folge von Algebren $(R(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen mit einer Folge von verträglichen Prämaßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 5.2. *Das Prämaß μ auf $(\mathbb{Z}_p, R)$ ist das (entsprechend Lemma 4.3) durch die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}})$ eindeutig bestimmte Prämaß auf $\mathbb{Z}_p$.*

Durch $k \mapsto ([k]_{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$ erhalten wir eine Einbettung von $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$. Zum Beispiel ist $p^k\mathbb{Z}_p = \{(a_n)|a_i = 0\ \forall i \leq k\}$. Folglich ist $p^k\mathbb{Z}_p = \mathrm{pr}_k^{-1}(\{0\})$ und deshalb $\mu(p^k\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{p^k}$.

Aufgabe 5.1. *Sei für $a \in \mathbb{Z}_p$ die Translation $T_a : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ durch $T_a(x) = x + a$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Translation meßbar und das Prämaß translationsinvariant ist, also $T_{a,*}\mu = \mu$ gilt.*

Die Dilatation $D_a : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ mit a ist durch $D_a(x) := ax$ gegeben. Zeigen Sie, daß D_a meßbar ist und bestimmen Sie für $a \neq 0$ die Zahl $\delta(a) \in \mathbb{R}$ so daß $(D_{a,*}\mu)_{|U} = \lambda(a)\mu_{|U}$ gilt, wobei $U = \mathrm{im}(D_a)$ ist.

Der Schiftraum Sei A eine endliche Menge. Wir bilden das Produkt $A^{\mathbb{N}} := \prod_{n\in\mathbb{N}} A$. Die Elemente in $A^{\mathbb{N}}$ sind also die Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Wir versehen A mit der diskreten Topologie. Dann ist $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{T})$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ ein kompakter topologischer Raum. Wenn wir A mit der Algebra $\mathcal{P}(A)$ versehen, dann erhalten wir eine Algebra R auf $A^{\mathbb{N}}$ so daß $(A, R) = \prod_{n\in\mathbb{N}}(A, \mathcal{P}(A))$ gilt. Da wir ein Prämaß auf R angeben wollen, beschreiben wir diese Algebra explizit.

Für $n \in \mathbb{N}$ habe wir eine Abbildung $q_n : A^{\mathbb{N}} \to A^{n+1}$, $q_n((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) := (a_0, \ldots, a_n)$. Wir betrachten die Partitionen
$$S_n := q_n^* S_{chaot}(A^{n+1}) \ ,$$
wobei $S_{chaot}(A^n)$ die chaotische Partition von A^n bezeichnet. Es gilt $S_n \subseteq R(S_{n+1})$. Die Folge $(R(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine aufsteigende Folge von Algebren und es gilt $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(S_n)$.

Sei nun eine Funktion $f : A \to [0, 1]$ mit $\sum_{a\in A} f(a) = 1$ vorgegeben. Durch die Vorschrift

$$\mu_n(q_n^{-1}(a_i)) := \prod_{i=0}^{n} f(a) \ , \quad (a_i) \in A^{n+1}$$

legen wir eine Prämaß auf $R(S_n)$. Man rechnet nach, daß $(\mu_{n+1})_{|S_n} = \mu_n$ gilt. Die Folge von Prämaßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also in Sinne von Lemma 4.3 verträglich und definiert ein Prämaß auf dem prämeßbaren Raum $(A^{\mathbb{N}}, R)$.

Dieses Prämaß ist ein Wahrscheinlichkeitsprämaß, d.h es gilt $\mu(A^{\mathbb{N}})$. Mit diesem Beipiel wird folgender Sachverhalt modelliert.

Wir führen ein Experiment mit endlich vielen Ausgängen. Die Menge A ist ein Modell für die Menge dieser Ausgänge. Wir wiederholen das Experiment immer wieder. Im Ergebniss erhalten wir Folgen von Ausgängen, also Elemente von $A^{\mathbb{N}}$. Der Wert der Funktion f im Punkt a beschreibt die Wahrscheinlichkeit, das ein einzelnes Experiment den Ausgang $f(a)$ hat. Das Prämaß auf dem Schiftraum modelliert den Fall, daß alle Experimente unabhängig sind. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß die ersten $n+1$ Experimente die Folge $(a_0, \ldots, a_n)$ liefern durch $\mu(X) = \mu_n(X)$ gegeben, wobei $X \in S_n$ die Zylindermenge $q_n^{-1}((a_i))$ ist.

6 σ-Algebren

Als Motivation betrachten wir den prämeßbaren Raum $(\mathbb{R}, R^1, \mu^1)$. Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen, dann gilt im allgemeinen nicht $U \in R^1$. Wir werden aber sehen, daß man U als abzählbare disjunkte Vereiningung von Elementen aus R^1 schreiben kann. Wir würden gerne $\mu^1(U)$ als Summe der Maße dieser Elemente definieren. Studiert man das Wohldefiniertheitsproblem, dann stellt sich schnell die Frage, ob μ^1 additiv für abzählbare Vereiningungen ist.

Wir berachten nun allgemeiner einen prämeßbaren Raum (Ω, R). Unter den Prämaßen auf R wollen wir diejenigen betrachten, welche die Bedingung

$$\mu(A) := \sum_{i \in I} A_i$$

nicht nur für endliche, sondern auch für abzählbare, paarweise disjunkte Familien $(A_i)_{i \in I}$ erfüllen. Diese werden wir Maße nennen. Es ist daher natürlich, Algebren zu betrachten, die unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen sind.

Definition 6.1. *Eine Algebra R auf Ω ist eine **σ-Algebra**, falls für jede abzählbare Familie $(A_i)_{i \in I}$ in R auch $\bigcup_{i \in I} A_i \in R$ gilt.*

*Ein **meßbarer Raum** ist ein prämeßbarer Raum (Ω, R) dessen Algebra ein σ-Algebra ist.*

1. Eine σ-Algebra R ist abgeschlossen unter der Bildung abzählbarer Vereinigungen und Durchschnitte.
2. Sei $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ-Algebren. Dann ist $R := \bigcap_{i \in I} R_i$ eine σ-Algebra.

   Beachte, daß die Vereinigung einer aufsteigenden Familie von σ-Algebren im allgemeinen keine σ-Algebra ist.

   Aufgabe 6.1. *Überlegen Sie sich ein Beispiel für diesen Sachverhalt.*
3. Sei $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann existiert genau eine kleinste σ-Algebra $R^\sigma(S)$ welche S enthält. Wir erhalten

$$R^\sigma(S) := \bigcap_{R \text{ ist } \sigma\text{-Algebra},\ S \subseteq R} R$$

Definition 6.2. *$R^\sigma(S)$ heißt die **von S erzeugte σ-Algebra**.*

4. Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung zwischen Mengen. Ist R' eine σ-Algebra auf Ω', dann ist f^*R' eine σ-Algbera auf Ω.

5. Für $S' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ gilt $f^*R^\sigma(S') = R^\sigma(f^*S')$.

6. Sei R eine σ-Algebra auf Ω und $S' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$. Dann ist $f : (\Omega, R) \to (\Omega', R^\sigma(S'))$ genau dann meßbar, wenn $f^*S' \subseteq R$ gilt. Die Notwendigkeit ist klar wegen $S' \subseteq R^\sigma(S')$. Die Bedingung ist auch hinreichend, da aus $f^*S' \subseteq R$ auch $f^*R^\sigma(S') = R^\sigma(f^*S') \subseteq R$ folgt.

7. Die meßbaren Räume und meßbaren Abbildungen bilden eine volle Unterkategorie der Kategorie der prämeßbaren Räume. Wir haben eine Adjunktion

$$L : \text{prämeßbare Räume} \leftrightarrows \text{meßbare Räume} : incl$$

wobei $L(X, R) \cong (X, R^\sigma(R))$ ist.

7 Beispiele meßbarer Räume

Borelsche Räume

Definition 7.1. *Ist $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so ist die **Borelsche σ-Algebra** durch $R^\sigma(\mathcal{T})$ gegeben.*

Die Borelsche σ-Algebra enthält unter anderem alle Teilmengen von Ω der Form $U \cap A$ mit offenem U und abgeschlossenem A. Wenn nichts anderes festgelegt wird, dann betrachten wir für einen topologischen Raum immer den unterliegenden meßbaren Raum mit der Borelschen σ-Algebra, welche wir oft mit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_\Omega$ oder $\mathcal{B}_\mathcal{T}$ bezeichnen.

1. Eine stetige Abbildung $f : (\Omega_0, \mathcal{T}_0) \to: (\Omega_0, \mathcal{T}_1)$ ist meßbar. In der Tat gilt $f^*(\mathcal{T}_1) \subseteq \mathcal{T}_0 \subseteq R^\sigma(\mathcal{T}_0)$.

2. Sei $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

   Lemma 7.2. *(a) Es gilt $R^\sigma(S) \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{T}(S)}$.*

   (b) Wenn S eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{T}$, dann gilt $R^\sigma(S) = \mathcal{B}_{\mathcal{T}(S)}$.

   Proof. Es gilt $S \subseteq \mathcal{T}(S) \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{T}(S)}$ und deshalb $R^\sigma(S) \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{T}(S)}$. Wenn S eine Basis der Topologie $\mathcal{T}(S)$ ist, dann gilt für jedes $U \in \mathcal{T}(S)$ daß $U = \bigcup_{V \in S\ , V \subseteq U} V$. Wenn S zusätzlich abzählbar ist, so schließen daraus, daß $U \in R^\sigma(S)$. Folglich gilt $\mathcal{T}(S) \subseteq R^\sigma(S)$ und damit $\mathcal{B}_{\mathcal{T}(S)} \subseteq R^\sigma(S)$. $\square$

Die Borelsche σ-Algebra von $\mathbb{R}$ Sei $R \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ die dyadische Algebra aus Kapitel 5, $\mathcal{T}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B} := R(\mathcal{T})$ die Borelsche σ-Algebra.

Lemma 7.3. *Es gilt $R^\sigma(R) = \mathcal{B}$.*

Proof. Wir schreiben $[a, b) := (-\infty, b) \cap [a, \infty)$. Damit gilt $R \subseteq \mathcal{B}$. Damit gilt $R^\sigma(R) \subseteq \mathcal{B}$.

Die Menge R ist eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen und damit selbst abzählbar. Wir überzeugen uns nun, daß jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung

$$U = \bigcup_{A \in R^n \ , A \subseteq U} A$$

geschrieben werden kann. Damit gilt $\mathcal{T} \subseteq R^\sigma(R)$ und folglich $\mathcal{B} \subseteq R^\sigma(R)$.

Aufgabe 7.1. *Gilt $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$?*

□

Aufgabe 7.2. *Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ und $T_\lambda, D_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $T_\lambda(x) := x + \lambda$ und $D_\lambda(x) := \lambda x$ gegeben. Zeigen Sie, daß T_λ und D_λ meßbar sind, wenn man $\mathbb{R}$ mit der Borelschen σ-Algebra betrachtet.*

Unter welchen Umständen sind diese Abbildung meßbar, wenn man $\mathbb{R}$ mit der dyadischen Algebra betrachtet?

Die σ-Algebra von $\mathbb{Z}_p$ Wir betrachten nun die Algebra R aus Kapitel 5 auf $\mathbb{Z}_p$ und ihren Abschluß $\mathbb{R}^\sigma(R)$ und die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}$.

Lemma 7.4. *Es gilt $R^\sigma(R) = \mathcal{B}$*

Proof. Sei

$$S := \{\mathrm{pr}_n^{-1}(x) | n \in \mathbb{N} \ , x \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_p) \ .$$

Dann gilt $R = R(S)$ und folglich $R^\sigma(R) = R^\sigma(S)$. Andererseits ist S eine abzählbare Basis für die Topologie von $\mathbb{Z}_p$. Damit ist $R^\sigma(R) = \mathcal{B}$. □

Aufgabe 7.3. *Zeigen Sie, daß die Translation und Dilatation (siehe Aufgabe 5.1) meßbar sind, wenn man $\mathbb{Z}_p$ mit der σ-Algebra $\mathcal{B}$ ausstattet.*

Die σ-Algebra der Zylindermengen auf dem Schiftraum Wir betrachten den Schiftraum $A^{\mathbb{N}}$ mit der Algebra R und der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$.

Lemma 7.5. *Es gilt $R^\sigma(R) = \mathcal{B}$.*

Proof. Die abzählbare Menge der Zylindermengen $S := \{q_n^{-1}((a_i))|n \in \mathbb{N}\ , (a_i) \in A^{n+1}\} \subseteq \mathcal{P}(A^{\mathbb{N}})$ ist eine Basis der Topologie von $A^{\mathbb{N}}$ und erzeugt die σ-Algebra $R^\sigma(R)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Wir betrachten nun die Transformation

$$T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}\ , \quad T(a_i)_{i=0}^\infty = (a_{i+1})_{i=0}^\infty\ ,$$

genannt die **Verschiebung**.

Lemma 7.6. *Die Verschiebung T ist meßbar (und stetig).*

Proof. Die Menge $q_n^{-1}((a_i))$, $(a_i) \in A^{n+1}$ ist eine Zylindermenge und damit eine Element des Erzeugendensystems sowohl der σ-Algebra als auch der Topologie von $A^{\mathbb{N}}$. Wir sehen nun ein, daß

$$T^{-1}(q_n^{-1}((a_i))) = \bigcup_{a \in A} q_{n+1}^{-1}(a, a_0, \dots, a_n)$$

eine endliche Vereinigung von Zylindermengen und damit sowohl meßbar als auch offen ist. □

Hier ist eine andere interessante meßbare Funktion. Wir nehmen an, daß $A := \{+1, -1\}$. Der Raum $A^{\mathbb{N}}$ modelliert eine Folge von Entscheidungen für 1 oder -1. Wir betrachten jetzt den Prozeß in $\mathbb{R}$, in welchem wir im n-ten Schritt entsprechend der n-ten Entscheidung um 2^{-n} Einheiten nach rechts order links wandern. Der Endpunkt der Wanderung wird durch

$$W : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\ , \quad W((a_i)) := \sum_{i=0}^\infty a_i 2^{-i}$$

beschrieben.

Lemma 7.7. *Die Funktion $W : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ ist stetig und damit meßbar.*

Proof. Sei $x \in A^n$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ vorgegeben. Wir wählen $n > 0$ derart, daß $2^{-n} < \epsilon$. Dann gilt für alle $y \in q_n^{-1}(q_n(x))$ (dies ist eine offene Umgebung von x) die Ungleichung

$$|W(x) - W(y)| \leq \sum_{i=n+1}^\infty 2^{-i} = 2^{-n} < \epsilon\ .$$

□

Das Produkt meßbarer Räume Sei $(X_i, R_i)_{i\in I}$ eine Familie meßbarer Räume und $X := \prod_{i\in I} X_i$. Seien $p_i : X \to X_i$ die Projektionen. Auf R können wir die kleinste σ-Algebra R betrachten, bezüglich welcher diese Projektionen meßbar sind. Es gilt

$$R := R^\sigma(\bigcup_{i\in I} p_i^* R_i) \ .$$

Definition 7.8. *Der meßbare Raum (X, R) ist das* ***Produkt der meßbaren Räume*** *$(X_i, R_i)_{i\in I}$.*

1. Das oben beschriebene Produkt meßbarer Räume ist das kategorielle Produkt in der Kategorie der meßbaren Räume.
2. Der Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ das Produkt aus abzählbar vielen Kopien von $(A, \mathcal{P}(A))$ in der Kategorie der meßbaren Räume.
3. Der Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ mit der Borelschen Algebra $\mathcal{B}^n$ ist das Produkt aus n Kopien von $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Das folgt aus der folgenden Überlegung.

Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $\mathcal{B}_i$ die Borelsche σ-Algebra auf X_i. Wir betrachten die Produkte

$$(X, \mathcal{T}) := \prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i) \ , \qquad (X, \mathcal{B}) := \prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{B}_i)$$

der topologischen und meßbaren Räume.

Für jedes $i \in I$ gilt

$$\mathrm{pr}_i^* \mathcal{B}_i = \mathrm{pr}_i^* R^\sigma(\mathcal{T}_i) = R^\sigma(\mathrm{pr}_i^* \mathcal{T}_i) \subseteq R^\sigma(\mathcal{T}) \ .$$

Daraus folgt

$$\mathcal{B} \subseteq R^\sigma(\mathcal{T}) \ .$$

Im allgemeinen ist diese Inklusion aber echt. Gleichheit gilt unter zusätzlichen Voraussetzungen. Wir betrachten den Fall $I = \{0, 1\}$.

Lemma 7.9. *Wir betrachten den Fall $I = \{0, 1\}$ und nehmen an, daß die Topologien $\mathcal{T}_i$ abzählbare Basen haben. Dann gilt $\mathcal{B} = R^\sigma(\mathcal{T})$.*

Proof. Für $i = 0, 1$ sein S_i eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{T}_i$. Dann ist die Menge der Produkte $S := S_1 \times S_2$ eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{T}$. Es gilt $S \subseteq \mathcal{B}$. Damit ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$ nach Lemma 7.2 und deshalb $R^\sigma(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{B}$. □

Der topologische Raum $\mathbb{R}$ hat eine abzählbare Basis und es gilt $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}) \cong \prod_{i=1}^n (\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Also ist

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}) \cong \prod_{i=1}^n (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \ .$$

8 Meßbare Funktionen und punktweise Konvergenz

Wir betrachten einen meßbaren Raum (Ω, R). Den Raum der erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ versehen wir mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$. In diesem Kapitel zeigen wir, daß die Menge der meßbaren Funktionen $\Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ unter der Bildung von Grenzwerten sowie des Infimums oder Supremums von Folgen abgeschlossen ist.

Zunächst geben wir ein einfaches Kriterium für den Nachweis der Meßbarkeit.

Lemma 8.1. *Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist meßbar, falls die Teilmengen $f^{-1}([-\infty, a]) \subseteq \Omega$ für alle $a \in \bar{\mathbb{R}}$ meßbar sind.*

Proof. Die Menge von Teilmengen $\{[-\infty, a] \mid a \in \bar{\mathbb{R}}\}$ erzeugt $\mathcal{B}$. □

Lemma 8.2. *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen, dann sind die Funktion*

$$v := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \ , \quad u := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$$

meßbar.

Proof. Wir fixieren $a \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := f_n^{-1}([-\infty, a])$. Nach Voraussetzung gilt $A_n \in R$. Es gilt

$$v^{-1}([-\infty, a]) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in R \ .$$

Damit ist v meßbar.

Für u argumentiert man ähnlich oder durch Ersetzen von f durch $-f$. □

Folgerung 8.3. *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (fallende) Folge meßbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist der punktweise Grenzwert $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ auch meßbar.*

Proof. Es gilt $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. □

Satz 8.4. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge meßbarer Funktionen. Dann ist $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ meßbar.*

Proof. Wir definieren eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $v_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ durch $v_n(x) := \sup_{i\geq n} f_n(x)$. Nach 8.2 sind die Funktionen v_n meßbar. Die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und es gilt $f = \lim_{n\to\infty} v_n$. Nach Korollar 8.3 ist f meßbar. □

1. Für eine endliche Menge A betrachten wir den Schiftraum $A^{\mathbb{N}}$ mit der Borelschen σ-algebra $\mathcal{B}_{A^{\mathbb{N}}}$. Sei $w : A \to [0, \infty)$ eine Abbildung. Wir definieren
$$f : A^{\mathbb{N}} \to \bar{\mathbb{R}} , \quad f((a_i)) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{w(a_n)}{n+1} .$$
Beachte, daß der Grenzwert dieser Reihe mit positiven Gliedern in $\bar{\mathbb{R}}$ existiert. Die Abbildung $f : (A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_{A^{\mathbb{N}}}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B})$ ist meßbar. Die Menge $f^{-1}(\mathbb{R}) \subseteq A^{\mathbb{N}}$, also die Teilmenge, für welche die Reihe im gewöhnlichen Sinn konvergiert, ist meßbar.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine überall differenzierbare Funktion. Dann ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar. In der Tat gilt $f' = \lim_{n \to \infty} f_n$ mit
$$f_n(x) := n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)) .$$

Seien nun $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbare Funktion (mit endlichen Werten).

Lemma 8.5. *Die Summe $f + g$ und das Produkt fg sind meßbar.*

Proof. Wir betrachten den Fall der Summe. Das Produkt geht analog. Wir schreiben $f+g$ als Komposition meßbarer Abbildungen
$$\Omega \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R} .$$
Die erste Abbildung ist meßbar bezüglich der meßbaren Struktur auf $\mathbb{R}^2$ als Produkt zweier Kopien von $\mathbb{R}^1$ (universelle Eigenschaft des Produktes meßbarer Räume). Wir hatten jedoch in Lemma 7.9 gesehen, daß diese Struktur mir der Borelschen Struktur auf $\mathbb{R}^2$ übereinstimmt. Die Summe als stetige Abbildung ist meßbar bezüglich der Borelschen σ-Algebren. □

Lemma 8.6. *Sei (Ω, R) ein meßbarer Raum und (X, d) ein vollständiger metrischer Raum auf welchem wir die Borelsche σ-Algebra betrachten. Sei weiter $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Abbildungen $f_i : \Omega \to X$. Dann ist die Teilmenge*
$$\{x \in \Omega \mid (f_i(x))_{i \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}$$
von Ω meßbar.

Proof. Wir betrachten die Mengen
$$C_{i,j,m} := \{d(f_i, f_j) < \frac{1}{m}\} \subseteq \Omega , \quad i, j, m \in \mathbb{N} .$$
Da f_i für alle $i \in \mathbb{N}$ meßbar und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig sind, sind diese Mengen meßbar. Dann ist die meßbare Menge
$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{i,j \geq n} C_{i,j,m}$$

die Menge der Punkten $x \in \Omega$, in welchen $((f_i)(x))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Da X vollständig ist, stimmt diese Menge mit A überein. $\square$

9 Maße

Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum.

Definition 9.1. *Das Prämaß μ heißt **σ-additiv**, falls für jede paarweise disjunkte abzählbare Familie $(A_i)_{i\in I}$ in R mit $A := \bigcup_{i\in I} A_i \in R$ gilt:*

$$\mu(A) = \sum_i \mu(A_i) \ .$$

Beachte, daß wir hier fordern müssen, daß $A \in R$ ist, weil wir nicht angenommen haben, daß R eine σ-Algebra ist.

Definition 9.2. *Ein **Maß** ist ein σ-additives Prämaß auf einem meßbaren Raum (Ω, R). Das Tripel (Ω, R, μ) heißt **Maßraum**.*

1. Sei (Ω, R, μ) ein σ-additiver Prämaßraum. Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von meßbaren Teilmengen mit $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in R$. Dann gilt

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(A) \ .$$

   In der Tat ist $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $B_i := A_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} A_j$ eine paarweise disjunkte Familie mit $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ und es gilt $\mu(A_i) = \sum_{j=0}^{i} \mu(B_j)$. Folglich gilt $\mu(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.

2. Sei $f : (\Omega, R) \to (\Omega', R')$ meßbar und μ ein Maß auf (Ω, R). Dann ist $f_*\mu$ ein Maß auf (Ω', R').

3. Eine Abbildung $f : (\Omega, R, \mu) \to (\Omega', R', \mu')$ zwischen Maßräumen heißt maßerhaltend, wenn $f_*\mu = \mu'$ gilt.

Um die σ-Additivität eines Prämaßes nachzuprüfen, kann man gelegentlich folgendes Kriterium benutzen.

Lemma 9.3. *Sei (Ω, R, μ) ein prämeßbarer Raum und $\mu(\Omega) < \infty$. Dann ist das Prämaß μ ist σ-additiv genau dann, wenn*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$$

für jede absteigende Folge (A_k) in R mit $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$ gilt.

Proof. Da $\mu(\Omega) < \infty$ gilt, sind alle im folgenden Beweis vorkommenden Maße endlich. Insbesondere sind die auftretenden Differenzen wohldefiniert.

Sei μ zunächst σ-additiv und $(A_i)_{i=0}^\infty$ eine absteigende Folge wie oben. Dann ist $(A_i \setminus A_{i+1})_{i=0}^\infty$ eine paarweise disjunkte Folge mit $A_0 = \bigcup_{i=0}^\infty (A_i \setminus A_{i+1})$. Wir erhalten

$$\mu(A_0) = \sum_{i=0}^\infty \mu(A_i \setminus A_{i+1}) = \sum_{i=0}^\infty (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1})) = \mu(A_0) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \ .$$

Folglich $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$.

Möge nun umgekehrt μ die im Lemma angegebene Bedingung erfüllen. Sei $(A_i)_{i=0}^\infty$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente aus R mit $\bigcup_{i=0}^\infty A_i =: A \in R$. Wir setzen $B_k := A \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} A_k$. Dann ist $A = B_0$, die Folge $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$, absteigend und es gilt $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k = \emptyset$. Es gilt $\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \cup B_k = A$ und $\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \cap B_k = \emptyset$. Wir sehen für jedes $k \in \mathbb{N}$ daß

$$\mu(A) = \sum_{i=0}^{k-1} \mu(A_k) + \mu(B_k)$$

gilt. Wegen $\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$ gilt $\mu(A) = \sum_{i=0}^\infty \mu(A_i)$. □

Wenn das Maß von Ω nicht endlich ist, dann muß man das Kriterium auf endliche Teilprämaßräume anwenden.

Lemma 9.4. *Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum. Sei $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in R derart, daß $\lim_{i\to\infty} \mu(F_i \cap A) = \mu(A)$ für jedes $A \in R$ und $(F_i, R_{|F_i}, \mu_{|F_i})$ σ-additiv ist. Dann ist das Prämaß μ auch σ-additiv.*

Proof. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare paarweise disjunkte Familie in R und $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in R$. Dann gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap F_i) = \mu(A \cap F_i) \ .$$

Da Summen und monotone Grenwerte vertauscht werden können, gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lim_{i\to\infty} \mu(A_n \cap F_i) = \lim_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap F_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A \cap F_i) = \mu(A) \ .$$

□

10 Beispiele von σ-additiven Prämaßen

Wir betrachten den prämeßbaren Raum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

1. Das Diracmaß in einem Punkte $x \in \Omega$ ist ein Maß.
2. Das Zählmaß ist ein Maß.
3. Für jede Abbildung $f : \Omega \to [0, \infty]$ ist das durch f gewichtete Zählmaß ein Maß.

Das Lebesgueprämaß Sei $(\mathbb{R}^n, R^n, \mu^n)$ das dyadische Lebesgue-Prämaß auf $\mathbb{R}^n$ (siehe 5).

Lemma 10.1. *Das dyadische Lebesgue-Prämaß ist σ-additiv.*

Proof. Wir betrachten den Fall $n = 1$ und schreiben $R := R^1$ und $\mu := \mu^1$. Der höherdimensionale Fall kann mit der gleichen Idee behandelt werden, erfordert aber eine kompliziertere Notation.

Zuerst schöpfen wir $\mathbb{R}$ durch die Folge $F_m := [-2^m, 2^m]$, $m \in \mathbb{N}$ aus. Dann gilt für jedes $A \in R$

$$\lim_{m\to\infty} \mu(A \cap F_m) = \mu(A) \ .$$

In der Tat, wenn A beschränkt ist, dann stabilisiert sich die Folge $A \cap F_m$. Ist A unbeschränkt, dann gilt $\lim_{m\to\infty} \mu(A \cap F_m) = \infty = \mu(A)$.

Nach Lemma 9.4 reicht es aus, die σ-Additivität von $\mu_{|F_m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Dazu verwenden wir das Kriterium 9.3.

Für ein dyadisches Intervall der Form $I = [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k})$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $r > k$ definieren wir

$$o_r(I) := [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} - \frac{1}{2^r}) \ .$$

Dann gilt $o_r(I) \in R$, $\overline{o_r(I)} \subset I$ und $\mu(I) - \mu(o_r(I)) = 2^{-r}$.

Sei jetzt $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Elementen aus R mit $\bigcap_{i=0}^\infty A_i = \emptyset$. Wir nehmen an, daß $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \alpha > 0$ gilt und konstruieren einen Widerspruch. Dazu konstruieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine nichtleere Teilmenge $B_k \subseteq A_k$ mit $B_k \in R$, so daß $\bar{B}_k \subseteq A_k$ und die Familie $(\bar{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ absteigend ist. Wegen der Vollständigkeit (Intervallschachtelungsaxiom) von $\mathbb{R}$ gilt $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bar{B}_k \neq \emptyset$. Es folgt

$$\emptyset = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \supseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bar{B}_k \neq \emptyset$$

und dies ist der gewünschte Widerspruch.

Um B_k zu konstruieren, stellen wir A_k als Vereinigung von c_k dyadischen Intervallen $I_1, \dots, I_{c_k}$ dar und bilden $A'_k \subset A_k$ durch Ersetzen dieser Intervalle I_j durch $o_{r_k}(I_j)$, wobei wir r_k so groß wählen, daß $c_k 2^{-r_k} < \alpha 2^{-k-2}$ gilt. Dann ist $A'_k \in R$, $\bar{A}'_k \subset A_k$ und $\mu(A_k) - \mu(A'_k) < \alpha 2^{-k-2}$. Wir definieren nun $B_k := \bigcap_{i=0}^k A'_i \in R$. Dann gilt $\bar{B}_k \subset A_k$,

$$A_k \setminus B_k = \bigcup_{i=0}^k A_k \setminus A'_i \subseteq \bigcup_{i=0}^k A_i \setminus A'_i$$

und damit

$$\mu(B_k) = \mu(A_k) - \mu(A_k \setminus B_k) \geq \mu(A_k) - \sum_{i=0}^{k} \mu(A_i \setminus A_i') \geq \mu(A_k) - \sum_{i=0}^{k} \alpha 2^{-i-2} \geq \alpha(1 - \frac{1}{2}) = \frac{\alpha}{2}$$

Insbesondere ist $\bar{B}_k \neq \emptyset$. Die Familie nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$ $(\bar{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist absteigend. □

Das Haarsche Prämaß auf $\mathbb{Z}_p$ Wir betrachten das Haarsche Prämaß $(\mathbb{Z}_p, R, \mu)$ (siehe 5.2)

Lemma 10.2. *Das Haarsche Prämaß auf $\mathbb{Z}_p$ is σ-additiv.*

Proof. Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge aus Elementen aus R mit $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \emptyset$. Wir zeigen, daß dann $A_i = \emptyset$ für genügend große i gilt. Wir nehmen das Gegenteil an.

Wir konstruieren induktiv eine Folge (x_n), $x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, mit folgenden Eigenschaften:

1. $q_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$ mit $q_{n+1} : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
2. $x_n \in \mathrm{pr}_n(A_i)$ für alle $i \geq 0$ mit $\mathrm{pr}_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

Wir setzen $x_0 := 0$. Seien $x_0, \ldots, x_n$ schon konstruiert. Es gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ daß $x_n \in \mathrm{pr}_n(A_i) = q_{n+1}(\mathrm{pr}_{n+1}(A_i))$. Folglich ist $q_{n+1}^{-1}(x_n) \cap \mathrm{pr}_{n+1}(A_i) \neq \emptyset$.

Wir benutzen nun, daß eine absteigende Folge von nichtleerenTeilmengen einer endlichen Menge einen nichtleeren Durschschnitt hat. Wir wählen $x_{n+1} \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} q_{n+1}^{-1}(x_n) \cap \mathrm{pr}_{n+1}(A_i)$. Die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ definiert ein Element $x \in \mathbb{Z}_p$.

Sei $i \in \mathbb{N}$ fix. Es gilt

$$\mathrm{pr}_n(x) = x_n \in \mathrm{pr}_n(A_i) \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Nun gibt es nach Konstruktion der Algebra R in Kapitel 5 ein $m \in \mathbb{N}$ derart, daß $A_i \in R(\mathrm{pr}_m^*(S_{chaot}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})))$ ist. Folglich ist $A_i = \mathrm{pr}_m^{-1}(\mathrm{pr}_m(A_i))$ und damit $x \in \mathrm{pr}_m^{-1}(x_m) \subseteq \mathrm{pr}_m^{-1}(\mathrm{pr}_m(A_i)) = A_i$.

Damit gilt $x \in \bigcap_{i\geq 0} A_i = \emptyset$ liegt. Dies ist ein Widerspruch.

Damit ist $\mu(A_i) = \mu(\emptyset) = 0$ für genügend große i. □

σ-Additivität des Prämaßes auf dem Schiftraum Wir betrachten das Maß μ auf dem Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, R)$ wie in 5 eingeführt.

Lemma 10.3. *Dieses Maß ist σ-additiv.*

Proof. Ist $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Elementen aus R mit $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \emptyset$, dann zeigen wir wie im Fall der p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$, daß es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $A_i = \emptyset$ für $i \geq i_0$ gilt. Daraus folgt die σ-Additivität von μ unmittelbar.

Im folgenden betrachten wir zwei Beispiele für nicht σ-additive Prämaße.

Beispiel 10.4. Wir betrachten die Algebra $P(\mathbb{N})$ auf $\mathbb{N}$ und das Prämaß

$$\mu(A) := \begin{cases} \infty & |A| = \infty \\ \sum_{n\in A} 2^{-n} & |A| < \infty \end{cases} .$$

Dieses Prämaß ist nicht σ-additiv. Zum Beispiel ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 2$, aber $\mu(\mathbb{N}) = \infty$.

Beispiel 10.5. Ein weniger triviales, aber wichtiges Beispiel ist mit dem Begriff eines Ultrafilters verbunden.

Definition 10.6. *Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ heißt **nicht-trivialer Filter**, wenn sie folgende Eigenschaften hat.*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. *$A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B$ impliziert $B \in \mathcal{F}$.*
3. *Für jede endliche Familie $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{F}$ ist $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$.*
4. *Für jeden Punkt $i \in \mathbb{N}$ gibt es ein $A \in \mathcal{F}$ mit $i \notin A$.*

Man sollte sich einen Filter Menge von Umgebungen eines gedachten Punktes ∞ vorstellen.

Die Menge der Filter ist durch Inklusion halbgeordnet und nicht leer. Zum Beispiel ist die Menge $\{A \subseteq \mathbb{N} | |\mathbb{N} \setminus A| < \infty\}$ ein Filter.

Definition 10.7. *Ein maximaler nicht-trivialer Filter heißt nicht-trivialer **Ultrafilter**.*

Die Existenz von Ultrafiltern zeigt man mit dem Zornschen Lemma. Sei $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ eine Kette von nicht-trivialen Filtern. Dann ist $\bigcup_i \mathcal{F}$ ein nicht-trivialer Filter und eine obere Schranke der Kette. Dies zeigt die Voraussetzung des Zornschen Lemmas.

Lemma 10.8. *Sei nun $\mathcal{F}$ ein nicht-trivialer Ultrafilter. Dann gilt für eine Partition $\{A, B\}$ von $\mathbb{N}$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$.*

Proof. In der Tat, wenn A und B in $\mathcal{F}$ enthalten wären, so auch $\emptyset = A \cap B$. Sei nun weder A noch B in $\mathcal{F}$. Dann gilt für alle $U \in \mathcal{F}$, daß $U \cap A \neq \emptyset$. Wäre nämlich $A \cap U = \emptyset$, so $U \subseteq B$ und damit $B \in \mathcal{F}$. Wir bilden $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \{U \subset \mathbb{N} \,|\, \exists V \in \mathcal{F} \text{ mit } A \cap V \subseteq U\}$. Dann ist $\mathcal{F}'$ ein Filter und $\mathcal{F}$ wäre nicht maximal, da $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$.

Um zu sehen, daß $\mathcal{F}'$ ein Filter ist, muß man insbesondere die Abgeschlossenheit unter Durchschnitten prüfen. Seien $X, Y \in \mathcal{F}'$. Der Fall $X, Y \in \mathcal{F}$ ist klar. Wenn $X, Y \in \{U \subset \mathbb{N} \,|\, \exists V \in \mathcal{F} \text{ mit } A \cap V \subseteq U\}$ und $V_X, V_Y \in \mathcal{F}$ für X, Y gewählt sind mit $V_X \cap A \subseteq X$ und $V_Y \cap A \subseteq Y$, dann gilt $V_X \cap V_Y \in \mathcal{F}$ und $V_X \cap V_Y \cap A \subseteq X \cap Y$. Sein nun $X \in \mathcal{F}$ und $Y \in \{U \subset \mathbb{N} \,|\, \exists V \in \mathcal{F} \text{ mit } A \cap V \subseteq U\}$. Sei $V_Y \in \mathcal{F}$ mit $V_Y \cap A \subseteq U$. Dann ist $V_Y \cap X \in \mathcal{F}$ und $V_Y \cap X \cap A \subseteq X \cap Y$, also $X \cap Y \in \{U \subset \mathbb{N} \,|\, \exists V \in \mathcal{F} \text{ mit } A \cap V \subseteq U\}$. □

Wir definieren nun ein Wahrscheinlichkeitsprämaß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ durch $\mu(A) = 0$ für $A \notin \mathcal{F}$ und $\mu(A) = 1$ für $A \in \mathcal{F}$.

Lemma 10.9. *μ ist additiv, aber nicht σ-additiv.*

Proof. Die Additivität ist klar, da $\mathcal{F}$ kein Paar disjunkter Mengen enthält und aus $A, B \notin \mathcal{F}$ folgt $A \cup B \notin \mathcal{F}$. In der Tat ist in diesem Fall $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathcal{F}$. Wir wählen nun eine Folge $A_i \in \mathcal{F}$ mit $i \notin A_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann bilden wir $B_i := \bigcap_{j=0}^{i} A_j \in \mathcal{F}$. Die Folge $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist absteigend und erfüllt $\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i = \emptyset$. Es gilt weiter $\lim_{i \to \infty} \mu(B_i) = 1$. Damit kann μ nicht σ-additiv sein. □

11 Eindeutigkeit der Ausdehnung von Maßen

Wir hatten gesehen, daß man ein Prämaß von einer Partition S auf die von S erzeugte Algebra $R(S)$ ausdehnen kann. Wir wollen nun die Frage studieren, ob man ein auf einer Algebra R gegebenes Prämaß zu einem Maß auf die von R erzeugte σ-Algebra $R^\sigma := R^\sigma(R)$ ausdehnen kann, und ob diese Ausdehnung eindeutig ist. Für den Nachweis der Eindeutigkeit der Fortsetzung ist der folgende Begriff nützlich.

Definition 11.1. *Ein Prämaßraum (Ω, R, μ) heißt **σ-endlich**, wenn es eine aufsteigende Folge $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in R gibt mit $\Omega = \bigcup_i F_i$ und $\mu(F_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*

Wenn $\mu(\Omega) < \infty$ gilt, so ist (Ω, R, μ) trivialerweise σ-endlich. So sind der Prämaßraum $(\mathbb{Z}_p, R, \mu)$ und der Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, R, \mu)$ aus diesem Grund σ-endlich.

Lemma 11.2. *Der dyadische Lebesgueprämaßraum $(\mathbb{R}^n, D^n, \mu^n)$ ist σ-endlich.*

Proof. Wir können die Folge $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definiert durch $F_i := [-2^i, 2^i)^n$ nehmen. □

Hier ist Beispiel eines nicht σ-endlichen Prämaßraumes.

Beispiel 11.3. Sei R die Algebra auf $\mathbb{R}$, welche von allen endlichen Teilmengen erzeugt wird. Wir definieren $\mu : R \to [0, \infty]$ durch $\mu(A) := \sharp(A \cap \mathbb{N})$. Dann ist $(\mathbb{R}, R, \mu)$ nicht σ-endlich. Das sieht man wie folgt.

Die Algebra R besteht aus den Teilmengen von $\mathbb{R}$, welche entweder endlich sind oder endliches Komplement haben. Sei $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ überabzählbare Kardinalität hat, muß es ein $i \in I$ geben so daß F_i unendlich und damit ein endliches Komplement hat. Folglich gilt $|F_i \cap \mathbb{N}| = \infty$.

