Funktionentheorie

Ulrich Bunke*

7. Februar 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkung	2
2	Etwas lineare Algebra	2
3	Holomorphe Funktionen	4
4	Integration entlang von Wegen	9
5	Der Cauchysche Integralsatz	12
6	Die Cauchy-Integralformel	15
7	Glattheit und Analytizität holomorpher Funktionen	16
8	Fortsetzungssätze	18
9	Konvergenz von Folgen holomorpher Funktionen	22
10	Das Maximumprinzip	24
11	Ganze Funktionen, Fundamentalsatz der Algebra	26
12	Singularitäten	28
13	Meromorphe Funktionen	31
14	Residuum	33
15	Der Residuensatz	37
16	Pole zählen	40

*Regensburg, ulrich.bunke@mathematik.uni-regensburg.de

17 Integralberechnungen - trigonometrische Funktionen **44**

18 Integrale über $\mathbb{R}$ - Schließen nach oben und unten **46**

19 Fouriertransformation **52**

20 Aufgaben **56**

1 Vorbemerkung

Dies ist eine kurze Einführung in die Funktionentheorie und die Basis für einen aus 10 Vorlesungen a 90 Minuten bestehenden Kurs, welcher im Winter 2014 in Regensburg gehalten wurde.

2 Etwas lineare Algebra

Sei V ein reeller Vektorraum.

Definition 2.1. *Eine **komplexe Struktur** auf V ist ein Element $I \in \mathrm{End}(V)$ mit $I^2 = -1$.*

1. Ist I eine komplexe Struktur auf einem reellen Vektorraum, dann kann man auf der abelschen Gruppe von V die Struktur eines komplexen Vektorraumes durch die folgende Skalarmultiplikation mit komplexen Zahlen definieren:

$$(a+bi)\cdot v := av + bIv \ , \quad a+ib \in \mathbb{C} \ , \quad a,b \in \mathbb{R} \ .$$

   Wir bezeichen den so erhaltenden komplexen Vektorraum mit V_I.

2. Sei W ein komplexer Vektorraum. Mit $W_{|\mathbb{R}}$ bezeichnen wir den durch Einschränkung der Skalarmultiplikation entstehenden reellen Vektorraum. Dann wird durch $I := i\cdot -$ eine komplexe Struktur gegeben. Die Identität der unterliegenden Mengen ist ein Isomorphismus $(W_{\mathbb{R}})_I \cong W$. Weiter gilt mit der Notation aus 1., daß die Identität der unterliegenden Mengen ein Isomorphismus $(V_I)_{|\mathbb{R}} \cong V$ ist.

3. Wir benutzen die Notation von 2. Wir haben eine kanonische Einbettung

$$\mathrm{End}(W) \subset \mathrm{End}(W_{|\mathbb{R}}) \ ,$$

   wobei wir beide Mengen als Teilmengen der Menge der mengentheoretischen Abbildungen W^W betrachten. Sei $A \in \mathrm{End}(W_{|\mathbb{R}})$. Dann ist $A \in \mathrm{End}(W)$ genau dann, wenn $[A, I] = 0$ gilt.

4. Wir haben eine Einbettung
$$\mathbb{C} \to \mathrm{End}(W)\ , \quad \lambda \mapsto \lambda \cdot \mathrm{id}_W\ .$$
Durch seine Ringstruktur wird $\mathrm{End}(W_{|\mathbb{R}})$ damit ein komplexer Vektorraum. Die Teilmenge $\mathrm{End}(W)$ ist ein komplexer Unterraum.

5. Ein Endomorphismus $A \in \mathrm{End}(W_{|\mathbb{R}})$ heißt **antilinear**, wenn $AI = -IA$ gilt. Man kann jedes Element $A \in \mathrm{End}(W_{|\mathbb{R}})$ eindeutig als Summe einer komplex linearen und einer komplex antilinearen Abbildung schreiben. In der Tat gilt
$$A = \frac{1}{2}(A - IAI) + \frac{1}{2}(A - IAI)\ ,$$
wobei der erste Summand komplex linear und der zweite antilinear ist. Es gilt also eine Zerlegung
$$\mathrm{End}(W_{|\mathbb{R}}) \cong \mathrm{End}(W) \oplus \mathrm{End}(W_{|\mathbb{R}})^{anti}$$
als komplexer Vektorraum.

Für die Funktionentheorie ist der reell zweidimensionale Fall besonders wichtig. Im folgenden identifizieren wir wie üblich
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_{|\mathbb{R}}\ , \quad (x,y) \mapsto x + iy\ .$$
Dann gilt
$$\mathrm{End}(\mathbb{C}_{|\mathbb{R}}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) \cong \mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{R})\ .$$
Unter dieser Identifikation gilt
$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$
Weiter identifizieren wir
$$\mathrm{End}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\ , \quad A \mapsto A(1)\ . \tag{1}$$
Sei
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\ , \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}\ .$$
Dann gilt
$$[A,I] = \begin{pmatrix} b+c & d-a \\ d-a & -c-b \end{pmatrix}\ .$$

Folgerung 2.2. *Es gilt also $A \in \mathrm{End}(\mathbb{C})$ genau dann, wenn $b = -c$ und $a = d$ ist.*

In diesem Fall wird A durch die Multiplikation mit der komplexen Zahl $a + ic$ gegeben. Umgekehrt ist die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ mit der komplexen Zahl $u + iv \in \mathbb{C}$, $u, v \in \mathbb{R}$, durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

gegeben.

Die beiden Summanden in der Zerlegung

$$\mathrm{End}(\mathbb{C}_{|\mathbb{R}}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C})$$

sind komplex 1-dimensional und werden von 1 und der komplexen Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ erzeugt.

3 Holomorphe Funktionen

Seien (x, y) die Koordinaten auf $\mathbb{R}^2$. Wir schreiben komplexe Zahlen in der Form $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wir betrachten eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$. Die Ableitung von f ist dann eine Abbildung

$$df : U \to \mathrm{End}(\mathbb{C}_{|\mathbb{R}}) \ .$$

Definition 3.1. *Die Abbildung f heißt **holomorph**, wenn für alle $z \in U$ die Relation $df(z) \in \mathrm{End}(\mathbb{C})$ gilt. Mit $\mathcal{O}(U)$ bezeichen wir die Menge der holomorphen Funktionen auf U.*

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir setzen $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(f)$, so daß $f = u + iv$ gilt.

Lemma 3.2. *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn die Komponenten u, v stetige partielle Ableitungen besitzen welche die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen***

$$\partial_x u = \partial_y v \ , \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

erfüllt sind.

Proof. Die Komponenten von f sind genau stetig partiell differenzierbar wenn f stetig differenzierbar ist. In diesem Fall wird die Ableitung von f wird durch die Jacobimatrix

$$J(f) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

gegeben. Es gilt $df \in \mathrm{End}(\mathbb{C})$ nach Korollar 2.2 genau dann, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

gelten. □

Für $f \in \mathcal{O}(U)$ interpretieren wir $df(z)$ mit Hilfe von (1) als eine komplexe Zahl, welche wir durch $f'(z)$ notieren.

Definition 3.3. *Für $f \in \mathcal{O}(U)$ heißt die Funktion $U \ni z \mapsto f'(z) \in \mathbb{C}$ die **Ableitung** von f.*

Es gilt

$$f' = \partial_x u + i\partial_x v \ .$$

1. Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und ist $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind die Funktionen

$$f + \lambda g \ , \quad fg$$

holomorph. Es gelten folgende Identitäten für die Ableitungen:

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g' \ , \quad (fg)' = g'g + fg' \ .$$

Wir zeigen die zweite Aussage. Sei $M : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Multiplikation. Dann gilt $fg = M \circ (f, g)$ und nach der Kettenregel und wegen der Bilinearität von M

$$d(fg) = dM(f, g) \circ (df, dg) = M(df, g) + M(f, dg) \ .$$

Da M komplex bilinear ist, ist $d(fg)$ komplex linear. Damit ist fg holomorph und es gilt die angegebene Formel für die Ableitung.

2. Wenn g keine Nullstellen hat, dann ist auch g^{-1} holomorph. Es gilt

$$(g^{-1})' = -g^{-2}g' \ .$$

Wir leiten die Identität $1 = M(g, \frac{1}{g})$ ab und erhalten

$$0 = M(dg, \frac{1}{g}) + M(g, d(\frac{1}{g})) \ .$$

Daraus folgt

$$d(\frac{1}{g}) = -M(\frac{1}{g^2}, dg) \ .$$

Also ist $\frac{1}{g}$ holomorph und es gilt die angegebene Formel für die Ableitung.

Folgerung 3.4. *Die Menge $\mathcal{U}(U)$ hat also die Struktur einer Algebra über $\mathbb{C}$ und ein Element in $\mathcal{O}(U)$, ist genau dann invertierbar, wenn es keine Nullstellen hat.*

1. Die Identität $z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist holomorph. Die Abbildung dz ist konstant mit dem Wert 1. Ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ bestimmt eine holomorphe Abbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ daß $(z^n)' = nz^{n-1}$. Diese Gleichung kann man induktiv zeigen.

2. Die komplexe Konjugation $\bar{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist nicht holomorph. In der Tat ist $d\bar{z}$ konstant mit dem Wert komplexe Konjugation und damit nicht komplex linear.

3. Seien $U, V, W \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to V$ und $g : V \to W$ holomorphe Abbildungen. Dann ist $g \circ f : U \to W$ holomorph und es gilt $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'$. Das folgt unmittelbar aus der Kettenregel.

4. Sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen und existiere $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ derart, daß $df = \lim_{n\to\infty} df_n$ gilt. Dann ist f holomorph. Das folgt aus der Abgeschlossenheit der Teilmenge $\mathrm{End}(\mathbb{C}) \subset \mathrm{End}(\mathbb{C}_{|\mathbb{R}})$. Insbesondere sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine auf $U \subseteq \mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten. Dann ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

5. Die Funktionen
$$\exp, \sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
sind holomorph. Es gelten die Identitäten:
$$\exp' = \exp \ , \quad \sin' = \cos \ , \quad \cos' = -\sin \ .$$

6. Die Funktion
$$\ln : B(1, 1) \to \mathbb{C}$$
ist durch die Potenzreihe
$$\ln(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}$$
definiert und holomorph. Es gilt
$$\ln'(z) = \frac{1}{z} \ .$$

7. Für $x \in (0, \infty)$ ist die Funktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto x^z \in \mathbb{C}$ holomorph und es gilt
$$(x^z)' = \ln(x) x^z \ .$$
In der Tat gilt $x^z = \exp(z \ln(x))$. Hier benutzen wir natürlich die Definition von ln als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion für reelle Argumente. Auf $B(1, 1) \cap (0, \infty)$ stimmen aber beide Versionen der Logarithmusfunktion überein.

8. Sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ und $\mathrm{supp}(\phi)$ beschränkt. Dann ist die Fouriertransformierte
$$\mathcal{F}(\phi)(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-izx)\phi(x)dx$$
holomorph und es gilt
$$\mathcal{F}(\phi)'(z) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-izx) x \phi(x)dx \ .$$
In der Tat kann man hier unter dem Integral differenzieren.

9. Die Gammfunktion ist auf $z \in \{u \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(u) > 0\}$ durch

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty \exp(-x) x^{z-1} dx$$

definert und holomorph. Es gilt

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \exp(-x) \ln(x) x^{z-1} dx \ .$$

In der Tat ist für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ für alle $z \in \{u \in \mathbb{C} \mid \epsilon^{-1} \geq \mathrm{Re}(u) > \epsilon\}$

$$(0, \infty) \ni x \mapsto \exp(-x)(1 + |\ln(x)|)(x^{\frac{1}{\epsilon}} + x^{\epsilon - 1}) \in \mathbb{R}$$

eine integrable Majorante der Funktionen

$$\exp(-x) x^{z-1} \ , \quad \exp(-x) \ln(x) x^{z-1}$$

von $x \in (0, \infty)$.

Wir haben die Funktionalgleichung

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \ .$$

Wir rechnen dazu für $\mathrm{Re}(z) > 0$, daß

$$\begin{aligned}
z\Gamma(z) &= z \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx \\
&= \int_0^\infty \exp(-x) \partial_x x^z dx \\
&= \lim_{t \to \infty} \int_0^t \exp(-x) \partial_x x^z dx \\
&= \lim_{t \to \infty} \left[- \int_0^t \partial_x \exp(-x) x^z dx + \exp(-t) t^z \right] \\
&= \int_0^\infty \exp(-x) x^z dx \\
&= \Gamma(z+1)
\end{aligned}$$

Wir erhalten durch Iteration erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+k) &= (z+k-1)\Gamma(z+k-1) \\
&= (z+k-1)(z+k-2)\Gamma(z+k-2) \\
&\cdots \\
&= \prod_{n=0}^{k-1} (z+n) \Gamma(z)
\end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir die Identität

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{\prod_{n=0}^{k-1}(z+n)} \ .$$

Mit dieser Formel können wir $\Gamma(z)$ zu einer holomorphen Funktion auf die offene Menge $\{\mathrm{Re}(z) > -k\} \setminus \{0, -1, -2, \ldots, -k+1\}$ fortsetzen. Da wir $k \in \mathbb{N}$ beliebig groß wählen können, ist $\Gamma(z)$ eine damit als eine holomophe Funktion auf der offenen Teilmenge $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots\}$ von $\mathbb{C}$ definiert.

Lemma 3.5. *Eine holomorphe Funktion, welche nur reelle (oder nur imaginäre) Werte annimmt, ist lokal konstant.*

Proof. Sei f eine holomorphe Funktion, welche nur reelle Werte annimmt. Dann wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung $\partial_y f = 0$ and $\partial_x f = 0$, also $df = 0$. $\square$

Hier ist eine weitere Charakterisierung der Holomorphie als komplexe Differenzierbarkeit.

Lemma 3.6. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Für jedes $u \in U$ existiert der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h} =: a(u)$$

und $a : U \to \mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion.

2. *f ist holomorph.*

Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist, dann gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h} = f'(u) \ .$$

Proof. Sei $f \in \mathcal{O}(U)$. Wir definieren die Funktion $r : U - u \to \mathbb{C}$ durch die Gleichung

$$f(u+h) = f(u) + f'(u)h + r(h) \ .$$

Dann gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

und damit $a = f'(u)$.

Möge umgekehrt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h} =: a(u)$$

für jedes $u \in U$ existieren und stetig von u abhängen. Dann definieren wir die Funktion $r : U - u \to \mathbb{C}$ durch

$$f(u+h) = f(u) + a(u)h + r(h) \ .$$

Dann gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \ .$$

Folglich ist f in u differenzierbar und $df(u)$ ist die Multiplikation mit $a(u)$ und damit komplex linear sowie stetig in u. Folglich ist f holomorph. □

Sei $V \subseteq \mathbb{R}$ offen und $\gamma : V \to U$ differenzierbar und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt nach der Kettenregel

$$(f \circ \gamma)' = f' \circ \gamma \cdot \gamma' \ . \tag{2}$$

4 Integration entlang von Wegen

Unter einem Weg in $\mathbb{C}$ verstehen wir eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Die Bedingung, zweimal stetig differenzierbar zu sein, ist technischer Natur. Meist brauchen wir nur eine stetige erste Ableitung. Man könnte aber auch ohne weiteres nur glatte Wege betrachten.

Mit $|\gamma| := \gamma([0,1])$ bezeichnen wir das Bild von γ. Sei $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung.

Definition 4.1. *Wir definieren das **Integral** von f entlang von γ durch*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \ .$$

Weil γ' stetig ist, ist der Integrand eine stetige Funktion und wir können das Integral als Riemannintegral interpretieren.

Lemma 4.2. *Das Integral $\int_\gamma f(z)dz$ ist invariant unter Reparametrisierung des Weges γ.*

Proof. Sei $\phi : [0,1] \to [0,1]$ eine Reparametrisierung, also eine (zwei mal stetig) differenzierbare Abbildung mit $\phi(0) = 0$ und $\phi(1) = 1$. Dann gilt folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz &= \int_0^1 f(\gamma \circ \phi(t))(\gamma \circ \phi)'(t)dt \\ &= \int_0^1 f(\gamma(\phi(t))\gamma'(\phi(t))\phi'(t)dt \\ &\stackrel{i}{=} \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_\gamma f(z)dz \ , \end{aligned}$$

wobei wir in i die Transformationsformel für das Riemannintegral verwenden. □

1. Wir setzen $\gamma^{op}(t) := \gamma(1-t)$. Dann gilt
$$\int_{\gamma^{op}} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz \ .$$

2. Ist γ ein Weg, dann kann man eine Reparametrisierung ϕ finden, so daß $\gamma \circ \phi$ in Umgebungen von $0, 1$ konstant ist. Wir nennen solche Wege **flach**.

3. Sind γ, σ flache Wege mit $\gamma(1) = \sigma(0)$, dann kann man einen neuen flachen Weg $\sigma\sharp\gamma$ definieren durch
$$\sigma\sharp\gamma(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \sigma(2(t-1/2)) & t \in (1/2, 1] \end{cases}$$
Wir nennen $\sigma\sharp\gamma$ die **Komposition** von γ und σ.