Wir zeigen nun, daß die Ausdehnung eines Prämaßes zu einem zu einem Maß nicht eindeutig sein muß.

Sei $R^\sigma := R^\sigma(R)$. Wir definieren μ_0 auf R^σ durch $\mu_0(A) = \sharp(A \cap \mathbb{N})$.

Lemma 11.4. *$\tilde{\mu}_0$ ist ein Maß auf R^σ, welches μ ausdehnt.*

Proof. Daß μ_0 das Prämaß μ ausdeht, folgt unmittelbar aus der Definition. Sei nun $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Familie in R^σ. Dann gilt offensichtlich

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |A_i \cap \mathbb{N}| = |\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \cap \mathbb{N}| = \mu_0(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \ .$$

. □

Wir definieren $\mu_1 : R^\sigma \to [0, \infty]$ durch

$$\mu_1(A) := \begin{cases} \mu_0(A) & A \text{ höchstens abzählbar} \\ \infty & A \text{ überabzählbar} \end{cases}$$

Lemma 11.5. *μ_1 ist ein Maß auf R^σ, welches μ ausdehnt.*

Proof. Daß μ_1 eine Ausdehnung ist, sieht man wieder unmittelbar ein. Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Folge in R^σ. Wenn einer der Werte

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_1(A_i) \ , \quad \mu_1(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$$

endlich ist, dann sind die Mengen A_i für alle $i \in \mathbb{N}$ höchstens abzählbar. In diesem Fall gilt

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_1(A_i) = \mu_1(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$$

wie bei $\tilde{\mu}_0$. □

Man sieht leicht ein, daß $\mu_0 \neq \mu_1$. In der Tat gilt $\mu_0(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = 0$ und $\mu_1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = \infty$.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der Ausdehnung für σ-endliche Prämaße.

Satz 11.6. *Sei (Ω, R, μ) ein σ-endlicher Prämaßraum. Wenn μ eine Ausdehnung auf $R^\sigma := R^\sigma(R)$ besitzt, so ist diese eindeutig.*

Proof. Wir zeigen zunächst :

Lemma 11.7. *Die Aussage des Satzes gilt unter der Voraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$.*

Proof. Wir nehmen an, daß wir zwei solche Ausdehnungen μ_i, $i = 0, 1$ haben. Dann betrachten wir die Teilmenge

$$T := \{A \in R^\sigma \mid \mu_0(A) = \mu_1(A)\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \ .$$

Nach Definition gilt $T \subseteq R^\sigma$. Wenn wir zeigen, daß

1. $R \subseteq T$ gilt und
2. T eine σ-Algebra ist,

dann folgt $T = R^\sigma$ und deshalb $\mu_0 = \mu_1$.

1. Offensichtlich ist $\emptyset \in T$ und $\Omega \in T$.
2. Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Elemente von T und $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Dann gilt wegen der σ-Additivität der Maße μ_i
$$\mu_0(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_0(A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_1(A_i) = \mu_1(A) \ .$$
Folglich gilt $A \in T$.
3. Sei $A \in T$ und $A^c := \Omega \setminus A$. Dann gilt wegen $\mu(\Omega) < \infty$, daß $\mu_0(A^c) = \mu_0(\Omega) - \mu_0(A) = \mu_1(\Omega) - \mu_1(A) = \mu_1(A^c)$. Also gilt $A^c \in T$.

Die Eigenschaften 1-3 implizieren, daß T eine σ-Algebra ist. □

Wir beweisen nun den Satz im allgemeinen Fall. Seien μ_i, $i = 0, 1$, wieder zwei Ausdehnungen. Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in R von Mengen endlichen Prämaßes mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \Omega$. Wir bilden die Teilmenge

$$T := \{A \subseteq \Omega \mid A \cap F_n \in R^\sigma(R_{|F_n}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \ .$$

Wir zeigen, daß $R^\sigma \subseteq T$.

1. Erst einmal gilt $R \subseteq T$. In der Tat, wenn $A \in R$ ist, so gilt $A \cap F_n \in R_{|F_n} \subseteq R^\sigma(R_{|F_n})$ für alle n.

2. Sei jetzt $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie in T. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}$, daß $A_i \cap F_n \in R^\sigma(R_{|F_n})$ und damit für jedes n, daß $(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \cap F_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cap F_n) \in R^\sigma(R_{|F_n})$. Also ist T abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen.

3. Sei $A \in T$. Damit gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A^c \cap F_n = F_n \backslash (A \cap F_n) \in R^\sigma(R_{|F_n})$. Damit ist T abgeschlossen unter der Bildung von Komplementen.

Aus den Eigenschaften 1-3 folgt, daß T eine σ-Algebra ist, welche R enthält. Folglich gilt $R^\sigma \subseteq T$.

Wegen $R_{|F_n} \subseteq (R^\sigma)_{|F_n}$ gilt auch $R^\sigma(R_{|F_n}) \subseteq (R^\sigma)_{|F_n}$. Damit sind $(F_n, R^\sigma(R_{|F_n}), \mu_{i|R^\sigma(R_{|F_n})})$ für $i = 0, 1$ Ausdehnungen von $(F, R_{|F_n}, \mu_{|R_{F_n}})$. Mit dem Lemma schließen wir, daß

$$\mu_{0|R^\sigma(R_{|F_n})} = \mu_{1|R^\sigma(R_{|F_n})} \ .$$

Sei jetzt $A \in R^\sigma$. Dann gilt $A \in T$, also für jedes $n \in \mathbb{N}$, daß $A \cap F_n \in R^\sigma(R_{|F_n})$. Wir schließen aus der σ-Additivität der Maße μ_i, daß

$$\mu_0(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_0(A \cap F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(A \cap F_n) = \mu_1(A) \ .$$

□

12 Äußere Maße

Die Konstruktion einer Erweiterung eines Prämaßes erfolgt in mehreren Schritten. Im ersten Schritt ordnen wir einem Prämaß ein äußeres Maß zu. Wir führen diesen Begriff zunächst ein.

Definition 12.1. *1. Eine Abbildung $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ heißt* ***monoton****, falls aus $A \subseteq B$ die Ungleichung $\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(B)$ folgt.*

2. $\tilde{\mu}$ heißt ***σ-subadditiv****, falls $\tilde{\mu}(\bigcup_{i\in I} A_i) \leq \sum_{i\in I} \tilde{\mu}(A_i)$ für jede abzählbare Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen gilt.*

3. Eine monotone und σ-subadditive Abbildung $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ mit $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$ heißt ***äußeres Maß***

Sei Ω eine Menge, $R \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine Teilmenge mit $\emptyset \in R$ und $\mu : R \to [0, \infty]$ eine Abbildung derart, daß $\mu(\emptyset) = 0$. Typischerweise ist (Ω, R, μ) ein Prämaßraum.

Definition 12.2. *Wir definieren die* ***äußere Erweiterung*** $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ *von* μ *durch*

$$\tilde{\mu}(A) := \inf\{\sum_{i \in I} \mu(F_i)\} \ , \quad A \in \mathcal{P}(\Omega) \ ,$$

wobei das Infimum über die Menge aller abzählbaren Familien $(F_i)_{i \in I}$ *mit* $F_i \in R$ *für alle* $i \in I$ *und* $A \subseteq \bigcup_{i \in I} F_i$ *gebildet wird.*

Lemma 12.3. *Die in Definition 12.2 eingeführte äußere Erweiterung* $\tilde{\mu}$ *von* μ *ist ein äußeres Maß.*

Proof.

1. Die Gleichung $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$ gilt, da das Infimum für eine Familie leerer Mengen angenommen wird und $\mu(\emptyset) = 0$ gilt..

2. Die Funktion $\tilde{\mu}$ is monoton. Wenn nämlich $A \subseteq B$ gilt, dann ist die Menge, über die das Infimum für $\tilde{\mu}(B)$ gebildet wird, in der entsprechenden Menge für $\tilde{\mu}(A)$ enthalten, woraus $\tilde{\mu}(A) \le \tilde{\mu}(B)$ folgt.

3. Die äußere Erweiterung $\tilde{\mu}$ ist σ-subadditiv: Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Familie von Teilmengen, $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Seien $(F_{i,j})_{j \in J_i}$ abzählbare Familien von Elementen aus R mit $A_i \subseteq \bigcup_{j \in J_i} F_{i,j}$ für alle $i \in I$. Dann gilt $A \subseteq \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} F_{i,j}$ und

$$\tilde{\mu}(A) \le \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \mu(F_{i,j}) \ .$$

   Daraus folgt

$$\tilde{\mu}(A) \le \sum_{i \in I} \inf \sum_{j \in J_i} \mu(F_{i,j})$$

   wobei das Infimum der rechten Seiten über alle Wahlen der Familien $(F_{i,j})_{j \in J_i}$ gebildet wird. Also gilt

$$\tilde{\mu}(A) \le \sum_{i \in I} \tilde{\mu}(A_i) \ .$$

□

Lemma 12.4.

1. *Es gilt* $\tilde{\mu}_{|R} \le \mu$.
2. *Wenn* (Ω, R, μ) *ein* σ*-additiver Prämaßraum ist, dann gilt* $\tilde{\mu}_{|R} = \mu$.

Proof. Für die erste Ungleichung beobachten wir, daß für $A \in R$ die Familie $\{A\}$ für die Infimumbildung bei $\tilde{\mu}(A)$ zugelassen ist. Daraus folgt $\tilde{\mu}(A) \le \mu(A)$.

Wir nehmen nun an, daß μ ein σ-additives Prämaß ist. Sei $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie in R mit $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$. Für $i \in \mathbb{N}$ bilden wir $B_i := A \cap (F_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} F_j)$. Dann ist $B_i \in R$, $B_i \subseteq F_i$, die Mengen sind paarweise disjunkt und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = A$. Wir schließen, daß

$$\mu(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i) \le \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(F_i) \ .$$

Also gilt auch $\mu(A) \leq \tilde{\mu}(A)$. $\square$

Bemerkung 12.5. Die Voraussetzung der σ-Additivität im zweiten Teil dieses Lemmas ist wichtig. Betrachten wir das Beispiel 10.4 eines nicht σ-additiven Prämaßes auf $\mathbb{N}$. In diesem Fall ist

$$\tilde{\mu}(\mathbb{N}) = 2 \ , \quad \mu(\mathbb{N}) = \infty \ .$$

Beispiel 12.6. Wir betrachten einen metrischen Raum (X, d) und $s, \epsilon \in (0, \infty)$. Sei $R_\epsilon \subset \mathcal{P}(X)$ die Menge aller Bälle vom Radius $< \epsilon$ wobei wir $\emptyset$ auch als Ball vom Radius 0 betrachten. Wir definieren $S_{s,\epsilon} : R_\epsilon \to [0, \infty]$ durch $S(B(x, r)) := r^s$.

Definition 12.7. *Das* ***s-dimensionale äußere sphärische Maß*** $S_{s,\epsilon} : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *ist die äußere Erweiterung von* $S_{s,\epsilon}$.

Wir betrachten das Einheitsintervall $[0, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Man kann zeigen, daß

$$S_{s,\epsilon}([0,1]) = \begin{cases} \sim \epsilon^{s-1} & s < 1 \\ 1 & s = 1 \\ 0 & s > 1 \end{cases}$$

gilt.

Beispiel 12.8. Wir betrachten die Abbildung $v : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ gegeben durch

$$v(A) := \inf\{\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx \mid \{\phi \in C_c(\mathbb{R}^n) \mid \phi \geq \chi_A\}\} \ .$$

Die äußere Erweiterung $\tilde{v} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ kann man äußeres euklidisches Volumen ansehen.

13 Konstruktion eines Maßes aus einem äußeren Maß

In diesem Kapitel starten wir mit einem äußeren Maß $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$. Wir werden sehen, daß dieses eine σ-Algebra $R_{\tilde{\mu}}$ bestimmt, so daß die Einschränkung von $\tilde{\mu}$ auf $R_{\tilde{\mu}}$ ein Maß ist.

Wir schreiben $S^c := \Omega \setminus S$ für das Komplement von $S \subseteq \Omega$.

Definition 13.1. *Eine Menge* $S \in \mathcal{P}(\Omega)$ *heißt* ***zerlegend****, falls für alle* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ *gilt :*

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c) \ .$$

Mit $R_{\tilde{\mu}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *bezeichnen wir die Menge aller zerlegenden Mengen.*

Wir werden in Argumenten weiter unten oft das folgende Kriterium benutzen.

Lemma 13.2. *Eine Menge $S \in \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann zerlegend ist, wenn*

$$\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c)$$

für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt.

Proof. Die Ungleichung $\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c)$ folgt aus der Subadditivität von $\tilde{\mu}$. □

Satz 13.3. *Sei $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß auf Ω. Dann ist $(\Omega, R_{\tilde{\mu}}, \tilde{\mu}_{|R_{\tilde{\mu}}})$ ein Maßraum.*

Proof. Wir zeigen zuerst, daß $R_{\tilde{\mu}}$ eine Algebra ist. Mit $S \in R_{\tilde{\mu}}$ ist offensichtlich auch $S^c \in R_{\tilde{\mu}}$. Seien nun $S, T \in R_{\tilde{\mu}}$. Wir zeigen, daß $S \cap T \in R_{\tilde{\mu}}$. Für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ setzen wir

$$A_1 := A \cap S \cap T,\ A_2 := A \cap S \cap T^c,\ A_3 := A \cap S^c \cap T,\ A_4 := A \cap S^c \cap T^c\ .$$

Diese Mengen sind paarweise disjunkt. Da $T \in R_{\tilde{\mu}}$ ist, schließen wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) &= \tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2) \\ \tilde{\mu}(A_3 \cup A_4) &= \tilde{\mu}(A_3) + \tilde{\mu}(A_4)\ . \end{aligned}$$

Wir schließen weiter wegen $S \in R_{\tilde{\mu}}$, daß

$$\tilde{\mu}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \tilde{\mu}(A_2) + \tilde{\mu}(A_3 \cup A_4) = \sum_{i=2}^{4} \tilde{\mu}(A_i) \tag{2}$$

gilt. Es gilt auch

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) + \tilde{\mu}(A_3 \cup A_4) = \sum_{i=1}^{4} \tilde{\mu}(A_i)\ .$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(A \cap (S \cap T)) + \tilde{\mu}(A \cap (S \cap T)^c) &= \tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\ &= \sum_{i=1}^{4} \tilde{\mu}(A_i) \\ &= \tilde{\mu}(A)\ . \end{aligned}$$

Dies zeigt $S \cap T \in R_{\tilde{\mu}}$.

Wir zeigen jetzt, daß $\tilde{\mu}_{|R_{\tilde{\mu}}}$ additiv ist. Sei $S, T \in R_{\tilde{\mu}}$ mit $S \cap T = \emptyset$. Wir wählen $A := S \cup T$. Dann folgt aus (2), daß $\tilde{\mu}(S \cup T) = \tilde{\mu}(S) + \tilde{\mu}(T)$.

Sei jetzt $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie in $R_{\tilde{\mu}}$. Wir zeigen, daß $S := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \in R_{\tilde{\mu}}$. Dazu setzen wir $T_i := \bigcup_{j=0}^{i} S_j$. Dann ist $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Familie in $R_{\tilde{\mu}}$ und es gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i = S$. Es gilt $\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A \cap T_i) + \tilde{\mu}(A \cap T_i^c)$. Da $\tilde{\mu}$ monoton und $S^c \subseteq T^c$ ist, gilt

$$\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}(A \cap T_i) + \tilde{\mu}(A \cap S^c)\ . \tag{3}$$

Es gilt weiter, daß

$$\tilde{\mu}(A \cap T_i) = \tilde{\mu}(A \cap T_i \cap T_{i-1}) + \tilde{\mu}(A \cap T_i \cap T_{i-1}^c) = \tilde{\mu}(A \cap T_{i-1}) + \tilde{\mu}(A \cap (T_i \setminus T_{i-1})) \ .$$

Induktiv schließen wir, daß

$$\tilde{\mu}(A \cap T_i) = \sum_{j \leq i} \tilde{\mu}(A \cap (T_j \setminus T_{j-1})) \ .$$

Unter Benutzung der σ-Subadditivität erhalten wir

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{\mu}(A \cap T_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(A \cap (T_i \setminus T_{i-1})) \geq \tilde{\mu}(A \cap S) \ . \tag{4}$$

Es folgt

$$\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c) \ .$$

Da A beliebig war, gilt wegen Lemma 13.2 auch $S \in R_{\tilde{\mu}}$.

Wir zeigen nun, daß $\tilde{\mu}$ auf $R_{\tilde{\mu}}$ auch σ-additiv ist. Sei $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Elemente aus $R_{\tilde{\mu}}$. Wir definieren T_i und S wir oben. Wenn wir in (3) $A = S$ setzen, dann erhalten wir für jedes $i \in \mathbb{N}$, daß $\tilde{\mu}(S) \geq \tilde{\mu}(T_i)$. Damit gilt $\tilde{\mu}(S) \geq \lim_{i\to\infty} \tilde{\mu}(T_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(S_i)$. Wegen der σ-Subadditivität haben wir auch die Ungleichung in der anderen Richtung. Also $\tilde{\mu}(S) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(S_i)$. □

Satz 13.4. *Sei (Ω, R, μ) ein σ-additiver Prämaßraum. Dann besitzt μ eine Ausdehnung zu einem Maß auf $R^\sigma := R^\sigma(R)$. Ist (Ω, R, μ) zusätzlich σ-endlich, dann ist diese Ausdehnung eindeutig.*

Proof. Die Eindeutigkeit der Ausdehnung unter der Voraussetzung der σ-Endlichkeit hatten wir schon in Satz 11.6 gesehen.

Sei $\tilde{\mu}$ die äußere Erweiterung von μ. Für die Existenzaussage müssen wir wegen Lemma 12.4 nur zeigen, daß $R^\sigma \subseteq R_{\tilde{\mu}}$ gilt.

Dazu müssen wir nur $R \subseteq R_{\tilde{\mu}}$ nachprüfen. Sei $S \in R$ und $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Sei $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie aus R mit $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$. Dann gilt

$$\sum_i \mu(F_i) = \sum_i \mu(F_i \cap S) + \sum_i \mu(F_i \cap S^c) \ .$$

Wir bilden das Infimum über alle Wahlen der Familie $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Die linke Seite ergibt $\tilde{\mu}(A)$, während die Summen auf der rechten Seite von unten durch $\tilde{\mu}(A \cap S)$ und $\tilde{\mu}(A \cup S^c)$ abgeschätzt werden. Also gilt $\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c)$. Da A beliebig war, folgt $S \in R_{\tilde{\mu}}$ aus Lemma 13.2. □

Ein Approximationssatz Sei (Ω, R, μ) ein σ-endlicher, σ-additiver Prämaßraum. Dann haben wir eine eindeutige Ausdehnung (Ω, R^σ, μ) zu einem Maßraum, wobei $R^\sigma = R^\sigma(R)$. Die Elemente von R^σ sind in der Regel unhandlich. Deshalb ist es wichtig zu wissen, daß man sie dem Maße nach durch Elemente aus R approximieren kann. Wir benutzen das Symbol

$$E \bigtriangleup F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$$

für die symmetrische Differenz von Mengen.

Satz 13.5. *Ist $E \in R^\sigma$ und gilt $\mu(E) < \infty$, dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $F \in R$ mit $\mu(E \bigtriangleup F) < \epsilon$.*

Proof. Sei $\tilde{\mu}$ die äußere Erweiterung von μ. Da $R^\sigma \subseteq R_{\tilde{\mu}}$ ist, gilt

$$\mu(E) = \tilde{\mu}(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T_i) \ ,$$

wobei das Infimum über alle Familien $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (welche o.B.d.A als paarweise disjunkt angenommen werden können) mit $E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$ genommen wird. Wir wählen eine solche Familie derart, daß

$$\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T_i) - \epsilon \ .$$

Wir wählen n so groß, daß $\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(T_i) < \epsilon$ und setzen $F := \bigcup_{i=1}^{n} T_i \in R$. Dann gilt $E \setminus F \subseteq \bigcup_{i=n+1}^{\infty} T_i$ und $F \setminus E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i \setminus E$. Damit ist $\mu(E \setminus F) \leq \epsilon$, $\mu(F \setminus E) \leq \epsilon$ und deshalb $\mu(E \bigtriangleup F) < \epsilon$. □

14 Das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$

In Kapitel 5 hatten wir den (dyadischen) Lebesgueprämaßraum $(\mathbb{R}^n, R^n, \mu^n)$ konstruiert. In Lemma 10.1 hatten wir gesehen, daß μ^n auch σ-additiv ist. Schließlich hatten wir in Lemma 7.3 eingesehen, daß $R^\sigma(R^n)$ mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt. Sei $\tilde{\mu}^n$ die äußere Erweiterung von μ^n und $(\mathbb{R}^n, R_{Leb}, \tilde{\lambda})$ der nach Satz 13.3 konstruierte Maßraum. Dann gilt $\mathcal{B} \subseteq R_{Leb}$ und $\tilde{\mu}_{|\mathcal{B}}$ ist die nach Satz 11.6 eindeutige Fortsetzung von μ^n auf $\mathcal{B}$. Beachte, daß wir zur Vereinfachung der Notation den Index n in der Notation des Maßes und der σ-Algebra weglassen.

Definition 14.1. *Der Maßraum $(\mathbb{R}^n, R_{Leb}, \lambda)$ heißt Lebesgue Maßraum.*

Die folgenden Eigenschaften des Lebesguemaßes mögen offensichtlich erscheinen, erfordern jedoch im Beweis einige Anstrengungen. Wir betrachten zuerst den eindimensionalen Fall und schreiben $(\mathbb{R}, R, \mu)$ für den Prämaßraum.

Satz 14.2. *1. Für ein beschränktes Intervall $[a,b) \subset \mathbb{R}$ gilt $\lambda([a,b)) = b-a$.*

2. Für eine abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ gilt $\lambda(A) = 0$.

3. Für $x \in \mathbb{R}$ und $A \in R_{Leb}$ gilt $x + A \in R_{Leb}$, $\lambda(x+A) = \lambda(A)$ und $xA \in R_{Leb}$, $\lambda(xA) = |x|\lambda(A)$.

Proof. 1. Für Intervalle in R folgt dies direkt aus der Definition des Lebesgueschen Prämaßes. Sei jetzt a, b allgemein. Für $\epsilon > 0$ wählen wir $k \in \mathbb{N}$ derart, daß $2^{-k+1} < \epsilon$ gilt. Weiter wählen wir $p, q \in \mathbb{Z}$ derart, daß $\frac{p}{2^k} < a \le \frac{p+1}{2^k}$ und $\frac{q}{2^k} \le b < \frac{q+1}{2^k}$. Dann gilt

$$[\frac{p+1}{2^k}, \frac{q}{2^k}) \subseteq [a,b) \subseteq [\frac{p}{2^k}, \frac{q+1}{2^k}) \ .$$

Wegen der Monotonie des Maßes gilt

$$|b - a - \lambda([a,b)])| \le \epsilon \ .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt die gewünschte Gleichung.

2. Sei zunächst $A := \{x\}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt wegen der Monotonie des Maßes $\lambda(\{x\}) \le \lambda([x-\epsilon, x+\epsilon)) = 2\epsilon$ für alle $\epsilon > 0$. Folglich ist $\lambda(\{x\}) = 0$. Wegen der σ-Additivität gilt damit $\lambda(A) = 0$ für alle abzählbaren Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}$.

3. Sei $\mathtt{add}_{-x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung $\mathtt{add}_{-x}(y) = y - x$. Es ist klar, daß $\mathtt{add}_{-x}$ stetig und damit meßbar auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ wirkt. Ist $A = [a,b)$, dann gilt $\mathtt{add}_{-x}^{-1}(A) = [a+x, b+x)$ und offensichtlich $\mathtt{add}_{-x,*}\lambda(A) = \lambda(A)$. Damit stimmen $\mathtt{add}_{-x,*}\lambda$ und λ auf der von allen Intervallen erzeugten Algebra überein. Die Eindeutigkeit der Ausdehnung zeigt, daß $\mathtt{add}_{-x,*}\lambda = \lambda$ auf $\mathcal{B}$ gilt. Damit stimmen auch die äußeren Erweiterungen von $\mathtt{add}_{-x,*}\lambda$ und λ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ überein. Schließlich gilt $\mathtt{add}_{-x}^{-1}(R_{Leb}) = R_{Leb}$ (d.h. $\mathtt{add}_{-x}$ ist meßbar auf $(\mathbb{R}, R_{Leb})$) und es gilt $\mathtt{add}_{-x,*}\lambda = \lambda$.

   Analog argumentiert man mit $\mathtt{mult}_{x^{-1}}$ für $x > 0$. Dabei ist $\mathtt{mult}_{x^{-1},*}\lambda = x\lambda$. Der Fall $x = 0$ ist trivial.

□

Wir listen die analogen Aussagen im höherdimensionalen Fall auf. Die Beweise sind ähnlich.

Lemma 14.3. *1. Sei $([a_i, b_j))_{i=1}^n$ eine Folge von Intervallen. $\lambda(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.*

2. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar, dann gilt $\lambda(A) = 0$.

3. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\mathtt{add}_x$ meßbar (bezüglich $\mathcal{B}$ oder R_{Leb}) und es gilt $\mathtt{add}_{x,*}\lambda = \lambda$.

4. Für $s \in \mathbb{R}^>$ ist $\mathtt{mult}_s$ meßbar (bezüglich $\mathcal{B}$ oder R_{Leb}) und es gilt $\mathtt{mult}_{s,*}\lambda = s^{-n}\lambda$.

Eine wichtige Eigenschaft des Lebesguemaßes auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ ist seine Regularität, die in Kapitel 35 diskutiert werden wird.

Beispiel 14.4. In diesem Beispiel vergleichen wir das Lebesguemaß mit einem Volumenbegriff, welchen man aus der iterierten Riemannintegration gewinnen kann. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Wir defineren

$$v(A) := \inf_{\{\phi \in C_c(\mathbb{R}^n) \,|\, \chi_A \le \phi\}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx$$

und

$$u(A) := \sup_{\{\phi \in C_c(\mathbb{R}^n) \,|\, \phi \le \chi_A\}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \ .$$

Es gilt immer

$$u(A) \le \lambda(A) \le v(A) \ .$$

Im Fall der Gleichheit interpretiert man $\lambda(A)$ als das Volumen von A.

Hier ist ein Beispiel, in welchem man zeigen kann, daß $u(A) = v(A)$ gilt. Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte und eigentliche Abbildung mit nicht-negativen Werten und $r \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, daß h auf $h^{-1}(\{r\})$ regulär ist. Dann ist $A := h^{-1}((-\infty, r])$ kompakt. Es gilt in diesem Fall $u(A) = v(A) = \lambda(A)$.

Andererseits gilt nicht immer $u(A) = v(A)$. Sei A die Menge der rationalen Zahlen in $[0, 1]$. Dann gilt $u(A) = 0$, $\lambda(A) = 0$ und $v(A) = 1$.

Wir zeigen nun, daß es nicht Lebesgue-meßbare Mengen gibt.

Satz 14.5. *Wir betrachten den Lebesgue-Maßraum* $(\mathbb{R}, R_{Leb}, \lambda)$. *Es gilt* $R_{Leb} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proof. Auf $A := [-1/2, 1/2]$ betrachten wir die Relation

$$\mathcal{R} := \{(x, y) \in A \times A \,|\, x - y \in \mathbb{Q}\} \ .$$

Diese ist eine Äquivalenzrelation. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Abbildung $f : A/\mathcal{R} \to A$ derart, daß $f([x]) \in [x]$. Wir betrachten nun $K := f(A/\mathcal{R}) \subset A$. Wir werden zeigen, daß $K \notin R_{Leb}$.

Wir nehmen das Gegenteil an. Sei $d := \lambda(K)$. Sei $B := [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Für $s, r \in B$ mit $r \neq s$ gilt $(K + r) \cap (K + s) = \emptyset$ und $\lambda(K + r) = d$. Weiterhin gilt $A \subseteq \bigcup_{r \in B}(K + r)$. Da B abzählbar und $\lambda(A) = 1$ ist, muß $d > 0$ gelten. Andererseits ist $\bigcup_{r \in B}(K + r) \subseteq [-3/2, 3/2]$. Also gilt $\sum_{r \in B} d \le 3$, woraus $d = 0$ folgt, da $\sharp B = \infty$. Das ist ein Widerspruch. □

Beispiel 14.6. Im folgenden zeigen wir, daß Schifträume und Intervalle als meßbare Räume im wesentlichen isomorph sind. Wir betrachten den Schiftraum basiert auf $A = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Wir definieren eine Abbildung

$$W : A^{\mathbb{N}} \to [0, 1] \quad \text{durch} \quad W((a_i)) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i n^{-i-1} \ .$$

Diese Abbildung ist stetig, aber nicht injektiv. Sei $P \subset A^{\mathbb{N}}$ die Menge derjenigen Folgen, die ab einer Stelle konstant den Wert $n-1$ annehmen. Diese Teilmenge ist meßbar und $W_{|A^{\mathbb{N}}\setminus P} : A^{\mathbb{N}}\setminus P \to [0,1)$ ist eine Bijektion. Die Bilder der Zylindermengen $q_k^{-1}(a_0,\dots,a_n) \cap W_{|A^{\mathbb{N}}\setminus P}$ sind gerade die Erzeugenden der n-adischen Algebra auf $[0,1]$. Folglich liefert

$$W : (A^{\mathbb{N}} \setminus P, \mathcal{B}_{A^{\mathbb{N}}\setminus P}) \to ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)})$$

einen Isomorphismus meßbarer Räume.

Insbesondere, ist damit wegen $\mathcal{B}_{[0,1)} \neq \mathcal{P}([0,1))$ auch $\mathcal{B}_{A^{\mathbb{N}}\setminus P} \neq \mathcal{P}(A^{\mathbb{N}} \setminus P)$. Daraus folgt auch $\mathcal{B}_{A^{\mathbb{N}}} \neq \mathcal{P}(A^{\mathbb{N}})$.

Beispiel 14.7. In folgendem Beispiel betrachten wir Cantormengen. Sei $s \in (0, \frac{1}{2})$. Für ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ setzen wir

$$P_s([a,b]) := [a, a+s(b-a)] \cup [b-s(b-a), b] \ .$$

Allgemeiner, ist $U := \bigcup_i [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ eine disjunkte Vereinigung abgeschlossener Intervalle, dann definieren wir $P_s(U) := \bigcup_i P([a_i, b_i])$. Dies ist wieder eine disjunkte Vereinigung abgeschlossener Intervalle. Durch iterierte Anwednung dieser Operation erhalten wir eine absteigende Folge

$$\dots \subset P_s^{n+1}(U) \subset P_s^n(U) \subset \dots \subset P_s(U) \subset U \ .$$

Definition 14.8. *Wir definieren*

$$C_s(U) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_s^n(U) \ .$$

Lemma 14.9.

1. *Die Menge $C_s(U) \subset \mathbb{R}$ is abgeschlossen.*
2. *Die Menge $C_s(U)$ hat keine inneren Punkte.*
3. $\mathtt{mult}_{s^{-1}} : C_s([0,1]) \cap [0,s] \to C_s([0,1])$ *ist ein Homöomorphismus. Es gilt*

   $$C_s = \mathtt{mult}_{s^{-1}}(C_s([0,1]) \cap [0,s]) \cup \mathtt{add}_{s-1}(\mathtt{mult}_{s^{-1}}(C_s([0,1]) \cap [0,s])) \ ,$$

   d.h C_s ist selbstähnlich.
4. *Es gilt*

   $$\lambda(C_s([0,1])) = 1 - (1-2s)\sum_{n=0}^{\infty} 2^n s^n = 1 - \frac{1-2s}{1-2s} = 0 \ .$$

15 Das Haarmaß auf $\mathbb{Z}_p$

Das Haarsche Maß auf $(\mathbb{Z}_p, R_\mu)$ ist das Maß μ, welches man durch die Ausdehnung des Haarschen Prämaßes (siehe 5) erhält. In der Regel betrachtet man den Maßraum $(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}, \mu)$, wobei jetzt μ die nach Lemma 11.6 eindeutige und nach Satz 13.4 existierende Ausdehnung des Haarschen Prämaßes bezeichnet.

In folgendem Lemma zeigen wir, daß das Haarmaß translationsinvariant ist.

Lemma 15.1. *Für $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ ist $\mathtt{add}_\lambda$ meßbar und es gilt $(\mathtt{add}_\lambda)_*\mu = \mu$.*

Proof. Die Abbildung $\mathtt{add}_\lambda$ ist stetig und damit meßbar.

Wir rechnen die Translationsinvarianz zunächst auf den Mengen der Form $\mathrm{pr}_n^{-1}(\{x\})$ nach, wobei $\mathrm{pr}_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ die Projektion ist. In der Tat gilt

$$\mathtt{add}_\lambda^{-1}\mathrm{pr}_n^{-1}(\{x\}) = \mathrm{pr}_n^{-1}(\{x - \mathrm{pr}_n(\lambda)\}) \ .$$

Die Mengen $\mathrm{pr}_n^{-1}(\{x\})$ und $\mathrm{pr}_n^{-1}(\{x - \mathrm{pr}_n(\lambda)\})$ haben beide das Maß p^{-n}.

Folglich gilt $(\mathtt{add}_\lambda)_*\mu = \mu$ auf der erzeugenden Algebra. Wegen der Eindeutigkeit der Ausdehnung des Prämaßes gilt diese Gleichung auf $\mathcal{B}$. □

Lemma 15.2. *Für jeden Punkt $x \in \mathbb{Z}_p$ gilt $\mu(\{x\}) = 0$. Insbesondere gilt $\mu(A) = 0$ für jede abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{Z}_p$. Insbesondere gilt $\mu(\mathbb{Z}) = 0$.*

Proof. Die Topologie auf $\mathbb{Z}_p$ ist Hausdorff. Damit sind einpunktige Mengen abgeschlossen und meßbar. Wenn $\mu(\{x\}) \neq 0$, dann wäre $\mu(\{y\}) = \mu(\{x\})$ für jeden Punkt $y \in \mathbb{Z}_p$ und damit $\mu(\mathbb{Z}_p) = \infty$, da $\mathbb{Z}_p$ unendlich viele Elemente hat. Es gilt aber $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$. □

Wir sehen insbesondere, daß $\mathbb{Z}_p$ nicht abzählbar sein kann.

Beispiel 15.3. Wir betrachten den Raum $(\mathbb{Z}_3, \mathcal{B}, \mu)$. Die Mengen $A_k := 3^k\mathbb{Z}_3^\times$ der 3^k-fachen Einheiten ($k \in \mathbb{N}$) und $Q := \{x \in \mathbb{Z}_3 \mid (\exists y \in \mathbb{Z}_3 \mid x = y^2)\}$ der Quadrate in Z_3 sind meßbar. Es gilt $\mu(A_k) = 2 \cdot 3^{-k-1}$ und $\mu(Q) = \frac{3}{8}$.

16 Das Maß auf dem Schiftraum

Wendet man die Ausdehnungskonstruktion 13.4 auf das oben konstruierte Prämaß auf dem Schiftraum über der Menge A an (siehe 5), so erhält man einen Maßraum auf $(A^\mathbb{N}, \mathcal{B}, \mu)$ wobei jetzt $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra und μ die Ausdehnung des zunächst auf der Algebra der Zylindermengen definierten Prämaßes bezeichnet. Beachte, daß μ von der Wahl einer Funktion von $p : A \to [0,1]$ mit $\sum_{a \in A} p(a) = 1$ abhängt.

Lemma 16.1. *Sei $T : A^\mathbb{N} \to A^\mathbb{N}$ die Verschiebung $T((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) := (a_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$. Dann ist T meßbar und maßerhaltend.*

Proof. Die Meßbarkeit von T hatten wir schon in 7.6 eingesehen. Sei $q_n : A^\mathbb{N} \to A^{n+1}$ die Projektion auf die ersten $n+1$ Glieder. Sei $W := q_n^{-1}(a_0, \dots, a_n)$. Dann gilt

$$T^{-1}(W) = \bigcup_{a \in A} q_{n+1}^{-1}(a, a_0, \dots, a_n) \ .$$

und damit

$$\mu(T^{-1}(W)) = \sum_{a\in A} p(a) \prod_{i=0}^{n} p(a_i) = \prod_{i=0}^{n} p(a_i) = \mu(W) \ .$$

$\square$

Beispiel 16.2. Sei $B \subseteq A$ eine Teilmenge. Dann ist $B^{\mathbb{N}} \subseteq A^{\mathbb{N}}$ meßbar. Wenn $\sum_{b\in B} p(b) < 1$ gilt, dann ist $\mu(B^{\mathbb{N}}) = 0$.

Sei $q_n : A^{\mathbb{N}} \to A^{n+1}$ die Projektion auf die ersten $n+1$ Folgenglieder und $B_n := q_n^{-1}(B^n)$. Dann gilt $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Damit kann $B^{\mathbb{N}}$ als abzählbarer Durchschnitt von Zylindermengen geschrieben werden und ist meßbar.

Sei $d := \sum_{b\in B} p(b)$. Dann ist $\mu(B_n) = d^{n+1}$. Wenn $d < 1$ ist, dann gilt $\mu(B) = 0$.

Der Schiftraum liefert ein besonders einfaches Beispiel für ein ergodisches dynamisches System. Unter einem **dynamischen System** verstehen wir hier einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, R, μ) mit einer maßerhaltenden meßbaren Selbstabbildung $T : \Omega \to \Omega$. Das System heißt **ergodisch**, wenn für jede Teilmenge $W \in R$ mit $T^{-1}(W) = W$ gilt $\mu(W) \in \{0,1\}$.

Satz 16.3. *Der Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ mit dem Schift T ist ein ergodisches dynamisches System.*

Proof. Sei $V \in \mathcal{B}$ und gelte $T^{-1}(V) = V$. Wir müssen zeigen, daß dann $\mu(V) \in \{0,1\}$ gilt.

Sei R die Algebra der Zylindermengen so daß $\mathcal{B} = R^{\sigma}(R)$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir finden nach Satz 13.5 ein $X \in R$ mit $\mu(V \vartriangle X) \le \epsilon$. Dann gilt auch $|\mu(V) - \mu(X)| \le \epsilon$. Sei $X = q_k^{-1}(U)$ für ein geeignetes $U \subseteq A^{k+1}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $Y := T^{-k-1}(X) = q_{2k+1}^{-1}(\prod_{i=0}^{k} A \times U)$. Insbesondere gilt $\mu(X \cap Y) = \mu(X)^2$. Es gilt auch

$$\mu(V \vartriangle Y) = \mu(T^{-k-1}(V) \vartriangle T^{-k-1}(X)) = \mu(V \vartriangle X) \le \epsilon \ .$$

Wegen $V \vartriangle (X \cap Y) \subseteq V \vartriangle X \cup V \vartriangle Y$ gilt $\mu(V \vartriangle (X\cap Y)) \le 2\epsilon$. Wir rechnen nun

$$\begin{aligned} |\mu(V) - \mu(V)^2| &\le |\mu(V) - \mu(X\cap Y)| + |\mu(X\cap Y) - \mu(V)^2| \\ &\le 2\epsilon + |\mu(X)^2 - \mu(V)^2| \\ &\le 2\epsilon + \mu(X)|\mu(X) - \mu(V)| + \mu(V)|\mu(X) - \mu(V)| \\ &\le 4\epsilon \ . \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt $\mu(V) = \mu(V)^2$, also $\mu(V) \in \{0,1\}$.