4. Wenn f auf $|\sigma\sharp\gamma|$ definiert ist, dann gilt
$$\int_{\sigma\sharp\gamma} f(z)dz = \int_\sigma f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz \ .$$

Sei f eine auf einer Umgebung von $|\gamma|$ definierte holomorphe Funktion.

Lemma 4.3. *Es gilt*
$$\int_\gamma f'(z)dz = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) \ .$$

Proof. Für die erste Gleichung in der folgenden Kette verwenden wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und für die zweite die Holomorphie von f:
$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))dt = \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma f'(z)dz \ .$$
□

Definition 4.4. *1. Ein Weg γ heißt **konstant**, wenn γ konstant ist.*

*2. Ein Weg γ heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt.*

Ist γ ein konstanter Weg, dann gilt
$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \ .$$

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig.

Definition 4.5. *Eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt* ***Stammfunktion*** *von f, wenn $F' = f$ gilt.*

Eine Stammfunktion vom f ist bis auf eine lokal konstante Funktion eindeutig bestimmt.

Satz 4.6. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die Funktion f besitzt eine Stammfunktion.*
2. *Für jeden geschlossenen Weg γ in U gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Proof.

1. $1 \Longrightarrow 2$. Sei $f = F'$ für eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ und γ ein geschlossener Weg in U. Dann gilt nach Lemma 4.3, daß

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0 \ ,$$

da $\gamma(0) = \gamma(1)$ ist.

2. $2 \Longrightarrow 1$. Wir können annehmen, daß U wegzusammenhängend ist. Andernfalls behandeln wir die Wegzusammenhangskomponenten separat. Wir fixieren einen Punkt $x_0 \in U$. Für jeden Punkt $x \in U$ existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x$. Wir setzen

$$F(x) := \int_\gamma f(z)dz \ .$$

Wir müssen zeigen, daß $F(x)$ unabhängig von der Wahl des Weges ist. Sei σ ein weiterer solcher Weg. Wir können annehmen, daß γ und σ flach sind. Dann ist $\sigma^{op}\sharp\gamma$ ein geschlossener Weg. Es gilt

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_\sigma f(z)dz = \int_{\sigma^{op}\sharp\gamma} f(z)dz = 0 \ .$$

Damit ist $F : U \to \mathbb{C}$ wohldefiniert.

Wir müssen jetzt zeigen, daß $F' = f$ gilt. Wir fixieren $x \in U$ und einen flachen Weg γ von x_0 nach x. Dann gibt es einen Ball $B(x,r) \subseteq U$. Für $y \in B(x,r)$ betrachten wir den Weg $\sigma_y(t) := x + \phi(t)(y-x)$, wobei $\phi : [0,1] \to [0,1]$ ein Reparametrisierung ist, welche in der Nähe des Randes konstant ist. Dann ist σ auch flach. Es gilt

$$F(y) = \int_{\sigma_y\sharp\gamma} f(z)dz = F(x) + \int_{\sigma_y} f(z)dz \ .$$

Nun ist $\sigma_y'(t) = \phi'(t)(y-x)$ und deshalb

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_y} f(z)dz &= (y-x)\int_0^1 f(x+\phi(t)(y-x))\phi'(t)dt \\ &= (y-x)\int_0^1 f(x+t(y-x))dt \\ &= f(x)(y-x) + r(y)\end{aligned}$$

wobei

$$r(y) := (y-x)\int_0^1 (f(x+t(y-x)) - f(x))dt \ .$$

Man sieht nun, daß

$$\lim_{y\to x} |r(y)||x-y|^{-1} = 0$$

gilt. Folglich ist $dF(x) = f(x)$.

□

5 Der Cauchysche Integralsatz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge.

Definition 5.1. *1. Eine* ***Familie von Wegen*** *in U ist eine zwei mal stetig differenzierbare Abbildung*

$$\gamma : [0,1]\times[0,1] \to U \ , \quad (s,t) \mapsto \gamma_s(t) \ .$$

2. Wenn die Wege der Endpunkte $\gamma_{|[0,1]\times\{j\}}$ für $j = 0,1$ konstant mit dem Wert $z_j \in U$ sind, dann heißt γ eine ***Familie von Wegen von*** *z_0* ***nach*** *z_1. Wir sagen auch, daß diese Familie eine* ***Homotopie*** *vom Weg γ_0 zum Weg γ_1 in U ist.*

3. Wenn $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ für alle $s \in [0,1]$ gilt, dann ist γ eine ***Familie von geschlossenen Wegen****. Wir sagen auch, daß diese Familie eine* ***freie Homotopie*** *vom geschlossenen Weg γ_0 zum geschlossenen Weg γ_1 in U ist.*

Definition 5.2. *1. Zwei Wege γ_0, γ_1 sind in U* ***homotop****, wenn es eine Homotopie zwischen in U ihnen gibt. Wir schreiben diese Relation auch als $\gamma_0 \sim \gamma_1$.*

2. Ein geschlossener Weg in $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt in U ***zusammenziehbar****, wenn er in U homotop zu einem konstanten Weg ist.*

3. Ein geschlossener Weg heißt ***frei zusammenziehbar****, wenn er in U frei homotop zu einem konstanten Weg ist.*

1. Die Homotopierelation ist eine Äquivalenzrelation.

2. Ein zusammenziehbarer geschlossener Weg ist notwendigerweise frei zusammenziehbar.

3. Ein frei zusammenziehbarer Weg ist auch zusammenziehbar. Wir überlassen den Beweis als Übungsaufgabe. Diese Tatsache wird im Beweis von Lemma 5.7 benutzt.

Wir betrachten eine Homotopie γ von Wegen oder eine freie Homotopie von geschlossenen Wegen und setzen $|\gamma| := \gamma([0,1] \times [0,1])$. Sei f eine auf einer Umgebung von $|\gamma|$ definierte komplex-wertige Funktion.

Lemma 5.3. *Wenn f holomorph ist, dann ist die Funktion*

$$[0,1] \ni s \mapsto \int_{\gamma_s} f(z)dz \in \mathbb{C}$$

konstant.

Proof. In diesem Beweis verwenden wir, daß γ zweimal stetig differenzierbar ist, um die partiellen Ableitungen nach t und s vertauschen zu können. Wir berechnen die Ableitung:

$$\begin{aligned}
\partial_s \int_{\gamma_s} f dz &= \partial_s \int_0^1 f(\gamma_s(t))\partial_t \gamma_s(t) dt \\
&\stackrel{i}{=} \int_0^1 (f'(\gamma_s(t))\partial_s \gamma(t) \partial_t \gamma_s(t) + f(\gamma_s(t))\partial_s \partial_t \gamma(t))dt \\
&\stackrel{ii}{=} \int_0^1 (f'(\gamma_s(t))\partial_s \gamma(t) \partial_t \gamma_s - \partial_t f(\gamma_s(t))\partial_s \gamma(t))dt \\
&\stackrel{iii}{=} \int_0^1 (f'(\gamma_s(t))\partial_s \gamma(t) \partial_t \gamma_s(t) - f'(\gamma_s(t))\partial_t \gamma_s(t) \partial_s \gamma(t))dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Bei i und iii verwenden wir die Holomorphie von f und (2). Bei ii verwenden wir partielle Integration und das Verschwinden der Randterme wegen $\partial_s \gamma_s(0) = 0$, $\partial_s \gamma_s(1) = 0$ für den Fall einer Homotopie oder $\partial_s \gamma_s(0) = \partial_s \gamma_s(1)$ für den Fall einer freien Homotopie.

□

Satz 5.4 (Cauchyscher Integralsatz)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$ und γ ein geschlossener und frei zusammenziehbarer Weg in U. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Proof. Wir finden eine freie Homotopie von Wegen in U zwischen γ und einem konstanten Weg. Da das Integral über einen konstanten Weg verschwindet, folgt der Satz aus Lemma 5.3 .