$\square$

Folgerung 16.4. *Sei (Ω, R, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer ergodischen Transformation T. Dann gilt für jedes $W \in R$ mit $T(W) = W$ auch $\mu(W) \in \{0, 1\}$.*

Proof. Sei $W \in R$ und gelte $T(W) = W$. Es gilt $W \subseteq T^{-1}(T(W)) = T^{-1}(W)$ und allgemeiner $T^{-n}(W) \subseteq T^{-n}(T^{-1}(W)) = T^{-n-1}(W)$. Daraus folgt

$$\mu(W) = \mu(T^{-n}(W)) \leq \mu(T^{-n-1}(W)) = \mu(W) \ .$$

Also gilt $\mu(T^k(W)) = \mu(W)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wir setzen $V := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^{-n}(W) \in R$. Dann gilt $\mu(V) = \mu(W)$ und $T^{-1}(V) = V$. Aus der Ergodizitätsannahme folgt $\mu(V) \in \{0, 1\}$ und daraus die Behauptung. □

Beispiel 16.5. Wir fragen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pm 1}{i}$ konvergiert, wenn wir die Vorzeichen zufällig und gleichverteilt wählen. Dazu betrachten wir den Schiftraum basiert auf $A := \{-1, 1\}$ und dem Maß, welches durch die Gleichverteilung auf A bestimmt ist. Wir interessieren uns für die Teilmenge

$$W := \{(a_i) \in A^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i} \text{ konvergiert}\} \subseteq A^{\mathbb{N}} \ .$$

Lemma 16.6. *Die Teilmenge W ist meßbar und es gilt $\mu(W) \in \{0, 1\}$.*

Proof. Für jedes Paar $n, m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n \leq m$ und $\epsilon \in \mathbb{Q}^{\geq}$ betrachten wir die offensichtlich meßbare Teilmenge

$$W_{n,m}(\epsilon) := \{(a_i) \in A^{\mathbb{N}} \mid |\sum_{i=n}^{m} \frac{a_i}{i}| < \epsilon\} \subseteq A^{\mathbb{N}} \ .$$

Dann gilt

$$W := \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}^m} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N} \ ,n \leq m} W_{n,m}(\epsilon) \ .$$

Das ist eine Umformlierung des Cauchykriteriums. Die Menge W erfüllt offensichtlich $T(W) = W$. Damit gilt $\mu(W) \in \{0, 1\}$. □

In der Tat kann man zeigen, daß $\mu(W) = 1$ ist. Hier ist ein Argument, welches noch zu entwickelnde Theorie benutzt. Wir betrachten die Abbildungen $f_n : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $f_n((a_i)) := a_n$ als Elemente in $L^2(A^{\mathbb{N}}, R, \mu)$. Die Folge (f_n) ist ein Orthonormalsystem. Folglich konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{i}$ in $L^2(A^{\mathbb{N}}, R, \mu)$. Damit konvergiert diese Reihe fast überall.

17 Nullmengen und Vervollständigung

Der Unterschied zwischen den Lebesgue Maßräumen $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda_{|\mathcal{B}})$ und $(\mathbb{R}^n, R_{Leb}, \lambda)$ ist relativ unwesentlich und wird durch den Begriff der Vervollständigung geklärt.

Definition 17.1. *Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Ein Element $A \in R$ heißt* ***Nullmenge****, wenn $\mu(A) = 0$ gilt.*

Definition 17.2. *Ein Maßraum (Ω, R, μ) heißt* ***vollständig****, falls für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$, für welche eine abzählbare Familie $(N_i)_{i\in I}$ von Nullmengen in R mit $A \subseteq \bigcup_i N_i$ existiert, auch $A \in R$ gilt.*

Lemma 17.3. *Der zu einem äußeren Maß $\tilde{\mu}$ auf Ω entsprechend Satz 13.3 assoziierte Maßraum ist vollständig.*

Proof. Zuerst beobachten wir, daß $R_{\tilde{\mu}}$ alle $\tilde{\mu}$-Nullmengen enthält. In der Tat ist $\tilde{\mu}(S) = 0$, dann gilt für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ wegen der Monotonie von $\tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c) = \tilde{\mu}(A \cap S^c) \leq \tilde{\mu}(A)$$

und folglich $S \in R_{\tilde{\mu}}$ nach Lemma 13.2.

Sei $A \subseteq \Omega$ so daß $A \subseteq \bigcup_i N_i$ für eine abzählbare Familie von Nullmengen $(N_i)_{i\in I}$. Aus Monotonie und σ-Subadditivität folgt $\tilde{\mu}(A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(N_i) = 0$. Damit gilt aber $A \in R_{\tilde{\mu}}$. □

In der Regel muß ein Maßraum (Ω, R, μ) nicht vollständig sein. Mit der folgenden Konstruktion kann man ihn vervollständigen.

Wir definieren $\bar{R}^\mu$ als die Menge derjenigen $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, für welche ein $F \in R$ und eine abzählbare Familie $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Nullmengen existiert, so daß $A \vartriangle F \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i$ gilt. Wir definieren ferner $\bar{\mu}(A) := \mu(F)$.

Lemma 17.4. *1. Die Abbildung $\bar{\mu} : \bar{R}^\mu \to [0, \infty]$ ist wohldefiniert.*

2. $(\Omega, \bar{R}^\mu, \bar{\mu})$ ist ein vollständiger Maßraum.

Proof. Seien $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ und $F, G \in R$ derart, daß $A \vartriangle F \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i$ und $A \vartriangle G \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ für Familien von Nullmengen $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in R. Dann gilt $F \subseteq G \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(N_i \cup M_i)$ und $G \subseteq F \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(N_i \cup M_i)$. Daraus folgt $\mu(F) = \mu(G)$.

Wir zeigen weiter, daß $\bar{R}$ eine σ-Algebra ist.

1. Mit $A \in R$ gilt $A^c \in R$. In der Tat gilt $A^c \vartriangle F^c = A \vartriangle F$.

2. Wir betrachten Familien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ und $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in R. Ist $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $A_n \vartriangle F_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_{n,i}$ für Familien von Nullmengen $(N_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \vartriangle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \vartriangle F_n \subseteq \bigcup_{n,i\in\mathbb{N}} N_{n,i} \ . \qquad (5)$$
Folglich ist $\bar{R}$ abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen.

Wir zeigen nun, daß $\bar{\mu}$ auch σ-additiv ist. Sei $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ein Darstellung von A als eine disjunkte Vereinigung. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $F_n \in R$ derart, daß $A_n \vartriangle F_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_{n,i}$ für eine geeignete Familie von Nullmengen $(N_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$. Wir setzen $F'_n := F_n \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_{n,i} \subseteq A_n$. Dann gilt

$$A_n \vartriangle F'_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_{n,i} \ , \quad F'_n \in R \ .$$

Es gilt wegen (5)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F'_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \bar{\mu}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \ .$$

□

Definition 17.5. *Die* ***Vervollständigung*** *eines Maßraumes (Ω, R, μ) ist der Maßraum $(\Omega, \bar{R}^{\mu}, \bar{\mu})$.*

Die Vervollständigung eines vollständigen Maßraumes ist der Maßraum selbst.

Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum und $(\Omega, R_{\tilde{\mu}}, \tilde{\mu}_{|R_{\tilde{\mu}}})$ der nach Satz 13.3 assoziierte vollständige Maßraum. Sei weiter $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra mit $R \subseteq \mathcal{B}$.

Lemma 17.6. *Die Vervollständigung des Maßraumes $(\Omega, \mathcal{B}, \tilde{\mu}_{|\mathcal{B}})$ ist $(\Omega, R_{\tilde{\mu}}, \tilde{\mu}_{|R_{\tilde{\mu}}})$.*

Folgerung 17.7. *Der Lebeguesche Maßraum $(\mathbb{R}^n, R_{Leb}, \lambda)$ ist die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda_{|\mathcal{B}})$.*

Wir betrachten einen Maßraum (Ω, R, μ) und eine Menge X.

Definition 17.8. *Sei $f : \Omega \to X$ eine Abbildung und $P : \mathbb{R} \to \{wahr, falsch\}$ eine Aussage über die Punkte von X. Wir sagen, daß $P(f)$* ***fast überall*** *gilt, falls es eine Nullmenge $N \in R$ gibt, so daß $\{P(f) = falsch\} \subseteq N$ gilt.*

Beispiel 17.9. Sei $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Abbildungen $f_i : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine weitere Abbildung und gelte $\lim_i f_i = f$ fast überall. Ist (Ω, R, μ) vollständig, so ist f meßbar (vergl. 8.4 und Beweis von 24.1).

Beispiel 17.10. Sei (Ω, R, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T : \Omega \to \Omega$ eine maßerhaltende Transformation.

Lemma 17.11. *Wenn das dynamische System $((\Omega, R, \mu), T)$ ergodisch ist, dann folgt für $A \in R$ aus $\mu(T^{-1}(A) \vartriangle A) = 0$, daß $\mu(A) \in \{0, 1\}$ gilt.*

Proof. Nach Definition der Ergodizität gilt $\mu(B) \in \{0, 1\}$ wenn $B \in R$ die Gleichung $T^{-1}(B) = B$ erfüllt. Diese Voraussetzung wird hier abgeschwächt zur Bedingung, daß $T^{-1}(A)$ und A sich nur um Nullmengen unterscheiden. Zum Beweis bilden wir die Menge

$$B := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}\ ,m\geq n} T^{-m}(A) \right) \ .$$

Dann ist $A \triangle B$ eine Nullmenge und $T^{-1}(B) = B$. Es gilt also $\mu(B) \in \{0,1\}$ und damit $\mu(A) \in \{0,1\}$. □

18 Verteilungsfunktionen

Wir betrachten ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Definition 18.1. *Die Funktion*

$$F_\mu : \mathbb{R} \to [0,1] \ , \quad F_\mu(x) := \mu((-\infty, x))$$

heißt ***Verteilungsfunktion*** *von μ.*

Satz 18.2. *Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ ist genau dann Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, wenn*

1. *F linkseitig stetig ist,*
2. *F monoton wachsend ist,*
3. *$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ gilt.*

Das Maß μ ist durch seine Verteilungsfunktion eindeutig bestimmt.

Proof. Es ist einfach zu sehen, daß die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathbb{R}$ diese Eigenschaften hat.

Sei F mit den angegebenen Eigenschaften gegeben. Wir betrachten die dyadischen Partitionen $D_r := D^1_r$, $r \in \mathbb{N}$, aus 5. Wir definieren $\mu_r : D_r \to [0,1]$ durch $\mu_r([a,b)) := F(b) - F(a)$ für $[a,b) \in D_r$, $\mu((-\infty, -2^r) = F(-2^r)$ und $\mu([2^r, \infty)) = 1 - F(2^r)$. Wir erhalten damit ein Prämaß auf $R(D_r)$. Es gilt $(\mu_{r+1})_{|R(D_r)} = \mu_r$. Sei μ das von der Folge (μ_r) induzierte Prämaß auf $R := \bigcup_{r\in\mathbb{N}} R(D_r)$. Wir zeigen nun, daß μ ein σ-additives Prämaß ist. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge in R mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Sind alle A_n unbeschränkt, dann gibt es eine Folge (r_n) in $\mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ derart, daß $A_n \subseteq (-\infty, -2^{-r_n}) \cup [2^r, \infty)$ gilt. Damit gilt $\mu(A_n) \le F(-2^{r_n}) + 1 - F(2^{r_n})$ und wegen $\lim_{n\to\infty} F(-2^{r_n}) + 1 - F(2^{r_n}) = 0$ auch $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Andernfalls können wir annehmen, daß alle A_n beschränkt sind.

Wir nehmen an, daß $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \alpha > 0$ gilt und konstruieren einen Widerspruch.

Ein Element in $R(D_k)$ ist eine endliche Vereinigung von dyadischen Intervallen der Form $I = [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k})$. Für ein solches Intervall und $r > k$ definieren wir

$$o_r(I) := [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} - \frac{1}{2^r}) \ .$$

Dann gilt $o_r(I) \in R$, $\overline{o_r(I)} \subset I$ und $\mu(I) - \mu(o_r(I)) = F(\frac{p+1}{2^k}) - F(\frac{p+1}{2^k} - \frac{1}{2^r})$. Da F linksseitig stetig ist, kann man $\mu(I) - \mu(o_r(I))$ durch genügend große Wahl von r beliebig klein machen.

Wir stellen A_k als Vereinigung von c dyadischen Intervallen $I_1, \ldots, I_c$ dar und bilden $A'_k \subset A_k$ durch Ersetzen dieser Intervalle I_j durch $o_r(I_j)$, wobei wir r so groß wählen, daß $\mu(A_k \setminus A'_k) < \alpha 2^{-k-1}$ gilt. Dann ist $A' \in R$ und $\bar{A}' \subset A$. Wir definieren nun $B'_k := \bigcap_{i=1}^k A'_k \in D$. Dann gilt $\bar{B}_k \subset A_k$,

$$A_k \setminus B_k \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_k \setminus A'_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_i \setminus A'_i$$

und damit

$$\mu(B_k) \geq \mu(A_k) - \sum_{i=1}^k \mu(A_i \setminus A'_i) \geq \mu(A_k) - \sum_{i=1}^k \alpha 2^{-i-1} \geq \alpha(1 - \frac{1}{2}) = \frac{\alpha}{2} \ .$$

Insbesondere ist $\bar{B}_k \neq \emptyset$. Nun ist $(\bar{B}_k)_{k=1}^\infty$ eine absteigende Familie nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wegen der Vollständigkeit (Intervallschachtelungsaxiom) von $\mathbb{R}$ ist der Durchschnitt der $\bar{B}_k$ nicht leer. Es folgt

$$\emptyset = \bigcap_{i=k}^\infty A_k \supseteq \bigcap_{i=k}^\infty \bar{B}_k \neq \emptyset$$

und dies ist der gewünschte Widerspruch.

Das σ-additive Wahrscheinlichkeitsprämaß μ auf $(\mathbb{R}, R)$ hat nach Satz 13.4 eine eindeutige Ausdehnung zu einem Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, welches wir auch mit μ bezeichnen werden.

Wir zeigen nun, daß $F = F_\mu$ gilt. Es gilt nach Konstruktion $F(\frac{p_r}{2^r}) = F_\mu(\frac{p_r}{2^r})$ für alle $r \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{Z}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Für jedes $r \in \mathbb{N}$ wählen wir $p_r \in \mathbb{Z}$ derart, daß $\frac{p_r}{2^r} < x \leq \frac{p_r+1}{2^r}$. Die Folge $(\frac{p_r}{2^r})_{r \in \mathbb{N}}$ konvergiert von unten gegen x. Damit gilt

$$F(x) = \lim_{r \to \infty} F(\frac{p_r}{2^r}) = \lim_{r \to \infty} F_\mu(\frac{p_r}{2^r}) = F_\mu(x) \ .$$

□

Beispiel 18.3. Wir betrachten das Maß $\mu := i_*(\lambda_{|[0,1]})$, wobei λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ ist und $i : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Einbettung. Die Verteilungsfunktion F von μ ist durch

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x < 0 \\ x & x \in [0,1] \\ 1 & x > 1 \end{array} \right\}$$

gegeben.

Beispiel 18.4. Sei $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_{A^{\mathbb{N}}}, \lambda)$ der Schiftraum mit $A := \{-1, 1\}$, μ das Maß assoziiert zur Funktion $\mathrm{const}_{\frac{1}{2}} : A \to [0,1]$ und $W : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ durch $W((a_i)) := \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i 2^{-i}$ gegeben. Die Verteilungsfunktion F von $W_*\lambda$ ist durch

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x < -2 \\ \frac{x+2}{4} & x \in [-2,2] \\ 1 & x > 2 \end{array} \right\}$$

gegeben. Es gilt also

$$W_*\mu = i_*(\frac{1}{4}\lambda_{|[-2,2]}) \ ,$$

wobei λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ und $i : [-2,2] \to \mathbb{R}$ die Einbettung ist.

19 Integration einfacher Funktionen

Wir fixieren einen Maßraum (Ω, R, μ).

Definition 19.1. *Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **einfach**, wenn sie meßbar ist und höchstens endlich viele Werte annimmt.*

Mit $\mathcal{E}(\Omega, R)$ bezeichnen wir die Menge der einfachen Funktionen auf Ω. Sie hat die Struktur eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes (siehe etwa Lemma 8.5).

Sei $f \in \mathcal{E}(\Omega, R)$. Wir verwenden die Notation $\{f = r\} := \{x \in \Omega \mid f(x) = r\}$. Die Darstellung

$$f = \sum_{r \in \mathbb{R}} r \chi_{\{f=r\}}$$

als Linearkombination der charakteristischer Funktionen heißt die kanonische Darstellung von f.

Sei

$$\mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq} := \{f \in \mathcal{E}(\Omega, R) \mid f \geq 0\}$$

die Teilmenge der nicht-negativen einfachen Funktionen. Diese Teilmenge ist abgeschlossen unter der Addition und der Multiplikation mit nicht-negativen reellen Zahlen.

Definition 19.2. *Wir definieren das **Integral***

$$\int \ldots d\mu : \mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq} \to [0, \infty]$$

durch

$$\int f d\mu = \sum_{r \in \mathbb{R}} r \mu(\{f = r\}) \ .$$

Die Menge $\mathcal{E}(\Omega, R)$ ist halbgeordnet wobei $f \leq g$ genau dann gilt, wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

Lemma 19.3. *Das Integral ist eine monotone, positiv homogene und additive Abbildung.*

Proof. Wir zeigen zuerst die Homogenität. Es gilt

$$\int \lambda f d\mu = \sum_{r\in\mathbb{R}} r\mu(\{\lambda f = r\}) = \sum_{r\in\mathbb{R}} \lambda r\mu(\{f = r\}) = \lambda \int f d\mu \ .$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist klar.

Seien nun $f, g \in \mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq}$. Daqnn gilt

$$\begin{aligned}
\int (f+g)d\mu &= \sum_{p\in\mathbb{R}} p\mu(\{(f+g) = p\}) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{R}} p \sum_{r,s\in\mathbb{R}\ ,s+r=p} \mu(\{f = r\} \cap \{g = s\}) \\
&= \sum_{r,s\in\mathbb{R}} (r+s)\mu(\{f = r\} \cap \{g = s\}) \\
&= \sum_{r,s\in\mathbb{R}} r\mu(\{f = r\} \cap \{g = s\}) + \sum_{r,s\in\mathbb{R}} s\mu(\{f = r\} \cap \{g = s\}) \\
&= \sum_{r\in\mathbb{R}} r\mu(\{f = r\}) + \sum_{s\in\mathbb{R}} s\mu(\{g = s\}) \\
&= \int f d\mu + \int' g d\mu \ .
\end{aligned}$$

Ist $f \geq g$, dann ist $f - g \in \mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq}$, $g = f + (g - f)$ und damit

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \int (g - f) d\mu \geq \int f d\mu \ .$$

□

20 Unteres Integral

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$.

Definition 20.1. *Wir definieren das* ***untere Integral*** *von f bezüglich μ durch*

$$\int f d\mu = \sup_{\{\phi\in\mathcal{E}(\Omega,R)^{\geq} \mid \phi\leq f\}} \int \phi d\mu \ .$$

Für $A \in R$ setzen wir

$$\int_A f d\mu := \int f\chi_A d\mu \ .$$

Lemma 20.2. *Seien $f, g : \Omega \to [0, \infty]$.*

1. *Für $\phi \in \mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq}$ stimmt neue Definition des Integrals mit der alten überein.*
2. *Wenn es eine Nullmenge $N \in R$ mit $\{f > 0\} \subseteq N$ gibt, so gilt $\int f d\mu = 0$.*
3. *Wenn $f \leq g$, so gilt $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*
4. *Für $r \geq 0$ gilt $\int r f d\mu = r \int f d\mu$.*
5. *Wenn $A \in R$ ist, dann gilt $\mu(A) = \int \chi_A d\mu$.*
6. *Wenn $A \in R$, dann gilt $\int f_{|A} d\mu_{|A} = \int f \chi_A d\mu$.*

Proof.

1. Wegen der Monotonie des Integrals für einfache Funktioen wird das Supremum von $\phi \in \mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq}$ realisiert.
2. Wenn $\phi \in \mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq}$ mit $\phi \leq f$ und $r > 0$ ist, dann gilt $\mu(\{\phi = r\}) = 0$. Daraus folgt $\int \phi d\mu = 0$.
3. Wenn $f \leq g$, dann gilt $\{\phi \in \mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq} | \phi \leq f\} \subseteq \{\phi \in \mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq} | \phi \leq g\}$, woraus die Behauptung folgt.
4. Für $r > 0$ gilt $\{\phi \in \mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq} | \phi \leq r f\} = r\{\phi \in \mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq} | \phi \leq f\}$. Daraus folgt die Behauptung.
5. Folgt aus 1.
6. Die Fortsetzung durch Null definiert eine integralerhaltende Bijektion

$$\{\phi \in \mathcal{E}(A, R_{|A})^{\geq} \mid \phi \leq f_{|A}\} \xrightarrow{\sim} \{\phi \in \mathcal{E}(\Omega, R)^{\geq} \mid \phi \leq f \chi_A\} \ .$$

□

Beispiel 20.3. Beachte, daß das Integral im allgemeinen nicht additiv ist. Für ein Beispiel betrachten wir den folgenden Maßraum : $\Omega := \{x, y\}$, $R := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mu = \delta_x$. Sei $f := \chi_{\{x\}}$ und $g := \chi_{\{y\}}$. Es gilt $\int f d\mu = \int g d\mu = 0$, aber $\int (f + g) d\mu = 1$.

Der Grund ist, daß f und g nicht meßbar sind. So ist zum Beispiel $f^{-1}(\{1\}) = \{x\} \notin R$.

21 Das Lemma von Fatou und der Satz von Lebesgue

Wir betrachten eine Maßraum (Ω, R, μ).

Satz 21.1 (Lemma von Fatou, 1906)**.** *Sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer nichtnegativer Funktionen auf Ω. Dann gilt*

$$\int \liminf_j f_j d\mu \le \liminf_j \int f_j d\mu \ .$$

Proof. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $g_k := \inf_{j\ge k} f_j$ so daß $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist, welche punktweise gegen $\liminf_j f_j$ konvergiert.

Es genügt zu zeigen, daß für jedes $\phi \in \mathcal{E}(\Omega, R)$ mit $0 \le \phi \le \liminf_j f_j$ die Ungleichung

$$\int \phi d\mu \le \liminf_j \int f_j d\mu$$

gilt. In der Tat erhält man die gewünschte Ungleichung daraus durch Bildung des Supremums über alle ϕ. Die Meßbarkeit der f_j und ϕ sichert die Meßbarkeit von g_k und aller unten gebildeten Mengen.

Im folgenden Argument benutzen wir die Kurzform wie etwa

$$\{g < a\} := \{x \in \Omega \mid g(x) < a\}$$

um Mengen zu definieren, auf welchen gewisse Relationen zwischen auf Ω definierten Funktionen erfüllt sind.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß $\int \phi d\mu = \infty$. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}^>$ derart, daß für $A := \{\phi > a\}$ gilt $\mu(A) = \infty$. Wir setzen $A_k := \{g_k > a\}$. Die Folge (A_k) ist monoton aufsteigend, da (g_k) monoton steigt. Wegen $A \subseteq \bigcup_k A_k$ gilt also $\lim_k \mu(A_k) = \infty$. Nun gilt für $j \ge k$ die Ungleichung

$$\int f_j d\mu \ge \int g_k d\mu \ge a\mu(A_k) \ .$$

Damit gilt $\liminf_j \int f_j d\mu = \infty$.

Wir nehmen jetzt an, daß $\int \phi d\mu < \infty$ gilt. Wir wählen $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \epsilon < 1$. Für die Menge $P := \{\phi > 0\}$ gilt $\mu(P) < \infty$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $P_k := \{g_k > (1-\epsilon)\phi\}$. Die Folge (P_k) ist aufsteigend und es gilt $P \subseteq \bigcup_k P_k$. Daraus folgt $\lim_k \mu(P \setminus P_k) = 0$. Sei $k_1 \in \mathbb{N}$ derart, daß $\mu(P \setminus P_k) < \epsilon$ für alle $k \ge k_1$.

Dann gilt für $k \ge k_1$ folgende Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
\int g_k d\mu &\ge \int_{P_k} g_k d\mu \ge \int_{P_k} (1-\epsilon)\phi d\mu \\
&= (1-\epsilon)\int_{P_k} \phi d\mu \overset{20.2,1.}{=} (1-\epsilon)\left[\int_P \phi d\mu - \int_{P\setminus P_k} \phi d\mu\right] \\
&\ge (1-\epsilon)\int_P \phi d\mu - \int_{P\setminus P_k} \phi d\mu \ \ge \int_P \phi d\mu - \epsilon \int_P \phi d\mu - \epsilon \sup \phi
\end{aligned}$$

Daraus folgt die zweite Ungleichung in

$$\liminf_j \int f_j d\mu \geq \liminf_j \int g_j d\mu \geq \int \phi d\mu - \epsilon \left[\int_P \phi d\mu + \sup \phi \right] .$$

Das ϵ beliebig klein sein darf, gilt $\liminf_j \int f_j d\mu \geq \int \phi d\mu$. □

Beispiel 21.2. Die Aussage des Lemmas von Fatou wird im allgemeinen falsch, wenn man die Forderung, daß die Funktionen f_j meßbar seien, fallen läßt,

Also Beispiel betrachten wir den Maßraum $\mathbb{N}$ mit der σ-Algebra $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$ und dem Zählmaß. Sei $f_j = \chi_{\mathbb{N}\setminus\{j\}}$. Dann gilt $\liminf_j f_j = \lim f_j = 1$, also $\int \liminf_j f_j = \infty$. Auf der anderen Seite gilt $\int f_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$, also $\liminf_j \int_{\mathbb{N}} f_j = 0$.

Beispiel 21.3. Die Ungleichung im Lemma von Fatou kann im allgemeinen nicht zu einer Gleichung verschärft werden.

Wir betrachten das folgende Beispiel. Auf dem Lebesgue Maßraum $(\mathbb{R}, R_{Leb}, \lambda)$ betrachten wir die Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$

$$f_j := \begin{cases} \chi_{[0,1]} & j \equiv 1(2) \\ \chi_{[1,2]} & j \equiv 0(2) \end{cases} .$$

Dann gilt $\int \liminf_j f_j d\mu = 0$ und $\liminf_j \int f_j d\mu = 1$.

Satz 21.4 (Lebesguescher Satz über monotone Konvergenz, 1902)**.** *Sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge meßbarer nichtnegativer Funktionen auf Ω. Dann gilt*

$$\int \lim_j f_j d\mu = \lim_j \int f_j d\mu .$$

Proof. Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$\int \lim_j f_j d\mu = \int \liminf_j f_j d\mu \leq \liminf_j \int f_j d\mu .$$

Wegen $f_k \leq \lim_j f_j$ gilt $\int f_k d\mu \leq \int \lim_j f_j d\mu$ und damit

$$\limsup_k \int f_k d\mu \leq \int \lim_j f_j d\mu .$$

Es folgt $\int \lim_j f_j d\mu = \lim_j \int f_j d\mu$. □

Beispiel 21.5. Die Voraussetzung der Monotonie der Folge im Satz über monotone Konvergenz kann nicht weggelassen werden kann.

Wir betrachten den Maßraum $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, welcher durch Einschränkung des Lebesgueschen Maßraumes erhalten wir. Sei $f_j := j\chi_{(0,\frac{1}{j}]}$. Dann gilt $\lim_j f_j = 0$. Folglich ist $\int \lim_j f_j d\lambda = 0$. Auf der anderen Seite gilt $\int f_j d\lambda = 1$, also auch $\lim_j \int_{[0,1]} f_j d\lambda = 1$.

22 Die Additivität des Integrals

Wir betrachten einen meßbaren Raum (Ω, R).

Definition 22.1. *Mit $\mathcal{L}(\Omega, R)$ bezeichnen wir die Menge der meßbaren $\bar{\mathbb{R}}$-wertigen Funktionen auf Ω.*

Lemma 22.2.
1. *Ist $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ beschränkt, so existiert eine Folge einfacher Funktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert.*
2. *Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann meßbar, wenn es eine Folge einfacher Funktionen gibt, welche punktweise gegen f konvergiert.*
3. *Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegativ. Dann existiert eine monotone Folge einfacher Funktionen mit $\lim_i \phi_i = f$.*

Proof.
1. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion
$$\phi_n := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{i}{2^n} \chi_{\{f \in [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n})\}} \ .$$
Da f meßbar und beschränkt ist, ist diese Summe endlich und definiert eine einfache Funktion. Es gilt
$$\sup_\Omega |f - \phi_n| \leq 2^{-n} \ .$$
Die Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f.
2. Ist f punktweiser Grenzwert einer Folge meßbarer Funktionen, dann ist f meßbar, wie in 8.4 schon gezeigt wurde. Sei jetzt umgekehrt $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ gegeben. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir
$$f_n := f\chi_{\{|f| \leq n\}} + n(\chi_{\{f=\infty\}} - \chi_{\{f=-\infty\}})$$
Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von beschränkten Funktionen konvergiert punktweise gegen f. Wir finden nach 1. für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge einfacher Funktionen $(\phi(n)_i)_{i \in \mathbb{N}}$, welche gleichmäßig gegen f_n konvergiert, und genauer, für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Ungleichung
$$\sup_\Omega |f_n - \phi(n)_i| \leq 2^{-i}$$
gilt Die Folge $(\phi(n)_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert dann punktweise gegen f.
3. Für $i \in \mathbb{N}$ setzen wir
$$\phi_i := \sum_{j=0}^{4^i - 1} \frac{j}{2^i} \chi_{\{f \in [\frac{j}{2^i}, \frac{j+1}{2^i})\}} + 2^i \chi_{\{f \in [2^i, \infty]\}} \ .$$
Sei $x \in \Omega$. Wenn $f(x) < 2^i$, dann gilt
$$f(x) \geq \phi_{i+1}(x) \geq \phi_i(x) \geq f(x) - 2^{-i} \ .$$

Wenn $f(x) \geq 2^i$, so gilt

$$f(x) \geq \phi_{i+1}(x) \geq \phi_i(x) = 2^i \ .$$

Damit ist $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge einfacher Funktionen, welche monoton gegen f konvergiert.

□

Wir betrachten einen Maßraum (Ω, R, μ).

Satz 22.3. *Seien $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ meßbare Funktionen.*

1. *Es gilt*
$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \ .$$
2. *Wenn $f \leq g$ fast überall gilt, dann gilt auch*
$$\int f d\mu \leq \int g d\mu \ .$$

Proof. Zu 1.: Mit Lemma 22.2, 3., wählen wir monotone Folgen einfacher Funktionen $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_i \phi_i = f$ und $\lim_i \psi_i = g$. Dann ist die Folge $(\phi_i + \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ monoton und es gilt $\lim_i (\phi_i + \psi_i) = f + g$. Mit dem Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz schließen wir, daß

$$\begin{aligned}
\int (f+g) d\mu &= \lim_i \int (\phi_i + \psi_i) d\mu \\
&= \lim_i \int_\Omega \phi_i \mu + \lim_i \int \psi_i d\mu \\
&= \int f d\mu + \int g d\mu \ .
\end{aligned}$$

Zu 2.: Sei $U := \{f \leq g\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int_U f d\mu + \int_{\Omega \setminus U} f d\mu \\
&= \int_U f d\mu \\
&\leq \int_U g d\mu \\
&= \int g d\mu \ .
\end{aligned}$$

□

Satz 22.4 (Levi, 1906). *Sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Funktionen $f_j : \Omega \to [0,\infty]$. Dann gilt*

$$\int \sum_j f_j d\mu = \sum_j \int f_j d\mu \ .$$

Proof. Die Folge der Partialsummen ist monoton. Wir wenden Additivität und 22.3, 21.4 an. ☐

Dieser Satz verallgemeinert die schon bekannte Tatsache über Reihen:
Sei $(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Reihen mit nicht-negativen Gliedern. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,n} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} \ .$$

23 Integrierbare Funktionen

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum.

Wir dehnen die arithmetischen Operationen $+$ and $\cdot$ auf $\bar{\mathbb{R}}$ für den Fall, daß einer der Operanden unendlich ist, wie folgt aus

1. $x \cdot \pm\infty := (\mathrm{sign}(x)\pm)\infty$, $\pm\infty \cdot x = (\mathrm{sign}(x)\pm)\infty$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $\infty - \infty := 0$, $-\infty + \infty := 0$,
3. $0 \cdot \pm\infty := 0$, $\pm\infty \cdot 0 := 0$,
4. $\infty \cdot \pm\infty := \pm\infty$.
5. $|\pm\infty| := \infty$.

Wir brauchen diese Regeln nur, um wohldefinierte Operationen mit Funktionen, welche unendliche Werte annehmen können, ohne großen Notationsaufwand zu beschreiben.

Definition 23.1. *Se $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Dann heißt f über* ***integrierbar****, falls $\int |f| d\mu < \infty$ gilt. Mit $\boldsymbol{\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbf{R}}, \mu)$ bezeichnen wir die Menge der integrierbaren Funktionen.*

Für $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ definieren wir den positiven und negativen Teil durch

$$f^+ := f\chi_{\{f\geq 0\}} \ , \qquad f^- := -f\chi_{\{f\leq 0\}} \ .$$

1. Eine Funktion $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ genau dann integrierbar, wenn die Relationen

$$\int f^+ d\mu < \infty \ , \quad \text{und} \quad \int f^- d\mu < \infty$$

gelten

2. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $A \in R$. Es gilt wegen 20.2, 6., daß $f_{|A} \in \mathcal{L}^1(A, R_{|A}, \mu_{|R_{|A}})$.

Definition 23.2. *Wir definieren die Abbildung*

$$\int - d\mu : \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu) \to \mathbb{R}$$

durch

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \ .$$

Satz 23.3. *1. Wenn $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $r \in \mathbb{R}$, so gilt auch $rf + g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.*

2. Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung

$$\int (rf + g) d\mu = r \int f d\mu + \int g d\mu \ .$$

3. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Wenn $f = 0$ fast überall gilt, so gilt

$$\int f d\mu = 0 \ .$$

4. Gilt für $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ die Ungleichung $f \leq g$ fast überall, dann gilt

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu \ .$$

5. Für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ gilt

$$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu \ .$$

Gleichheit gilt hier genau dann, wenn eine der beiden Aussagen gilt:

(a) Es gilt $f \leq 0$ fast überall.

(b) Es gilt $f \geq 0$ fast überall.

Proof. Zu 1.: Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, so ist für $r \in \mathbb{R}$ wegen

$$\int |rf| d\mu = |r| \int |f| d\mu < \infty$$

auch $rf \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.

Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, so gilt $|f+g| \le |f| + |g|$, also

$$\int |f+g| d\mu \le \int |f| d\mu + \int |g| d\mu < \infty \ .$$

Folglich ist $f + g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.

Zu 2.: Es gilt für $r \ge 0$, daß

$$\int r f d\mu = \int (rf)^+ d\mu - \int (rf)^- d\mu = r \int f^+ d\mu - r \int f^- d\mu = r \int f d\mu \ .$$

Der Fall $r \le 0$ geht analog.

Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Sei $N := \{|f| = \infty\} \cup \{|g| = \infty\}$. Dann ist N eine Nullmenge. Auf $\Omega \setminus N$ gilt

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \ .$$

Daraus schließen wir

$$\int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f+g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu \ .$$

Es folgt

$$\int (f+g)^+ d\mu - \int (f+g)^- d\mu = \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) + \left(\int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \right) \ .$$

Zu 3.: Folgt aus 20.2.

Zu 4.: Sei $N := \{f < g\}$. Dann ist N eine Nullmenge. Auf $\Omega \setminus N$ gilt dann $f^+ \le g^+$ und $g^- \le f^-$. Wir schließen, daß

$$\int_{\Omega \setminus N} f d\mu = \int_{\Omega \setminus N} f^+ d\mu - \int_{\Omega \setminus N} f^- d\mu \le \int_{\Omega \setminus N} g^+ d\mu - \int_{\Omega \setminus N} g^- d\mu = \int_{\Omega \setminus N} g d\mu \ .$$

Da die Integrale über N verschwinden, folgt die Behauptung.

Zu 5.: Klar $\square$

Wir müssen beachten, daß der Raum $\mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ kein Vektorraum ist. Die Addition ist zum Beispiel nicht assoziativ (da unendliche Werte auftreten können).

Wir haben folgende weitere Eigenschaften.

1. Ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, $g \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ und gilt $f = g$ fast überall, so gilt $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu$.
2. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, $f \ge 0$ und $h \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Dann folgt aus $|h| \le f$ fast überall auch $h \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.

24 Der Satz über die majorisierte Konvergenz

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum.

Satz 24.1 (Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz)**.** *Sei $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(\Omega, R)$, $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine weitere Abbildung, $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, und gelte $|f_i| \leq g$ fast überall für alle $i \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ fast überall. Ist (Ω, R, μ) vollständig oder gilt $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$, so gelten folgende Aussagen:*

1. *Es gilt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und*
$$\lim_i \int f_i d\mu = \int f d\mu \ .$$
2. *Es gilt*
$$\lim_{i\to\infty} \int |f - f_i| d\mu = 0 \ .$$

Proof. Zu 1.: Wir zeigen zuerst, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß für alle $i \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|f_i| \leq g$ und $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ gilt. Sei $A_i := \{|f_i| > g\}$ und $A := \Omega \setminus \{\lim_{i\to\infty} f_i = f\}$. Dann ist $N := A \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ eine Nullmenge. Wir setzen $\tilde{f} := f\chi_{\Omega\setminus N}$ und $\tilde{f}_i := f_i\chi_{\Omega\setminus N}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Diese erfüllen die stärkeren Voraussetzungen. Die Behauptung für $\tilde{f}$, $(\tilde{f}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ impliziert sofort die Behauptung für f, $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Wir nehmen jetzt an, daß $|f_i| \leq g$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ gilt. Es folgt $f_i \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und die Meßbarkeit von f. Weiterhin gilt $|f| \leq g$, womit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ gilt. Wir schließen mit dem Lemma von Fatou, daß

$$\begin{aligned}
\int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g + f) d\mu \\
&= \int \liminf_{i\to\infty} (g + f_i) d\mu \\
&\leq \liminf_{i\to\infty} \int (g + f_i) d\mu \\
&= \int g d\mu + \liminf_{i\to\infty} \int f_i d\mu \ .
\end{aligned}$$

Weiterhin

$$\begin{aligned}
\int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g - f) d\mu \\
&= \int \liminf_{i\to\infty} (g - f_i) d\mu \\
&\leq \liminf_{i\to\infty} \int (g - f_i) d\mu \\
&= \int g d\mu - \limsup_{i\to\infty} \int f_i d\mu \ .
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt wegen $\int g d\mu \in \mathbb{R}$, daß

$$\limsup_{i\to\infty} \int f_i d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int f_i d\mu \ ,$$

also

$$\lim_{i\to\infty} \int f_i d\mu = \int f d\mu$$

gilt.

Zu 2.: Es gilt $|f - f_i| \in \mathcal{L}(\Omega, R)$, $\lim_{i\to\infty} |f - f_i| = 0$ und $|f - f_i| \leq 2g$ fast überall. Nach 1. gilt

$$\lim_{i\to\infty} \int |f - f_j| d\mu = \int 0 d\mu = 0 \ .$$

□

Beispiel 24.2. Im allgemeinen gilt für eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ mit der Eigenschaft, daß $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ fast überall gilt, nicht

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega f_i d\mu = \int_\Omega f d\mu \ .$$

Siehe Beispiel 21.5.