Beispiel 5.5. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(z) := z^n$ ist auf $\mathbb{C}$ holomorph. Der Weg $\gamma(t) = \exp(2\pi i t)$ ist frei zusammenziehbar, betrachte etwa $\gamma_s(t) := (1-s)\exp(2\pi i t)$. Es muß also $\int_\gamma f(z)dz = 0$ gelten. Wir bestätigen das durch explizite Rechnung.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 \exp(n 2\pi i t) 2\pi i \exp(2\pi i t) dt = \int_0^1 2\pi i \exp((n+1)2\pi i t) dt = 0 \ .$$

Definition 5.6. 1. *Wir sagen, daß U* ***einfach zusammenhängend*** *ist, wenn U zusammenhängend und jeder geschlossene Weg in U zusammenziehbar ist.*

2. *Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt* ***sternförmig*** *(bezüglich einem Punkt $u \in U$), wenn für jeden Punkt $v \in U$ die gerade Strecke von u nach v in U enthalten ist.*

Lemma 5.7. *Sei U zusammenhängend und in U jeder geschlossene Weg frei zusammenziehbar. Dann ist U einfach zusammenhängend.*

Proof. Wir lassen den Beweis als Übungsaufgabe. □

Lemma 5.8. *Wenn U sternförmig bezüglich eines Punktes ist, dann ist U einfach zusammenhängend.*

Proof. Sei U sternförmig bezüglich $u \in U$. Sei γ ein geschlossener Weg. Dann ist

$$\sigma_s(t) := (1-s)\gamma(t) + su$$

eine geschlossene Homotopie von γ zu einem konstanten Weg. □

Folgerung 5.9. *Sei U einfach zusammenhängend.*

1. *Jede holomorphe Funktion auf U besitzt eine Stammfunktion.*
2. *Es gilt für jedes $f \in \mathcal{O}(U)$ und jeden geschlossenen Weg γ in U, daß $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Beispiel 5.10. Die Teilmenge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfachzusammenhängend. In der Tat ist z^{-1} auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Wir betrachten den geschlossenen Weg $\gamma(t) := \exp(2\pi i t)$. Dann gilt

$$\int_\gamma z^{-1} dz = 2\pi i \ .$$

Hier ist die Rechnung:

$$\begin{aligned} \int_\gamma z^{-1} dz &= \int_0^1 \exp(-2\pi i t) 2\pi i \exp(2\pi i t) dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 dt \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

Beispiel 5.11. Wir betrachten die Funktion $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Diese offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist sternförmig bezüglich 1 und damit einfach zusammenhängend. Folglich hat $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion, welche bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Die spezielle

Stammfunktion mit dem Wert 0 im Punkt 1 stimmt auf $B(1,1)$ mit $\ln(z)$ überein. Folglich liefert die Stammfunktion eine Fortsetzung von ln von $B(1,1)$ auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Wir bezeichnen diese Fortsetzung auch mit ln. Wir haben damit die **Logarithmusfunktion** als holomorphe Funktion

$$\ln : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$$

konstruiert.

6 Die Cauchy-Integralformel

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z \in U$. Sei $r \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß $\overline{B(z,r)} \subset U$. Wir betrachten den Weg $\vec{\partial}\, B(z,r)$[1], welcher durch

$$t \mapsto z + r\exp(2\pi i t)$$

gegeben wird. Er umläuft also den Rand von $\overline{B(z,r)}$ einmal entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn.

Sei $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann ist

$$U \ni u \mapsto \frac{f(u)}{u-z} \in \mathbb{C}$$

auf $U \setminus \{z\}$ holomorph.

Satz 6.1 (Cauchy-Integralformel)**.** *Sei $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann gilt für jeden geschlossenen zu $\vec{\partial}\, B(z,r)$ frei homotopen Weg γ in $U \setminus \{z\}$*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}du = f(z) \ .$$

Proof. Wegen dem Cauchyschen Integralsatz genügt es, den Weg $\gamma = \vec{\partial}\, B(z,r)$ zu betrachten. Sei $R \in (0,r)$. Dann ist

$$\gamma_s(t) := z + (sR + (1-s)r)\exp(2\pi i t)$$

eine freie Homotopie von $\partial B(z,r)$ nach $\partial B(z,R)$. Es gilt also

$$\int_{\vec{\partial} B(z,r)} \frac{f(u)}{u-z}du = \int_{\vec{\partial} B(z,R)} \frac{f(u)}{u-z}du \ .$$

Es gilt für jedes $R \in (0,r)$,daß

$$\int_{\vec{\partial} B(z,R)} \frac{f(u)}{u-z}du = 2\pi i\int_0^1 \frac{f(z+R\exp(2\pi i t))}{R\exp(2\pi i t)}R\exp(2\pi i t)dt = 2\pi i\int_0^1 f(z+R\exp(2\pi i t))dt \ .$$

[1]Bitte nicht mit dem Rand der Teilmenge $B(z,r)$ verwechseln, welcher natürlich leer ist.

Wir bilden den Grenzwert $R \to 0$ und erhalten

$$\lim_{R\to 0} \int_{\vec{\partial} B(z,R)} \frac{f(u)}{u-z} du = 2\pi i f(z) \ .$$

$\square$

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $u \in U$.

Folgerung 6.2. *Die Teilmenge $U \setminus \{u\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.*

Proof. Wir setzen $f(z) := 1$. Dann ist $\frac{f(z)}{z-u}$ auf $U \setminus \{u\}$ holomorph und es gilt für genügend kleine $r \in \mathbb{R}^{>}$ daß

$$\int_{\vec{\partial} B(u,r)} \frac{f(z)}{z-u} dz = 2\pi i \ .$$

Damit ist der Weg $\vec{\partial}\ B(u,r)$ in $U \setminus \{u\}$ nicht frei homotop zu einem kostanten Weg. $\square$

7 Glattheit und Analytizität holomorpher Funktionen

In der Definition der Holomorphie hatten wir angenommen, daß die betreffende Funktion stetig differenzierbar ist. Wir zeigen nun, daß eine holomorphe Funktion glatt und sogar analytisch ist. Zur Vorbereitung zeigen wir das folgende geometrische Lemma.

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $u \in U$ und $r \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß $\overline{B(u,r)} \subset U$.

Lemma 7.1. *Für jedes $x \in B(u,r)$ und $R \in (0, r - |x-u|)$ ist $\vec{\partial}\ B(u,r)$ geschlossen homotop zu $\vec{\partial}\ B(x,R)$ in $U \setminus \{x\}$.*

Proof. Wir definieren eine freie Homotopie von $\vec{\partial}\ B(u,r)$ zu $\vec{\partial}\ B(x,R)$ durch

$$\gamma_s(t) := ((1-s)u + sx) + ((1-s)r + sR)\exp(2\pi i t) \ .$$

Es gilt $|\gamma| \subseteq \overline{B(u,r)} \setminus \{x\}$. $\square$

Satz 7.2. *Für $f \in \mathcal{O}(U)$ gilt $f' \in \mathcal{O}(U)$.*

Proof. Sei $u \in U$ und $r \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß $\overline{B(u,r)} \subset U$. Wir zeigen, daß $f'_{|B(u,r)}$ holomorph ist. In der Tat ist $\vec{\partial}\ B(u,r)$ für jedes $z \in B(u,r)$ in $U \setminus \{z\}$ geschlossen homotop to $B(z,R)$ mit $R := r - |u-z|$. Folglich gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\partial} B(u,r)} \frac{f(x)}{x-z} dx \ .$$

Man kann unter dem Integral differenzieren und es gilt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\partial} B(u,r)} \frac{f(x)}{(x-z)^2} dx \ .$$

Dies ist wieder eine holomorphe Funktion in u. □

Durch mehrfaches Ableiten unter dem Integral erhält man:

Folgerung 7.3. *Für $f \in \mathcal{O}(U)$ sind die Ableitungen $f^{(n)} \in \mathcal{O}(U)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Es gilt für $z \in B(u,r)$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B(u,r)} \frac{f(x)}{(x-z)^{n+1}} dx \ .$$

Wir können nun das folgende Integralkriterium für die Holomorphie einer Funktion aufstellen, in welchem man nicht einmal mehr die Differenzierbarkeit fordern muß.

Satz 7.4. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und gelte für alle geschlossenen Wege γ in U die Relation $\int_\gamma f dz = 0$. Dann ist f holomorph.*

Proof. Nach Satz 4.6 hat f eine holomorphe Stammfunktion F. Damit ist aber $f = F'$ und damit f auch holomorph nach Satz 7.2. □

Wir zeigen jetzt, daß eine holomorphe Funktion lokal durch ihre Taylorreihe dargestellt wird.

Satz 7.5. *Sei $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann gilt für $z \in B(u,r)$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(z-u)^n dx \ .$$

Proof. Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\partial} B(u,r)} \frac{f(x)}{x-z} dx \ .$$

Wir schreiben

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{(x-u)-(z-u)} = \frac{1}{x-u}\frac{1}{1-\frac{z-u}{x-u}} = \frac{1}{x-u}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-u}{x-u})^n \ .$$

Hier nutzen wir $|\frac{z-u}{x-u}| < 1$ aus. Diese Reihe konvergiert für festes z als Funktion von $x \in \partial B(u,r)$ gleichmäßig. Deshalb kann man Summe und Integral vertauschen und es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\vec{\partial} B(u,r)} \frac{f(x)}{(x-z)^{n+1}}dx\,(z-u)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(u)}{n!}(z-u)^n \ .$$

□

Bemerkung 7.6. Eine Funktion $U \to \mathbb{C}$, welche für jedes $u \in U$ in einer Umgebung von u durch eine konvergente Potenzreihe gegeben ist, heißt **analytisch**. Holomorphe Funktionen sind also analytisch. Umgekehrt haben wir schon gesehen, daß analytische Funktionen holomorph sind.

8 Fortsetzungssätze

Als Konsequenz ihrer Analytizität ist eine holomorphe Funktion durch ihre Taylorreihe in einem Punkt schon auf der ganzen Zusammenhangskomponente des Definitionsbereiches, welche den Punkt enthält, bestimmt.

Satz 8.1. *Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(U)$, $u \in U$ und gelte $f^{(n)}(u) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f = 0$.*

Proof. Wir zeigen, daß die Menge $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f^{(n)} = 0\}$ in U sowohl offen als auch abgeschlossen ist. In der Tat ist $\{f^{(n)} = 0\}$ abgeschlossen, da $f^{(n)}$ stetig ist. Damit ist A abgeschlossen.

Für jeden Punkt $u \in A$ existiert eine Umgebung, auf welcher f durch die Taylorreihe in u dargestellt wird. Damit verschwindet f auf dieser Umgebung. Damit ist A offen.

Da die Menge A nicht leer ist, muß $A = U$ gelten. □

Satz 8.2. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\{f = 0\}$ in U nicht diskret. Dann gilt $f = 0$.*

Proof. Da die Teilmenge $\{f = 0\}$ nicht diskret ist, hat diese Menge einen Häufungspunkt $u \in U$. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\{f = 0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = u$ und $z_n \neq u$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, daß $f^{(k)}(u) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt $f = 0$ nach Lemma 8.1.

Nach Satz 7.5 gibt eine Umgebung $V \subseteq U$ von u derart, daß

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(z-u)^k$$

für alle $z \in V$ gilt.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Unter der Annahme, daß

$$f^{(0)}(u) = 0, \dots, f^{(m-1)}(u) = 0$$

gilt, zeigen wir, daß $f^{(m)}(u) = 0$. In der Tat gilt

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(z-u)^k = (z-u)^m \left(\frac{f^{(m)}(u)}{m!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(z-u)^{k-m} \right) .$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 = \frac{f^{(m)}(u)}{m!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(z_n-u)^{k-m} .$$

Die Reihe $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(z_n-u)^{k-m}$ konvergiert geichmäßig auf einer Umgebung von u. Wenn wir den Grenzwert $n \to \infty$ bilden, dann erhalten wir $0 = f^{(m)}(u)$. □

Beispiel 8.3. Die Menge der Nullstellen eines nichtverschwindenden Elementes $f \in \mathcal{O}(U)$ kann also keine Häufungspunkte in U haben. Am Rande von U ist das aber möglich. Als Beispiel betrachte man

$$f(z) := \sin(\frac{1}{z})$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Menge der Nullstellen ist $\{\frac{1}{n\pi} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und hat den Häufungspunkt 0.

Beispiel 8.4. Sei $V \subseteq \mathbb{R}$ offen. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ heißt **reell analytisch**, wenn sie glatt ist und für jeden Punkt $x \in V$ in einer Umgebung von x durch ihre Taylorreihe dargestellt wird. Beispiele von auf ganz $\mathbb{R}$ definierten analytischen Funktionen sind $\exp, \sin, \cos$. Die Funktionen $\sqrt{x}$, $\ln(x)$ sind auf $(0, \infty)$ analytisch.

Wir haben schon gesehen, daß diese Funktionen Einschränkungen von holomorphen Funktionen sind. Man kann allgemein zeigen, daß reell analytische Funktionen Einschränkungen holomorpher Funktionen sind.

Satz 8.5. *Ist $f : V \to \mathbb{R}$ eine reell analytische Funktion, dann existiert eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ und eine Funktion $F \in \mathcal{O}(U)$ derart, daß $V \subseteq U \cap \mathbb{R}$ und $F_{|V} = f$ gilt.*

Proof. Sei $r_x \in \mathbb{R}^{>}$ der Konvergenzradius der Taylorreihe von f im Punkt $x \in V$. Wir setzen

$$U := \bigcup_{x \in V} B(x, r_x) .$$

Das ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und es gilt $V \subseteq U \cap \mathbb{R}$. Für $z \in U$ wählen wir $x \in V$ derart, daß $z \in B(x, r_x)$ gilt. Dann definieren wir

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(z-x)^n \ .$$

Wir müssen zeigen, daß F wohldefiniert ist. Sei $\hat{x} \in V$ eine weiterer Punkt mit $z \in B(\hat{x}, r_{\hat{x}})$. Dann betrachten wir die holomorphen Funktionen $G, \hat{G}$ auf der zusammenhängenden offenen Teilmenge $W := B(x, r_x) \cap B(\hat{x}, r_{\hat{x}})$ von $\mathbb{C}$ welche durch die Taylorreihen von f in den Punkten x und $\hat{x}$ gegeben werden. Es gilt $G = \hat{G}$ auf $W \cap \mathbb{R}$. Da diese Teilmenge in W nicht diskret ist, gilt $G = \hat{G}$ auf W. Wegen $z \in W$ gilt $G(z) = \hat{G}(z)$. □

Beispiel 8.6. Wir haben die Logarithmusfunktion

$$\ln : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$$

in Beispiel 5.11 als Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ mit dem Wert $\ln(1) = 0$ definiert. Wir wissen schon, daß diese Funktion auf dem Intervall $(0, 2)$ mit der Umkehrfunktion der Exponentialfunktion übereinstimmt, also $\exp(\ln(z)) = z$ für $z \in (0, 2)$ gilt. Da $(0, 2)$ in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ nicht diskret ist, gilt

$$\exp(\ln(z)) = z$$

auf dem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ der Logarithmusfunktion. Mit Hilfe der Logarithmusfunktion können wir nun beliebige **komplexe Potenzen** definieren: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann setzen wir

$$z^\lambda := \exp(\lambda \ln(z)) : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C} \ .$$

Seien U, V offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ und gelte $U \subseteq V$. Sei $f \in \mathcal{O}(U)$.

Definition 8.7. *1. Eine **Fortsetzung von** f **auf** V ist ein Element $g \in \mathcal{O}(V)$ mit $g_{|U} = f$.*

*2. Eine **Fortsetzung** von f ist ein Paar (V, g) aus einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{C}$ und einer Fortsetzung $g \in \mathcal{O}(V)$ von f.*

Bemerkung 8.8. Man kann die Menge der Fortsetzungen halbordnen durch

$$(V_0, g_0) \leq (V_1, g_1) := (V_0 \subseteq V_1) \wedge ((g_1)_{|V_0} = g_0)$$

Man kann somit von **maximalen Fortsetzungen** sprechen. Mit Hilfe des Lemmas von Zorn zeigt man leicht, daß es immer maximale Fortsetzungen gibt. Diese müssen aber nicht eindeutig bestimmt sein.

Folgerung 8.9. *Wenn jede Zusammhangskomponente von V die Menge U nicht-trivial schneidet, dann hat f höchstens eine Fortsetzung.*

Proof. Sei $V_0 \subseteq V$ eine Zusammenhangskomponente. Seien g, h zwei Fortsetzungen von f. Dann ist $(g-h)_{|U \cap V_0} = 0$. Da $U \cap V_0$ in V_0 nicht diskret ist, gilt nach Lemma 8.2 die Gleichung $g = h$ auf V_0. □

Fortsetzungen müssen nicht immer existieren. In den folgenden beiden Beispiele liegen verschieden Gründe vor.

1. $\frac{1}{z}$ hat keine Fortsetzung von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf $\mathbb{C}$. In der Tat, würde eine solche Fortsetzung existieren, dann würde $\frac{1}{z}$ in der Nähe von Null beschränkt sein. In der Tat wäre diese Bedingung sogar hinreichend für die Existenz einer Fortsetzung, siehe Satz 8.10.

2. Die Funktion $z \ln(z)$ hat keine Fortsetzung von $B(1,1)$ auf eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $0 \in U$, obwohl $z \ln(z)$ in der Nähe von Null beschränkt ist. Der Grund ist, daß die Differenz

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} (s + i\epsilon) \ln(s + i\epsilon) - \lim_{\epsilon \downarrow 0} (s - i\epsilon) \ln(s - i\epsilon) = s 2\pi i$$

nicht verschwindet.

Satz 8.10 (Riemannscher Hebarkeitssatz)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $u \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$. Wenn f auf einer Umgebung von u beschränkt ist, dann hat f eine Fortsetzung auf U.*

Proof. Sei $r \in \mathbb{R}^{>}$ so, daß $\overline{B(u,r)} \subseteq U$ gilt. Für $y, z \in B(u,r)$ betrachten wir den Weg

$$\gamma_y^z(t) := y + \phi(t)(z - y) ,$$

wobei $\phi : [0,1] \to [0,1]$ eine flache Reparametrisierung des Einheitsintervalls ist.