Hier ist ein weiteres Beispiel: Wir betrachten den Lebesgue Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ und die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ gegeben durch

$$f_n(x) := \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-n\frac{x^2}{2}} \ .$$

Es gilt $\int f_n d\lambda = 1$ für alle $n \geq 1$. Es gilt weiter

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \infty \chi_{\{0\}} \ ,$$

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda \neq \int \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda = 0 \ .$$

Lemma 24.3. *Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $0 \leq f$ ist, so gilt*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{A\in R, \mu(A)<\epsilon} \int_A f d\mu = 0 \ .$$

Proof. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^>$ und eine Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in R mit $\mu(A_i) < 2^{-i-1}$ derart, daß $\int_{A_i} f d\mu \geq \delta$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Wir betrachten für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Menge $B_i := \bigcup_{j\geq i} A_j$. Dann gilt $\mu(B_i) \leq 2^{-i}$ und $\int_{B_i} f d\mu \geq \delta$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Weiter ist

$$\Omega \setminus \{\lim_{i\to\infty} \chi_{B_i} f = 0\} \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$$

eine Nullmenge. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz gilt wegen $|\chi_{B_i} f| \leq |f|$ und $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, daß $\lim_{i\to\infty} \int \chi_{B_i} f d\mu = 0$. Das ist ein Widerspruch. □

25 Differenzieren unter dem Integral

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Wir betrachten eine Funktion $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$, wobei $U \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall um 0 ist. Wir nehmen an, daß für jedes $u \in U$ die Funktion

$$_uf : \Omega \to \mathbb{R} \ , \quad {}_uf(x) := f(u,x)$$

integrierbar ist. Dann können wir die Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ durch

$$F(u) := \int {}_uf \, d\mu$$

definieren. Für $x \in \Omega$ sei $f_x : U \to \mathbb{R}$ durch $f_x(u) := f(u,x)$ gegeben. Wir nehmen an, daß f_x für fast alle $x \in \Omega$ differenzierbar ist. Sei $N \in R$ eine Nullmenge derart, daß f_x für $x \in \Omega \setminus N$ differenzierbar ist. Wir definieren die Funktion $_uf'$ durch

$$_uf'(x) := \begin{cases} f'_x(u) & x \in N \\ 0 & x \in \Omega \setminus N \end{cases} .$$

Satz 25.1. *Die Funktion $_uf'$ ist meßbar. Wenn es ein $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ gibt mit $\sup_{u\in U} |_uf'| \leq g$, dann ist F in $u = 0$ differenzierbar, $_0f'$ integrierbar und es gilt*

$$F'(0) = \int {}_0f' d\mu \ .$$

Proof. Auf $\Omega \setminus N$ gilt

$$_uf' = \lim_{n\to\infty} n({}_{u+\frac{1}{n}}f - {}_uf) \ .$$

Damit ist $_uf'$ als punktweiser Limes meßbarer Funktionen auf $\Omega \setminus N$ meßbar.

Sei (h_i) eine Nullfolge. Nach dem Mittelwertsatz gilt für $x \in \Omega \setminus N$ daß

$$|{}_{h_i}f(x) - {}_0f(x)| \leq g(x)|h_i| \ .$$

Damit gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ daß $|\frac{1}{h_i}({}_{h_i}f - {}_0f)| \leq g$ fast überall. Wir wenden nun den Satz über majorisierte Konvergenz an.

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} \frac{F(h_i) - F(0)}{h_i} &= \lim_{i\to\infty} \int \frac{1}{h_i}({}_{h_i}f - {}_0f) d\mu \\ &= \int {}_0f' d\mu \ . \end{aligned}$$

□

Beispiel 25.2. Hier ist ein Beispiel, welches die Notwendigkeit der Voraussetzungen im Satz 25.1 illustriert. Sei $f : (-1,1) \times [0,1) \to \mathbb{R}$ durch $f(u,x) := \frac{\chi_{(-x,x)}(u)}{x}$ gegeben. Dann ist $F(u) = -\ln(|u|)$. Diese Funktion ist in Null sicher nicht differenzierbar. Auf der anderen Seite ist ${}_0f'(x) = 0$ fast überall.

Beispiel 25.3. Hier ist ein Anwendung der Theorie auf Zetafunktionen. Für $q \in (0,\infty)$ und $s \in (1,\infty)$ definieren wir die Hurwitz Zetafunktion durch

$$\zeta(s,q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^s} \ .$$

Wir wollen die Funktionalgleichung

$$\partial_q \zeta(s,q) = -s\zeta(s+1,q)$$

zeigen. Wenn wir die Summe und Ableitung vertauschen können, dann folgt das aus der Rechnung

$$\partial_q \zeta(s,q) = \partial_q \sum_{n=0}^{\infty} (n+q)^{-s} \stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \partial_q (n+q)^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} -s(n+q)^{-s-1} = -s\zeta(s+1,q) \ .$$

Eine Begründung könnte so aussehen. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß ist. Weiter sei $f : (0,\infty) \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch $f(q,n) := (n+q)^{-s}$ gegeben. Dann gilt

$$\zeta(s,q) = \int {}_q f d\mu \ .$$

Wir betrachten einen Punkt $q_0 \in (0,\infty)$ und eine kompakte Umgebung $[q_-, q_+] \subseteq (0,\infty)$ von q_0. Die Abbildung $q \mapsto |{}_q f'|$ fällt monoton mit q, also gilt $|{}_q f'| \le |{}_{q_-} f'|$ für alle $q \in (q_-, q_+)$. Dieses Intervall spielt die Rolle von U. Weiter ist $|{}_{q_-} f'| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$. Damit sind die Voraussetzungen für die Vertauschung von Summe und Ableitung erfüllt.

Beispiel 25.4. Wir betrachten den Lebesgueschen Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Die Laplacetransformierte einer meßbaren Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathcal{L}(f) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) := \int_{[0,\infty)} e^{-\lambda x} f(x) d\lambda \ ,$$

falls die Integrale existieren. Wir nehmen zum Beispiel an, daß es ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|f(x)| \le C(1+x)^k$ fast überall gilt. Dann existiert die Laplacetransformierte.

Es gilt die Identität

$$\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(xf) \ .$$

In der Tat, wenn wir Ableitung und Integral vertauschen können, dann gilt

$$\mathcal{L}(f)'(\lambda) = \partial_\lambda \int_{[0,\infty)} e^{-\lambda x} f(x) d\lambda \stackrel{!}{=} \int_{[0,\infty)} \partial_\lambda e^{-\lambda x} f(x) d\lambda = \int_{[0,\infty)} e^{-\lambda x}(-x) f(x) d\lambda = -\mathcal{L}(xf)(\lambda) \ .$$

Zur Begründung wählen wir ein Intervall (λ_-, λ_+) mit $0 < \lambda_-$. Dann gilt

$$|\partial_\lambda e^{-\lambda x} f(x)| \le C e^{-\lambda_- x} x (1+x)^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$ und die Funktion $Ce^{-\lambda_- x} x(1+x)^k$ is integrabel.

26 Die Transformationsformel

Sei $\Phi : (\Omega_0, R_0) \to (\Omega_1, R_1)$ eine meßbare Abbildung und μ_0 ein Maß auf Ω_0. Dann können wir das Maß $\Phi_*\mu_0$ bilden. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, R_1, \Phi_*\mu_0)$.

Satz 26.1. *Es gilt* $\Phi^* f \in \mathcal{L}^1(\Omega_0, R_0, \mu_0)$ *und*

$$\int_{\Omega_0} \Phi^* f \, d\mu_0 = \int_{\Omega_1} f \, d(\Phi_*\mu_0) \ . \tag{6}$$

Proof. Wir setzen $\mu_1 := \Phi_*\mu_0$. Die Funktion $\Phi^* f = f \circ \Phi$ ist meßbar. Es gilt weiter $\Phi^*|f| = |\Phi^* f|$ sowie $(\Phi^* f)^\pm = \Phi^*(f^\pm)$. Es reicht deshalb aus, die Gleichung (6) für das Integral nicht-negativer meßbarer Funktionen zu zeigen.

Sei nun f nicht negativ und meßbar. Dann existiert nach Lemma 22.2, 3., eine monotone Folge $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}(\Omega_1, R_1)^\geq$ derart, daß $\lim_{i\to\infty} \phi_i = f$ punktweise gilt. Dann ist auch $(\Phi^*\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge in $\mathcal{E}(\Omega_0, R_0)^\geq$ und es gilt $\lim_{i\to\infty} \Phi^*\phi_i = \Phi^* f$ punktweise.

$$\int \Phi^*\phi \, d\mu = \sum_{r\in[0,\infty]} r\mu_0(\Phi^{-1}\{\phi = r\}) = \sum_{r\in[0,\infty]} r\mu_1(\{\phi = r\}) = \int \phi \, d\mu_1 \ .$$

Wir schließen mit dem Satz 21.4 über monotone Konvergenz, daß

$$\int \Phi^* f d\mu_0 = \lim_{i\to\infty} \int \Phi^*\phi_i d\mu_0 = \lim_{i\to\infty} \int \phi_i d\mu_1 = \int f d\mu_1 \ .$$

□

Beispiel 26.2. Für das Lebesguemaß λ auf $(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ erhalten wir beispielsweise für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $t \in R$ die Transformationsformel

$$\int_{\mathbb{R}} f(sx + t) d\lambda = \frac{1}{|s|} \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda \ .$$

In der Tat ist für $\Phi(x) := \mathtt{add}_t \circ \mathtt{mult}_s$ nach Proposition 14.2

$$\Phi_*\lambda = \mathtt{add}_{t*}(\mathtt{mult}_{s*}\lambda) = \mathtt{add}_{t*}(\frac{1}{|s|}\lambda) = \frac{1}{|s|}\lambda \ .$$

27 Beispiele

Beispiel 27.1. Wir betrachten den Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$. In folgendem Satz wird festgestellt, daß der in dieser Vorlesung neu eingeführte Integralbegriff das interierte Riemannintegral nach Definition 1.4 verallgemeinert.

Satz 27.2. *Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$ und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int f d\lambda \ .$$

Proof. Man zeigt, daß

$$\sup_{\{\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \mid \phi \leq f\}} \int \phi d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

gilt. Im Fall $n = 1$ folgt das unmittelbar aus der Definition des Riemann-Integrals, da die rechte Seite das Unterintegral von f ist. Für den höherdimensionalen Fall benutzt man am besten den Satz von Fubini, siehe Beispiel 33.4. □

Mit dem neuen Integralbegriff erweitert sich die Menge der Funktionen, für welche das Integral definiert ist, beträchtlich. So ist zum Beispiel $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ und es gilt $\int \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} d\lambda = 0$. Das Riemannintegral dieser Funktion existiert aber nicht.

Für jede kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die charakteristische Funktion χ_A integrierbar.

Beispiel 27.3. Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ ist die Fouriertransformierte von f

$$\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \quad \mathcal{F}(f)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ix\xi} f(x) d\lambda(x)$$

definiert. Wenn $xf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$, dann gilt

$$\partial_\xi \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(-ixf) \ .$$

Die Fouriertransformation kann benutzt werden, um Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auf dem $\mathbb{R}^n$ in algebraische Gleichungen zu verwandeln.

Sei $P \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom der Ordnung k. Wenn $x^l f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ für alle $l \in \mathbb{N}$ mit $l \leq k$ gilt, dann gilt $P(\partial_\xi)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(P(-ix)f)$.

Sei $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ und $x^l P(-ix) g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ für alle $l \in \mathbb{N}$ mit $l \leq k$. Dann löst die Funktion $h := \mathcal{F}(\frac{g}{P(-ix)})$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$P(\partial_\xi) h = \mathcal{F}(g) \ .$$

Beispiel 27.4. Sei (Ω, R, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum, also $\mu(\Omega) = 1$. Dann heißt eine Funktion $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ auch **Zufallsvariable**. Das Integral

$$\mathbf{E}(f) := \int f d\mu$$

wird als **Erwartungswert** von f bezeichnet und die Größe

$$\mathbf{V}(f) := \mathbf{E}((f - \mathbf{E}(f)^2) = \mathbf{E}(f^2) - \mathbf{E}(f)^2$$

heißt **Varianz** der Zufallsvariable. Für die Existenz dieser Größen müssen wir annehmen, daß $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, bzw. $f, f^2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ gilt.

Die Funktion

$$\mathbf{P} : \mathbb{R} \to [0,1] \ , \quad \mathbf{P}(x) := (f_*\mu)((-\infty, x))$$

heißt **Verteilungsfunktion** der Zufallsvarianblen f. Die Funktion

$$\lambda \in \mathbb{C} \mapsto \mathbf{F}(\lambda) := \mathbf{E}(\exp(-i\lambda f))$$

heißt **charakteristische Funktion** der Zufallsvariablen. Aus dieser können wir die **Momente** von f durch Ableitung berechnen: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $f^k \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt

$$i^n \mathbf{F}^{(n)}(0) = \mathbf{E}(f^n) \ .$$

Mit der Transformationsformel kann man die charakteristische Funktion auch als Fouriertransformation des Masses $f_*\mu$ schreiben:

$$\mathbf{F}(\lambda) = \int e^{-i\lambda x} d(f_*\mu)(x) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\mu)(\lambda) \ .$$

Beispiel 27.5. Wir können auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^>$ ein Maß p definieren, so daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gilt

$$p_{\mu,\sigma}([a,b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}} dx \ .$$

gilt. Man kann zeigen, daß p ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Die Zufallsgröße $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2.

1. $\mathbf{E}(x) = 0$.
2. $\mathbf{V}(x) = \sigma^2$.
3. Die Verteilungsfunktion von $p_{0,1}$ ist die Φ-Funktion

$$\Phi(x) := \mathbf{P}_{p_{0,1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \ .$$

4. $\mathbf{F}(\lambda) = e^{-i\lambda\mu} e^{-\frac{\sigma\lambda^2}{2}}$.

Die Formeln für $\mathbf{E}(x)$ und $\mathbf{V}(x)$ erhält man durch Betrachtung der ersten und zweiten Ableitung von $\mathbf{F}(\lambda)$. Die Formel für $\mathbf{F}(\lambda)$ werden wir mit Methoden der Funktionentheorie zeigen.

Beispiel 27.6. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $A := (\{-1,1\}, \mathcal{P}(\{-1,1\}), \mu)$, wobei $\mu := \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ ist. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ das n-fache Produkt $A^n := \prod_{i=1}^n A$ und die Zufallsvariable $f_n : A^n \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n x_i \ ,$$

wobei $x = (x_i)_{i=1,\dots,n}$. Wir können folgende Größen berechnen:

1. $\mathbf{E}(f_n) = 0$.
2. $\mathbf{V}(f_n) = 1$.
3. $\mathbf{F}_{f_n}(\lambda) = \cos(\frac{\lambda}{\sqrt{n}})^n$.

Wir zeigen hier durch den Index an, daß $\mathbf{F}_{f_n}$ die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen f_n ist. Man kann zeigen daß

$$\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{\lambda}{\sqrt{n}})^n = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}$$

gilt. Es ist kein Zufall, daß dieser Grenzwert genau die charakteristische Funktion der Normalverteilten Zufallsvariablen mit Mittelwert 0 und Varianz 1 ist sondern ein Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes, der in der Wahrscheinlichkeitstheorie bewiesen wird.

Mit Hilfe der Projektionen $A^{\mathbb{N}} \to A_n$ können wir die Funktionen f_n als meßbare Funktionen $f_n : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ auffassen und nach dem Konvergenzverhalten der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fragen. Wir sehen, daß die Folge der charakteristischen Funktionen $(\mathbf{F}_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und auch die Folge der Verteilungsfunktionen $(\mathbf{P}_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Zum Beispiel gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{f_n} = \Phi \ .$$

Dies ist ein typisches Beispiel für die **Konvergez in Verteilung**, welche schwächer als die Konverenz fast überall ist.

Beispiel 27.7. Wir betrachten den Maßraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ mit $A = \{-1, 1\}$ und dem Maß μ assoziiert zur Gleichverteilung auf A.

Wir betrachten die Zufallsvariable

$$f : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} \ , f((a_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i 2^{-i} \ .$$

In Beispiel 18.4 hatten wir die Verteilungsfunktion von $f_*\mu$ berechnet. Es gilt

$$f_*\mu = \frac{1}{4} i_*\lambda_{|[-2,2]} \ ,$$

wobei $i : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ die Einbettung ist. Daraus erhalten wir:

1. $\mathbf{E}(f) = 0$,
2. $\mathbf{V}(f) = \frac{4}{3}$,
3. $\mathbf{F}(\lambda) = \frac{\sin(2\lambda)}{2\lambda}$.

Wir haben hier zwei Möglichkeiten, die charakteristische Funktion zu berechnen: Nach Definition ist

$$\mathbf{F}(\lambda) = \int_{A^{\mathbb{N}}} e^{-i\lambda f} d\mu = \prod_{n\in\mathbb{N}} \cos(2^{-n}\lambda) \ .$$

Mit der Transformationsformel gilt aber auch

$$\mathbf{F}(\lambda) = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{-i\lambda x} dx \ .$$

Wir erhalten die Formel

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \cos(2^{-n}\lambda) = \frac{\sin(2\lambda)}{2\lambda} \ .$$

Hier ist ein anderes Beispiel. Wir betrachten die Abbildung

$$W : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} \ , \quad W((a_n)) := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} & \text{Reihe konvergiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ .$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} dW_*\mu = \int_{A^{\mathbb{N}}} e^{-i\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}} d\mu = \prod_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{\lambda}{n}) \ .$$

Wir sehen, daß W eine Zufallsvariable mit der charakteristischen Funktion

$$\mathbf{F}(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{\lambda}{n})$$

ist. Für die Momente gilt für ≥ 1

$$\mathbf{E}(W^2) = \zeta(2n) \ , \quad \mathbf{E}(W^3) = 0 \ , \quad \mathbf{E}(W^4) = \zeta(4) - 3\zeta(2)^2 \ .$$

Beispiel 27.8. In diesem Beispiel zeigen wir eine typische Anwendung der Maß- und Integrationstheorie in der Darstellungstheorie.

Sei G eine abelsche kompakte topologische Gruppe. Dann gibt es auf $(G, \mathcal{B})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, welches eindeutig durch Regularität (siehe Beispiel 30.6) und die Eigenschaft der Translationsinvarianz bestimmt ist. Dieses heißt auch das **Haarsche Maß**. Wir kennen die folgenden Beispiele:

1. $G := U(1)$. Das Maß μ auf G ist durch die Gleichung

$$\int f d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ix)dx$$

   für alle beschränkten meßbaren Funktionen auf G bestimmt.

2. G ist endlich und $\mu = \frac{1}{|G|}\kappa$, wobei κ das Zählmaß ist.

3. $G = \mathbb{Z}_p$ und μ ist das Maß aus Kapitel 15.

Ein **Charakter** von G ist ein stetiger Homomorphismus $\chi : G \to U(1)$. Die Menge $\hat{G}$ der Charaktere bildet selbst eine abelsche Gruppe unter der Operation $(\chi \cdot \chi')(x) := \chi(x)\chi'(x)$. Diese Gruppe heißt die **duale** Gruppe von G.

1. Wir haben einen Isomorphismus $\mathbb{Z} \cong \widehat{U(1)}$ unter welchem $n \in \mathbb{Z}$ zum Charakter $\chi : U(1) \to U(1)$, $\chi(x) = x^n$ correspondiert.

2. Es gibt einen Isomorphismus $\widehat{G_1 \times G_2} \cong \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$, $\chi \mapsto (\iota_1^*\chi, \iota_2^*\chi)$, wobei $\iota_i : G_i \to G_1 \times G_2$ die beiden Einbettungen sind für $i \in \{1, 2\}$. Eine endliche abelsche Gruppe läßt sich in ein endliches Produkt zyklischer Gruppen zerlegen. Damit reduziert sich die Bestimmung von $\hat{G}$ auf den Fall $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Wir definieren einen Isomorphismus
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mapsto \widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \ , \quad [m] \mapsto ([k] \mapsto \exp(2\pi i \frac{[m][k]}{n}) \ .$$

3. Wir können $\widehat{Z}_p$ mit der Gruppe
$$\mathcal{EW}(p^\infty) := \{z \in \mathbb{C} \mid (\exists k \in \mathbb{N} \mid z^{p^k} = 1)\}$$
der p-Potenz Einheitswurzeln identifizieren. Diese Identifikation bildet $z \in \mathcal{EW}(p^\infty)$ auf den Charakter
$$\phi_z : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C} \ , \quad \phi_z(x) := z^{\mathrm{pr}_k(x)}$$
ab, wobei $k \in \mathbb{N}$ derart gewählt ist, daß $z^{p^k} = 1$ gilt. Diese Funktion ist in der Tat wohldefiniert unabhängig von der Wahl von k.

Eine **Darstellung** von G auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V ist ein stetiger Homomorphismus $\rho : G \to V$. Für einen Charakter $\chi \in \hat{G}$ definieren wir den **χ-isotypischen Unterraum**
$$V(\chi) := \{v \in V \mid (\forall g \in G \mid \rho(g)v = \chi(g)v)\}.$$
Insbesondere ist für $g \in G$ der Raum $V(\chi)$ im Eigenraum von $\rho(g)$ zum Eigenwert $\chi(g)$ enthalten. Wir wollen in diesem Beispiel zeigen, daß es eine Zerlegung
$$V = \bigoplus_{\chi \in \hat{G}} V(\chi)$$
gibt.

Mit Hilfe der Integration können wir eine Projektion auf $V(\chi)$ definieren:
$$P_\chi := \int_G \chi^{-1}(g)\rho(g)d\mu(g) \ .$$
Dieses Integral wird als Integral für Funktionen mit Werten im endlich-dimensionalen Vektorraum $\mathrm{End}(V)$ interpretiert, z.B. komponentenweise nach Wahl einer Basis.

1. Wenn $v \in V(\chi)$, dann gilt $P_\chi(v) = v$. In der Tat gilt für $v \in V(\chi)$, daß

$$\begin{aligned} P_\chi(v) &= \int_G \chi^{-1}(g)\rho(g) v d\mu(g) \\ &= \int_G \chi^{-1}(g)\chi(g) v d\mu(g) = \int_G v d\mu(g) \stackrel{!}{=} v \ , \end{aligned}$$

   wobei wir im markierten Schritt $\mu(G) = 1$ ausgenutzt haben.

2. Für $v \in V$ gilt $P_\chi(v) \in V(\chi)$. Sei $h \in G$ und $v \in V$. Dann gilt.

$$\begin{aligned} \rho(h)P_\chi(v) = \rho(h) \int_G \chi^{-1}(g)\rho(g) v d\mu(g) &= \int_G \chi^{-1}(g)\rho(h)\rho(g) v d\mu(g) \\ = \quad \chi(h) \int_G \chi^{-1}(g+h)\rho(h+g) v d\mu(g) &\stackrel{!}{=} \chi(h) \int_G \chi^{-1}(g)\rho(g) v d\mu(g) = \chi(h) P_\chi(v) \end{aligned}$$

   wobei wir im markierten Schritt die Translationsinvarianz von μ ausgenutzt haben.

3. Aus 1. und 2. folgt $P_\chi^2 = P_\chi$, d.h. P_χ ist ein Projektor auf den Raum $V(\chi)$.

4. Es gilt für $\chi, \chi' \in \hat{G}$ mit $\chi \neq \chi'$, daß $P_\chi(V(\chi')) = 0$. In der Tat gilt für $v \in V(\chi')$, daß

$$\begin{aligned} P_\chi(v) &= \int_G \chi^{-1}(g)\rho(g) v d\mu(g) = \int_G \chi^{-1}(g)\chi'(g) v d\mu(g) \\ &\int_G \kappa d\mu(g) v = 0 \ , \end{aligned}$$

   wobei $\kappa = \chi^{-1} \cdot \chi' \in \hat{G}$ ein nicht-trivialer Charakter ist. Hierbei haben wir ausgenutzt, daß

$$\int_G \kappa(g) d\mu = 0$$

   gilt. Diese Identität folgt aus der folgenden Tatsache. Es gibt ein $h \in G$ mit $\kappa(h) \neq 1$ und wegen der Translationsinvarianz von μ gilt

$$(1 - \kappa(h)) \int_G \kappa(g) d\mu = \int_G (\kappa(g) - \kappa(g+h)) d\mu = 0 \ .$$

5. Für $\chi, \chi' \in \hat{G}$ mit $\chi \neq \chi'$ gilt also $P_\chi P_{\chi'} = 0$. Wir setzen

$$Q := \mathrm{id}_V - \sum_{\chi \in \hat{G}} P_\chi \ .$$

   Da V endlich-dimensional ist, hat diese Summe endlich viele von Null verschiedene Terme. Weiter rechnet man unter Verwendung der oben gezeigt Identitäten nach, daß Q eine Projektion, welche orthogonal zu den Projektionen P_χ steht. Wir benutzen nun den folgenden Satz, dessen Beweis allerdings den Rahmen dieser Vorlesung sprengen würde.

Satz 27.9 (Vollständigkeit der Charaktere)**.** *Es gilt* $Q = 0$

Folglich gilt

$$\mathrm{id}_V = \sum_{\chi \in \hat{G}} P_\chi \ , \quad V = \bigoplus_{\chi \in \hat{G}} V(\chi) \ .$$

Beispiel 27.10. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}, \mu)$. Die folgende Rechnung spielt eine wichtige Rolle in der Theorie von Zetafunktionen.

Die p-adische Norm ist die Abbildung $|-|_p : \mathbb{Z}_p \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$|x|_p = p^{-\nu_p(x)} \ , \quad \nu_p(x) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \mathrm{pr}_k(x) = 0\} \ .$$

Wir setzen $|0|_p := 0$. Es gilt für $s > -1$:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s d\mu = \frac{p-1}{p(1-p^{-s-1})} \ .$$

Für diese Formel beobachten wir, daß

$$\mu(\{|x|_p = p^{-n}\}) = p^{-n}(1 - \frac{1}{p})$$

gilt.

28 L^p-Räume

Wir betrachten einen Maßraum (Ω, R, μ). Das Hauptziel dieses Abschnittes ist es, Banachräume von zur Potenz $p \in [1, \infty)$ integrierbaren Funktionen auf Ω zu definieren.

Definition 28.1. *1. Für* $p \in (0, \infty)$ *setzen wir*

$$\mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu) := \{f \in \mathcal{L}(\Omega, R) \mid |f|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)\}.$$

Für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ *definieren wir*

$$\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \ .$$

2. Für $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ *definieren wir das wesentliche Supremum*

$$\mathrm{ess\,sup} f := \inf\{r \in \bar{\mathbb{R}} \mid \textit{Es gilt } f \le r \textit{ fast überall.}\} \ .$$

Weiter setzen wir

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu) := \{f \in \mathcal{L}(\Omega, R) \mid \mathrm{ess\,sup}|f| < \infty\}$$

und definieren für $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu)$

$$\|f\|_\infty := \mathrm{ess\,sup}|f| \ .$$

Beispiel 28.2. Beachte, daß $\|f\|_\infty$ vom Maß abhängt. Als Beispiel betrachten wir den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, |.|)$ und die Funktion $f = x\chi_\mathbb{Q}$. Dann gilt $\|f\|_\infty = 0$. Wenn wir allerdings anstelle des Lebesguemaßes das Diracmaß δ_a, $a \in \mathbb{R}$, betrachten, dann ist $\|f\|_\infty = |a|$ für $a \in \mathbb{Q}$ und $\|f\|_\infty = 0$ für $a \notin \mathbb{Q}$.

Wir haben weiter folgende einfache Tatsachen.

1. Wenn $p \in (0, \infty)$ und $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$, dann ist $\{f \in \{-\infty, \infty\}\}$ eine Nullmenge.
2. Wenn $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu)$, dann ist $\{|f| > \operatorname{ess\,sup}|f|\}$ eine Nullmenge.
3. Wenn $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt für $0 < q \leq p \leq \infty$, daß
$$\mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu) \subseteq \mathcal{L}^q(\Omega, R, \mu) \ .$$
In der Tat gilt
$$|f|^q \leq \max\{1, |f|^p\} \leq 1 + |f|^p$$
und damit
$$\int |f|^q d\mu \leq \mu(\Omega) + \int |f|^p d\mu \ .$$
Die Voraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$ kann hier im allgemeinen nicht weggelassen werden. Zum Beispiel gilt $x^{-1} \in \mathcal{L}^2([1, \infty), \mathcal{B}, \mu)$, nicht aber $x^{-1} \in \mathcal{L}^1([1, \infty), \mathcal{B}, \mu)$.

Auf $\mathcal{L}(\Omega, R)$ definieren wir die Äquivalenzrelation
$$\{(f, g) \in \mathcal{L}(\Omega, R) \times \mathcal{L}(\Omega, R) \mid \text{Es gilt } f = g \text{ fast überall})\} \ .$$
Wir werden für diese Relation auch die Notation $f =_\mu g$ verwenden.

Definition 28.3. *Für $p \in (0, \infty]$ setzen wir*
$$L^p(\Omega, R, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)/\text{“} =_\mu \text{“} \ .$$

Wenn $x \in \Omega$ und $\mu(\{x\}) = 0$ ist, dann gibt es keine wohldefinierte Auswertung
$$L^p(\Omega, R, \mu) \ni [f] \mapsto f(x) \in \mathbb{R} \ .$$
Man kann also nicht vom Wert eines Elementes von $L^p(\Omega, R, \mu)$ im Punkt x sprechen.

Wir werden jetzt schrittweise erst eine Vektorraumstruktur auf $L^p(\Omega, R, \mu)$ einführen, dann einsehen, daß $\|.\|_p$ eine Norm induziert und schließlich die Vollständigkeit von $L^p(\Omega, R, \mu)$ in dieser Norm zeigen.

Eine Abbildung $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **endlich**, wenn $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ gilt.

Lemma 28.4. *Jede Klasse in $L^p(\Omega, R, \mu)$ enthält einen endlichen Vertreter.*

Proof. Sei $[f] \in L^p(\Omega, R, \mu)$.

Wenn $p < \infty$ ist, dann ist

$$\tilde{f} := f\chi_{\{f \notin \{-\infty,\infty\}\}}$$

ein endlicher Vertreter der Klasse $[f]$.

Für $p = \infty$ ist ein endlicher Vertreter $\tilde{f} \in [f]$ durch

$$\tilde{f} := f\chi_{\{|f| \leq \operatorname{ess\,sup}|f|\}}$$

gegeben. □

Wir erklären nun die Vektorraumstruktur auf $L^p(\Omega, R, \mu)$.

Definition 28.5. *Seien $[f], [g] \in L^p(\Omega, R, \mu)$, wobei $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ endlich sind. Dann definieren wir für $r \in \mathbb{R}$*

$$[f] + r[g] = [f + rg] \ .$$

Lemma 28.6. *Diese Operationen sind wohldefiniert und bilden eine Vektorraumstruktur auf $L^p(\Omega, R, \mu)$.*

Proof. Sei $p \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$|f + rg|^p \leq (|f| + |r||g|)^p \leq (2\max\{|f|, |r||g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |r|^p|g|^p) \ .$$

Damit gilt $f + rg \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$.

Ist $p = \infty$, so gilt

$$\operatorname{ess\,sup}|f + rg| \leq \operatorname{ess\,sup}(|f| + |r||g|) \leq \operatorname{ess\,sup}|f| + |r|\operatorname{ess\,sup}|g| \ .$$

Also ist auch in diesem Fall $f + rg \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu)$.

Seien $\tilde{f} \in [f]$ und $\tilde{g} \in [g]$ andere endliche Vertreter. Dann gilt

$$f(x) + rg(x) = \tilde{f}(x) + r\tilde{g}(x)$$

auf dem Komplement der Nullmenge $\{f \neq \tilde{f}\} \cup \{g \neq \tilde{g}\}$. Also gilt $[f + rg] = [\tilde{f} + r\tilde{g}]$.

Man sieht nun leicht ein, daß $L^p(\Omega, R, \mu)$ mit diesen Operationen ein Vektorraum ist. □

Wir studieren nun die Norm. Die folgenden Eigenschaften sind einfach zu zeigen.

1. $\|.\|_p : L^p(\Omega, R, \mu) \to [0, \infty)$ ist durch $\|[f]\|_p := \|f\|_p$ wohldefiniert.

2. $\|r[f]\|_p = |r|\|[f]\|_p$ gilt für alle $r \in \mathbb{R}$.

3. $\|[f]\|_p = 0$ gilt genau dann, wenn $[f] = 0$.

Lemma 28.7. *$(L^\infty(\Omega, R, \mu), \|.\|)$ ist ein normierter Vektorraum.*

Proof. Die Dreiecksungleichung für $\|.\|_\infty$ ist einfach zu zeigen. □

Für den Nachweis der Dreiecksungleichung für $\|.\|_p$ brauchen wir etwas Vorbereitung.

Wir zeigen zunächst die Yangsche Ungleichung.

Lemma 28.8. *Sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ differenzierbar und streng monoton wachsend. Es gilt für $a, b \in (0,\infty)$ die Ungleichung*

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \ .$$

Insbesondere gilt mit $f(x) := x^{p-1}$ für $p \in (1,\infty)$ und $q := \frac{p}{p-1}$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ .$$

Proof. Es gilt mit der Substitution $y = f(x)$, $dy = f'(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^b f^{-1}(y)dy &= \int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x)dx \\ &= bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)dx\end{aligned}$$

Wir schließen

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy = bf^{-1}(b) + \int_{f^{-1}(b)}^a f(x)dx \ .$$

Wir schließen nun die Behauptung in einer Falldiskussion:

1. Im Fall $f^{-1}(b) = a$ ist die Ungleichung eine Gleichung.

2. Im Fall $f^{-1}(b) \geq a$ gilt

$$bf^{-1}(b) + \int_{f^{-1}(b)}^a f(x)dx = bf^{-1}(b) - \int_a^{f^{-1}(b)} f(x)dx \geq bf^{-1}(b) - b(f^{-1}(b) - a) = ba \ .$$

3. Im Fall $f^{-1}(b) \leq a$ gilt

$$bf^{-1}(b) + \int_{f^{-1}(b)}^{a} f(x)dx \geq bf^{-1}(b) + b(a - f^{-1}(b)) = ba \ .$$

Wenn $f(x) = x^{p-1}$, dann gilt $f^{-1}(y) = y^{q-1}$. Daraus folgt die zweite Behauptung. □

Satz 28.9 (Hölderungleichung)**.** *Seien $q, p \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Sei weiter $[f] \in L^p(\Omega, R, \mu)$, $[g] \in L^q(\Omega, R, \mu)$, wobei f, g endliche Vertreter sind. Dann ist $[fg]$ eine wohldefinierte Klasse in $L^1(\Omega, R, \mu)$, und es gilt*

$$\|[fg]\|_1 \leq \|[f]\|_p \|[g]\|_q \ .$$

Proof. Sei $p = 1$ und $q = \infty$. Dann gilt

$$|fg| \leq_\mu (\operatorname{ess\,sup}|g|) \ |f| \ .$$

Folglich ist $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, und es gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 \ .$$

Sei jetzt $p \in (1, \infty)$. Wenn $f =_\mu 0$ oder $g =_\mu 0$, dann ist $fg =_\mu 0$, und es gilt $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, $\|fg\|_1 = 0 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Sei also $f \neq_\mu 0$ und $g \neq_\mu 0$. Für alle $a, b \in [0, \infty]$ gilt nach Lemma 28.8

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ .$$

Mit dieser Ungleichung schließen wir, daß

$$\frac{|f||g|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

gilt. Wir sehen, daß $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und nach Integration und Multiplikation mit $\|f\|_p \|g\|_q$

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p} \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\|g\|_q^q} \|g\|_q^q \leq \|f\|_p \|g\|_q (\frac{1}{q} + \frac{1}{p}) = \|f\|_p \|g\|_q$$

gilt.

Sind $\tilde{f} \in [f]$ und $\tilde{g} \in [g]$ andere Vertreter, so gilt $\tilde{f}\tilde{g} =_\mu fg$ und somit $[\tilde{f}\tilde{g}] = [fg]$. Damit ist die Klasse $[fg]$ wohldefiniert. □

Satz 28.10. *Für $p \in [1, \infty)$ ist $(L^p(\Omega, R, \mu), \|.\|_p)$ ein normierter Vektorraum.*

Proof. Wir müssen die Dreiecksungleichung zeigen. Der Fall $p = 1$ ist klar. Sei jetzt $p \in (1, \infty)$ und $q \in (1, \infty)$ derart, daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt.

Seien $[f], [g] \in L^p(\Omega, R, \mu)$ mit endlichen Vertretern f, g. Es gilt (beachte, daß $\frac{p}{p-1} = q$ ist) $(|f+g|^{p-1})^q = |f+g|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Wie schließen, daß $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\Omega, R, \mu)$. Nach der Hölderungleichung gilt $(|f| + |g|)|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f+g||f+g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \int_\Omega (|f| + |g|)|f+g|^{p-1} d\mu \\ &= \||f||f+g|^{p-1}\|_1 + \||g||f+g|^{p-1}\|_1 \\ &\leq \|f\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Daraus schließen wir $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. □

Für $\|.\|_p$ mit $p \in (0, 1)$ gilt die Dreiecksungleichung im allgemeinen nicht .

29 Vollständigkeit

Folgendes Kriterium ist zum Nachweis der Vollständigkeit eines normierten Vektorraumes $(V, \|.\|)$ nützlich.

Lemma 29.1. $(V, \|.\|)$ *ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente Reihe in* V *konvergiert.*

Proof. Sei (v_i) eine Folge in V. Die Reihe $\sum_i v_i$ konvergiert definitionsgemäß absolut, falls $\sum_i \|v_i\| < \infty$ gilt.

Wenn $(V, \|.\|)$ vollständig ist, so konvergiert jede absolut konvergente Reihe in V. Wir zeigen die andere Richtung.

Sei (f_i) eine Cauchyfolge in V. Wir wählen für jedes $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N(\epsilon)$ die Ungleichung $\|f_n - f_m\| \leq \epsilon$ gilt. Wir setzen nun $v_0 := f_{N(1/2)}$ und weiter induktiv

$$v_i := f_{N(2^{-i-1})} - f_{N(2^{-i})} \ .$$

Dann gilt $\|v_i\| \leq 2^{-i}$. Die Reihe $\sum_{i=0}^\infty v_i$ ist absolut konvergent. Nach Voraussetzung existiert der Grenzwert $f := \sum_{i \geq 0} v_i$.

Wir zeigen nun, daß $\lim_{i \to \infty} f_i = f$ gilt. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann wählen wir $j \in \mathbb{N}$ so daß $2^{-j+1} < \epsilon$. Es gilt dann $\| \sum_{0 \leq i \leq j} v_i - f\| \leq 2^{-j} < \frac{1}{2}\epsilon$, also $\|f_{N(2^{-j-1})} - f\| < \frac{1}{2}\epsilon$.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq N(2^{-j})$ gilt dann $\|f_m - f\| < \epsilon$. Wir haben also gezeigt, daß $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ gilt. $\square$

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum.

Satz 29.2 (Fischer, Riesz 1907)**.** *Für $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(\Omega, R, \mu)$ ein Banachraum.*

Proof. Sei $([f_i])_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\Omega, R, \mu)$ derart daß die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}[f_i]$ absolut konvergiert. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$F_k := \sum_{i=0}^{k} |f_k| \ .$$

Dann existiert $F := \lim_{k\to\infty} F_k \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ und es gilt

$$\|F_k\|_p \leq \sum_{i=0}^{k} \|f\|_p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f\|_p =: M.$$

Sei vorerst $p = \infty$: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Teilmenge $\{F_k > M\}$ von Ω eine Nullmenge. Es gilt

$$\{F > M\} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{F_k > M\}$$

und damit $F \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu)$. Wir definieren die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) & x \in \{F < M\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ .$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu)$ und $\|f\|_\infty \leq M$.

Sei jetzt $p \in [1, \infty)$. Es gilt nach dem Satz über monotone Konvergenz, daß

$$\int_\Omega F^p d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega F_k^p d\mu \leq M^p \ .$$

Damit ist $\{F = \infty\}$ eine Nullmenge. Wir definieren $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) & x \notin \{F = \infty\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ .$$

Dann ist f als punktweiser Grenzwert meßbarer Funktionen meßbar. Wir schließen weiter, daß $|f|^p \leq F^p$ und damit $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ und $\|f\|_p \leq M$ gilt.

Wir zeigen nun, daß $[f] = \sum_i [f_i]$ gilt. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Wir wählen $L \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\sum_{i=L+1}^{\infty} \|f_i\|_p < \epsilon$$

gilt.

Sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt für alle $m \geq L$ nach dem Lemma von Fatou :

$$\begin{aligned}
\| \, [f] - \sum_{i=0}^{m} [f_i] \, \|_p^p &= \int |f - \sum_{i=0}^{m} f_i|^p d\mu \\
&= \int | \sum_{i=m+1}^{\infty} f_i|^p d\mu \\
&= \int \liminf_{n\to\infty} | \sum_{i=m+1}^{n} f_i|^p d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int | \sum_{i=m+1}^{n} f_i|^p d\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \| \sum_{i=m+1}^{n} f_i\|_p^p \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} (\sum_{i=m+1}^{n} \|f_i\|_p)^p \\
&\leq \epsilon^p \ .
\end{aligned}$$

Für $p = \infty$ gilt für alle $m \geq L$ und $x \in \{F \leq M\}$, daß

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sum_{i=0}^{m} f_i(x)| &= \lim_{n\to\infty} | \sum_{i=m+1}^{n} f_i(x)| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=m+1}^{n} |f_i(x)| \\
&\leq \sum_{i=L+1}^{\infty} |f_i(x)|
\end{aligned}$$

Dann gilt für x im Komplement der Nullmenge

$$\{F > M\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{f_i > \|f_i\|_\infty\} \ ,$$

daß $|f(x) - \sum_{i=0}^{m} f_i(x)| < \epsilon$. Also gilt $\|f - \sum_{i=m+1}^{\infty} f_i\|_\infty < \epsilon$. □

30 Weitere Eigenschaften von $L^p(\Omega, R, \mu)$

Lemma 30.1. *Das Bild von $\mathcal{E}(\Omega, R) \cap \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu) \to L^p(\Omega, R, \mu)$, $\phi \mapsto [\phi]$, ist dicht.*

Proof. Sei $[f] \in L^p(\Omega, R, \mu)$ und f ein endlicher Vertreter. Dann ist $f^\pm \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$. Wir finden monoton wachsende Folgen nichtnegativer einfacher Funktionen $(\phi_i^\pm)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{i\to\infty} \phi_i^\pm = f^\pm .$$

Dann gilt $\phi_i^\pm \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$. Weiter gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ derart, daß

$$|\phi_i^\pm - f^\pm|^p \le C|f^\pm|^p$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit gilt nach dem Satz über majorisierte Konvergenz, daß

$$\lim_{i\to\infty} \|\phi_i^\pm - f^\pm\|_p = 0 .$$

Wir schließen, daß $\lim_{i\to\infty}([\phi_i^+ - \phi_i^-]) = f$ in $L^p(\Omega, R, \mu)$ gilt. □

Definition 30.2. *Ein metrischer Raum heißt* ***separabel****, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

Sei (Ω, R, μ) ein σ-endlicher, σ-additiver Prämaßraum und $(\Omega, R^\sigma(R), \mu^\sigma)$ seine eindeutig bestimmte Erweiterung (Theorem 13.4). Sei $p \in [1, \infty)$.

Satz 30.3. *Wenn R abzählbar ist, dann ist $L^p(\Omega, R^\sigma(R), \mu^\sigma)$ separabel.*

Proof. Wir zeigen, daß die abzählbare Menge

$$\{[\rho] \mid \rho \in \mathcal{E}(\Omega, R) \cap \mathcal{L}^p(\Omega, R^\sigma(R), \mu^\sigma) \mid \rho \text{ hat rationale Werte}\}$$

in $L^p(\Omega, R^\sigma(R), \mu^\sigma)$ dicht liegt.

Sei $[f] \in L^p(\Omega, R^\sigma(R), \mu^\sigma)$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Dann finden wir nach Lemma 30.1 eine einfache Funktion $\phi \in \mathcal{L}^p(\Omega, R^\sigma(R), \mu^\sigma)$ derart, daß

$$\|f - \phi\|_p \le \epsilon .$$

Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, eine paarweise disjunkte Familie $(A_i)_{i=1,\dots,N}$ in $R^\sigma(R)$ und eine Familie $(r_i)_{i=1,\dots,N}$ von Null verschiedener reeller Zahlen derart, daß

$$\phi = \sum_{i=1}^N r_i \chi_{A_i}$$

gilt. Für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ ist $\mu(A_i) < \infty$. Sei $r := \max\{|r_i| \mid i = 1, \dots, N\}$. Nach Satz 13.5 können wir für jedes $i \in \{1 \dots, N\}$ eine Menge $B_i \in R$ wählen derart, daß

$$\mu(A_i \vartriangle B_i) \le \frac{\epsilon^p}{N^p r^p}$$

gilt. Wir setzen

$$\psi := \sum_{i=1}^{N} r_i \chi_{B_i} \ .$$

Damit gilt

$$\|\phi - \psi\|_p \leq \epsilon \ .$$

Sei $M := \max\{\mu(B_i) \mid i \in \{1, \ldots, N\}\}$. Wir wählen nun für jedes $i \in \{1, \ldots, N\}$ eine rationale Zahl s_i derart, daß

$$|r_i - s_i| \leq \frac{\epsilon}{N\sqrt[p]{M}} \ .$$

Wir setzen

$$\rho := \sum_{i=1}^{\infty} s_i \chi_{B_i} \ .$$

Dann gilt

$$\|\psi - \rho\|_p \leq \epsilon \ .$$

Folglich gilt

$$\|f - \rho\|_p \leq 3\epsilon \ .$$

□

Folgerung 30.4. *Sei $p \in [1, \infty)$. Dann sind die folgenden Banachräume separabel.*

1. $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$
2. $L^p(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}, \mu)$
3. $L^p(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oder $p = 1$ und $q = \infty$ oder $p = \infty$ und $q = 1$. Wir definieren eine Abbildung

$$I : L^q(\Omega, R, \mu) \to L^p(\Omega, R, \mu)'$$

durch

$$I(g)(f) := \int_\Omega gf \, d\mu$$

(hierbei ist V' der duale Raum zu V). Die Hölderungleichung zeigt, daß $|I(g)(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$ gilt. Damit ist $I(g)$ tatsächlich eine stetiges Funktional auf $L^p(\Omega, R, \mu)$. Weiter sehen wir, daß $\|I\| \leq 1$. In der Tat gilt nun folgendes:

Satz 30.5 (ohne Beweis)**.**

1. *Wenn $p \in (1, \infty)$, dann ist I ein isometrischer Isomorphismus.*
2. *Wenn $p = 1$ und (Ω, R, μ) σ-endlich ist, so ist I eine isometrischer Isomorphismus.*

3. *Wenn $p = \infty$, dann ist I eine isometrische Einbettung.*

Für den Fall $p = 2$ ist die Aussage von Satz 30.5 ein Spezialfall des Satzes von Riesz aus der Hilbertraumtheorie, siehe Kapitel 31.

Beispiel 30.6. Sei $(G, \mathcal{B}, \mu)$ der Haarsche Maßraum zu einer lokalkompakten topologischen Gruppe. Als Beispiel sollte man sich $G = \mathbb{R}^n$ oder eines unserer kompakten Fälle $G \in \{U(1), \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ vorstellen. Für dieses Beispiel kann G aber auch nichtabelsch sein, z. B. $G = GL(n, \mathbb{R})$.

Für $g \in G$ sei $R_g : G \to G$ die Rechtstranslation. Das nicht-triviale Maß μ ist durch folgende Eigenschaften bis auf Skalierung eindeutig charakterisiert:

1. μ ist **reguläres Borelmaß** (vergl. Definition 35.2): Für $A \in \mathcal{B}$ gilt
   (a) $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq G \text{ kompakt und } K \subseteq A\}$
   (b) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \subseteq G \text{ offen und } A \subseteq U\}$.
2. μ ist ein **Borelmaß**, daß heißt, für jede kompakte Teilmenge $K \in \mathcal{B}$ gilt $\mu(K) < \infty$.
3. Das Maß μ ist invariant unter Rechtstranslationen: $R_{g,*}\mu = \mu$.

Wir definieren die lineare Abbildung

$$R_g^* : L^p(G, \mathcal{B}, \mu) \to L^p(G, \mathcal{B}, \mu) \ , \quad R_g^* := f \circ R_g \ .$$

Es folgt unmittelbar aus der Transformationsformel und der Rechtsinvarianz von μ, daß $R_{g,*}$ ein isometrischer Isomorphismus von Banachräumen ist. Man kann folgende Aussagen zeigen: Sei $p \in [1, \infty)$.

1. Für jedes $f \in L^p(G, \mathcal{B}, \mu) \cap C(G)$ ist die Abbildung

   $$G \ni g \mapsto R_g^* f \in L^p(G, \mathcal{B}, \mu)$$

   stetig. In der Tat gilt $\lim_{h \to g} R_h^* f = R_g^* f$ punktweise. Wir schließen die Konvergenz in $L^p(G, \mathcal{B}, \mu)$ mit Hilfe des Satzes über majorisierte Konvergenz 24.1.
2. $C_c(G)$ ist dicht in $L^p(G, \mathcal{B}, \mu)$. Das zeigt man mit Hilfe der Faltung, welche später bespochen wird, siehe Definition 33.8.
3. Aus 1. und 2. kann man schließen, daß

   $$G \ni g \mapsto R_g^* f \in L^p(G, \mathcal{B}, \mu)$$

   für jedes $f \in L^p(G, \mathcal{B}, \mu)$ stetig ist. Man sagt, daß $G \ni g \mapsto R_g^* \in B(L^p(G, \mathcal{B}, \mu))$ **stark stetig** ist.

Sei $f \in L^p(G, \mathcal{B}, \mu)$ und $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G mit $\lim_{i\to\infty} g_i =: g \in G$. Sei weiter $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Dann finden wir nach 2. eine Funktion $\phi \in C_c(G)$ mit

$$\|f - \phi\|_p \le \frac{\epsilon}{3}$$

und nach 1. ein $N \in \mathbb{N}$ derart, daß aus $i \in \mathbb{N}$ und $i \ge N$ folgt

$$\|R^*_{g_i}\phi - R^*_g\phi\| \le \frac{\epsilon}{3} \ .$$

Dann gilt für $i \in \mathbb{N}$ mit $i \in \mathbb{N}$ auch

$$\|R^*_{g_i}f - R^*_g f\|_p \le \|R^*_{g_i}f - R^*_{g_i}\phi\|_p + \|R^*_{g_i}\phi - R^*_g\phi\|_p + \|R^*\phi - R^*_g f\|_p \le \epsilon \ .$$

Wir haben hier benutzt, daß R_g für alle $g \in G$ eine Isometrie ist.

4. Die Abbildung $G \ni g \mapsto B(L^p(G, \mathcal{B}, \mu))$ ist nicht stetig, wenn G nicht diskret ist.

   Wenn $g, h \in G$ und $g \ne h$ gilt, dann existiert eine Teilmenge $A \in \mathcal{B}$ mit $Ag \cap Ah = \emptyset$ und $\mu(A) \in (0, \infty)$. Wir betrachten $f := \frac{\chi_A}{\sqrt[p]{\mu(A)}}$. Dann gilt $\|f\|_p = 1$ und $\|R^*_g f - R^*_h f\|_p = \sqrt[p]{2}$. Folglich gilt $\|R^*_g - R^*_h\|_{B(L^p(G,\mathcal{B},\mu))} \ge \sqrt[p]{2}$.

31 $L^2(\Omega, R, \mu)$ als Hilbertraum

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Wir betrachten den Banachraum $L^2(\Omega, R, \mu)$. Für $f, g \in L^2(\Omega, R, \mu)$ ist $fg \in L^1(\Omega, R, \mu)$. Wir definieren

$$\langle f, g\rangle := \int fg d\mu \ .$$

Dies ist ein Skalarprodukt. Insbesondere gilt $\langle f, f\rangle = \|f\|_2^2$. Damit ist

$$(L^2(\Omega, R, \mu), \langle ., .\rangle)$$

ein reeller Hilbertraum. Durch Komplexifizieren erhalten wir einen komplexen Hilbertraum

$$L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, R, \mu) := L^2(\Omega, R, \mu) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

mit dem hermiteschen Skalarprodukt

$$\langle f \otimes \lambda, g \otimes \mu\rangle = \langle f, g\rangle\bar{\lambda}\mu \ .$$

Es ist üblich, die Elemente von $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, R, \mu)$ als Äquivalenzklassen komplexwertiger Funktionen zu verstehen und das Skalarprodukt in der Form

$$\langle f, g\rangle = \int \bar{f} g d\mu$$

zu schreiben. Gewöhnlich läßt man auch den Index $(-)_{\mathbb{C}}$ in der Notation weg.

Das Skalarprodukt ermöglicht in Hilberträumen Konstruktionen welche in allgemeinen Banachräume nicht ohne weiteres funktionieren.

1. Sei $(H, \langle ., . \rangle)$ ein Hilbertraum und $U \subseteq H$ ein Unterraum. Dann können wir das **orthogonale Komplement**

   $$U^\perp := \{h \in H \mid (\forall u \in U \mid \langle u, h \rangle = 0)\} .$$

   Nach Konstruktion ist $U^\perp$ abgeschlossen und es gilt $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Wenn U selbst abgeschlossen ist, dann gilt $U = (U^\perp)^\perp$ und $H = U \oplus U^\perp$.

2. Sei $(H, \langle ., . \rangle)$ ein Hilbertraum und $U \subseteq H$ ein abgeschlossener Unterraum. Für $h \in H$ existiert genau ein $u \in U$ derart, daß

   $$\|h - u\| = \inf\{\|h - v\| \mid v \in U\} .$$

   Das Element u heißt **die Projektion von** h **auf** U und ist durch die Bedingung $(h-u) \perp U$ charakterisiert und $h = u+(h-u)$ ist die Zerleung von h bezüglich $H = U \oplus U^\perp$. Während die Eindeutigkeit von u aus den Eigenschaften des Skalarproduktes folgt, ist die Existenz eine Konsequenz der Vollständigkeit von H.

3. Sei $(H, \langle ., . \rangle)$ ein Hilbertraum und $(e_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in H. Sie heißt vollständig (oder auch **Hilbertbasis**), wenn für jedes $x \in H$ gilt

   $$x = \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i .$$

   Ein Hilbertraum ist genau dann separabel, wenn er eine abzählbare Hilbertbasis besitzt. Es hilt

   $$\|h\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle e_i, h \rangle|^2 .$$

4. Sei $(H, \langle ., . \rangle)$ ein Hilbertraum. Die Abbildung

   $$I : H \to H' , \quad I(h)(v) := \langle h, v \rangle$$

   ist eine antilineare Isometrie (Satz von Riesz).

   Aus den Relationen $|I(h)(v)| \leq \|h\|\|v\|$ und $|I(h)(h)| = \|h\|^2$ folgt das I eine isometrische Einbettung ist.

   Sei $\phi \in H'$. Dann ist $U := \ker(\phi)$ ein abgeschlossener Unterraum und $\dim(U^\perp) = 1$. Sei $h \in U^\perp$ derart normiert, daß $\phi(h) = 1$. Dann gilt $\phi = I(h)$. Dies zeigt die Surjektivität von I.

5. Sei $(H, \langle ., . \rangle)$ ein Hilbertraum. Ein Operator $A \in B(H)$ besitzt einen adjungierten A^*, welcher durch

   $$\langle A^* h, v \rangle = \langle h, Av \rangle$$

   charakterisiert ist. In der Tat ist $A^* := I \circ A \circ I^{-1}$.

Beispiel 31.1. Das typische Beispiel eines separablen Hilbertraumes ist

$$\ell^2 := L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) ,$$

wobei μ das Zählmaß ist. Sei $e_i \in \ell^2$ die Funktion $e_i(j) := \delta_{i,j}$. Dann ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Hilbertbasis.

Jeder andere separable unendlich-dimensionale Hilbertraum H ist zu ℓ^2 isomorph. Ist nämlich $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Hilbertbasis in H, dann ist

$$\Phi : H \to \ell^2 , \quad \Phi(x) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle h_i, x\rangle e_i$$

ein Isomorphismus. Die inverse Abbildung ist durch

$$\Psi : \ell^2 \ni (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i\in I} a_i h_i \in H$$

gegeben. Man rechnet leicht nach, daß Φ und Ψ Isometrien sind.

Beispiel 31.2. Sei G eine kompakte topologische abelsche Gruppe und $(G, \mathcal{B}, \mu)$ der Haarsche Maßraum, siehe Beispiele 27.8 und 30.6. Dort war der Satz 27.9 (hier als Satz 31.5 formuliert) offen geblieben. Wir müssen folgenden Satz aus der Theorie lokalkompakter abelscher topologischer Gruppen investieren, der nicht rein maßtheoretisch ist.

Satz 31.3. *Sei G eine lokalkompakte Gruppe und $x, y \in G$. Dann existiert ein Charakter $\chi \in \hat{G}$ mit $\chi(x) \neq \chi(y)$.*

Wir verifizieren diese Aussage in unseren Beispielen explizit.

1. Für die Gruppe $U(1)$ trennt der Charakter $\chi = \mathrm{id}_{U(1)}$ die Punkte.
2. Für die Gruppe $\mathbb{R}$ trennen die Charaktere $(\chi_\xi)_{\xi\in\mathbb{R}}$, $\chi_\xi(x) := \exp(ix\xi)$ die Punkte.
3. Wenn G endlich ist, folgt aus $|G| = |\hat{G}|$, daß $\hat{G}$ die Punkte trennt.
4. Wir betrachten nun $G = \mathbb{Z}_p$. Wenn $x, y \in \mathbb{Z}_p$ und $x \neq y$, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ derart, daß $\mathrm{pr}_k(x) \neq \mathrm{pr}_k(y)$, wobei $\mathrm{pr}_k : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ die Projektion ist. Dann existiert nach 3. ein Charakter $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}}$ derart, daß $\chi(\mathrm{pr}_k(x))) \neq \chi(\mathrm{pr}_k(y))$. Damit ist $\mathrm{pr}_k^*\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_p}$ und es gilt $(\mathrm{pr}_k^*\chi)(x) \neq (\mathrm{pr}_k^*\chi)(y)$.

Wir benutzen einen weiteren Satz, den wir nur im Spezialfall verifizieren werden.

Satz 31.4. *Sei G eine kompakte topologische abelsche Gruppe und $p \in [1, \infty)$. Dann ist $C(G)$ in $L^p(G, \mathcal{B}, \mu)$ dicht.*

Im allgemeinen konstruiert man stetige Approximationen einer Funktion in $L^p(G, \mathcal{B}, \mu)$ durch Glättung zum Beispiel durch Faltung mit den Elementen einer δ-Folge. Siehe Beispiel 30.6.

Im Fall der Gruppe $\mathbb{Z}_p$ kann man anders argumentieren. Die Menge $\mathcal{E}(\mathbb{Z}_p, R)$ besteht aus stetigen Funktionen und diese Menge ist schon dicht in $L^p(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}, \mu)$ nach dem Beweis von Satz 30.3.

Satz 31.5. *Die Menge $\hat{G}$ ist eine Hilbertbasis von $L^2(G, \mathcal{B}, \mu)$.*

Proof. Die lineare Hülle A von $\hat{G}$ in $C(G)$ ist eine Algebra. Wegen $1 \in \hat{G}$ und $\bar{\chi} = \chi^{-1}$ ist $1 \in A$ und $\bar{A} = A$. Nach Satz 31.3 trennt A die Punkte. Damit ist A in $C(G)$ dicht in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz und damit in der durch $\| - \|_2$-induzierten Topologie.

Wir schließen mit Satz 31.4, daß die lineare Hülle von $\hat{G}$ in $L^2(G, \mathcal{B}, \mu)$ dicht liegt. Folglich ist $\hat{G}$ eine Hilbertbasis. $\square$

Beispiel 31.6. Der Raum $L^2(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}, \mu)$ ist ein separabler Hilbertraum. Die Familie $(\phi_z)_{z \in \mathcal{EW}(p^\infty)}$ (Notation von Beispiel 27.8) ist eine abzählbare Hilbertbasis.

Beispiel 31.7. Der Raum $L^2([0,1], \mathcal{B}, \lambda_{|[0,1]})$ ist ein separabler Hilbertraum. Die Familie $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $f_n(x) := e^{2\pi i n x}$ ist eine Hilbertbasis.

Der Isomorphismus Φ ordnet in diesem Fall der Funktion $f \in L^2([0,1], \mathcal{B}, \lambda_{|[0,1]})$ die Folge $\Phi(f)$ ihrer Fourierkoeffizienten $a_n(f) := \langle f_n, f \rangle$ zu. Die Plancherelformel

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n(f)|^2$$

drückt dann einfach die Tatsache aus, daß Φ eine Isometrie ist.

Der Hilbertraum $L^2([0,1], \mathcal{B}, \lambda_{|[0,1]})$ ist eine explizite Realisierung des Hilbertraumes, welcher früher durch abstrakte Vervollständigung des Raumes $C([0,1], \mathbb{C})$ in der Norm $\| - \|_2$ gewonnen wurde. In der Tat enthält $L^2([0,1], \mathcal{B}, \lambda_{|[0,1]})$ den Raum $C([0,1], \mathbb{C})$ als dichte Teilmenge.

Wir betrachten die Abbildung

$$T : [0,1] \to U(1) \ , \quad T(x) := \exp(2\pi i x) \ .$$

Dann ist

$$T : ([0,1], \mathcal{B}, \lambda_{|[0,1]}) \to (U(1), \mathcal{B}, \mu)$$

ein Isomorphismus von Maßräumen. Mit Hilfe von T können wir dieses Beispiel der Fouriertheorie für kompakte abelsche Gruppen verstehen. Die Funktionen $T^{-1,*} f_n$, $n \in \mathbb{N}$ sind nämlich genau die Charaktere von $U(1)$.

Beispiel 31.8. Wir betrachten einen Shiftraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ zur Verteilung $p : A \to [0,1]$. Der Schift $T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ induziert einen Operator

$$S := T^* : L^2(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu) \to L^2(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu) \ .$$

Man kann nachrechnen, daß

$$(S^* f)(a_0, a_1, \dots) = \sum_{a \in A} p(a) f(a, a_0, a_2, \dots)$$

gilt. Weiter ist

$$S^* S = \mathrm{id} \ , \quad S S^* =: 1 - P \ ,$$

wobei P der orthogonale Projektor auf den Kern von S^* ist.

Wir untersuchen nun den Eigenraum von S zum Eigenwert 1, also $\ker(S-1) \subseteq L^2(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$.

Lemma 31.9. *Es gilt* $\dim(\ker(S-1)) = 1$*. Der Eigenraum wird von den konstanten Funktionen aufgespannt.*

Proof. Wenn $x \in L^2(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ durch eine konstante Funktion repräsentiert wird, dann gilt sicher $S(x) = x$. Wir zeigen nun die Umkehrung. Sei $[f] \in \ker(S-1)$. Da $\mu(A^{\mathbb{N}}) < \infty$ gilt, ist $f \in \mathcal{L}^1(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$. Wir betrachten den Mittelwert $\bar{f} := \int f d\mu$ und setzen $g := f - \bar{f}$. Dann gilt $T^*(g) = g$ auf dem Komplement N^c einer Nullmenge $N \in \mathcal{B}$. Wir betrachten die Teilmengen $X^{\pm} := \{\pm g > 0\}$. Wir wollen zeigen, daß $\mu(X^{\pm}) = 0$ gilt. Daraus folgt $g = 0$ fast überall und das ist die Behauptung.

Wir nutzen die Ergodizität der Transformation T aus. Es gilt $T^{-1}(X^{\pm}) \cap N^c = X^{\pm} \cap N^c$. Daraus schließen wir, daß $\mu(T^{-1}(X^{\pm}) \ \triangle \ X^{\pm}) = 0$ und deshalb nach Lemma 17.11 $\mu(X^{\pm}) \in \{0, 1\}$. Es kann nur eine dieser beiden Mengen ein von Null verschiedenes Maß haben, da $\mu(A^{\mathbb{N}}) = 1$ gilt. Aus $\mu(X^{\pm}) = 1$ würde $\pm \int g d\mu > 0$ folgen. Es gilt aber nach Konstruktion $\int g d\mu = 0$. □

32 Produkt von Maßräumen

Wir erinnern an die Definition des Produktes einer Familie meßbarer Räume in Kapitel 7. Wir betrachten nun zwei Maßräume (Ω_i, R_i, μ_i), $i = 0, 1$. Sei $(\Omega, R) := (\Omega_0, R_0) \times (\Omega_1, R_1)$ das Produkt der unterliegenden meßbaren Räume. Es gilt $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1$ und R ist die kleinste σ-Algebra, welche $R_0 \times R_1 \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ enthält. Es stellt sich die Frage, ob und wieviele Maße μ auf (Ω, R) existieren mit $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1)$ für $A_i \in R_i$. Beachte, daß hier R von Produkten der Form $A_0 \times A_1$ erzeugt wird.

Wir haben schon gesehen, daß es genau ein Prämaß auf der von $R_0 \times R_1$ erzeugten Algebra R^0 mit dieser Eigenschaft gibt. Wenn es σ-additiv ist, dann kann man es zu einem

Maß ausdehnen. Unter einer σ-Endlichkeintsannahme ist diese Ausdehnung eindeutig. Mit Hinblick auf den noch zu zeigenden Satz von Fubini werden wir hier einen anderen Weg gehen.

Satz 32.1. *Wenn der Maßraum (Ω_1, R_1, μ_1) σ-endlich ist, dann gibt es eine Ausdehnung des Produktprämasses auf R^0 zu einem Maß auf R.*

Proof. Wir definieren die folgenden drei Teilmengen $\mathcal{F}_i \subseteq \mathbb{R}^\Omega$, $i = 0, 1, 2$.

1. $\mathcal{F}_0$ ist die Teilmenge der charakteristischen Funktionen $\chi_{A_0 \times A_1}$ für alle Paare $(A_0, A_1) \in R_0 \times R_1$.
2. $\mathcal{F}_1$ ist die Teilmenge der Funktionen $f \in \mathbb{R}^\Omega$ mit folgenden Eigenschaften:
   (a) Für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ ist die Funktion $f(\omega_0, -)$ in $\mathcal{L}^1(\Omega_1, R_1, \mu_1)$.
   (b) Für jedes $B \in R_1$ ist die auf Ω_0 definierte Funktion
   $$\int_B f(-, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$
   meßbar
3. $\mathcal{F}_2$ ist die Teilmenge der Funktionen $f \in \mathbb{R}^\Omega$ mit folgenden Eigenschaften:
   (a) Für jedes $g \in \mathcal{F}_1$ ist auch $fg \in \mathcal{F}_1$.
   (b) Es gilt $\sup_\Omega |f| < \infty$.

Lemma 32.2. *1. Wenn $(A_0 A_1) \in R_0 \times R_1$ und $\mu_1(A) < \infty$, dann gilt $\chi_{A_0 \times A_1} \in \mathcal{F}_1$.*

2. Die Teilmenge $\mathcal{F}_1$ ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^\Omega$.

3. Die Teilmenge $\mathcal{F}_2$ ist ein unter der Multiplikation abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathbb{R}^\Omega$, also ein Unterring.

4. Es gilt $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_2$

Proof. Die ersten drei Behauptungen sind offensichtlich. Wir zeigen die vierte.

Seien $(A_0, A_1) \in R_0 \times R_1$ und $g \in \mathcal{F}_1$. Für $\omega_0 \in \Omega_0$ gilt

$$(\chi_{A_0 \times A_1} g)(\omega_0, -) = \chi_{A_0}(\omega_0) \chi_{A_1}(-) g(\omega_0, -) \ .$$

Diese auf Ω_1 definierte Funktion ist meßbar, durch $|g(\omega_0, -)|$ beschränkt und damit integrierbar. Es gilt

$$\int_{\Omega_1} (\chi_{A_0 \times A_1} g)(\omega_0, -) d\mu_1 = \chi_{A_0}(\omega_0) \int_{A_1} g(\omega_0, -) d\mu_1 \ .$$

Diese Funktion von $\omega_0 \in \Omega_0$ ist ein Produkt zweier meßbarer Funktionen und damit selbst meßbar.

Da die Funktion $\chi_{A_0 \times A_1}$ beschränkt ist, gilt $\chi_{A_0 \times A_1} \in \mathcal{F}_2$. □

Wir definieren nun die Teilmenge

$$U := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \chi_A \in \mathcal{F}_2\}$$

von $\mathcal{P}(\Omega)$. Die Teilmenge U ist eine Algebra, da $\mathcal{F}_2$ ein Ring ist. Wir möchten ein Maß auf U durch

$$\mu : U \to [0, \infty] \ , \quad \mu(A) := \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \chi_A(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu(\omega_0)$$

definieren. Wir müssen zeigen, daß μ wohldefiniert, die Algebra U eine σ-Algebra und μ ein σ-additives Maß ist.

Wir zeigen zunächst, daß die Integranden in der Definition von $\mu(A)$ meßbar sind. Wegen unserer σ-Endlichkeitsannahme finden wir eine aufsteigende Folge von Teilmengen $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von R_1 mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \Omega_1$ und $\mu(B_i) < \infty$. Wir setzen $\kappa_i := \chi_{\Omega_0 \times B_i} \in \mathcal{F}_0$. Dann gilt wegen Lemma 32.2, 1. daß $\kappa_i \in \mathcal{F}_1$. Für $A \in U$ ist also $\kappa_i \chi_A \in \mathcal{F}_1$ und damit für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ die auf Ω_1 definierte Funktion

$$\kappa_i(\omega_0, -)\chi_A(\omega_0, -)$$

meßbar und integrierbar. Damit ist für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ der Grenzwert

$$\chi_A(\omega_0, -) = \lim_{i \to \infty} \kappa_i(\omega_0, -)\chi_A(\omega_0, -)$$

meßbar. Weiter ist

$$\int_{\Omega_1} \kappa_i(-, \omega_1)\chi_A(-, \omega_1) d\mu(\omega_1) = \int_{B_i} \chi_A(-, \omega_1) d\mu(\omega_1)$$

meßbar. Die Folge $(\kappa_i \chi_A)_{i \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und konvergiert gegen χ_A. Aus dem Satz über monotone Konvergenz schließen wir, daß die auf Ω_0 definierte Funktion

$$\int_{\Omega_1} \chi_A(-, \omega_1) d\mu(\omega_1)$$

als punktweiser Grenzwert meßbarer Funktionen auch meßbar ist (Satz 8.4 und Satz 21.4).

Für disjunkte $A, A' \in U$ gilt $\chi_{A \cup A'} = \chi_A + \chi_{A'}$. Unter Ausnutzung der Meßbarkeit der Integranden in der Definition von μ schließen wir mit Satz 22.3, 1., daß $\mu(A \cup A') = \mu(A) + \mu(A')$ gilt. Damit ist μ ein Prämaß auf der Algebra U.

Wir zeigen nun, daß U eine σ-Algebra ist. Wir weisen dazu die Abgeschlossenheit unter Vereinigungen abzählbarer aufsteigender Folgen nach. Sei also $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende

Folge in U und $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Sei $g \in \mathcal{F}_1$. Dann ist für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ die auf Ω_1 definierte Funktion

$$\chi_A(\omega_0, -)g(\omega_0, -) = \lim_{k\to\infty} \chi_{A_k}(\omega_0, -)g(\omega_0, -)$$

als Grenzwert einer Folge meßbarer Funktionen meßbar. Weiter ist $|(\chi_A g)(\omega_0, -)| \leq |g(\omega_0, -)|$ und damit die Funktion $(\chi_A g)(\omega_0, -)$ für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ integrierbar. Für jedes $B \in R_1$ ist die auf Ω_0 definierte Funktion

$$\int_B \lim_{k\to\infty} \chi_{A_k}(-, \omega_1)g(-, \omega_1)d\mu_1(\omega_1) = \lim_{k\to\infty} \int_B \chi_{A_k}(-, \omega_1)g(-, \omega_1)d\mu_1(\omega_1)$$

meßbar (hier haben wir den Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz 24.1 mit Majorante $|g|$ angewendet). Wir schließen, daß $\chi_A \in \mathcal{F}_2$ und $A \in U$ gilt. Damit ist U eine σ-Algebra.

Wir zeigen nun die σ-Additivität von μ. Wir setzen das Argument mit den schon eingeführten Bezeichnungen fort. Durch mehrfache Anwendung des Satzes über monotone Konvergenz erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \lim_{k\to\infty} \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1)d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&= \int_{\Omega_0} \lim_{k\to\infty} \left(\int_{\Omega_1} \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1)d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1)d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \ .
\end{aligned}$$

Dies zeigt die σ-Additivität von μ.

Nach Lemma 32.2, 4. gilt $R_0 \times R_1 \subseteq U$ und damit $R^0 \subseteq R \subseteq U$. Es folgt nun direkt aus der Definition, daß $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1)$. Damit dehnt $\mu_{|R}$ das Produktprämaß auf R^0 zu einem Maß auf R aus. □

Der folgende Satz beantwortet die Frage nach der Eindeutigkeit.

Satz 32.3. *Wenn die Maßräume (Ω_i, R_i, μ_i) für $i = 0, 1$ σ-endlich sind, dann gibt es genau ein Maß auf (Ω, R) mit $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu(A_1)$ für alle Paare $(A_0, A_1) \in R_0 \times R_1$.*

Proof. Das Prämaß auf R^0 ist durch $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu(A_1)$ eindeutig bestimmt. Der Prämaßraum $(\Omega, R^0, \mu_{|R^0})$ ist σ-endlich und σ-additiv. Damit besitzt μ eine eindeutige Ausdehnung auf R. □

Wir ziehen nun eine Folgerung aus dem Beweis des Existenzsatzes. Sei U die σ-Algebra, welche im Beweis konstruiert wurde.

Folgerung 32.4. *Sei (Ω_1, R_1, μ_1) σ-endlich. Wenn $f \in \mathcal{L}(\Omega, U)$, dann ist für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ die auf Ω_1 definierte Funktion $f(\omega_0, -)$ meßbar.*

Proof. Wir finden eine aufsteigende Folge $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ in R_1 mit $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} B_\alpha = \Omega_1$ und $\mu_1(B_\alpha) < \infty$. Dann ist $\chi_{\Omega_0\times B_\alpha} \in \mathcal{F}_1$. Ist $A \in U$, dann ist mit $A_\alpha := A \cap (\Omega_0 \times B_\alpha)$ auch $\chi_{A_\alpha} = \chi_A \chi_{\Omega_0\times B_\alpha} \in \mathcal{F}_1$. Damit ist $\chi_{A_\alpha}(\omega_0, -)$ für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ meßbar. Wegen $\chi_A = \lim_{\alpha\to\infty} \chi_{A_\alpha}$ gilt diese Eigenschaft auch für χ_A.

Damit gilt diese Eigenschaft für die einfachen Funktionen auf (Ω, U). Für allgemeine $f \in \mathcal{L}(\Omega, U)$ folgt die Aussage durch Darstellung von f als punktweiser Grenzwert einer Folge einfacher Funktionen. □

Beispiel 32.5. Wir argumentieren, daß man den Lebesguemaßraum von $\mathbb{R}^2$ als Produkt von zwei Kopien des Lebesguemaßraumes von $\mathbb{R}^1$ erhalten kann. Der Lebesgue-Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda_\mathbb{R})$ ist σ-endlich. Wir können also die σ-Algebra $U \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ und das Maß μ auf U wie im Beweis von 32.1 bilden. Wir hatten schon gesehen, daß $R^\sigma(\mathcal{B}_\mathbb{R} \times \mathcal{B}_\mathbb{R}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ gilt. Weiter ist wegen $\mathcal{B}_\mathbb{R} \times \mathcal{B}_\mathbb{R} \subset U$ auch $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subseteq U$. Für $A, B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ gilt $\mu(A \times B) = \lambda_\mathbb{R}(A)\lambda_\mathbb{R}(B) = \lambda_{\mathbb{R}^2}(A \times B)$. Das Lebesguemaß $\lambda_{\mathbb{R}^2}$ ist durch diese Bedingung eindeutig festgelegt. Damit gilt

$$\mu_{|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = \lambda_{\mathbb{R}^2} \ .$$

Beispiel 32.6. In diesem Beispiel berechnen wir induktiv das Volumen $V_n(r)$ der n-dimensionalen Kugel $B_n(0, r)$ vom Radius $r \in (0, \infty)$ in $\mathbb{R}^n$.

Es gilt

$$V_1(r) = 2r \ .$$

Sei nun $n \geq 2$. Wir betrachten nun die Projektionen

$$\mathrm{pr} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1} \quad \mathrm{pr}(x_1, \ldots, x_n) := x_n \ .$$

und $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$. Es gilt für $x \in (-r, r)$.

$$q(\mathrm{pr}^{-1}(x) \cap B_n(0, r)) = B_{n-1}(0, \sqrt{r^2 - x^2}) \ .$$

Wir schließen, daß

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} V_{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})dx$$

gilt. Wir setzen $x = r\sin(\phi)$. Dann gilt $dx = r\cos(\phi)d\phi$ und

$$V_n(r) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_{n-1}(r\cos(\phi))r\cos(\phi)dx \ .$$

Wir sehen induktiv, daß

$$V_n(r) = r^n V_n(1)$$

gilt, also

$$V_n(1) = V_{n-1}(1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\phi)^n d\phi \ .$$

Beispiel 32.7. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ abgeschlossen und $x = (x', h) \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit $h > 0$. Dann bilden wir den Kegel

$$K_{A,x} := \{(1-t)y + tx \mid t \in [0,1] \text{ und } y \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

über A mit der Spitze in x. Sein Volumen ist durch das Produkt aus Grundfläche, Höhe und $\frac{1}{3}$ gegeben.

Lemma 32.8. *Es gilt*

$$\lambda_{\mathbb{R}^3}(A) = \frac{h\lambda_{\mathbb{R}^2}(A)}{3} \ .$$

Proof. Es gilt nach dem Satz von Fubini

$$\lambda_{\mathbb{R}^3}(K, x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{K(A,x)}(z', z_3) d\lambda_{\mathbb{R}^2}(z') \right) d\lambda_{\mathbb{R}}(z_3) \ .$$

Wir sehen, daß das innere Integral für $z_3 \not\in [0, h]$ veschwindet und in diesem Intervall durch

$$\lambda_{\mathbb{R}^2}((1 - h^{-1}z_3)A + h^{-1}z_3x') = (1 - h^{-1}z_3)^2 \lambda_{\mathbb{R}^2}(A)$$

gegeben ist. Das äußere Integral liefert

$$\int_0^h (1 - h^{-1}z_3)^2 dz_3 = \frac{h\lambda_{\mathbb{R}^2}(A)}{3} \ .$$

□

33 Iterierte Integrale

In diesem Abschnitt nehmen wir an, daß (Ω, R, μ) das Produkt zweier σ-endlicher Maßräume (Ω_i, R_i, μ_i), $i = 0, 1$ ist.