Wir betrachten die Funktion

$$F(z) := \begin{cases} (z-u)f(z) & z \neq u \\ 0 & z = u \end{cases} .$$

Diese Funktion ist auf U stetig und auf $U \setminus \{u\}$ holomorph.

Wir definieren

$$G : B(u,r) \to \mathbb{C} , \quad G(z) := \int_{\gamma_u^z} F(w) dw .$$

Wir rechnen wie im Beweis von Satz 4.6 nach, daß G holomorph ist. Sei $z \in B(x,r)$. Das Argument für die Holomorphie von G im Punkt z basiert auf der Identität

$$\int_{\gamma_u^y} F(w) dw = \int_{\gamma_u^z} F(w) dw + \int_{\gamma_z^y} F(w) dw \tag{3}$$

für alle y in der Nähe von z. Um diese Identität einzusehen, argumentieren wir wie folgt. Wir können eine Umgebung $V \subseteq B(u,r)$ von z derart, finden, daß die Dreiecke mit den

Ecken $u + \frac{1}{n}(z-u)$, z, y für alle $y \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ den Punkt u nicht enthalten. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ nach dem Cauchyschen Integralsatz, daß

$$\int_{\gamma^y_{u+\frac{1}{n}(z-u)}} F(w)dw = \int_{\gamma^z_{u+\frac{1}{n}(z-u)}} F(w)dw + \int_{\gamma^y_z} F(w)dw \ .$$

Da F stetig ist, folgt (3) durch Grenzwertbildung für $n \to \infty$.

Folglich gilt $G \in \mathcal{O}(B(u,r))$ und damit

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(u)}{n!}(z-u)^n$$

für alle $z \in B(u,r)$. Nun ist jedoch $G(u) = 0$ und

$$G'(u) = \lim_{z \to u} F(z) = 0$$

und damit

$$G(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{G^{(n)}(u)}{n!}(z-u)^n \ .$$

Folglich gilt für $z \in B(u,r)$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n+2)}(u)}{(n+1)!}(z-u)^n \ .$$

Damit ist $f_{|B(u,r)}$ holomorph. □

Folgerung 8.11. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $Z \subset U$ eine diskrete Teilmenge, $f \in C(U,\mathbb{C})$ und $f_{|U \setminus Z} \in \mathcal{O}(U \setminus Z)$. Dann gilt $f \in \mathcal{O}(U)$.*

9 Konvergenz von Folgen holomorpher Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Satz 9.1. *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{O}(U)$ und konvergiere f_n gegen $f : U \to \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig. Dann ist f holomorph.*

Proof. Da holomorphe Funktionen stetig sind und ein lokal gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig ist, ist f stetig.

Wir zeigen nun, daß f holomorph ist. Sei $u \in U$ und $r \in \mathbb{R}^>$ derart, daß $\overline{B(u,r)} \subseteq U$ gilt. Für jeden geschlossenen Weg γ in $B(u,r)$ gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = 0 \ .$$

Nach Lemma 7.4 ist $f_{|B(u,r)}$ holomorph. $\square$

Bezeichne $L(\gamma)$ die Länge des Weges γ.

Lemma 9.2. *Es gilt für jeden Weg γ in $\mathbb{C}$ und stetige Funktion $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$*

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq \sup_{z\in|\gamma|} |f(z)| L(\gamma) \ .$$

Proof. Es gilt

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq \int_0^1 |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \leq \sup_{z\in|\gamma|} |f(z)| \int_0^1 |\gamma'(t)|dt = \sup_{z\in|\gamma|} |f(z)| L(\gamma) \ .$$

$\square$

Lemma 9.3. *Sei f eine holomorphe Funktion auf U, $x \in U$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{B(x,r)} \subseteq U$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $s \in (0, r]$ und $z \in \overline{B(x, r-s)}$*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r}{s} \frac{n!}{s^n} \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f| \ .$$

Proof. Wir benutzen die Formel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\vec{\partial} B(x,r)} \frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}}.$$

Der Integrand wird durch

$$|\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}| \leq \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f| \frac{1}{s^{n+1}}$$

abgeschätzt. Daraus folgt direkt

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r}{s} \frac{n!}{s^n} \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f| \ .$$

$\square$

Für $s = r$ erhalten wir

Folgerung 9.4.

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f| \ .$$

Mit dieser Formel kann man noch einmal einsehen, daß der Konvergenzradius der Taylorreihe von f im Punkt x größer als r ist. Für $s = \frac{r}{2}$ erhalten wir:

Folgerung 9.5.

$$\sup_{z \in B(x,\frac{r}{2})} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{2^{n+1} n!}{r^n} \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f| \ .$$

Lemma 9.6. *Sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf U, welche gegen eine Funktion f lokal gleichmäßig konvergiert. Dann ist f holomorph und die Folge der k-ten Ableitungen $(f_n^{(k)})$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.*

Proof. Wir wissen schon, daß f holomorph ist. Sei jetzt $x \in U$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{B(x,r)} \subset U$. Dann gilt nach Folgerung 9.5

$$\sup_{z \in \overline{B(x,\frac{r}{2})}} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{2^{k+1} k!}{r^k} \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f_n - f| \ .$$

Da $\partial \overline{B(x,r)}$ eine kompakte Teilmenge von U ist, geht die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen Null. Damit gilt $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ gleichmäßig auf dem Ball $\overline{B(x,\frac{r}{2})}$. □

10 Das Maximumprinzip

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge.

Definition 10.1. *Für eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, einen Punkt $u \in U$ und eine positive reelle Zahl r derart, daß $\overline{B(u,r)} \subset U$ gilt, definieren wir*

$$M_r(f,u) := \int_0^1 f(u + re^{2\pi i t}) dt$$

Die Zahl $M_r(f,u)$ ist also der **Mittelwert** der Einschränkung von f auf den Kreis $S(u,r)$ um u vom Radius r.

Definition 10.2. *Eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ hat die **Mittelwerteigenschaft**, wenn für jedes $u \in U$ eine positive relle Zahl R existiert, so daß $\overline{B(u,R)} \subset U$ und*

$$M_r(f,u) = f(u)$$

für alle $r \in (0,R)$ gilt.

Lemma 10.3. *Holomorphe Funktionen haben die Mittelwerteigenschaft.*

Proof. Es gilt nach der Cauchy-Integralformel

$$M_r(f,u) = \int_0^1 f(x + re^{2\pi it})dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\partial} B(u,r)} \frac{f(z)dz}{z-u} = f(u)\ .$$

□

Lemma 10.4. *Wir nehmen an, daß $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit der Mittelwerteigenschaft ist. Besitzt $|f|$ ein globales Maximum, dann ist f konstant.*

Proof. Möge $|f|$ in $x \in U$ ein globales Maximum haben. Sei $M := |f(x)|$. Wir zeigen, daß die Teilmenge

$$A := \{y \in U \mid |f(y)| = M\}$$

offen und abgeschlossen ist. Da diese Menge nicht leer ist, muß dann $U = A$ gelten.

Zunächst ist klar, daß A abgeschlossen ist, da die Funktion $U \ni y \mapsto |f(y)| \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Wir zeigen nun, daß A offen ist. Sei $y \in A$ und $R \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß $\overline{B(y,R)} \subset U$ und $M_r(f,y) = f(y)$ für alle $r \leq R$ gilt. Damit gilt jedoch

$$M = |f(y)| = |M_r(f,y)| \leq M_r(|f|,y) \leq |f(y)| \leq M\ .$$

Die Gleichheit $M_r(|f|,y) = M$ zusammen mit $|f| \leq M$ kann aber nur gelten, wenn $|f|$ auf $\partial\overline{B(x,r)}$ konstant den Wert M annimmt. Damit gilt $|f(z)| = M$ für alle $z \in \overline{B(x,R)}$ von x. Das zeigt die Offenheit von A.

Wir wissen jetzt, daß auf U die Gleichung $|f| = M$ gilt. Sei $x \in U$. Wenn $M \neq 0$ ist, dann finden wir eine Umgebung $V \subseteq U$ von u und eine stetige Funktion $\phi : V \to U(1)$ derart, daß $f(v) = M\phi(v)$ gilt für alle $v \in V$. Dann gilt nach der Cauchy-Ungleichung

$$M = \left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{B(x,r)} M\phi(x)d\lambda(x)\right| \leq M\sqrt{\frac{1}{\pi r^2}\int_{B(x,r)} |\phi(x)|^2 d\lambda(x)} = M\ .$$

Die Gleichheit in der Cauchy-Ungleichung gilt aber nur dann, wenn $M = \lambda\phi$ für eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Folglich ist $f = M\phi = M^2\lambda$ konstant. □

□

Folgerung 10.5. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene und beschränkte Teilmenge und $f : \bar{U} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so daß $f_{|U}$ die Mittelwerteigenschaft hat. Dann nimmt $|f|$ das Maximum auf $\partial\bar{U}$ an.*

Proof. Wir können annehmen, daß U zusammenhängend ist. Andernfalls betrachten wir die Komponenten separat. Die Aussage ist klar, wenn f konstant ist.