Lemma 33.1. *Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegativ. Dann ist die auf Ω_0 definierte Funktion*

$$\int_{\Omega_1} f(-, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

meßbar und es gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \ .$$

Proof. Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nicht-negativ. Wir wählen eine Folge $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ einfacher nichtnegativer Funktionen welche monoton wächst und punktweise gegen f konvergiert. Nach Folgerung 32.4 sind die Funktionen

$$f(\omega_0, -) \ , \quad \phi_i(\omega_0, -)$$

für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ meßbar. Es gilt nach dem Satz über monotone Konvergenz

$$\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) = \lim_i \int_{\Omega_1} \phi_i(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \ .$$

Da die auf Ω_0 definierten Funktionen

$$\int_{\Omega_1} \phi_i(-, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

wegen $R \subseteq U$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (siehe Beweis von Satz 32.1) meßbar sind, ist es auch

$$\int_{\Omega_1} f(-, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \ .$$

Die Formel

$$\int_\Omega \phi d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \phi(\omega_0, \omega_1) d\mu(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0)$$

gilt für charakteristische Funktionen $\phi = \chi_A$, $A \in R$, und damit für alle einfachen Funktionen ϕ. Weiter gilt wieder mit dem Satz über monotone Konvergenz, daß

$$\begin{aligned} \int_\Omega f d\mu &= \lim_{i\to\infty} \int_\Omega \phi_i d\mu \\ &= \int_{\Omega_0} \lim_{i\to\infty} \left(\int_{\Omega_1} \phi_i(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \ . \end{aligned}$$

□

Wir erinnern noch einmal an die Voraussetzung, daß wir das Produkt zweier σ-endlicher Maßräume betrachten.

Satz 33.2 (Satz von Fubini)**.** *Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Die auf Ω_0 definierten Funktionen*

$$\int_{\Omega_1} f^{\pm}(-, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

sind genau dann in $\mathcal{L}^1(\Omega_0, R_0, \mu_0)$, wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. In diesem Fall ist die Funktion $f(\omega_0, -)$ für fast alle $\omega_0 \in \Omega_0$ integrierbar und es gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \ .$$

Proof. Wir nehmen zunächst an, daß $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Wir wenden das obige Lemma auf $f^\pm$ an und sehen, daß

$$\int_{\Omega_1} f^\pm(-, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

in $\mathcal{L}^1(\Omega_0, R_0, \mu_0)$ sind. Insbesondere ist damit für fast alle $\omega_0 \in \Omega_0$ die Funktion $f(\omega_0, -)$ integrierbar. Dies begründet die Richtigkeit der folgenden Rechnung.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f d\mu &= \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f^+(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&\quad - \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f^-(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} (f^+(\omega_0, \omega_1) - f^-(\omega_0, \omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0)
\end{aligned}$$

Seien nun die Funktionen

$$\int_{\Omega_1} f^\pm(-, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

in $\mathcal{L}^1(\Omega_0, R_0, \mu_0)$. Dann gilt nach dem Lemma 33.1

$$\int_\Omega f^\pm d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f^\pm(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) < \infty \ ,$$

also $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. □

Wir halten als Folgerung fest.

Folgerung 33.3. *Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, dann gilt*

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_0} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_0(\omega_0) \right) d\mu_1(\omega_1)$$

Beispiel 33.4. Wir betrachten den Lebesgueschen Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Wir akzeptieren, daß wir für $f \in C_c(\mathbb{R})$ das Lebesgue-Integral und das Riemannintegral vergleichen können, d.h. daß wir die Identität

$$\int f d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

gezeigt haben (siehe Satz 27.2). Wir haben schon gesehen (siehe Beispiel 32.5), daß man $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_{\mathbb{R}^n})$ als das Produkt von n Kopien des Maßraumes $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ erhalten kann. Aus dem Satz von Fubini folgt nun, daß für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int f d\lambda_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \ ,$$

wobei die rechte Seite dieser Gleichung wie in Definition 1.4 definiert ist. Das beendet den Beweis von Satz 27.2.

Beispiel 33.5. Hier ist eine Anwendung des Satzes von Fubini (und der noch nicht gezeigten Transformationsformel für das Lebesguesche Maß unter Diffeomorphismen im mit ! markierten Schritt)

Lemma 33.6. *Es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \ .$$

Proof. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\lambda_{\mathbb{R}}(x))^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} (\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\lambda_{\mathbb{R}}(x)) d\lambda_{\mathbb{R}}(y) \\
&\overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} d\lambda_{\mathbb{R}}(x)) d\lambda_{\mathbb{R}}(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\|z\|^2}{2}} d\lambda_{\mathbb{R}^2}(z) \\
&\overset{!}{=} \int_0^\infty (\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} d\lambda_{\mathbb{R}}(\phi)) r d\lambda_{\mathbb{R}}(r) \\
&= 2\pi \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r d\lambda_{\mathbb{R}}(r) \\
&= -2\pi \int_0^\infty \frac{d}{dr} e^{-\frac{r^2}{2}} d\lambda_{\mathbb{R}}(r) \\
&= 2\pi \ .
\end{aligned}$$

□

Beispiel 33.7. Wir betrachten wieder den Haarschen Maßraum $(G, \mathcal{B}, \mu)$ zu einer lokalkompakten Gruppe. Wir betrachten die Abbildung

$$S : G \times G \to G \times G \ , \quad S(g, h) := (g, g^{-1}h) \ .$$

Diese Abbildung erhält das Produktmaß λ auf $G \times G$. In der Tat gilt für $A, B \in \mathcal{B}$, daß

$$\begin{aligned}
(S_*\lambda)(A \times B) &= \int_{G\times G} \chi_{A\times B}(g, g^{-1}h) d\lambda(g, h) \\
&= \int_G \chi(A)(g) (\int_G \chi(B)(g^{-1}) d\mu(h)) d\mu(g) \\
&= \int_G \chi(A)(g) (\int_G \chi(B)(h) d\mu(h)) d\mu(g) \\
&= \int_{G\times G} \chi_{A\times B}(g, h) d\lambda(g, h) \\
&= \lambda(A \times B) \ .
\end{aligned}$$

Seien $\phi, \psi \in L^1(G, \mathcal{B}, \lambda)$. Dann betrachten wir die Funktion

$$\phi \cdot \psi := \mathrm{pr}_1^* \phi \, \mathrm{pr}_2^* \psi \in L^1(G \times G, \mathcal{B}_{G \times G}, \lambda) \ .$$

Dann ist $S^*(\phi \cdot \psi) \in L^1(G \times G, \mathcal{B}_{G \times G}, \lambda)$. Damit ist aber

$$\phi * \psi : G \ni g \mapsto (\phi * \psi)(h) = \int_G S^*(\phi \cdot \psi)(g, h) d\mu(g) = \int_G \phi(g) \psi(g^{-1} h) d\mu(g)$$

in $L^1(G, \mathcal{B}, \mu)$.

Definition 33.8. *Die Funktion $\phi * \psi$ heißt die **Faltung** von ϕ und ψ.*

Mit Hilfe des Satzes von Fubini kann man folgende Aussagen zeigen.

1. Die Operationen $+$ und $*$ definieren auf $L^1(G, \mathcal{B}, \mu)$ die Struktur eine assoziativen Algebra über $\mathbb{C}$.

2. Für $\phi, \psi \in L^1(G, \mathcal{B}, \lambda)$ gilt

$$\|\phi * \psi\|_1 \leq \|\phi\|_1 \|\psi\|_1 \ .$$

3. Für $\phi, \psi \in L^1(G, \mathcal{B}, \lambda)$ und $h \in G$ gilt

$$L_h^*(\phi * \psi) = (L_h^* \phi) * \psi \ , \quad R_h^*(\phi * \psi) = \phi * (R_h^* \psi) \ .$$

4. Wenn $\phi \in C_c(\mathbb{R})$ und $\psi \in L^1(G, \mathcal{B}, \lambda)$, dann ist $\phi * \psi$ stetig.

5. Wir betrachten den Fall $G = \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, daß $\int \phi dx = 1$ gilt und definieren für $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ die Funktion $\phi_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\phi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \phi(\frac{x}{\epsilon}) \ .$$

   Dann gilt
$$\lim_{\epsilon \to 0} \|\phi_\epsilon * \psi - \psi\|_1 = 0 \ .$$

   Dies zeigt die Dichtheit von $C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$ in $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$. Eine ähnliche Idee funktioniert auch im Fall einer allgemeinen lokalkompakten Gruppe.

34 Abzählbare Produkte

Wir haben das Produkt zweier σ-endlicher Maßräume konstruiert. Die Konstruktion erweitert sich leicht auf endlich viele Faktoren.

Sei nun $(\Omega_i, R_i, \mu_i)_{i\in I}$ eine abzählbare Familie von Maßräumen mit $\mu_i(\Omega_i) = 1$ und (Ω, R) daß Produkt der unterliegenden meßbaren Räume. Wenn $S \subseteq I$ eine endliche Teilmenge ist, dann bilden wir den Maßraum

$$(\Omega_S, R_S, \mu_S) := \prod_{s\in S}(\Omega_s, R_s, \mu_s)$$

und betrachten die kanonische Projektion $\mathrm{pr}_S : \Omega \to \Omega_S$ die kanonische Projektion.

Satz 34.1. *Es gibt genau ein Maß μ auf (Ω, R) mit der Eigenschaft, daß $\mathrm{pr}_{S,*}\mu = \mu_S$ für alle endlichen Teilmengen $S \subseteq I$ gilt.*

Proof. Sei $R^0 \subset R$ die von den Algebren $\mathrm{pr}_S^{-1}(R_S)$ für alle endlichen $S \subseteq I$ erzeugte Algebra. Wir definieren μ zunächst als ein Prämaß auf R^0. Für $A \in R^0$ existiert ein endliches $S \subseteq I$ und ein (dann eindeutig bestimmtes) $\bar{A} \in R_S$ derart, daß $A = \mathrm{pr}_S^{-1}(\bar{A})$ gilt. Wir müssen $\mu(A) := \mu_S(\bar{A})$ setzen, um die Bedingung $\mathrm{pr}_{S,*}\mu = \mu_S$ zu erfüllen. Man kann sich nun davon überzeugen, daß diese Definition unabhängig von der Wahl von S ist. Desweiteren sieht man leicht ein, daß μ ein Prämaß ist und nach Konstruktion $\mathrm{pr}_{S,*}\mu = \mu_S$ für alle endlichen Teilmengen $S \subseteq I$ gilt.

Wir müssen nun zeigen, daß μ σ-additiv ist. Da das Maß μ ein Wahrscheinlichkeitsprämaß ist, hat es nach Satz 13.4 eine eindeutige Ausdehnung auf $R = R^\sigma(R^0)$.

Wir zeigen nun die σ-Additivität von μ. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß $I = \mathbb{N}$. Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Familie in R^0 derart, daß $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in R^0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $B_n := \bigcup_{i=n+1}^\infty A_i$. Dann gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Wir müssen zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$ gilt. Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge $S_n \subset \mathbb{N}$ derart gewählt, daß $B_n \in \mathrm{pr}_{S_n}^* R_{S_n}$. Wir können o.B.d.A. durch rekursive Vergrößerung dieser Mengen annehmen, daß

$$S_n = \{0, \dots, m_n\}$$

für eine monoton wachsende Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Sei $\bar{B}_n \in R_{S_n}$ derart, daß $\mathrm{pr}_{S_n}^{-1}(\bar{B}_n) = B_n$ gilt. Dann gilt $\mu(B_n) = \mu_{S_n}(\bar{B}_n)$.

Wir nehmen nun an, daß nicht $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$ gilt. Da die Folge nicht-negativer reeller Zahlen $(\mu(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt, gilt dann $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) > 0$. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\mu(B_n) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_{S_n\setminus\{1\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \tilde{x}) d\mu_{S_n\setminus\{1\}}(\tilde{x}) \right) d\mu_1(x_1) \ .$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz gibt es einen Punkt $x_1 \in \Omega_1$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_{S_n\setminus\{1\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \tilde{x}) d\mu_{S_n\setminus\{1\}}(\tilde{x}) \neq 0 \ .$$

Wir wenden wieder Fubini an und schreiben für große $n \in \mathbb{N}$ (mit $m_n \geq 2$)

$$\int_{\Omega_{S_n\setminus\{1\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \tilde{x}) d\mu_{S_n\setminus\{1\}}(\tilde{x}) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_{S_n\setminus\{1,2\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, x_2, \tilde{x}) d\mu_{S_n\setminus\{1,2\}}(\tilde{x}) \right) d\mu_2(x_2) \ .$$

Wir finden wieder mit dem Satz über monotone Konvergenz ein $x_2 \in \Omega_2$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_{S_n\setminus\{1,2\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, x_2, \tilde{x}) d\mu_{S_n\setminus\{1,2\}}(\tilde{x}) \neq 0 \ .$$

In der gleichen Weise verfahren wir weiter und finden eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_{S_n\setminus\{1,\dots,m\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \dots, x_m, \tilde{x}) d\mu_{S_n\setminus\{1,\dots,m\}}(\tilde{x}) \neq 0$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir haben für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\{x_1\} \times \cdots \times \{x_{m_n}\} \times \Omega_{m_n+1} \times \Omega_{m_n+2} \times \cdots \subseteq B_n \ .$$

Damit gilt aber $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Widerspruch! □

Beispiel 34.2. Sei $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ der Shiftraum über einer endlichen Menge A mit Dichte $p : A \to [0, 1]$. Wir betrachten das Wahrscheinlichkeitsmaß $\lambda := \sum_{a\in A} p(a)\delta_a$ auf A. Dann ist $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ das Produkt von abzählbar vielen Kopien des Maßraumes $(A, \mathcal{P}(A), \lambda)$ ist.

Beispiel 34.3. Wir können jetzt eine Folge zufälliger gleichverteilter Zahlen im Intervall $[0, 1]$ modellieren. Wir interpretieren diese Folgen als Elemente des Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, R, μ), den wir als Produkt einer durch $\mathbb{N}$ indizierten Familie von Kopien von $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda_{|[0,1]})$ konstruieren.

Typische Funktionen auf diesem Raum sind

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ ,$$

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (2x_i - 1) \ .$$

Es gilt

$$\mathbf{E}(M_n) = \frac{1}{2} \ .$$

$$\mathbf{E}(Z_n) = 0 \ ,$$

$$\mathbf{V}(Z_n) = \frac{1}{3} \ ,$$

$$\mathbf{F}_{Z_n}(\lambda) = \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda} \sin(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}) \right)^n$$

Man kann zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}_{Z_n}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2\cdot 3}}$$

gilt. Auch das ist wieder ein Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes.

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ eine 1-periodische Funktion und $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi int)$ die Fourierentwicklung. Wir können die Phasen der einzelnen Fourierkomponenten zufällig verschieben und bilden

$$f(t,(x_i)) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp(2\pi in(t+x_n)) \ .$$

Dann gilt

$$\mathbf{E}(f(t,-)) = a_0 \ ,$$
$$\mathbf{E}(|f(t,-)|^2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 \ .$$

35 Reguläre Maße

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein Hausdorffscher topologischer Raum.

Definition 35.1. *1. Der topologische Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt **lokalkompakt**, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.*

*2. Der topologische Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt σ-**kompakt**, wenn er als Vereinigung einer abzählbaren Familie von kompakten Unterräumen geschrieben werden kann.*

*3. Ein topologischer Raum heißt **metrisierbar**, wenn seine Topologie durch eine Metrik induziert werden kann.*

1. Ein kompakter topologischer Raum ist lokalkompakt und σ-kompakt.
2. $\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt, σ-kompakt und metrisierbar.
3. $\bigsqcup_{\mathbb{R}}[0,1]$ ist lokalkompakt und metrisierbar, aber nicht σ-kompakt.

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkompakter topologischer Raum, $(X,\mathcal{B})$ der assoziierte Borelsche meßbare Raum und μ ein Maß auf $(X,\mathcal{B})$. Durch folgende Begriffe werden topologische und maßtheoretische Eigenschaften verbunden.

Definition 35.2. *1. μ ist ein **Borelmaß**, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ gilt $\mu(K) < \infty$.*

*2. Eine meßbare Teilmenge $A \in \mathcal{B}$ heißt μ-**regulär**, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq X$ kompakt und $K \subseteq A\}$

(b) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \subseteq X$ offen und $A \subseteq U\}$.

*3. Ein Maß μ auf $(X,\mathcal{B})$ heißt **regulär**, wenn jedes Element von $\mathcal{B}$ μ-regulär ist.*

1. Eine meßbare Teilmenge A mit $\mu(A) < \infty$ ist also regulär genau dann, wenn es für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ und eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ gibt mit
$$K \subseteq A \subseteq U \ , \quad \mu(U \setminus K) < \epsilon \ .$$
2. Eine meßbare Teilmenge A mit $\mu(A) = \infty$ ist μ-regulär, wenn es für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ gibt mit
$$K \subseteq A \ , \quad N \leq \mu(K) \ .$$
3. Das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ ist ein Borelmaß.
4. Das Zählmaß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ ist kein Borelmaß.

Im folgenden wollen wir insbesondere die Regularität des Lebesguemaßes auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ zeigen (Lemma 35.5). Für den Nachweis der Regularität von Maßen sind die folgenden beiden Lemmata hilfreich.

Lemma 35.3. *Wenn $\mu(X) < \infty$ gilt, dann ist*
$$R_\mu := \{A \in \mathcal{B} \mid A \textit{ ist } \mu\textit{-regulär}\}$$
eine σ-Algebra.

Proof. Man zeigt zunächst, daß R_μ abgeschlossen unter der Bildung von endlichen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten sowie Komplenten ist. Das folgt leicht aus den folgenden mengentheoretischen Überlegungen:

Wenn für Teilmengen K, L, A, B, U, V von X die Relationen
$$K \subseteq A \subseteq U \ , \quad L \subseteq B \subseteq V$$
gelten, dann auch
$$K \cap L \subseteq A \cap B \subseteq U \cap V \ , \quad K \cup L \subseteq A \cup B \subseteq U \cup V$$
und
$$(U \cap V) \setminus (K \cap L) \subseteq (U \setminus K) \cup (V \setminus L) \quad (U \cup V) \setminus (K \cup L) \subseteq (U \setminus K) \cup (V \setminus L) \ .$$

Gelte nun $A \subseteq B$. Durch Verkleinern von U zu $U \cap V$ und Vergrößern von L zu $K \cup L$ können wir annehmen daß $K \subseteq L$ und $V \subseteq U$. Dann gilt
$$(K \setminus V) \subseteq (A \setminus B) \subseteq (U \setminus L) \ , \quad (U \setminus L) \setminus (K \setminus V) \subseteq (U \setminus K) \cup (V \setminus L) \ .$$

Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit unter abzählbaren Vereinigungen paarweise disjunkter Familien. Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Familie in R_μ und $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

Wir geben $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ vor. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ wählen wir $K_i, U_i \in \mathcal{B}$ derart, daß K_i kompakt, U_i offen, $K_i \subseteq A_i \subseteq U_i$ und $\mu(U_i \setminus K_i) < \epsilon 2^{-i}$ gilt. Es gilt dann

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(U_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) + 2\epsilon \ .$$

Da $\sum_{i=0}^{\infty} A_i \leq \mu(X) < \infty$ ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, daß $\sum_{i=N+1}^{\infty} \mu(U_i) < \epsilon$ gilt. Dann gilt mit $K_N := \bigcup_{i=0}^{N} K_i$ und $U := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$

$$K_N \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq U$$

und

$$\mu(U \setminus K_N) \leq 4\epsilon \ .$$

Die Teilmenge K_N ist kompakt und U ist offen. Da $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ beliebig gewählt werden kann, gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in R_\mu$.

□

Wenn $(X, \mathcal{B}, \mu)$ nicht endlich, aber $(X, \mathcal{T})$ σ-kompakt ist, dann ist folgendes Lemma hilfreich.

Lemma 35.4. *Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Familie kompakter Teilmengen von X mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = X$ und μ ein Borelmaß auf $(X, \mathcal{B})$, so daß $\mu_{|X_i}$ regulär ist. Dann ist auch μ regulär.*

Proof. Sei $A \in \mathcal{B}$. Wir müssen zeigen, daß A μ-regulär ist.

Wenn $\mu(A) = \infty$ gilt, dann gilt $\lim_{i \to \infty} \mu(A \cap X_i) = \infty$. Wir finden dann wegen der Regularität von $\mu_{|A_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine kompakte Teilmenge $K_i \subseteq X_i$ mit $\mu(K_i) \geq \mu(A_i \cap X_i) - 1$. Damit gilt $K_i \subseteq A$ und $\lim_{i \to \infty} \mu(K_i) = \infty$.

Sei nun $\mu(A) < \infty$. Dann betrachten wir die paarweise disjunkte Familie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $A_i := A \cap (X_i \setminus X_{i-1})$ und argumentieren wir im Beweis von Lemma 35.3, daß $A = \bigcup A_i$ μ-regulär ist. □

Lemma 35.5. *Das Lebesguemaß $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ ist ein reguläres Borelmaß.*

Proof. Wir betrachten den Fall $n = 1$ wegen der einfacheren Notation. Nach Lemma 35.4 reicht es zu zeigen, daß $\lambda_{|[-R,R]}$ für alle $R \in \mathbb{R}^{>}$ regulär ist.

Man sieht leicht ein, daß alle Intervalle $[a, b] \subseteq [-R, R]$ $\lambda_{|[-R,R]}$-regulär sind. Da diese Intervalle die σ-Algebra $\mathcal{B}_{[-R,R]}$ erzeugen, gilt nach Lemma 35.3 $R_{\lambda_{|[-R,R]}} = \mathcal{B}_{[-R,R]}$.

Analog zeigt man, daß das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ ein reguläres Borelmaß ist. $\square$

1. Die früher konstruierten Maße auf den p-adischen Zahlen $(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B})$ und Shifträumen $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ sind reguläre Borelmaße. In der Tat wird die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}$ in diesen Fällen von Teilmengen erzeugt, die gleichzeitig offen und kompakt sind. Daraus folgt sofort die Regularität jedes endlichen Maßes auf $\mathcal{B}$.

2. Wenn μ ein reguläres Borelmaß auf X ist, dann gilt $C_c(X) \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

3. Wir nehmen an, daß X kompakt ist und betrachten den Banachraum $C(X)$ mit der sup-Norm. Der **Darstellungssatz von Riesz** besagt, daß jede monotone stetige Linearform $q : C(X) \to \mathbb{R}$ von der Form

$$q(\phi) := \int \phi d\mu$$

für ein eindeutig bestimmtes reguläres Borelmaß μ auf $(X, \mathcal{B})$ ist. Monoton heißt hier, daß für alle $\phi \in C_c(X)$ gilt:

$$0 \leq \phi \ \rightarrow 0 \leq q(\phi) \ .$$

Es gilt ferner $\|q\| = \mu(\Omega)$.

Der Beweis des Rieszschen Darstellungssatzes wäre durchaus ein Thema für diese Vorlesung, wird aber aus Zeitgründen nicht durchgeführt. Die Idee für den Beweis der Existenzaussage ist, aus ϕ zunächst ein äußeres Maß zu gewinnen und daraus das gewünschte Maß zu konstruieren. Die Eindeutigkeitsaussage werden wir weiter unten zeigen (Lemma 35.6).

4. Wenn wir den Rieszschen Darstellungssatz auf die monotone stetige Linearform

$$C([-R, R]) \ni \phi \mapsto \int_{-R}^{R} \phi(x) dx \in \mathbb{R}$$

anwenden, dann erhalten wir das Maß $\lambda_{|[-R,R]}$. Diese Idee liefert eine alternative Konstruktion des Lebesguemaßes ohne Verwendung von Partitionen.

Wir brauchen eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeitsaussage im Darstellungssatz von Riesz.

Lemma 35.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter, σ-kompakter und metrisierbarer topologischer Raum und seien μ, ν zwei reguläre Borelmaße auf $(X, \mathcal{B})$ mit*

$$\int \phi d\mu = \int \phi d\nu$$

für alle nicht-negativen $\phi \in C_c(X)$. Dann gilt $\mu = \nu$.

Proof. Wir nehmen zunächst an, daß X kompakt ist. Sei $A \in \mathcal{B}$ eine meßbare Teilmenge von X. Dann gibt es wegen der Regularitätsannahme für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ und eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ derart, daß $K \subseteq A \subseteq U$ und

$$\mu(U \setminus K) < \epsilon\ , \quad \nu(U \setminus K) < \epsilon$$

gelten. Wegen der Metrisierbarkeit von X (Lemma von Urysohn) finden wir nun eine Funktion $\phi \in C_c(U)$ mit $\chi_K \le \phi \le \chi_U$. Hierbei nutzen wir aus, daß X metrisierbar ist. Dann gelten

$$|\int \phi d\nu - \nu(A)| < \epsilon\ , \quad |\int \phi d\mu - \mu(A)| < \epsilon$$

und folglich

$$|\mu(A) - \nu(A)| < 2\epsilon\ .$$

Da wir $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ beliebig vorgeben können, gilt $\mu(A) = \nu(A)$.

Den Fall, daß X nicht kompakt ist, reduzieren wir unter Verwendung der σ-Kompaktkeit von X auf den kompakten Fall. □

Beispiel 35.7. Wir betrachten auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ das Zählmaß μ und das Maß ν welches die rationalen Punkte zählt. Dann gilt

$$\int \phi d\mu = \int \phi d\nu = \infty$$

für jedes von Null verschiedenes $\phi \in C_c(\mathbb{R})$. Das zeigt, daß man die Bedingung “reguläres Borelmaß” im Lemma 35.6 nicht einfach weglassen darf.

36 Dichtefunktionen

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegativ. Dann wollen wir ein neues Maß $f\mu$ durch den folgenden Ansatz definieren:

$$f\mu : R \to [0, \infty], \quad (f\mu)(A) := \int_A f d\mu\ .$$

Wir müssen verifizieren, daß dadurch wirklich ein Maß definiert ist.

Lemma 36.1. *$f\mu$ ist ein Maß auf (Ω, R).*

Proof. Aus den elementaren Eigenschaften des Integrals folgt die endliche Additivität. Wir müssen also nur zeigen, daß $f\mu$ auch σ-additiv ist. Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Familie in R. Wir setzen $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Dann ist $(\chi_{A_i} f)_{i\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Familie nichtnegativer

Funktionen in $\mathcal{L}(\Omega, R)$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz (angewendet bei !) gilt

$$(f\mu)(A) = \int_\Omega \lim_{i\to\infty} \chi_{A_i} f d\mu \stackrel{!}{=} \lim_{i\to\infty} \int_\Omega \chi_{A_i} f d\mu = \lim_{i\to\infty} (f\mu)(A_i) \ .$$

□

1. Wir schreiben $f =_\mu g$, wenn $f = g$ fast überall gilt. Die Gleichung $\nu = f\mu$ bestimmt die Klasse $[f]$ bezüglich der Äquivalenzrelation $=_\mu$ auf $\mathcal{L}(\Omega, R)$ eindeutig.
2. Für jedes $A \in R$ gilt
$$\mu(A) = 0 \ \Rightarrow (f\mu)(A) = 0 \ .$$

Als Verschärfung (siehe Lemma 36.5) der in 2. beschriebenen Relation zwischen μ und $f\mu$ führen wir den folgenden Begriff ein:

Definition 36.2. *Ein Maß ν auf (Ω, R) ist **absolutstetig** bezüglich μ, falls für jedes $A \in R$ mit $\nu(A) < \infty$ gilt*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup\{\nu(B) \mid \{B \in R \mid B \subseteq A \wedge \mu(B) < \epsilon\}\} = 0 \ .$$

Lemma 36.3. *Das Maß $f\mu$ ist absolutstetig bezüglich ν.*

Proof. Das folgt unmittelbar aus Satz 24.3. □

Beispiel 36.4. Das Maß $|x|^{-1}\lambda$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist absolutstetig zu μ. Es ist kein Borelmaß auf $\mathbb{R}$, da etwa $(|x|^{-1}\lambda)([-1,1]) = \infty$ gilt. Die Einschränkung $(|x|^{-1}\lambda)_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ ist ein reguläres Borelmaß. Daraus folgt mit Lemma 35.4, daß $|x|^{-1}\lambda$ regulär ist.

Lemma 36.5. *Wenn das Maß ν auf (Ω, R) σ-endlich und absolutstetig bezüglich μ ist, dann gilt für alle $A \in R$, daß*

$$\mu(A) = 0 \ \Rightarrow \ \nu(A) = 0 \ .$$

Proof. Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine monotone Ausschöpfung von Ω durch meßbare Mengen endlichen ν-Maßes. Sei $A \in R$ eine μ-Nullmenge. Wäre $\nu(A) \neq 0$, dann wäre $\nu(A \cap A_i) \neq 0$ für ein geeignetes $i \in \mathbb{N}$. Damit wäre aber

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup\{\nu(B) \mid \{B \in R \mid B \subseteq A \wedge \mu(B) < \epsilon\}\} \geq \nu(A \cap A_i) \neq 0 \ ,$$

da

$$A \cap A_i \in \{B \in R \mid B \subseteq A \wedge \mu(B) < \epsilon\} \ .$$

□

Beispiel 36.6. Sei $(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}, \mu)$ der Haarsche Maßraum auf den p-adischen ganzen Zahlen und $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Sei $M(x) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ die Multiplikation mit x. Dann ist $M(x)_*\mu$ absolutstetig bezüglich μ ist. In der Tat gilt $M(x)_*\mu = f_x\mu$ mit

$$f_x(y) := \begin{cases} p^{\nu_p(x)} & \nu_p(y) \geq \nu_p(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

wobei $\nu_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{N}$ die Valuation ist mit $\nu_p(p^n u) := n$ für alle $u \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Beispiel 36.7. In diesem Beispiel studieren wir das Verhalten des Lebesguemaßes unter Differemorphismen. Ziel ist der Beweis der Transformationsformel.

Wir betrachten also den Lebesgue Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda)$. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten wir den Maßraum $(U, \mathcal{B}_U, \lambda_{|U})$. Sei $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenenen Teilmengen U, V von $\mathbb{R}^n$.

Lemma 36.8. *Das Maß $f_*\lambda_{|U}$ ist absolutstetig zu $\lambda_{|V}$. Es gelten die Gleichungen*

$$f_*\lambda_{|U} = \frac{1}{|\det(df)| \circ f^{-1}} \lambda_{|V} \ , \quad f_*(|\det(df)|\lambda_{|U}) = \lambda_{|V} \ .$$

Proof. Die beiden Gleichungen sind äquivalent. Wir zeigen die erste.

Wir wissen schon, daß das Lebesguemaß λ ein reguläres Borelmaß ist. Damit ist auch $f_{|U}$ ein reguläres Borelmaß. Da $f : U \to V$ ein Homöomorphismus ist, ist auch $f_*\lambda_{|U}$ ein reguläres Borelmaß. Das Maß

$$\frac{1}{|\det(df)| \circ f^{-1}} d\lambda_{|V}$$

ist offensichtlich auch regulär, da die Dichtfunktion

$$\frac{1}{|\det(df)| \circ f^{-1}}$$

stetig und damit lokal beschränkt ist.

Für jedes $\phi \in C_c(V)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_V \phi(x) d(f_*\lambda_{|U})(x) &= \int_U \phi(f(x)) d\lambda_{|U}(x) \\ &= \int_U \phi(f(x)) \frac{|\det(df)|(x)}{|\det(df)|(x)} d\lambda_{|U}(x) \\ &= \int_V \phi(x) \frac{1}{|\det(df)| \circ f^{-1}} d\lambda_{|V}(x) \ . \end{aligned}$$

Hier haben wir die Übereinstimmung von Riemann- und Lebesgueintegral (siehe Beispiel 33.4) und die Transformationsformel (Satz 1.6) verwendet.

Wir haben damit die Voraussetzungen von Lemma 35.6 nachgewiesen. Die Eindeutigkeitsaussage liefert die Relation

$$f_*\lambda_{|U} = |\det(df)|(f^{-1}(x))^{-1} d\lambda_{|V} \ .$$

□

Beispiel 36.9. Wir betrachten die offenen Teilmengen

$$U := (0,\infty) \times (0, 2\pi)$$

und

$$V := \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid (x,y) \notin \{0\} \times [0,\infty)\}$$

von $\mathbb{R}^2$. Die Polarkoordinaten liefern einen Diffeomorphismus

$$f : U \to V \ , \quad f(r,\phi) := (r\sin(\phi), r\cos(\phi)) \ .$$

Es gilt $\det(df)(r,\phi) = r$ und damit die bekannte Formel

$$f_*(r\lambda_{|U}) = \lambda_{|V} \ .$$

37 Signierte Maße, Hahnsche Zerlegung

Bisher hatten wir immer positive Maße betrachtet. In der Physik beschreibt man zum Beispiel Ladungsverteilungen als Maße. So wird ein Elektron am Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ durch $e\delta_x$ beschrieben, wobei $e < 0$ die Ladung des Elektron ist. Nun gibt es auch positiv geladene Teilchen. Ein System aus endlich vielen solchen Ladungen e_i an den Orten x_i ist dann durch $\sum_i e_i \delta_{x_i}$ modelliert, wobei die Zahlen $e_i \in \mathbb{R}$ verschiedene Vorzeichen haben. Dies ist ein typisches Beispiel eines signierten Maßes.

Sei (Ω, R) ein meßbarer Raum. Wir wollen signierte Maße als Abbildungen $\mu : R \to \bar{\mathbb{R}}$ definieren, welche σ-additiv sind. Dabei entsteht das folgende Problem. Sei $\mu(A) = \infty$ und $\mu(B) = -\infty$ für disjunkte $A, B \in R$. Was ist dann $\mu(A \cup B) = \infty - \infty$? Damit der die σ-Additivität beschreibende Ausdruck überhaupt definiert ist, muß also μ die folgende Annahme erfüllen:

Assumption 37.1. *Die Abbildung μ erfüllt mindestens eine der beiden Bedingungen:*

1. *M^+: Es gilt $\mu(A) > -\infty$ für alle $A \in R$.*
2. *M^-: Es gilt $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in R$.*

Definition 37.2. *Ein **signiertes Maß** ist eine Funktion $\mu : R \to \bar{\mathbb{R}}$ welche folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *μ erfüllt Annahme 37.1.*
2. *$\mu(\emptyset) = 0$.*

3. μ ist σ-additiv.

Typischer Weise enstehen signierte Maße wie folgt.

Lemma 37.3. *1. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Dann ist*

$$f\mu : R \to \bar{\mathbb{R}} \ , \quad (f\mu)(A) := \int_A f d\mu$$

ein signiertes Maß, welches beide Bedingungen $M^\pm$ erfüllt.

2. Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegativ. Dann ist

$$\pm f\mu : R \to \bar{\mathbb{R}} \ , \quad (\pm f\mu)(A) := \pm \int_A f d\mu$$

ein signiertes Maß, welches $M^\pm$ erfüllt.

Proof. Das folgt aus Lemma 36.1. □

Sei μ ein signiertes Maß auf (Ω, R).

Definition 37.4. *Eine Partition $\{S, T\} \subset R$ von Ω heißt **Hahnsche Zerlegung** von Ω zu μ, falls für alle $A \in R$ gilt*

$$\mu(A \cap S) \leq 0, \quad \textit{und} \quad \mu(A \cap T) \geq 0 \ .$$

Lemma 37.5. *Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Wir setzen $S := \{f^+ > 0\}$ und $T := \{f^- \geq 0\}$. Dann ist $\{S, T\}$ eine Hahnsche Zerlegung von Ω zu $f\mu$.*

Proof. Offensichtlich. □

Satz 37.6. *Sei μ ein signiertes Maß auf (Ω, R). Dann besitzt μ eine Hahnsche Zerlegung.*

Proof. Wir nehmen o.B.d.A. an (ersetze notfalls μ durch $-\mu$), daß μ die Bedingung M^+ erfüllt, also $\mu(A) > -\infty$ für alle $A \in R$ gilt. Für jedes $A \in R$ definieren wir

$$\mu^+(A) := \sup_{B \in R,\, B \subseteq A} \mu(B) \ .$$

Wegen $\mu(\emptyset) = 0$ gilt $\mu^+(A) \geq 0$. Weiter gilt für $A' \in R$ und $A' \subseteq A$, daß $\mu^+(A') \leq \mu^+(A)$.

Wir setzen

$$R^- := \{A \in R \mid \mu^+(A) = 0\} \ .$$

Nach Konstruktion gilt für $A \in R^-$, daß $\mu(A) \leq 0$.

Sei $a := \inf_{A\in R^-} \mu(A)$. Dann gilt $-\infty < a \leq 0$. In der Tat, wäre $a = -\infty$, dann gäbe es eine Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in R^- mit $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = -\infty$ und damit $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = -\infty$.

Sei $(S'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in R^- derart, daß die Folge reller Zahlen $(\mu(S'_i))_{i\in\mathbb{N}}$ monoton fällt und $\lim_{i\to\infty} \mu(S'_i) = a$ gilt. Wir setzen $S_j := S'_j \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} S'_i$. Sei ferner $S := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S'_i$ und $T := \Omega \setminus S$. Dann ist $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Zerlegung von S.

Für $A \in R$ gilt nun (beachte, daß $A \cap S_i \subseteq S'_i$ und deshalb $\mu(A \cap S_i) \leq \mu^+(S'_i)$ gilt)

$$\begin{aligned}
\mu(A\cap S) &= \mu(A \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A\cap S_i) \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^+(S'_i) \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß auch $\mu(A \cap T) \geq 0$ gilt.

Sei

$$F := \{A \in R \mid A \subseteq T \text{ und } \mu(A) < 0\} \ .$$

Wir müssen zeigen, daß $F = \emptyset$. Wir nehmen das Gegenteil an.

Zuerst zeigen wir, daß für alle $A \in F$ die Ungleichung $\mu^+(A) > 0$ gilt. Es gilt

$$\mu(S) = \mu(S \setminus S'_i) + \mu(S'_i)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\mu(S \setminus S'_i) = \mu(S \cap (S \setminus S'_i)) \leq 0$$

gilt

$$\mu(S) \leq \mu(S'_i)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und damit

$$-\infty < \mu(S) \leq \lim_{i\to\infty} \mu(S'_i) = a \ .$$

Aus der Definition von a, $S \cap A = \emptyset$ (da $A \subseteq T$) und $\mu(A) < 0$ (wegen $A \in F$)

$$a \geq \mu(S) > \mu(A) + \mu(S) = \mu(A \cup S)$$

folgt, daß $A \cup S \notin R^-$. Damit ist $\mu^+(A\cup S) > 0$. Also gibt es ein $B \subseteq A \cup S$ mit $0 < \mu(B)$. Dann gilt (wegen $S \cap A = \emptyset$ und $\mu(B \cap S) \leq 0$)

$$0 < \mu(B) = \mu(B \cap (A \cup S)) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap S) \leq \mu(B \cap A) \ .$$

Wegen $B \cap A \subseteq A$ gilt also $\mu^+(A) > 0$.

Wir konstruieren nun induktiv eine absteigende Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in R. Sei $A_0 \in F$ beliebig. Eine solche Menge existiert nach unserer Annahme. Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$ die Mengen A_i für $i \leq n$ schon konstruiert. Wir wählen $B_n \subseteq A_n$ derart, daß

$$\mu(B_n) \geq \left\{ \begin{array}{c|l} 1 & \mu^+(A_n) = \infty \\ \frac{1}{2}\mu^+(A_n) & \mu^+(A_n) < \infty \end{array} \right.$$

gilt. Wir setzen $A_{n+1} := A_n \setminus B_n$.

Wir definieren nun $A := A_0 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Es gilt dann

$$0 > \mu(A_0) = \mu(A) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \geq \mu(A) > -\infty \ .$$

Damit ist $A \in F$ und $0 < \mu^+(A) \leq \mu^+(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n)$. Also gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$. Daraus folgt aber auch $\lim_{n\to\infty} \mu^+(A_n) = 0$. Also gilt $\mu^+(A) = 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

38 Der Satz von Radon-Nikodym

Wir betrachten einen Maßraum (Ω, R, μ). Sei λ ein signiertes Maß auf (Ω, R).

Definition 38.1. *1. Eine Menge $T \subseteq R$ heißt **Träger** von λ, falls $\lambda(A) = 0$ für alle meßbaren $A \subseteq T^c$ gilt.*

*2. λ heißt **singulär** zu μ, falls λ einen Träger besitzt, welcher eine μ-Nullmenge ist.*

1. Das Diracmaß δ_0 singulär zu $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$. In der Tat ist $\{0\}$ ein Träger von δ_0, welche eine $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-Nullmenge ist.

2. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, so ist $\{f \neq 0\}$ ein Träger von $f\mu$.

3. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und (λ_n) eine Folge von zu μ singulären Maßen. Dann ist $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i$ ein zu μ singuläres Maß.

4. Sei (Ω, R, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Dann gibt es höchstens abzählbar viele Punkte $x \in \Omega$ mit $\mu(\{x\}) \neq 0$. Es gibt ein eindeutig bestimmtes Maß ν, welches zu $\sigma := \sum_{x\in\Omega} \mu(\{x\})\delta_x$ singulär ist, so daß $\nu + \sigma = \mu$ gilt.

Satz 38.2. *Sei (Ω, R, μ) ein σ-endlicher Maßraum und ν ein weiteres σ-endliches Maß auf (Ω, R). Dann existiert ein nichtnegatives $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ und ein zu μ singuläres Maß λ derart, daß $\nu = f\mu + \lambda$. Dabei ist ν eindeutig und f bis auf $'' =_\mu''$ eindeutig bestimmt.*

Proof. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeitsaussagen. Seien f_i und λ_i, $i = 0, 1$, wie im Satz. Seien $Z_i \in R$ Träger von λ_i mit $\mu(Z_i) = 0$. Wir setzen $Z := Z_0 \cup Z_1$. Dann ist Z eine μ-Nullmenge und damit auch eine $f\mu$-Nullmenge. Es gilt für $A \in R$ mit $A \subseteq Z$, daß $\lambda_0(A) = \nu(A) = \lambda_1(A)$. Für $A \in R$ mit $A \subseteq Z^c$ haben wir $\lambda_0(A) = 0 = \lambda_1(A)$. Damit gilt $\lambda_0 = \lambda_1$. Weiter gilt für $A \in R$ mit $A \subset Z^c$

$$(f_0\mu)(A) = \nu(A) = (f_1\mu)(A) \ .$$

Damit gilt $f_{0|Z^c} =_\mu f_{1|Z^c}$. Da Z selbst eine μ-Nullmenge ist, gilt $f_0 =_\mu f_1$.

Wir zeigen nun die Existenz von λ, ν mit den gewünschten Eigenschaften. Zunächst nehmen wir an, daß $\nu(\Omega) < \infty$ ist. Sei

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{L}(\Omega, R) \mid f \geq 0 \,\text{und}\, f\mu \leq \nu\} \ .$$

Diese Menge ist halbgeordnet durch folgende Relation:

$$f'' \geq'' g \ \text{ falls } \ f\mu \geq g\mu \ .$$

Wir zeigen, daß $\mathcal{F}$ ein maximales Element enthält, welches wir mit f bezeichnen werden.

Seien $h, g \in \mathcal{F}$. Dann ist auch $h \vee g \in \mathcal{F}$ (mit $h \vee g := \max\{h, g\}$). In der Tat gilt für alle $A \in R$, daß

$$\begin{aligned} ((h \vee g)\mu)(A) &= \int_A (h \vee g) d\mu \\ &= \int_{A \cap \{h \geq g\}} h \, d\mu + \int_{A \cap \{h < g\}} g \, d\mu \\ &\leq \nu(A \cap \{h \geq g\}) + \nu(A \cap \{h < g\}) \\ &= \nu(A) \ . \end{aligned}$$

Sei (g_n) eine aufsteigende (im Sinne der Ordnung von Funktionen) Folge in $\mathcal{F}$. Dann ist auch $\lim_{n\to\infty} g_n =: g \in \mathcal{F}$. Sei $A \in R$. In der Tat gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(g_n\mu)(A) = \int_A g_n \, d\mu \leq \nu(A) \ .$$

Mit dem Satz über monotone Konvergenz schließen wir

$$(g\mu)(A) = \int_A g \, d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n \, d\mu \leq \nu(A) \ .$$

Sei nun $K := \sup_{g \in \mathcal{F}} (g\mu)(\Omega)$. Klar ist $K \leq \nu(\Omega) < \infty$. Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$ mit $\lim_{n\to\infty} h_n\mu(\Omega) = K$. Wir definieren eine aufsteigende Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $g_n := \bigvee_{i=1}^n h_i$. Dann gilt wegen $h_n \leq g_n$ auch $\lim_{n\to\infty}(g_n\mu)(\Omega) = K$. Wir setzen $f := \lim_n g_n$. Es gilt

$$\infty > \nu(\Omega) \geq K = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu \ .$$

Sei jetzt $g \in \mathcal{F}$ und $A \in R$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(g\mu)(A) + (f\mu)(A^c) &\leq ((g \vee f)\mu)(A) + ((g \vee f)\mu)(A^c) \\
&\leq K \\
&= (f\mu)(A) + (f\mu)(A^c) \ .
\end{aligned}$$

Da $(f\mu)(A^c) < \infty$ ist, gilt $(g\mu)(A) \leq (f\mu)(A)$. Wir schließen, daß $g'' \leq'' f$ ist. Dies zeigt, daß f maximal in $\mathcal{F}$ ist.

Wir definieren nun das Maß $\lambda := \nu - f\mu$. Wir müssen zeigen, daß λ zu μ singulär ist. Wir betrachten dazu die signierten Maße

$$\alpha_n := \frac{1}{n}\mu - \lambda = (f + \frac{1}{n})\mu - \nu \ .$$

In der Tat erfüllt α_n wegen $\nu(\Omega) < \infty$ die Bedingung M^-.

Sei (S_n, T_n) eine Hahnsche Zerlegung zu α_n. Wir setzen $S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ und zeigen, daß S ein Träger von λ mit $\mu(S) = 0$ ist. Es gilt für $A \in R$, daß

$$\begin{aligned}
((f + \frac{1}{n}\chi_{S_n})\mu)(A) &= (f\mu)(A) + \frac{1}{n}\mu(A \cap S_n) \\
&= (f\mu)(A) + \lambda(A \cap S_n) + \alpha_n(A \cap S_n) \\
&\leq (f\mu)(A) + \lambda(A) \\
&= \nu(A) \ .
\end{aligned}$$

Damit ist

$$f + (\frac{1}{n}\chi_{S_n}) \in \mathcal{F} \ .$$

Wegen der Maximalität von f gilt $\chi_{S_n}\mu = 0$, also $\mu(S_n) = 0$. Wir sehen, daß $\mu(S) = 0$ gilt.

Um zu zeigen, daß S ein Träger von λ ist, wählen wir eine Ausschöpfung $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Ω mit durch meßbare Mengen mit $\mu(\Omega_i) < \infty$. Wir betrachten $A \subseteq S^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, daß

$$\alpha_n(A \cap \Omega_i) = \alpha_n(A \cap \Omega_i \cap T_n) \geq 0 \ .$$

Wir sehen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt :

$$\frac{1}{n}\mu(A \cap \Omega_i) = \lambda(A \cap \Omega_i) + \alpha_n(A \cap \Omega_i) \geq \lambda(A \cap \Omega_i) \geq 0 \ .$$

Wir schließen, daß $\lambda(A \cap \Omega_i) = 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ und damit auch $\lambda(A) = \lim_i \lambda(A \cap \Omega_i) = 0$ gilt.

Wir haben jetzt den Satz unter der Voraussetzung, daß ν endlich ist, gezeigt. Wir nehmen nun an, daß ν nur σ-endlich ist. Sei (X_n) eine abzählbare paarweise disjunkte Zerlegung von Ω mit $\nu(X_n) < \infty$. Wir wenden den Satz auf $\nu_n := \chi_{X_n}\nu$ an und erhalten Funktionen

f_n und Maße λ_n derart, daß $\nu_n = f_n\mu + \lambda_n$. Sei $f := \sum_n f_n$ und $\lambda = \sum_n \lambda_n$. Dann ist λ zu μ singulär und es gilt $\nu = f\mu + \lambda$. □

Folgerung 38.3 (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Sei (Ω, R, μ) ein σ-endlicher Maßraum und ν ein σ-endliches bezüglich μ absolutstetiges Maß. Dann existiert eine bis auf $'' =''_\mu$ eindeutig bestimmte nichtnegative Funktion $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ derart, daß*

$$\nu = f\mu \ .$$

Proof. Wir schreiben $\nu = f\mu + \lambda$, wobei λ zu μ singulär ist. Sei Z eine Trägermenge von λ mit $\mu(Z) = 0$. Dann gilt $\lambda(Z^c) = 0$ und $\lambda(Z) = \nu(Z) = 0$. Damit gilt $\lambda = 0$. □

Folgerung 38.4 (Lebesguesche Zerlegung)**.** *Sei μ ein σ-endliches Maß auf dem Lebesgue Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes atomares Maß μ_p, ein atomfreies zu λ singuläres Maß μ_{sing} und ein nichtnehatives $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$, so daß*

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing} + \mu_p$$

gilt, wobei $\mu_{ac} := f\lambda$ ist.

Beispiel 38.5. Hier ist ein Beispiel für ein singulärstetiges Maß. Sei $C \subset [0,1]$ die Cantormenge derejenigen Zahlen, welche in ihrer triadischen Darstellung keine 1 enthalten. In der Notation von Beispiel 14.7 ist $C = C_{1/3}$. Es gilt $\lambda(C) = 0$. Wir betrachten die Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, welche durch

$$F(x) := \sum_{i=1}^{\min\{i, a_i = 1\}} a_i 2^{-i}$$

gegeben wird, wobei $x = \sum_{i=1}^\infty a_i 3^{-i}$ die triadische Darstellung ist. Diese Funktion ist monoton wachsend und stetig und erfüllt $F(0) = 0$, $F(1) = 1$. Damit ist sie Verteilungsfunktion eines Maßes μ_C, welches durch

$$\mu_C([a,b)) := F(b) - F(a)$$

bestimmt ist. Es gilt $\mu_C([0,1] \backslash C) = 0$. In der Tat ist $\mu_C([1/3, 2/3)) = 0$, $\mu_C[1/9, 2/9)) = 0$ etc. Folglich ist C eine Trägermenge von μ_C. Das Maß μ_C hat keine Atome.

Die Funktion F ist fast überall differenzierbar und es gilt $F' = 0$. Sie ist aber dennoch nicht konstant. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kann auf F nicht angewendet werden.

Alternativ kann das Maß μ_C wie folgt beschrieben werden. Sei $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ der Shiftraum über $A = \{0, 1, 2\}$, wobei μ durch die Gleichverteilung auf A bestimmt wird. Wir betrachten die meßbare Abbildung

$$\Phi : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} \ , \quad \Phi((a_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 3^{-i-1} \ .$$

gegeben. Dann gilt $\mu_C = \Phi_* \mu$.

39 Instruktive Argumente

Satz 39.1. *Für jedes endliche $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$ gilt $\int_{\mathbb{R}} f \, d|.| = 0$.*

Proof. Wir betrachten die Funktion $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch $h(t, x) = \chi_{\{x \leq t\}}(x) f(x)$ gegeben ist. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R} \ni x \mapsto h(t, x)$ integrierbar. Wir setzen

$$\psi(t) := \int_{\mathbb{R}} h(t, x) d\,|x| \ .$$

Weiter gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$, daß $\lim_{t \to -\infty} h(t, x) = 0$ und $\lim_{t \to \infty} h(t, x) = f(x)$. Dann gilt nach dem Satz über majorisierte Konvergenz (mit integrierbarer Majorante $|f|$) daß

$$\begin{aligned} \lim_{t \to -\infty} \psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \to -\infty} h(t, x) d|x| &= 0 \\ \lim_{t \to \infty} \psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \to \infty} h(t, x) d|x| &= \int_{\mathbb{R}} f \, d|.| \ . \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun sofort aus der folgenden Tatsache : Die Funktion ψ ist in jedem $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dt} \psi(t) = 0$.

Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt $\psi(t) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{t_0\}} h(t, x) d|x|$ weil $\{t_0\}$ eine $|.|$-Nullmenge ist. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ existiert ein Intervall $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, so daß $\frac{d}{dt} h(t, x) = 0$ für alle $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$.

Die Funktion $h(t, x)$ ist also für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ in einer Umgebung von t_0 bezüglich x differenzierbar. Dabei ist die Ableitung gleich Null und hat insbesondere eine Majorante, nämlich die Nullfunktion, welche natürlich integrierbar ist. Damit können wir die Ableitung unter das Integral ziehen. Es gilt

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{|t = t_0} \psi(t) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{t_0\}} \left(\frac{d}{dt} \right)_{|t = t_0} h(t, x) d|x| = 0 \ .$$

Die Behauptung folgt nun, da wir t_0 beliebig vorgeben können. □

Satz 39.2. *Für jedes reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ gilt $r = 0$.*

Proof. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $r > 0$ annehmen. Wir betrachten die folgenden beiden Maßräume :

1. $(\Omega_1, R_1, \mu_1) = (\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$,

2. $(\Omega_2, R_2, \mu_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu_2)$, wobei $\mu_2(A) := \sharp A$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, das Zählmaß ist .

Sei nun $(\Omega, R, \mu) = (\Omega_1, R_1, \mu_1) \times (\Omega_2, R_2, \mu_2)$. Insbesondere gilt $\Omega = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die nichtnegative Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 0 & x = y \text{ und } x \notin [0,1] \\ r & x = y \text{ und } x \in [0,1] \end{cases}$$

gegeben ist. Diese Funktion nimmt nur zwei Werte an. Die Menge $f^{-1}(\{r\}) = \{(x,x) \,|\, x \in [0,1]\}$ ist meßbar. In der Tat ist sie abgeschlossen. Sie ist meßbar, weil $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset R$. In der Tat ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ sogar in der Algebra $\tilde{R}$ von $(\mathbb{R}, R_{|.|}) \times (\mathbb{R}, R_{|.|}) = (\mathbb{R}^2, \tilde{R})$ enthalten. Da nun sicherlich $R_{|.|} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt, haben wir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset R$. Die Funktion f ist somit sogar einfach.

Wir berechnen nun

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = r \ .$$

Das innere Integral ergibt

$$\int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y) = \begin{cases} r & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

In der Tat, für $x \in [0,1]$ ist $y \mapsto f(x,y)$ gleich $r\chi_{\{x\}}$. Sie ist gleich Null falls $x \notin [0,1]$. Es gilt aber $\mu_2(\{x\}) = 1$. Damit ist $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y)$ gleich $r\chi_{[0,1]}$. Diese hat Lebesgueintegral r.

Aus der Endlichkeit dieser Integrale schließen wir mit dem Satz von Fubini, daß $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und

$$\int_\Omega f d\mu = r$$

gilt. Natürlich können wir die Integrationen auch in der anderen Reihenfolge ausführen. Es gilt

$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = 0 \ .$$

In der Tat ist für ein festes $y \in [0,1]$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ gleich $r\chi_{\{x\}}$. Sie ist Null für $y \notin [0,1]$. Da $\{y\}$ aber eine $|.| = \mu_1$-Nullmenge ist, gilt schon $\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) = 0$. Damit haben wir

$$0 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_\Omega f d\mu$$

gezeigt. Folglich muß $r = 0$ gelten. □

Satz 39.3. *Jedes σ-endliche Maß ist atomar.*

Folgerung 39.4. $\mathbb{R}$ *ist abzählbar.*

Proof. Sei (Ω, R, ν) ein σ-endlicher Maßraum. Wir betrachten daß Zählmaß μ auf R mit $\mu(A) := \sharp(A)$. Dann gilt für jede Menge $A \in R$, daß

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \nu(A) = 0 \ .$$

Wir wenden nun den Satz von Radon-Nikodym an, welcher eine Darstellung $\nu = f\mu$ für eine meßbare nichtnegative Funktion f liefert. Da $\mu = (\sum_{x\in\Omega} \delta_x)_{|R}$ ist, gilt $\nu = (\sum_{x\in\Omega} f(x)\delta_x)_{|R}$. □

Proof. (der Folgerung) Das Lebesguemaß ist σ-endlich und damit atomar. Das es nicht verschwindet, gibt es einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit $c := |\{x\}| \neq 0$. Wegen der Translationsinvarianz gilt dann $|\{x\}| = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da das Lebesguemaß σ-endlich ist, muß also $\mathbb{R}$ abzählbar sein. □

40 Aufgaben

1. Sei Ω eine Menge und $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Sei weiter $\mathbb{Z}^\Omega$ der Ring der $\mathbb{Z}$-wertigen Funktionen auf Ω. Für $A \subseteq \Omega$ sei $\chi_A \in \mathbb{Z}^\Omega$,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} ,$$

   die charakteristische Funktion von A. Sei $U \subseteq \mathbb{Z}^\Omega$ der kleinste Unterring mit 1, welcher alle χ_A mit $A \in S$ enthält. Zeige, daß $A \in R(S)$ genau dann gilt, wenn $\chi_A \in U$.

2. Seien Ω_i, $i \in \{0, 1\}$ Mengen und $S_i \subseteq \mathcal{P}(\Omega_i)$ unter Komplementbildung abgeschlossene Teilmengen. Dann bilden wir

$$S_0 \times S_1 := \{A \times B | A \in S_0 \ , B \in S_1\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega_0 \times \Omega_1) \ .$$

   Zeigen Sie, daß

$$R(S_0 \times S_1) = R((S_0 \times \{\Omega_1\}) \bigcup (\{\Omega_0\} \times S_1)) \ .$$

3. Sei $f : \Omega_0 \to \Omega_1$ eine Abbildung zwischen Mengen und $S \subseteq \mathcal{P}(\Omega_1)$. Zeigen Sie, daß $f^*R(S) = R(f^*S)$ gilt. Zeigen Sie weiter, daß mit S auch f^*S eine Partition ist.

4. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine durch ein quadratisches Polynom gegebene Abbildung. Sei μ das Zählprämaß auf $(\mathbb{C}, \mathcal{P}(\mathbb{C}))$. Finden Sie die maximale Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ derart, daß $f_{|f^{-1}(U)*}\mu_{|f^{-1}(U)} = 2\mu_{|U}$ ist.

5. Sei $f : \Omega_0 \to \Omega_1$ eine Abbildung endlicher Mengen. Für $A \in \mathcal{P}(\Omega_1)$ und $B \in \mathcal{P}(\Omega_0)$ definieren wir $\mu(A) := \sharp f^{-1}(A)$ und $\nu(B) := \sharp f(B)$. Untersuchen Sie, ob ν oder μ auf jeweils der ganzen Potenzmenge definierte Prämaße sind.

6. Seien (Ω_i, R_i, μ_i), $i = 0, 1$ prämeßbare Räume und $(\Omega, R) = (\Omega_0, R_0) \times (\Omega_1, R_1)$. Zeigen Sie, daß es genau ein Prämaß μ auf (Ω, R) mit $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1)$ für alle $A_i \in R_i$ gibt.

7. Sei R die in der Vorlesung definierte Algebra auf $\mathbb{Z}_p$ (p-adische Zahlen). Finde eine Menge $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ mit $A \notin R$.

8. Sei $(A^{\mathbb{N}}, R, \mu)$ der Prämaßraum mit der Algebra der Zylindermengen R und dem durch eine Funktion $f : A \to [0, 1]$ gegebenen Maß (siehe Vorlesung). Wir definieren $T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ durch $T((a_n)) := (b_n)$ mit $b_n := a_{n+1}$ für alle $n \geq 0$. Zeigen Sie, daß $T_*\mu = \mu$ gilt.

9. Wir betrachten den meßbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (Borelsche σ-Algebra). Zeigen Sie, daß eine stückweise stetige reellwertige Funktion $(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ meßbar ist.

10. Wir betrachten den meßbaren Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ (Borelsche σ-Algebra) und einen weiteren meßbaren Raum (X, R). Zeigen Sie, daß aus der Meßbarkeit von $f, g : (X, R) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ auch die Meßbarkeit von $f + g$ folgt.

11. Sei (X, R) ein meßbarer Raum und $f : X \to X$ eine meßbare Bijektion. Ist dann auch $f^{-1} : X \to X$ meßbar?

12. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit der Hausdorff-Eigenschaft und $\mathcal{B}$ die dazugehörige σ-Algebra. Zeigen Sie, daß alle abzählbaren Teilmengen von X meßbar sind. Kann man die Hausdorff-Voraussetzung weglassen?

13. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, daß man jedem Element $(a_i) \in \mathbb{Z}_p \subseteq \prod_{i \geq 0} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ eine wohlbestimmte Folge $(b_i) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$ zuordnen, so daß $a_i = [\sum_{k=0}^{i-1} b_k p^k]_{\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}}$ für alle i gilt. Zeigen Sie, daß die so definierte Abbildung $\mathbb{Z}_p \to \{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$ bijektiv, stetig und meßbar ist. Ist die Umkehrabbildung auch stetig?

14. Wir betrachten $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und die Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ mit

$$\mu(A) := \left\{ \begin{array}{cc} \infty & |A| = \infty \\ \sum_{a \in A} 2^{-a} & |A| < \infty \end{array} \right. .$$

Zeigen Sie, daß μ endlich additiv ist. Gilt auch die σ-Additivität?

15. Sei A eine endliche Menge und $P \in [0, 1]^{A \times A}$ eine stochastische Matrix, d.h es gilt $\sum_{b \in A} P(a, b) = 1$ für alle $a \in A$. Sei weiter $p : A \to [0, 1]$ eine Funktion (Anfangsverteilung) derart, daß $\sum_{a \in A} p(a) = 1$ gilt. Wir betrachten den meßbaren Raum $(A^{\mathbb{N}}, R)$ (Algebra der Zylindermengen) und definieren

$$\mu(q_n^{-1}(a_1, \ldots, a_n)) := p(a_1) \prod_{i=1}^{n-1} P(a_i, a_{i+1}) ,$$

wobei $q_n : A^{\mathbb{N}} \to A^n$ die Projektion auf die ersten n Komponenten ist. Zeigen Sie, daß dadurch ein σ-additives Wahrscheinlichkeitsprämaß auf $(A^{\mathbb{N}}, R)$ festgelegt wird.

16. Sei $(\mathbb{R}^n, R^n)$ der n-dimensionale euklidische Raum mit der dyadischen Algebra. Zeigen Sie, daß jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine Vereinigung einer abzählbaren paarweise disjunkten Familie von Elementen aus R^n ist.

17. Wir betrachten eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Folgen nichtnegativer reeller Zahlen. Wir schreiben $x_n(i)$ für das i-te Glied der Folge x_n. Wir nehmen an, daß für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und den Genzwert $y(i)$ hat und daß $S := \sum_{i=0}^{\infty} y(i)$ existiert. Zeigen Sie, daß dann $S_n := \sum_{i=0}^{\infty} x_n(i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ existiert und $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ gilt.

18. Für eine Menge Ω betrachten wir den meßbaren Raum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ gegeben und $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ das f-gewichtete Zählprämaß

$$\mu(A) := \sum_{x\in A} f(x) \ , \quad A \in \mathcal{P}(\Omega) \ .$$

Zeigen Sie, daß μ ein Maß ist.

19. Wir betrachten den Prämaßraum (R, D^1, μ) mit der dyadischen Algebra und dem Lebesgueschen Prämaß μ. Sei $F_m := [-2^m, 2^{-m})$ und $A \in D^1$ unbeschränkt. Zeigen Sie, daß für alle $m \in \mathbb{N}$ die Relation $A \cap F_m \in D^1$ gilt und $\lim_{m\to\infty} \mu(A \cap F_m) = \infty$ ist.[1]

20. Wir betrachten den Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{T})$ mit der von den Zylindermengen erzeugten Topologie. Zeigen Sie, daß $A^{\mathbb{N}}$ kompakt ist (Hinweis: Satz von Tychonov benutzen). Zeigen Sie weiter, daß für jede absteigende Familie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener nichtleerer Teilmengen gilt $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset$.

21. Wir betrachten die Teilmenge $A \subseteq [0, 1]$ derjenigen reellen Zahlen, deren Dezimalbruchentwicklung die Ziffern $3, 5, 7$ nicht enthält. Zeigen Sie, daß $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ (Borelsche σ-Algebra). Nehmen Sie an, daß das Lebesgueprämaß eine Ausdehnung zu einem Maß μ auf $\mathcal{B}$ hat. Berechnen Sie $\mu(A)$.

22. Sei Ω eine Menge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Ω. Für $A \subseteq \Omega$ definieren wir [2]

$$\mu(A) := \limsup_n \frac{\sharp\{i \in \{1, \ldots, n\} | x_i \in A\}}{n} \ .$$

Zeigen Sie, daß $\mu(A)$ wohldefiniert ist. Ist μ ein Prämaß?

23. Sei Ω eine Menge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Ω. Wir setzen

$$R := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) | \mu(A) := \lim_n \frac{\sharp\{i \in \{1, \ldots, n\} | x_i \in A\}}{n} \text{ existiert}\} \ .$$

Zeigen Sie, daß R eine Algebra und μ ein Prämaß auf R ist. Ist R eine σ-Algebra und μ ein Maß?

[1] Das wurde im Nachweis der σ-Additivität von μ in der Vorlesung benutzt!
[2] $\sharp X$ bezeichnet die Anzahl der Elemente von X

24. Wir betrachten das Einheitsintervall $[0,1]$. Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ derart, daß für jede stetige Funktion $f \in C([0,1])$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} = \int_0^1 f(x)dx \ .$$

25. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige nicht-negative Funktion mit kompaktem Träger. Wir betrachten $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le y \le f(x)\}$. Zeigen Sie, daß A eine Borelmenge mit dem Lebesguemaß $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ist.

26. Für $a, b > 0$ betrachten wir die Menge $E := \{ax^2 + by^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß E eine Borelmenge ist und berechnen Sie ihr Lebesguemaß.

27. Sei A eine endliche Menge und $f : A \to [0,1]$ derart, daß $\sum_{a\in A} f(a) = 1$. Sei $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ der zu diesen Daten gehörende Schiftraum. Ein Element $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ heißt letzlich periodisch, wenn es $i_0, p \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $i \ge i_0$ gilt $a_{i+p} = a_i$. Sei $P \subseteq A^{\mathbb{N}}$ die Teilmenge der letzlich periodischen Elemente. Zeigen Sie, daß $P \in \mathcal{B}$ ist und bestimmen Sie $\mu(A)$.

28. Sei A eine endliche Menge und $f : A \to [0,1]$ derart, daß $\sum_{a\in A} f(a) = 1$. Sei $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ der zu diesen Daten gehörende Schiftraum. Mit $T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ bezeichnen wir die Verschiebung. Zeigen Sie, daß für jede unter T invariante (d.h. $T(W) = W$ erfüllende) Teilmenge $W \in \mathcal{B}$ gilt $\mu(W) \in \{0,1\}$.

29. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ein nicht-trivialer Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ und $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & A \in \mathcal{F} \\ 0 & A \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie die äußere Erweiterung von μ.

30. Sei $C_c(\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Für $A \subseteq R$ sei χ_A die charakteristische Funktion von A und

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} \inf_{f\in C_c(\mathbb{R}) \ ,\chi_A\le f} \int f(x)dx & A \text{ beschränkt} \\ \infty & A \text{ unbeschränkt} \end{cases} .$$

Ist $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{P}([0,1])$?

31. Wir betrachten den Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, R, \mu)$ zu $A := \{-1,1\}$ und $f : \{-1,1\} \to [0,1]$, $f(-1) := a$, $f(1) := 1-a$ mit $a \in [0,1]$. Sei $W : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ durch $W((a_i)) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}$ gegeben. Bestimmen Sie $W_*(\mu)((\frac{1}{16}, \frac{3}{16}))$.

32. Wir betrachten einen Prämaßraum (Ω, R, μ) und bilden die äußere Erweiterung $\tilde{\mu}$ und die Menge der bez. $\tilde{\mu}$ zerlegenden Mengen $R_{\tilde{\mu}}$. Sei $U \subseteq R_{\tilde{\mu}}$ eine Algebra und $\hat{\mu}$ die äußere Erweiterung von $\tilde{\mu}_{|U}$. Zeigen Sie, daß $\hat{\mu} = \tilde{\mu}$ gilt.

33. Sei μ ein Wahscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(x) := \mu((-\infty, x))$ heißt Verteilungsfunktion von μ. Zeigen Sie, daß

(a) F linkseitig stetig ist,

(b) F monoton wachsend ist,

(c) und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ gilt.

34. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion des Diracmaßes δ_0 auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

35. Zeigen Sie, daß eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit den Eigenschaften

    (a) F ist linkseitig stetig

    (b) F ist monoton wachsend

    (c) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

    die Verteilungsfunktion eines eindeutig bestimmten Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. *(Hinweis: Konstruieren Sie μ ähnlich wie das Lebesgue Maß ausgehend vom Prämaß, welches den dyadischen Intervallen $[a, b)$ das Maß $F(b) - F(a)$ zuordnet.)*

36. Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion derart, daß $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ gilt. Zeigen Sie, daß es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ gibt mit $\mu([a, b)) = \int_a^b f(x)dx$ (*Sie können Aufgabe 35 benutzen.*).

37. Sei $A := \{-1, 1\}$ und $p : A \to [0, 1]$ durch $p(-1) = p(1) = \frac{1}{2}$ gegeben. Wir betrachten den durch diese Daten festgelegten Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$. Wir defineren die Teilmenge $C \subseteq A^{\mathbb{N}}$ durch

    $$C := \{(a_i) \in A^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i} \text{ konvergiert}\} .$$

    (a) Zeigen Sie, daß C meßbar ist.

    (b) Zeigen Sie, daß $\mu(C) \in \{0, 1\}$ gilt.

    Entscheiden Sie, ob $\mu(C) = 1$ oder $\mu(C) = 0$ gilt[3].

38. Sei $A := \{-1, 1\}$ und $p : A \to [0, 1]$ durch $p(-1) = p(1) = \frac{1}{2}$ gegeben. Wir betrachten den durch diese Daten festgelegten Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_{A^{\mathbb{N}}}, \mu)$ und die Abbildung $f : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$,

    $$f((a_i)) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} .$$

    Zeigen Sie, daß $f : (A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_{A^{\mathbb{N}}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ meßbar ist und bestimmen Sie die Verteilungsfunktion (siehe Aufgabe 1) des Wahrscheinlichkeitsmaßes $f_*\mu$.

39. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und $A \in R$ mit $0 < \mu(R) < \infty$. Wir definieren

    $$\nu(B) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)} , \quad B \in R .$$

    Zeigen Sie, daß (Ω, R, ν) auch ein Maßraum ist.

[3] Ich kenne die Antwort bisher auch nicht!

40. Wir betrachten den Lebesgue Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, |.|)$. Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig. Zeigen Sie, daß
$$\int_{[a,b]} f d|.| = \int_a^b f(x)dx$$
gilt, wobei auf der linken Seite das untere Integral und auf der rechten Seite das Riemannintegral steht.

41. Sei $\mathcal{F}$ ein nicht-trivialer Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die folgende Vorschrift ein stetiges, positives lineares Funktional
$$\lim_{\mathcal{F}} : l^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$$
definiert, wobei $l^\infty(\mathbb{N})$ den Banachraum der beschränkten reellen Folgen auf $\mathbb{N}$ mit der Supremumnorm bezeichnet. *Sei $a := (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$ und $0 < L \in \mathbb{R}$ derart, daß $-L < \inf_i a_i \leq \sup_i a_i < L$ gilt. Ist $P = \{P_1, \ldots, P_r\}$ eine Partition des Intervalls $(-L, L)$, dann definieren wir die Partition $A = \{A_1, \ldots, A_r\}$ von $\mathbb{N}$ durch $A_i := \{i \in \mathbb{N} | a_i \in P_i\}$. Dann gehört genau ein Element von A zu $\mathcal{F}$.*

Mit
$$l(P) := \max_{i=1,\ldots,r} (\sup_{x \in P_i} x - \inf_{x \in P_i} x)$$
bezeichnen wir den Durchmesser der Partition. Wir wählen nun eine Folge von Verfeinerungen von Partitionen $P(n) = \{P_1(n), \ldots, P_{r(n)}(n)\}$ derart, daß $\lim_{n \to \infty} l(P(n)) = 0$ gilt. Wir erhalten damit eine Folge von Partitionen $A(n)$ von $\mathbb{N}$ und eine Folge $A_{i(n)}(n) \in \mathcal{F} \cap P(n)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $i_n \in A_{i(n)}(n)$. Wir definieren
$$\lim_{\mathcal{F}}(a_i) := \lim_{n \to \infty} a_{i_n} \ .$$
Diese Definition ist unabhängig von den Wahlen.

42. Sei A eine endliche Menge. Wir betrachten den meßbaren (Schift-)Raum $(A^{\mathbb{N}}, R)$ mit dem Schift T. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$, $x \in A^{\mathbb{N}}$ und eine stetige Funktion $f \in C(A^{\mathbb{N}})$
$$M_n(x; f) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^i x) \ .$$
Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter. Zeigen Sie *(1. Aufgabe benutzen)*, daß
$$f \mapsto \lim_{\mathcal{F}}((M_n(x; f))_{n \in \mathbb{N}})$$
ein stetiges positives T-invariantes lineares Funktional $\phi_{\mathcal{F},x} : C(A^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}$ definiert *(hierbei wird $C(A^{\mathbb{N}})$ als Banachraum mit der Supremumnorm betrachtet).*

43. Sei μ das Maß auf $(A^{\mathbb{N}}, R)$, welches durch die Gleichverteilung auf A induziert wird. Zeigen Sie, daß es ein $x \in A^{\mathbb{N}}$ gibt, für welches $\phi_{\mathcal{F},x}(f) = \int_{A^{\mathbb{N}}} f(x) d\mu(x)$ *(Aufgabe 2.)* gilt.

44. Seien $p, q : A \to [0,1]$ zwei Verteilungen auf A und μ_p, μ_q die dazugehörigen Maße auf dem Schiftraum $(A^{\mathbb{N}}, R)$. Zeigen Sie: Wenn $p \neq q$, dann gibt es eine meßbare Teilmenge $B \subseteq A^{\mathbb{N}}$ mit $\mu_p(B) = 1$ und $\mu_q(B) = 0$.

45. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum, $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von nicht-negativen meßbaren Funktionen und gelte $\lim_{i \to \infty} \int_\Omega f_i d\mu = 0$. Zeigen Sie, daß dann $f_i \to 0$ dem Maße nach (also stochastisch) gilt, nicht notwendig aber auch $f_i \to 0$ fast überall (bez. μ).

46. Untersuche folgende Folgen meßbarer Funktionen auf $(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$ auf Konvergenz (fast überall, beinahe gleichmäßg, stochastisch):

    (a) $f_i := \chi_{[i,i+1]}$

    (b) $f_i = \chi_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]}$, wobei $i = 2^k + j$ mit $j \in [0, 2^k)$, $k \in \mathbb{N}$

    (c) $f_i := \chi_{[0,1]} x^i$.

47. Welche der folgenden Funktionen sind in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, R_{|.|}, |.|)$?

    (a) $f := \frac{1}{1+x^2}$

    (b) $f := \frac{1}{1+|x|} \sin(x)$

    (c) $f := \frac{1}{x} \chi_{(-1,1)\setminus\{0\}}$

    (d) $f := \frac{1}{|x|^{1/2}} \chi_{(-1,1)\setminus\{0\}}$

    (e) $f := x \chi_{\mathbb{Q}}$.

48. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbarer Diffeomorphismus. Dann gilt die Transformationsformel

$$\int_{\mathbb{R}} f(\phi(x)) |\phi'(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

für das Riemannsche Integral. Wir hatten schon gesehen (im wesentlichen Aufgabe 4, Blatt 5), daß eine nicht-negative stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ein eindeutig bestimmtes Maß μ_h auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definiert, für welches $\mu_h([a,b]) = \int_a^b h(x) dx$ gilt. Zeigen Sie unter Benutzung dieser Tatsachen, daß

$$\phi_* |.| = \mu_{\frac{1}{|\phi'|}}$$

gilt.

49. Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $\phi(x,y) = x + y$ gegeben. Für endliche Maße p, q auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ betrachten wir das Produktmaß $p \times q$ auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ und definieren

$$p * q := \phi_*(p \times q) \ .$$

Zeigen Sie:

    (a) $p * q$ ist endlich.

    (b) $p * q = q * p$

(c) $r * (p * q) = (r * p) * q$ (für ein drittes endliches Maß r auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$)

(d) $\delta_0 * p = p$ für das Dirac maß δ_0 in 0.

50. Für $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, |.|)$ betrachten wir das endliche signierte Maß $\mu_f := f|.|$. Zeigen Sie, daß es für $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, |.|)$ eine eindeutig bestimmte Funktion $f * g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, |.|)$ derart gibt, daß $\mu_f * \mu_g = \mu_{f*g}$ gilt (siehe Aufgabe 49, ausgedehnt auf signierte Maße). Zeigen Sie weiter, daß für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ auch $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\mu_{f'} * g = \mu_{(f*g)'}$ gilt, wobei f' die Ableitung von f bezeichnet.

51. Sei $f \in C_c^\infty$ mit $\int_\mathbb{R} f(x)dx = 1$. Wir setzen $f_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon} f(\frac{x}{\epsilon})$ für $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, daß für jedes $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, |.|)$ in der Norm $\|.\|_1$ gilt:
$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} f_\epsilon * g = g \ .$$

52. Sei $b > 0$. Zeigen Sie, daß durch
$$\mathcal{B}_\mathbb{R} \ni A \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_A e^{-\frac{bx^2}{2}} |dx|$$
ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_b auf $\mathbb{R}$ definiert wird. Bestimmen Sie $b_3 > 0$ als Funktion von $b_1, b_2 > 0$ so daß $\mu_{b_1} * \mu_{b_2} = \mu_{b_3}$ gilt (siehe Aufgabe 49).

53. Sei B eine symmetrische positiv-definite $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, daß durch
$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \ni A \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(B)}} \int_A e^{-\frac{<Bx,x>}{2}} |dx|$$
ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_B auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

54. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten. Bestimmen eine symmetrische positiv-definite $m \times m$-Matrix C derart, daß $\phi_* \mu_B = \mu_C$. Ist C eindeutig.

55. Sei μ_B wie in Aufgabe 53. Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 d\mu_B(x)$.

56. Sei
$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z^2 + 1 \ , |z| \le 1\} \ .$$
Skizzieren Sie diese Menge und berechnen Sie ihr Lebesguemaß $|A|$.

41 Aufgaben - 2013

Aufgabe 41.1. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge.

1. Zeigen Sie, daß
$$v(A) := \inf_{\{\phi \in C_c(\mathbb{R}^n) \mid \phi_{|A} \equiv 1 \wedge \phi \ge 0\}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx$$
wohldefiniert ist.

2. Zeigen Sie, daß
$$u(A) := \sup_{\{\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)\,|\,\operatorname{supp}(\phi) \subseteq (A \setminus \partial A) \wedge \phi \leq 1\}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx$$
wohldefiniert ist.

3. Zeigen Sie, daß $u(A) \leq v(A)$ gilt.

4. Zeigen Sie, daß für zwei kompakte Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $v(A \cup B) \leq v(A) + v(B)$ gilt.

5. Zeigen Sie weiter, daß $v(A \cup B) = v(A) + v(B)$ gilt, falls $A \cap B = \emptyset$.

Wenn $u(A) = v(A)$ gilt, dann definieren wir $\operatorname{vol}(A) := u(A)$.

Aufgabe 41.2. 1. Wir betrachten ein Intervall $A := [a, b] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $\operatorname{vol}(A) = b - a$ gilt. Benutzen Sie die Definitionen aus Aufgabe 1.