Wir nehmen nun an, daß f nicht konstant ist. Da $\bar{U}$ kompakt ist, muß die stetige Funktion $|f|$ auf $\bar{U}$ ein Maximum annehmen. Da $|f|$ auf U kein globales Maximum haben kann, muß das globale Maximum auf $\partial\bar{U}$ angenommen werden. □

11 Ganze Funktionen, Fundamentalsatz der Algebra

Definition 11.1. *Ein* ***ganze Funktion*** *ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion.*

Eine ganze holomorphe Funktion ist also um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickelbar, welche unendlichen Konvergenzradius hat. Beispiele sind Polynome, e^z und $\sin(z)$, $\cos(z)$. Ganze Funktionen, die keine Polynome sind, heißen **transzendente Funktionen**. Man kann Polynome innerhalb der transzendenten Funktionen durch ihr Wachstum charakterisieren.

Satz 11.2. *Eine ganze Funktion f ist genau dann ein Polynom vom Grad n, wenn es positive reelle Zahlen M, R gibt, so daß*

$$|f(z)| \le M|z|^n$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus B(0, R)$ gilt.

Proof. Ein Polynom

$$f := a_n z^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$$

vom Grad $n \in \mathbb{N}$ erfüllt diese Ungleichung. Dazu betrachten wir $R := 1$. Die Abbildung

$$\{|z| > R\} \ni z \mapsto |f(z)||z^{-n}| = |a_n + a_{n-1}\frac{z^{n-1}}{|z^n|} + \cdots + a_0 \frac{1}{|z|^n}|$$

ist durch eine Konstante M beschränkt. Wir können zum Beispiel

$$M := |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$$

nehmen.

Möge umgekehrt $|f(z)| \le M|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ gelten. Dann folgt für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r > R$

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\vec{\partial} B(0,r)} \frac{f(z)dz}{z^{k+1}} \ ,$$

also

$$|f^{(k)}(0)| \leq k!Mr^{n-k} \ .$$

Damit gilt $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > n$. □

Folgerung 11.3. *Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Folgerung 11.4 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $f \in \mathbb{C}[z]$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann hat f in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.*

Proof. Wir nehmen an, daß f keine Nullstelle hat. Dann wäre $f^{-1}(z)$ auch eine ganze holomorphe Funktion. Sei $f = a_n z^n + \cdots + a_0$. Wir schreiben für $z \neq 0$

$$f(z) = z^n(a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}) \ .$$

Es gibt also ein $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 0$ derart, daß aus $|z| > R$ folgt

$$|a_n| > 2|a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}| \ .$$

Damit gilt aber für $|z| > R$, daß

$$|f(z)| \geq \frac{|z|^n a_n}{2} \ .$$

Die Funktion f^{-1} ist auf $\{|z| \leq R\}$ beschränkt aus Stetigkeitsgründen. Wegen obiger Ungleichung ist f^{-1} auch auf $\{|z| \geq R\}$ durch $\frac{2}{R^n|a_n|}$ beschränkt. Folglich ist f^{-1} eine ganze beschränkte Funktion und damit konstant. Damit ist f auch konstant. □

Satz 11.5. *Sei f eine ganze transzendente Funktion und $w \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ (in $\bar{\mathbb{R}}$) und $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.*

Proof. Möge es für $w \in \mathbb{C}$ keine solche Folge geben. Dann ist $\frac{1}{f(z)-w}$ im unendlichen beschränkt. Außerdem ist die Menge der 0-Stellen von $f(z) - w$ endlich. Die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - w}{\prod_{f(x)=w}(z - x)^{\nu_f(x)}}$$

hat keine 0-Stellen mehr, wobei $\nu_{f-w}(x) \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle von f in x bezeichnet. Wir erhalten damit eine Abschätzung der Form $|\frac{1}{g(z)}| \leq M|z|^k$, wobei $k := \sum_{f(x)=w} \nu_f(x)$ ist. Wir schließen, daß $\frac{1}{g(z)}$ ein Polynom ist. Damit wäre aber auch f ein Polynom und nicht transzendent. □

In anderen Worten, wenn f ganz transzendent ist, dann ist $f(\mathbb{C} \setminus B(0,R))$ für alle R eine dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Dieses Lemma trifft also auf die e-Funktion und die Funktionen $\sin(z), \cos(z)$ zu.

12 Singularitäten

Wir betrachten für reelle Zahlen r, R mit $0 < r < R < \infty$ die offene Teilmenge

$$K := K(a, r, R) := B(a, R) \setminus \overline{B(a, r)}$$

von $\mathbb{C}$. Die Menge K hat die Form eines Ringes. Wir setzen

$$U := B(a, R) \ , \quad V := \mathbb{C} \setminus \overline{B(a, r)} \ .$$

Dann gilt $U \cap V = K$.

Satz 12.1. *Für $f \in \mathcal{O}(K)$ gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen $u \in \mathcal{O}(U)$ und $v \in \mathcal{O}(V)$ derart, daß*

1. $u_{|K} + v_{|K} = f$
2. $\lim_{z \to \infty} v(z) = 0$

gelten.

Proof. Für $s \in \mathbb{R}$ mit $r < s < R$ definieren wir eine holomorphe Funktion $u_s : B(a, s) \to \mathbb{C}$ durch

$$u_s(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\partial} B(a,s)} \frac{f(w)dw}{w - z} \ .$$

Für $0 < s < s' < R$ gilt nach dem Cauchy-Integralsatz $u_s = (u_{s'})_{|B(a,s)}$. Die Familie holomorpher Funktionen $(u_s)_{r<s<R}$ legt damit eine holomorphe Funktion $u : U \to \mathbb{C}$ fest mit $u_{|B(a,s)} = u_s$ für alle $s \in (r, R)$.

Analog definieren wir holomorphe Funktionen $v_s : \mathbb{C} \setminus \overline{B(a, s)} \to \mathbb{C}$

$$v_s(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\partial} B(a,s)^{op}} \frac{f(w)dw}{w - z}$$

welche eine Funktion $v : V \to \mathbb{C}$ festlegen. Es gilt $\lim_{z \to \infty} v(z) = 0$.

Beachte, daß u_s und v_s durch fast dieselbe Formel gegeben werden, wobei der Unterschied nur die Orientierung des Weges ist. Trotzdem kann man die Funktionen u_s und $-v_s$ nicht vergleichen, da ihre Definitionsbereiche disjunkt sind.

Sei nun $z \in K$ und $\epsilon > 0$ derart, daß $\overline{B(z, \epsilon)} \subset K$. Wir zeigen, daß

$$f = u_{|K} + v_{|K}$$

gilt. Sei $z \in K$. Für $s, s' \in \mathbb{R}$ mit $r < s < |z - a| - \epsilon < |z - a| + \epsilon < s' < R$. Sei $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ eine flache Reparametrisierung. Wir betrachten die Wege

$$\sigma(t) = a - \frac{\phi(1 - t)s(z - a)}{|z - a|} - \frac{\phi(t)s'(z - a)}{|z - a|}$$

und

$$\gamma_u(t) := a - u\frac{(z-a)}{|z-a|}\exp(2\pi i\phi(t)) \ .$$

Dann sind jeweils frei homotop:

$$\gamma_u \sim \vec{\partial}\, B(a,s) \ , \quad \vec{\partial}\, B(z,\epsilon) \sim \sigma\sharp\gamma_s^{op}\sharp\sigma^{op}\sharp\gamma_{s'} \ .$$

Folglich gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\partial} B(z,\epsilon)} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\partial} B(a,s')} \frac{f(w)dw}{w-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\partial} B(a,s)^{op}} \frac{f(w)dw}{w-z} = u(z)+v(z) \ .$$

Sei $f = u' + v'$ eine weitere solche Zerlegung. Dann gilt $0 = (u-u') + (v-v')$. Wir betrachten die ganze Funktion, welche durch die Vorschrift

$$h(z) := \begin{cases} u(z) - u'(z) & |z| < R \\ v'(z) - v(z) & |z| > r \end{cases}$$

gegeben wird. Diese Funktion is wohldefiniert. Da sie beschränkt ist, gilt $h = const$. In der Tat ist $h = 0$ wegen $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$. Damit gilt $u = u'$ und $v = v'$. □

Folgerung 12.2. *Eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(K)$ hat eine eindeutige lokal-gleichmäßig konvergente Darstellung*

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\partial} B(a,s)} \frac{f(w)dw}{(w-a)^{n+1}} \ .$$

Proof. Es gilt

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

und

$$v(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-a)^n \ .$$

□

Definition 12.3. *Eine Reihe der Form $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ heißt* ***Laurentreihe*** *(mit Zentrum a). Sie konvergiert im Punkt z, wenn die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ und $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-a)^n$ konvergieren.*

Sei $a \in \mathbb{C}$.