2. Sei nun $([a_i, b_i])_{i=1,\ldots,n}$ eine Familie von Intervallen und
$$A := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n \ .$$
Zeigen Sie, daß $\operatorname{vol}(A) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ gilt.

Aufgabe 41.3. Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte und eigentliche Abbildung mit nicht-negativen Werten und $r \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, daß h auf $h^{-1}(\{r\})$ regulär ist.

1. Zeigen Sie, daß $A := h^{-1}((-\infty, r])$ kompakt ist.

2. Zeigen Sie, daß man sich in der Definition von $u(A)$ und $v(A)$ bei den Funktionen ϕ auf Funktionen der Form $h^*\kappa$ für $\kappa \in C_c(\mathbb{R})$ einschränken kann.

3. Zeigen Sie, daß $v(A) - u(A) \leq \int_{\mathbb{R}^n} (h^*\kappa)(x)dx$ für alle $\kappa \in C_c(\mathbb{R})$ mit $\kappa \geq 0$ gilt, für welche es eine Umgebung U von $r \in \mathbb{R}$ mit $\kappa_{|U} \equiv 1$ gibt.

4. Schließen Sie aus 3., daß $\operatorname{vol}(A)$ wohl-definiert ist.

   Hinweis: Benutzen Sie, daß man in der Nähe von ∂A lokal Koordinaten finden kann, so daß h die erste Koordinate ist. Benutzen Sie die Transformationsformel für diese Koordinaten, um Integrale der Form $\int_{\mathbb{R}^n} (h^*\kappa)(x)dx$ abzuschätzen.

Aufgabe 41.4. Sei $B(0, r)$ der n-dimensionale euklidische Ball vom Radius $r \in \mathbb{R}^{>}$.

1. Zeigen Sie, daß $\operatorname{vol}(\overline{B(0, r)})$ wohldefiniert ist. Verwenden Sie hierbei Aufgabe 3.4.

2. Zeigen Sie, daß es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $\omega_n \in \mathbb{R}$ gibt derart, daß $\operatorname{vol}(\overline{B(0, r)}) = \omega_n r^n$ für alle $r \in \mathbb{R}^{>}$ gilt.

   Hinweis: Transformationsformel für die Abbildung $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto rx \in \mathbb{R}^n$ benutzen.

3. Zeigen Sie, daß
$$\operatorname{vol}(\overline{B(0,r)}) = \lim_{s\to 0} \operatorname{vol}(\overline{B(0,r)} \setminus B(0,s))$$
gilt.

4. Bestimmen Sie ω_2 für $n = 2$ explizit.

   Hinweis: Benutzen Sie Teil 3., die Transformationsformel und Polarkoordinaten, um $\operatorname{vol}(\overline{B(0,r)} \setminus B(0,s))$ *zu berechnen.*

5. Bestimmen Sie ω_3 explizit.

   Hinweis: Gehen Sie wie in 4. vor

Aufgabe 41.5. Seien (Ω_i, R_i, μ_i), $i = 0,1$ Prämaßräume. Zeigen Sie, daß es auf dem Produkt $(\Omega, R) := (\Omega_0, R_0) \times (\Omega_1, R_1)$ genau ein Prämaß μ gibt, welches $\mu(A \times B) = \mu_0(A)\mu_1(B)$ erfüllt für alle $(A, B) \in R_0 \times R_1$. Führen Sie dazu folgende Schritte im Detail aus.

1. Zeigen Sie die Behauptung für den Fall, daß $R_i = R(S_i)$ für Partitionen S_i von Ω_i gilt.

2. Sei (X, B) ein prämeßbarer Raum. Zeigen Sie, daß die Menge der Partitionen von X, welche in B enthalten sind, auf natürliche Weise eine gerichtete Menge ist.

3. Zeigen Sie, daß die Menge P der Paare von Partitionen (S_0, S_1) mit $R(S_i) \subset R_i$ eine gerichtete Menge ist.

4. Zeigen Sie, daß $R = \bigcup_{(S_0,S_1)\in P} R(\mathrm{pr}_0^* S_0 \cup \mathrm{pr}_1^* S_1)$ gilt.

5. Schließen Sie die Behauptung.

Aufgabe 41.6. Wir betrachten den Prämaßraum $(\mathbb{Z}_3, R, \mu)$ (wie in der Vorlesung).

1. Geben Sie eine Teilmenge $A \subset \mathbb{Z}_3$ explizit an, welche nicht in der Algebra R liegt.

2. Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $D_n : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ die Multiplikation mit n. Zeigen Sie, daß D_n meßbar ist.

3. Zeigen Sie, daß $(D_{n,*}\mu)(\mathbb{Z}_3 \setminus U) = 0$ gilt. In dieser Formel ist $U := \pi_m^{-1}(0) \subseteq \mathbb{Z}_3$, wobei $\pi_m : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}/3^m\mathbb{Z}$ die Projektion und $n = 3^m a$ eine Zerlegung von n mit $a \in \mathbb{Z}$ und $3 \nmid a$ ist.

4. Zeigen Sie, daß $(D_{n,*}\mu)_{|U} = 3^m \mu_{|U}$ gilt, wobei U und m wie in Teil 3. sind.

5. Bestimmen Sie den Abschluß der Teilmenge $\{\mu(A) \mid A \in R\}$ von $\mathbb{R}$.

Hinweis: Untersuchen Sie für die Teile 2-4 die Meßbarkeit der Mengen $D_n^{-1}(\pi_k^{-1}(\{x\}))$ *und bestimmen Sie die Werte* $\mu(D_n^{-1}(\pi_k^{-1}(\{x\})))$ *für* $x \in \mathbb{Z}/3^k\mathbb{Z}$ *unter Benutzung der Identität* $\pi_k \circ D_n = \bar{D}_n \circ \pi_k$, *wobei* $\bar{D}_n$ *die Multiplikation mit* n *auf* $\mathbb{Z}/3^k\mathbb{Z}$ *ist.*

Aufgabe 41.7. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) := (z-1)(z+1)$ gegeben.

1. Sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{C}$. Berechnen Sie $f_*\mu(\{0,1,2\})$.
2. Sei δ_0 das Diracmaß auf $\mathbb{C}$ in 0. Berechnen Sie $f_*\delta_0(B(0,r))$ als Funktion von $r \in (0,\infty)$.
3. Ist f meßbar, wenn wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren und mit der dyadischen Algebra R versehen?
4. Ist f meßbar, wenn wir $\mathbb{C}$ mit der Algbera $R(\mathcal{T})$ versehen, wobei $\mathcal{T}$ die Topologie von $\mathbb{C}$ bezeichnet?
5. Ist $f : (\mathbb{C}, R(\mathcal{T})) \to (\mathbb{C}, R)$ meßbar?

Begründen Sie ihre Entscheidungen in den Teilen 3.,4., und 5.

Aufgabe 41.8. Korrigierte Fassung: Außerhalb der Wertung, aber gut für Zusatzpunkte

Sei A eine endliche Menge **mit mehr als einem Punkt** versehen mit der diskreten Topologie $\mathcal{T}$ und der Algebra $R := \mathcal{P}(A)$. Wir bilden den topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_X) := \prod_{n\in\mathbb{N}}(A, \mathcal{T})$.

1. **Zeigen Sie das Gegenteil der ursprünglichen Behauptung:** Zeigen Sie, daß
$$(X, R(\mathcal{T}_X)) \neq \prod_{n\in\mathbb{N}}(A, R)$$
gilt, wenn man das Produkt in den prämeßbaren Räumen bildet:
2. **So sollte eigentlich die Aufgabe lauten:** Zeigen Sie, daß
$$(X, R^\sigma(\mathcal{T}_X)) = \prod_{n\in\mathbb{N}}(A, R)$$
gilt, wenn man das Produkt in den meßbaren Räumen bildet.

Aufgabe 41.9. Wir betrachten den Schiftraum $A^{\mathbb{N}}$ für $A := \{0,1,2\}$ als topologischen Raum versehen mit Algebra R und dem Prämaß μ_f auf R assoziiert zu einer Funktion $f : A \to [0,1]$ mit $\sum_{a\in A} f(a) = 1$. Wir definieren $W : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ durch $W((a_i)) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i 3^{-i}$.

1. Zeigen Sie, daß $W : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ stetig ist.
2. Bestimmen Sie das Bild von W.
3. Ist $W : (A^{\mathbb{N}}, R^\sigma(R)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ meßbar?

4. Zeigen Sie, daß der Schift $T : (A^{\mathbb{N}}, R) \to (A^{\mathbb{N}}, R)$, welcher durch $T((a_i)) := (a'_i)$ mit $a'_i := a_{i+1}$ gegeben ist, meßbar ist .

5. Zeigen Sie, daß $T_*\mu_f = \mu_f$ gilt.

Aufgabe 41.10. Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche in jedem Punkt differenzierbar ist. Zeigen Sie, daß $f' : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ meßbar ist.

Aufgabe 41.11. Wir betrachten eine Menge Ω und den meßbaren Raum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Zeigen Sie:

1. Sei $x \in \Omega$ und δ_x das Diracmaß in x. Verifizieren Sie, daß das Diracmaß σ-additiv ist.

2. Zeigen Sie, daß das Zählmaß auf Ω σ-additiv ist.

3. Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine Abbildung. Wir definieren $\mu_f(A) := \sum_{a \in A} f(a)$ (wobei der Werte ∞ zugelassen ist und eine Summe über eine überabzählbare Menge positiver Zahlen als ∞ definiert ist). Zeigen Sie, daß μ_f σ-additiv ist.

4. Zeigen Sie, daß 1. und 2. Spezialfälle von 3. sind.

Aufgabe 41.12. Wir betrachten die p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ als topologischen Raum mit der Borelschen σ-Algebra. Sei weiter μ das Prämaß wie in der Vorlesung, welches auf der Algebra R definiert ist.

1. Zeigen Sie, daß die Punkte in $\mathbb{Z}_p$ abgeschlossene und meßbare Teilmengen sind.

2. Berechnen Sie für $x \in \mathbb{Z}_p$:
$$\inf\{\mu(A) \mid A \in R \wedge x \in A\} \ .$$

3. Sei $f : \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\pi_k^* f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ meßbar und stetig ist, wobei $\pi_k : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ die Projektion ist.

4. Geben Sie eine meßbare Abbildung $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ an, welche unendlich viele Werte annimmt.

5. Finden Sie ein Beispiel wie in 4. welches sogar stetig ist.

Aufgabe 41.13. Wir betrachten den Schiftraum $A^{\mathbb{N}}$ für $A := \{0, 1, 2\}$. Sei R die Algebra der Zylindermengen und $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra. Das Prämaß auf R assoziiert zu einer Funktion $f : A \to [0, 1]$ mit $\sum_{a \in A} f(a) = 1$ hat[4] eine eindeutige Erweiterung zu einem Maß $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$. Sei $T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ der Schift. Wir betrachten die Teilmenge
$$X := \{(a_i) \in A^{\mathbb{N}} \mid (\forall i \in \mathbb{N} \mid a_i = 1 \Rightarrow a_{i+1} = 2)\} \ .$$

[4] Diesen Fakt werden wir in der Vorlesung später beweisen.

1. Zeigen Sie, daß X in $(A^{\mathbb{N}}, R)$ nicht meßbar ist.
2. Zeigen Sie, daß X in $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ meßbar ist.
3. Zeigen Sie, daß $\mu(X) = 0$ genau dann gilt, wenn $f(1)(1 - f(2)) \neq 0$.
4. Zeigen Sie, daß $T(X) = X$ gilt.
5. Zeigen Sie, daß aus $Y \in R$, $Y \neq \emptyset$ und $T(Y) = Y$ folgt, daß $Y = A^{\mathbb{N}}$ gilt.

Aufgabe 41.14. Wir betrachten den Ring $\mathbb{Z}_3$ mit der Algebra der Zylindermengen R und der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$. Das auf R definierte Wahrscheinlichkeitsmaß hat[5] eine eindeutige Erweiterung zu einem Maß $\mu : \mathcal{B} \to [0, 1]$.

1. Zeigen Sie, daß $\mu(\{0\}) = 0$ gilt.
2. Zeigen Sie, daß die Teilmenge $X := \{x^2 \,|\, x \in \mathbb{Z}_3\}$ der Quadratzahlen in $\mathbb{Z}_3$ in $(\mathbb{Z}_3, \mathcal{B})$ meßbar ist.
3. Zeigen Sie, daß X in $(\mathbb{Z}_3, R)$ nicht meßbar ist.
4. Zeigen Sie, daß $\mu(X) \leq \frac{4}{9}$ gilt.
5. Zeigen Sie, daß $\mu(X) = \frac{3}{8}$ gilt.

Hinweis (für 2.-5.): Benutzen Sie, daß genau die Zahlen der Form $3^{2k}(1 + 3b) \in \mathbb{Z}_3$ mit $b \in \mathbb{Z}_3$ und $k \in \mathbb{N}$ Quadratzahlen sind.

Zusatzaufgabe: Verifizieren Sie diesen Fakt. *Hinweis: Zeigen Sie dazu, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Quadratzahlen in $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ genau die Zahlen der Form $[3^{2k}(1 + 3b)]$ sind. Es bleibt zu prüfen, daß alle Zahlen der Form $(1+3b) \in \mathbb{Z}_3$ mit $b \in \mathbb{Z}_3$ Quadrate sind. Zeigen Sie, daß eine Folge $(x_i) \in \mathbb{Z}_3$ derart, daß $x_1 = 1$ und $x_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ ein Quadrat ist für alle $i \in \mathbb{N}$, ein Quadrat in $\mathbb{Z}_3$ ist. Finden Sie dazu rekursiv nach $i \in \mathbb{N}$ eine Folge $(y_i) \in \mathbb{Z}_3$ mit $y_i^2 = x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*

Aufgabe 41.15. Zeigen Sie, daß die meßbaren Räume

$$([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}) \quad \text{und} \quad ([0, 1), \mathcal{B}_{[0,1)})$$

isomorph sind. Dazu muß man zeigen, daß es eine meßbare Bijektion

$$[0, 1] \to [0, 1)$$

gibt, deren Umkehrabbildung auch meßbar ist.

[5] Siehe Anmerkung zu Aufgabe 1.

Aufgabe 41.16. Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum, $\tilde{\mu}$ die äußere Erweiterung von μ und λ ein äußeres Maß auf Ω. Wir bilden die äußere Erweiterung der Einschränkung von λ auf R, setzen also für $A \subseteq \Omega$

$$\widetilde{\lambda_{|R}}(A) := \inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid \{(A_i) \in R^{\mathbb{N}} \mid A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\}\} .$$

1. Zeigen Sie, daß $\tilde{\mu}_{|R} \leq \mu$ gilt.

2. Zeigen Sie, daß $\lambda \leq \widetilde{\lambda_{|R}}$ gilt.

3. Schließen Sie daraus, daß $\widetilde{(\tilde{\mu})_{|R}} = \tilde{\mu}$ gilt.

Aufgabe 41.17. Wir betrachten den Maßraum Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$ mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$ und dem Lebesguemaß λ.

Zeigen Sie, daß für einen linearen Unterraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\dim(V) < n$ die Relation $\lambda(V) = 0$ gilt.

Zusatzaufgabe: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit positiver Kodimension. Zeigen Sie, daß $\lambda(M) = 0$ gilt.

Aufgabe 41.18. Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit der Eigenschaft, daß $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}$ gilt. Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ des Maßes μ werde durch $F(x) := \mu((-\infty, x))$ definiert. Zeigen Sie:

1. F ist monoton wachsend.

2. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

3. Wenn $x_0 \in \mathbb{R}$ und $F(x_0) < \infty$ gilt, dann ist
$$\mu(\{x_0\}) = \lim_{x \downarrow x_0} F(x) - F(x_0) .$$

4. Geben Sie die Verteilungsfunktion des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$ an.

5. Geben Sie die Verteilungsfunktion des Maßes μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ an, welches durch $\mu(A) := \sharp(A \cap \mathbb{N})$ gegeben ist.

Aufgabe 41.19. Sei $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ gegeben und erfülle folgende Bedingungen.

1. F ist monoton wachsend.

2. Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$,

3. Es gilt $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Zeigen Sie, daß es ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ gibt, dessen Verteilungsfunktion (siehe Aufgabe 2.) durch F gegeben ist.

Hinweis: Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

1. *Definieren Sie μ zunächst als Prämaß auf der dyadischen Algebra.*
2. *Zeigen Sie, daß das so erhaltene Prämaß σ-additiv ist. Gehen Sie dabei wie im Beweis der σ-Additivität des dyadischen Lebesgueprämaßes vor.*
3. *Zeigen Sie, daß die Ausdehnung von μ auf die Borelsche σ-Algebra die Verteilungsfunktion F hat.*
4. *Argumentieren Sie, daß μ eindeutig bestimmt ist.*

Aufgabe 41.20. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{Z}_5, \mathcal{B}, \mu)$ mit dem in der Vorlesung definierten Maß μ. Sei $\mathbb{Z}_5^\times \subseteq \mathbb{Z}_5$ die Menge der Einheiten, d.h. die Menge derjenigen Elemente, die ein multiplikatives Inverses besitzen.

1. Zeigen Sie, daß die Teilmenge $5^k\mathbb{Z}_5^\times \subset \mathbb{Z}_5$ für alle $k \in \mathbb{N}$ meßbar ist und bestimmen Sie den Wert $\mu(5^k\mathbb{Z}_5^\times)$.
2. Sei $x \in \mathbb{Z}_5$ und $M_x : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ die Abbildung $M_x(y) := xy$. Zeigen Sie, daß die Abbildung M_x meßbar ist. Zeigen Sie weiter, daß unter der Annahme $x \in \mathbb{Z}_5^\times$ die Relation $M_{x,*}\mu = \mu$ gilt.
3. Sei λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{Z}_5, \mathcal{B})$ und gelte $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}$ und $x \in \mathbb{Z}_5$. Zeigen Sie, daß dann $\mu = \lambda$ gilt.

Aufgabe 41.21. Wir betrachten den Shiftraum $(A^\mathbb{N}, R, \mu)$ basierend auf einer endlichen Menge A mit mehr als einem Element und einer nirgends verschwindenden Funktion $p : A \to [0, 1]$. Ein Punkt $x \in A^\mathbb{N}$ heißt periodisch (mit der Periode $n \in \mathbb{N}$), wenn $T^n(x) = x$ gilt. Er heißt schließlich periodisch (mit der Periode $n \in \mathbb{N}$), falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $T^k(x)$ periodisch mit der Periode n ist. Zeigen Sie, daß die Mengen der periodischen und schließlich periodischen Punkte meßbar und Nullmengen sind.

Aufgabe 41.22. Geben Sie die Verteilungsfunktion des Maßes $W_*\lambda$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ an, wobei $(A^\mathbb{N}, \mathcal{B}_{A^\mathbb{N}}, \lambda)$ der Shiftraum mit $A := \{-1, 1\}$ mit dem Maß λ assoziiert zur Funktion $\mathrm{const}_{\frac{1}{2}} : A \to [0, 1]$ und die Abbildung $W : A^\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch $W((a_i)) := \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i 2^{-i}$ gegeben ist.

Aufgabe 41.23. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und

$$\mathcal{EW}[p^\infty] := \{z \in \mathbb{C} \mid (\exists k \in \mathbb{N} \mid z^{p^k} = 1)\} .$$

Für $z \in \mathcal{EW}[p^\infty]$ wählen wir $k \in \mathbb{N}$, so daß $z^{p^k} = 1$ gilt, und definieren die Abbildung $\phi_z : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ durch $\phi_z(x) := z^{\mathrm{pr}_k(x)}$, wobei $\mathrm{pr}_k : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ die Projektion ist.

1. Zeigen Sie, daß die Funktion ϕ_z wohldefiniert ist.

2. Zeigen Sie, daß für alle $z, z' \in \mathcal{EW}[p^\infty]$ die Relation $\phi_z\phi_{z'} = \phi_{zz'}$ gilt.

3. Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathcal{EW}[p^\infty]$ die Funktion ϕ_z einfach ist.

4. Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathcal{EW}[p^\infty]$ die Relation

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \phi_z d\mu = \begin{cases} 1 & z = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   gilt.

5. Zeigen Sie, daß für alle $z, z' \in \mathcal{EW}[p^\infty]$ die Relation $\int_{\mathbb{Z}_p} \phi_z \bar{\phi}_{z'} d\mu = \delta_{z,z'}$ gilt.

Hinweis: Das Integral einer einfachen komplexwertigen Funktion ϕ wird hier durch

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \phi d\mu := \sum_{y \in \mathbb{C}} y \ \mu(\{\phi = y\})$$

definiert.

Aufgabe 41.24. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}, \mu)$.

1. Zeigen Sie, daß das Produktprämaß $\mu \times \mu$ auf $(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}) \times (\mathbb{Z}_p, \mathcal{B})$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einem Maß λ besitzt.

2. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$S : (\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}) \times (\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}) \to (\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}) \ , \qquad S(x, y) := x + y$$

   meßbar ist.

3. Zeigen Sie, daß die Relation $S_*\lambda = \mu$ gilt.

Aufgabe 41.25. Wir betrachten den Maßraum $(A^{\mathbb{N}}, R, \mu)$ basierend auf der Menge $A := \{1, 2, 3\}$. Das Maß μ wird durch die Funktion

$$p : A \to [0, 1] \ , \qquad p(a) := \frac{a}{6}$$

bestimmt. Wir betrachten weiter die Abbildung $f : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, welche durch die Vorschrift

$$f((a_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$$

definiert wird.

1. Zeigen Sie, daß f eine wohldefinierte meßbare Funktion ist.

2. Zeigen Sie, daß f integrierbar ist.

3. Zeigen Sie, daß $E(f) = \frac{7}{3}\zeta(2)$ gilt.

4. Zeigen Sie, daß für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion $\phi := \exp(i\lambda f)$ integrierbar ist.

5. Zeigen Sie die Formel

$$E(\phi) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6} e^{\frac{i\lambda}{n^2}} + \frac{1}{3} e^{\frac{2i\lambda}{n^2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{3i\lambda}{n^2}} \right) .$$

Aufgabe 41.26. Wir betrachten den Maßraum $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, wobei λ die Einschränkung des Lebesguemaßes von $\mathbb{R}$ auf $[0,1]$ ist. Sei $f \in \mathcal{L}^1([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$. Für $s \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $h_s : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$h_s(x) := \sin(sx) f(x) .$$

1. Zeigen Sie, daß für jedes $s \in \mathbb{R}$ gilt $h_s \in \mathcal{L}^1([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$.

2. Unter Benutzung von 1. definieren wir die Abbildung

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \qquad g(s) := \int h_s d\lambda .$$

   Zeigen Sie, daß g stetig ist.

3. Zeigen Sie, daß die in 2. definierte Abbildung g glatt ist.

4. Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to 0} g^{(n)} = 0$ punktweise gilt.

5. Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to 0} g^{(n)} = 0$ gleichmäßig gilt.

Aufgabe 41.27. Für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir den endlichen Maßraum $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}), \mu)$ mit dem durch $\frac{1}{p^k}$ gewichteten Zählmaß. Sei weiter $\mathcal{EW}(p^k) \subset \mathbb{C}$ die Menge der p^k-ten Einheitswurzeln. Für $z \in \mathcal{EW}(p^k)$ definieren wir $\phi_z : \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ durch $\phi_z([n]) := z^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten den komplexen Vektorraum $H := \mathbb{C}^{\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}}$ mit dem hermiteschen Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int \bar{f} g d\mu$. Für $f \in H$ setzen wir $a_z(f) := \langle \phi_z, f \rangle$.

1. Zeigen Sie, daß ϕ_z wohldefiniert ist.

2. Zeigen Sie, daß $\frac{1}{p^k} \sum_{z \in \mathcal{EW}(p^k)} \phi_z(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$.

3. Zeigen Sie, daß $\frac{1}{p^k} \sum_{z \in \mathcal{EW}(p^k)} \phi_z(y)\phi_z(x) = \begin{cases} 1 & x = -y \\ 0 & x \neq -y \end{cases}$.

4. Zeigen Sie, daß für jedes $f \in H$ gilt

$$f = \sum_{z \in \mathcal{EW}(p^k)} a_z(f) \phi_z .$$

5. Zeigen Sie, daß $(\phi_z)_{z\in\mathcal{EW}(p^k)}$ eine Orthonormalbasis von H ist.

Aufgabe 41.28. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $\mathcal{EW}(p^\infty)$ die Menge der p-Potenzeinheitswurzeln. Für $z \in \mathcal{EW}(p^\infty)$ ist $\phi_z : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ der dazugehörige Charakter (Aufgabe 3 von Blatt 6.). Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{Z}_p, \mathcal{B}, \mu)$. Sei R die Algebra der Zylindermengen in $\mathbb{Z}_p$ und $\mathcal{E}_\mathbb{C}(\mathbb{Z}_p, R)$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der $\mathbb{C}$-wertigen einfachen Funktionen auf $(\mathbb{Z}_p, R)$. Für $f \in \mathcal{E}_\mathbb{C}(\mathbb{Z}_p, R)$ und $z \in \mathcal{EW}(p^\infty)$ definieren wir die komplexe Zahl

$$a_z(f) := \int f\overline{\phi_z}d\mu \ .$$

1. Zeigen Sie, daß die Aussage

   $$\Big(\forall f \in \mathcal{E}_\mathbb{C}(\mathbb{Z}_p, R)\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathcal{EW}(p^\infty) \,|\, (z^{p^k} \neq 1) \Rightarrow (a_z(f) = 0)\Big)$$

   gilt.

2. Zeigen Sie, daß für $f \in \mathcal{E}_\mathbb{C}(\mathbb{Z}_p, R)$ aus $(\forall z \in \mathcal{EW}(p^\infty) \,|\, a_z(f) = 0)$ die Relation $f = 0$ folgt.

3. Zeigen Sie, daß

   $$f = \sum_{z\in\mathcal{EW}(p^\infty)} a_z(f)\phi_z$$

   gilt, wobei diese Summe höchstens endlich viele von Null verschiedene Summanden hat.

4. Zeigen Sie, daß $(\phi_z)_{z\in\mathcal{EW}(p^\infty)}$ eine Basis von $\mathcal{E}_\mathbb{C}(\mathbb{Z}_p, R)$ ist.

Hinweis: Benutzen die Ergebnisse von Aufgabe 3.

Aufgabe 41.29. Sei $p \in [1,\infty)$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ der Lebesgue Maßraum.

1. Zeigen Sie, daß $C_c(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ gilt.

2. Zeigen Sie, daß aus $f \in C(\mathbb{R})$ und $f =_\lambda 0$ folgt $f = 0$.

3. Zeigen Sie, daß die kanonische Abbildung $i : C_c(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, $i(f) := [f]$, injektiv ist.

4. Sei $V \subseteq L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ der Unterraum der Klassen aller Funktionen der Form $\sum_{i=1}^r c_i\chi_{[a_i,b_i]}$ für $r \in \mathbb{N}$ und $(c_i), (a_i), (b_i) \in \mathbb{R}^r$ mit $a_i < b_i$ für alle $i \in \{1, \dots r\}$. Zeigen Sie, daß V ein dichter Unterraum von $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ ist.

5. Zeigen Sie, daß $i(C_c(\mathbb{R}))$ ein dichter Unterraum von $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ ist.

Aufgabe 41.30. Wir betrachten den Maßraum $(A^\mathbb{N}, \mathcal{B}, \mu)$ für eine endliche Menge A, wobei μ zu einer Abbildung $\kappa : A \to [0,1]$ assoziiert ist. Sei $T : A^\mathbb{N} \to A^\mathbb{N}$ die Verschiebung $T((a_i)) := (a_{i+1})$. Wir fixieren $p \in [1,\infty)$ und betrachten den Banachraum $E := L^p(A^\mathbb{N}, \mathcal{B}, \mu)$.

1. Zeigen Sie, daß T eine isometrische lineare Abbildung

$$T^* : E \to E \quad T^*[f] := [T^* f]$$

induziert.

2. Bestimmen Sie $\|T^*\|_{B(E)}$.

3. Zeigen Sie, daß $T^* : E \to E$ injektiv ist.

4. Zeigen Sie, daß $T^* : E \to E$ genau dann surjektiv ist, wenn es ein $a \in A$ mit $\kappa(a) = 1$ gibt.

5. Zeigen Sie, daß aus $[f] \in E$ und $T^*[f] = [f]$ folgt, daß $[f]$ durch eine konstante Funktion repräsentiert wird.

Aufgabe 41.31. Seien (Ω, R, μ), (Ω', R', μ') Maßräume und $T : (\Omega, R) \to (\Omega', R')$ eine meßbare Abbildung derart, daß $T_*\mu = \mu'$. Sei $p \in [1, \infty)$.

1. Zeigen Sie, daß $[f] \mapsto [T^* f]$ eine isometrische Abbildung

$$T^* : L^p(\Omega', R', \mu') \to L^p(\Omega, R, \mu)$$

induziert.

2. Sei $\Omega = \Omega'$ und (Ω, R, μ) die Vervollständigung von (Ω, R', μ'). Dann induziert die Identität von Ω einen isometrischen Isomorphismus von Banachräumen

$$\mathrm{id}^* : L^p(\Omega, R', \mu') \to L^p(\Omega, R, \mu) \ .$$

3. Zeigen Sie, daß aus $\mu(\Omega) < \infty$ und $q \in [p, \infty)$ folgt, daß die Abbildung

$$L^q(\Omega, R, \mu) \to L^p(\Omega, R, \mu) \ , \quad [f] \mapsto [f]$$

eine stetige Abbildung zwischen Banachräumen ist.

4. Zeigen Sie, daß die Norm der Abbildung in 3. durch $\mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ abgeschätzt werden kann.

5. Zeigen Sie am Beispiel von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$, daß die Aussage in 3. im allgemeinen falsch wird, wenn man die Vorraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$ wegläßt.

Aufgabe 41.32. Wir betrachten für eine kompakte abelsche topologische Gruppe G den Haarschen Maßraum $(G, \mathcal{B}, \mu)$ und den Hilbertraum $L^2(G, \mathcal{B}, \mu)$. Für $g \in G$ definieren wir die Rechtstranslation $R_g : G \to G$ durch $R_g(h) := h + g$.

1. Zeigen Sie, daß $R_g^* : L^2(G, \mathcal{B}, \mu) \to L^2(G, \mathcal{B}, \mu)$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

2. Zeigen Sie die Relation
$$\langle R_g^* v, w\rangle = \langle v, R_{-g}^* w\rangle$$
für alle $g \in G$ und $v, w \in L^2(G, \mathcal{B}, \mu)$.

3. Zeigen Sie, daß für alle $g, g' \in G$ die Relation $R_{gg'}^* = R_g^* \circ R_{g'}^*$ gilt.

4. Sei $\chi \in \hat{G}$ ein Charakter. Zeigen Sie, daß $\dim(L^2(G, \mathcal{B}, \mu)(\chi)) = 1$ gilt, wobei
$$L^2(G, \mathcal{B}, \mu)(\chi) := \{v \in L^2(G, \mathcal{B}, \mu) \mid (\forall g \in G \mid R_g^* v = \chi(g)v)\}$$
die χ-isotypische Komponente ist.

5. Zeigen Sie, daß für $\chi, \chi' \in \hat{G}$ mit $\chi \neq \chi'$ gilt
$$L^2(G, \mathcal{B}, \mu)(\chi) \perp L^2(G, \mathcal{B}, \mu)(\chi') \ .$$

Aufgabe 41.33. Wir betrachten den Lebesgue Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung $T_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $T_x(y) := x + y$. Sei $p \in [1, \infty)$.

1. Zeigen Sie, daß $T_x^* : L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda) \to L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

2. Zeigen Sie, daß für $f \in C_c(\mathbb{R})$ die Abbildung
$$\mathbb{R} \ni x \mapsto T_x^* f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$$
stetig ist.

3. Zeigen Sie, daß für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ gilt
$$\|T_x^* - T_y^*\|_{B(L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda))} = 2$$
gilt.

4. Zeigen Sie, daß die Abbildung
$$\mathbb{R} \ni x \mapsto T_x^* \in B(L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda))$$
nicht stetig ist.

Aufgabe 41.34. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $0 < c$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion. Wir betrachten die Teilmenge
$$A_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ und } y \in [f(x), f(x) + c]\} \ .$$
Zeigen Sie, daß $A_f \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ gilt. Zeigen Sie weiter, daß $\lambda_{\mathbb{R}^2}(A_f)$ unabhängig von f ist und berechnen den Wert explizit.

Aufgabe 41.35. *In einem Brief von Herrn Fiboni findet man folgenden Satz.*

Satz 41.1. *Für jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ gilt $r = 0$.*

Proof. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $r > 0$ annehmen. Wir betrachten die folgenden beiden Maßräume :

1. $(\Omega_1, R_1, \mu_1) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ (Lebesguescher Maßraum),
2. $(\Omega_2, R_2, \mu_2) := (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu_2)$, wobei $\mu_2(A)$ das Zählmaß ist .

Sei nun $(\Omega, R) = (\Omega_1, R_1) \times (\Omega_2, R_2)$ das Produkt der meßbaren äume. Insbesondere gilt $\Omega = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subseteq R$. Sei μ das Maß auf R, welches durch die Bedingung $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ für alle $(A_1, A_2) \in R_1 \times R_2$ festgelegt ist.

Wir betrachten die nichtnegative Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 0 & x = y \text{ und } x \notin [0,1] \\ r & x = y \text{ und } x \in [0,1] \end{cases}$$

gegeben ist. Diese Funktion nimmt nur zwei Werte an. Die Teilmenge

$$f^{-1}(\{r\}) := \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$$

ist abgeschlossen und damit meßbar wegen $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subseteq R$. Die Funktion f ist also einfach, insbesondere meßbar bezüglich R.

Wir berechnen nun

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = r \ .$$

Aus der Endlichkeit dieser Integrale schließen wir mit dem Satz von Fubini, daß $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und

$$\int_\Omega f d\mu = r$$

gilt. Natürlich können wir die Integrationen auch in der anderen Reihenfolge ausführen. Es gilt

$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = 0 \ .$$

Damit haben wir

$$0 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_\Omega f d\mu = r$$

gezeigt. Folglich muß $r = 0$ gelten. □

An welcher Stelle ist das Argument problematisch.

Aufgabe 41.36. *Vom berühmten Mathematiker Belesque ist folgeder Satz überliefert.*

Satz 41.2. *Für jede glatte und kompakt getragene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda(x) = 0$.*

Proof. Wir betrachten die Funktion

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \quad h(t,x) := \chi_{(-\infty,t]}(x) f(x) \ .$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $h(t,-)$ integrierbar. Wir setzen

$$\psi(-) := \int_{\mathbb{R}} h(-,x) d\lambda(x) \ .$$

Weiter gilt (punktweise)

$$\lim_{t\to-\infty} h(t,-) = 0 \ , \quad \lim_{t\to\infty} h(t,-) = f(-) \ .$$

Dann gilt nach dem Satz über majorisierte Konvergenz (mit integrierbarer Majorante $|f|$) daß

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to-\infty} h(t,x) d\lambda(x) &= 0 \\ \lim_{t\to\infty} \psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to\infty} h(t,x) d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda(x) \ . \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus dem folgenden Fakt: Die Funktion ψ ist in jedem $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dt}\psi(t) = 0$.

Wir zeigen nun den Fakt. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{t_0\}} h(t,x) d\lambda(x)$$

weil $\{t_0\}$ eine λ-Nullmenge ist. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ ist $h(-,x)$ auf einer Umgebung von t_0 konstant. Insbesondere ist diese Funktion auf dieser Umgebung differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dt}h(t,x) = 0$. Wir können also den Satz über das Vertauschen von Ableitung und Integral verwenden (wobei die Majorante die Nullfunktion ist). Es gilt

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{|t=t_0} \psi(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{t_0\}} \left(\frac{d}{dt}\right)_{|t=t_0} h(t,x) d\lambda(x) = 0 \ .$$

□

Finden Sie auch hier das Problem.

Aufgabe 41.37. Sei B eine positive definite symmetrische $n \times n$-Matrix und

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Q_B(x) := \langle x, Bx \rangle \in \mathbb{R}$$

die dazu assoziierte quadratische Form auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$.

1. Zeigen Sie, daß

$$\mu_B := \frac{\det(B)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{Q_B}{2}} \lambda_{\mathbb{R}^n}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Ein **Gaußsches Maß** auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V ist ein Maß der Form $\Phi_*\mu_B$ für $n := \dim(V)$, eine geeignete positiv-definite symmetrische $n \times n$-Matrix B und einen linearen Isomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \to V$. Hierbei betrachten wir V mit der natürlichen Topologie und der Borelschen σ-Algebra.

2. Sei μ ein Gaußsches Maß auf einem endlich-dimensionalen rellen Vektorraum V und $\Phi \in \mathrm{Aut}(V)$ ein linearer Automorphismus. Zeigen Sie, daß $\Phi_*\mu$ auch ein Gaußsches Maß ist.

3. Sei μ ein Gaußsches Maß auf einem endlich-dimensionalen rellen Vektorraum V und $p : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, daß $p_*\mu$ ein Gaußsches Maß auf W ist.

Sei $(G, \mathcal{B})$ der Borelsche meßbare Raum auf einer lokalkompakten topologischen Gruppe, $S : G \times G \to G$ die Abbildung $S(g, h) := g + h$ und μ, ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf G. Die **Faltung** von μ und ν ist das Maß $\mu * \nu := S_*(\mu \times \nu)$ auf $(G, \mathcal{B})$.

4. Zeigen Sie:

1. $\mu * \nu$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.
2. Es gilt $\delta_0 * \mu = \mu * \delta_0 = \mu$, wenn δ_0 das Diracmaß im Punkt $0 \in G$ ist.
3. Wenn λ ein drittes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(G, \mathcal{B})$ ist, dann gilt die Identität

$$(\mu * \nu) * \lambda = \mu * (\nu * \lambda) \ .$$

5. Zeigen Sie, daß die Faltung zweier Gaußscher Maße auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum wieder ein Gaußsches Maß ist.

Aufgabe 41.38. 1. Für welche $r \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto (1 + \|x\|)^{-r}$$

in $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_{\mathbb{R}^n})$.

2. Für welche $r \in \mathbb{R}$ ist die auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ durch

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \|x\|^r e^{-\|x\|}$$

definierte Funktion in $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_{\mathbb{R}^n})$.

3. Für welche $r, s \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (1 + |x - y|)^{-s}(1 + |x|)^{-r}$$

in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \lambda_{\mathbb{R}^2})$.

Aufgabe 41.39. Sei ν Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ derart, daß die Momente

$$M(m) := \int_{\mathbb{R}} x^m d\nu(x)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ existieren. Zeigen Sie, daß es einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, μ) gibt, auf welchem eine Folge (f_i) von Zufallsvariablen mit den folgenden Eigenschaften definiert ist.

1. Es gilt $f_{i,*}\mu = \nu$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

2. Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ die Gleichung

$$\mathbf{E}(\prod_{i=1}^{n} f_i^{m_i}) = \prod_{i=1}^{n} M(n) \ .$$

Wir setzen $\bar{f}_i := f_i - M(1)$. Zeigen Sie, daß für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbf{E}(\bar{f}_i \bar{f}_j) = \left\{ \begin{array}{cc} M(2) - M(1)^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{array} \right\}$$

Aufgabe 41.40. Wir betrachten eine endliche Menge A und zwei Funktionen $\kappa_i : A \to [0, 1]$ mit $\sum_{a \in A} \kappa_i(a) = 1$, $i = 0, 1$. Seien μ_i die assoziierten Maße auf dem Shiftraum $(A^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$. Zeigen Sie, daß wenn μ_0 zu μ_1 absolutstetig ist, $\mu_0 = \mu_1$ gilt.

Literatur