Folgerung 12.4. *Konvergiert eine Laurentreihe mit Zentrum a an zwei Punkten $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und gelte $|z_1 - a| < |z_2 - a|$, dann konvergiert sie auf dem Kreisring $K(a, |z_1 - a|, |z_2 - a|)$ lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion.*

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $u \in U$. Sei $f : U \setminus \{u\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Definition 12.5. *Wir sagen, daß f in u eine* ***isolierte Singularität*** *hat.*

Wir können $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$ in einer Umgebung von u in eindeutiger Weise durch eine konvergente Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-u)^n$$

darstellen.

Definition 12.6. *$f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$ hat in u* ***einen Pol****, wenn es ein $N \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n < N$ gilt. In diesem Fall definieren wir die* ***Vielfachheit*** *von f im Punkt u durch*

$$\nu_f(u) := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\} \ .$$

Wenn f in u keinen Pol hat, da sagen wir, daß f dort eine ***wesentliche Singularität*** *hat.*

Beachte, daß Nullstellen einer holomorphen Funktion als Pole positiver Vielfachheit betrachtet werden können. Wenn $\nu_f(u) < 0$ ist, dann sagen wir, daß f in u einen **Pol der Ordnung** $-\nu_f(u)$ hat.

Folgerung 12.7. *Eine nichtverschwindende holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$ hat in u genau dann einen Pol der Vielfachheit $\nu_f(u)$, wenn $h(z) := (z-u)^{-\nu} f(z)$ eine holomorphe Fortsetzung auf U mit $h(u) \neq 0$ hat. Dazu reicht es aus zu zeigen, daß $h(z)$ für z in der Nähe von u beschränkt bleibt (Satz 8.10).*

Satz 12.8 (Weierstraß-Casorati)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $u \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{u\})$. Wenn f im Punkt u eine wesentliche Singularität hat, dann ist für jedes $r \in \mathbb{R}^>$ mit $\overline{B(u,r)} \subseteq U$ die Teilmenge $f(B(u,r) \setminus \{u\})$ dicht in $\mathbb{C}$.*

Proof. Wir argumentieren indirekt. Sei $w \in \mathbb{C}$ und gäbe es keine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $U \setminus \{u\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = u$ und $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$. Dann würde ein $r \in \mathbb{R}^>$ mit $\overline{B(u,r)} \subseteq U$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}^>$ existieren, so daß

$$|f_{|B(u,r)\setminus\{u\}} - w| \geq c$$

gilt. Dann wäre

$$g := \frac{1}{f_{|B(u,r)\setminus\{u\}} - w}$$

auf $B(u,r) \setminus \{u\}$ beschränkt und holomorph. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 8.10 hätte g eine holomorphe Fortsetzung auf $B(u,r)$. Damit wäre aber $f_{|B(u,r)\setminus\{u\}} - w$

holomorph und hätte einem Pol der Ordnung $-\nu_g(u)$. Also hätte f in u keine wesentliche Singularität. $\square$

Bemerkung 12.9. Dieses Lemma hat eine Verschärfung, welche der **Große Satz von Picard** genannt wird. Dieser besagt, daß es unter den in Lemma 12.8 gegebenen Voraussetzungen einen Punkt $w \in \mathbb{C}$ gibt, so daß für jedes $r \in \mathbb{R}^{>}$ mit $\overline{B(u,r)} \subseteq U$ gilt $\mathbb{C} \setminus \{w\} \subseteq f(B(u,r) \setminus \{u\})$.

13 Meromorphe Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Definition 13.1. *Eine **meromorphe Funktion** auf U ist eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus M)$ für eine geeignete diskrete Menge $M \subset U$ derart, daß f in jedem Punkt von M einen Pol hat.*

Die **Ableitung** einer meromorphen Funktion ist wieder meromorph. Genauer, sei $f \in \mathcal{M}(U)$ und $M \subseteq U$ diskret, so daß $f \in \mathcal{O}(U \setminus M)$ ist. Dann ist $f' \in \mathcal{O}(U \setminus M)$ und hat Pole in M. Folglich gilt $f' \in \mathcal{M}(U)$.

Lemma 13.2. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Die Menge $\mathcal{M}(U)$ der auf U meromorphen Funktionen bildet einen Körper. In der Tat ist $\mathcal{M}(U)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(U)$.*

Proof. Es ist einfach zu sehen, daß $\mathcal{M}(U)$ eine abelsche Gruppe bildet. Wir sehen weiter ein, daß das Produkt zweier meromorpher Funktionen ebenfalls eine meromorphe Funktion ist. Seien $f, g \in \mathcal{M}(U)$ meromorph. Dann gibt es diskrete Teilmengen $F, G \subset U$ derart, daß f auf $U \setminus F$ und g auf $U \setminus G$ holomorph sind. Wir setzen $H := F \cup G$. Dann ist $h := fg$ auf $U \setminus H$ holomorph. Es bleibt zu zeigen, daß h in jedem $x \in H$ einen Pol hat. Wir betrachten $\phi(z) := (z-x)^{-\nu_f(x)-\nu_g(x)}$. Dann ist $\phi(z)h = [(z-x)^{-\nu_f(x)}f][(z-x)^{-\nu_g(x)g}]$ in der Nähe von x holomorph. Damit bildet $\mathcal{M}(U)$ eine Ring.

Sei nun $f \in \mathcal{M}(U)$ und $f \neq 0$. Wir müssen zeigen, daß $f^{-1} \in \mathcal{M}(U)$. Sei $x \in U$. Da f nirgends konstant sein kann, gilt $f(z) = (z-x)^{\nu_f(x)}h(z)$, wobei h auf einer Umgebung von x holomorph ist und $h(x) \neq 0$ gilt. Die Funktion $h^{-1}(z)$ hat dieselben Eigenschaften. Damit ist aber auf dieser Umgebung $f^{-1}(z) = (z-x)^{-\nu_f(x)}h^{-1}(z)$ meromorph. Dies zeigt $f^{-1} \in \mathcal{M}(U)$. Damit ist $\mathcal{M}(U)$ in Körper.

Den zweiten Teil lassen wir als Übungsaufgabe. $\square$

Seien nun $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Teilmengen, $h : U \to V$ holomorph und nirgends konstant und $f \in \mathcal{M}(V)$.

Lemma 13.3. *Dann gilt $h^* f \in \mathcal{M}(U)$.*

Proof. Sei $F \subset V$ diskret derart, daß $f \in \mathcal{O}(V \setminus F)$. Wir zeigen zuerst, daß $G := h^{-1}(T) \subseteq U$ diskret ist. Wir nehmen an, daß G nicht diskret sei. Sei $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in G mit $\lim_{j \to \infty} g_j = g \in U$ und $g_j \neq g$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{j \to \infty} h(g_j) = h(g)$. Wenn $h(g_j) = h(g)$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$ wäre, dann wäre h in einer Umgebung von g konstant. Also gilt $h(g_j) \neq h(g)$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$. Da $h(g_j) \in F$ gilt, wäre damit F nicht diskret.

Sei nun $u \in U$ und $v = h(u)$. In der Nähe von v gilt

$$f(z) = (z - v)^{\nu_f(v)} \psi(z)$$

für eine bei v holomorphe Funktion ψ. Damit gilt

$$(h^* f)(w) = (h(w) - v)^{\nu_f(v)} \psi(h(w)) \ .$$

Sei

$$h(w) = \sum_{n \geq 0} a_n (w - u)^n$$

die Taylorreihe von h in u. Es gilt $a_0 = v$. Dann gilt

$$(h(w) - v)^{\nu_f(v)} = (\sum_{n \geq 1} a_n (w - v)^n)^{\nu_f(v)} \ .$$

Da h nirgends konstant ist, gibt es ein minimales $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N \neq 0$. Wir schreiben

$$\sum_{n \geq 1} a_n (w - v)^n = (w - v)^N \sum_{n \geq 0} a_{n+N} (w - v)^n \ .$$

Die Summe $\sum_{n \geq 0} a_{n+N} (w - u)^n$ ist nahe dem Punkt $w = u$ holomorph und verschwindet dort nicht. Damit ist $\phi := \left(\sum_{n \geq 0} a_{n+N} (w - u)^n\right)^{\nu_f(v)}$ nahe u holomorph. Wir haben damit eine Darstellung

$$(h^* f)(w) = (w - u)^{\nu_f(v) N} \phi(w)$$

mit einer bei u holomorphen Funktion ϕ gefunden. $\square$

1. Rationale Funktionen $\frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{C}[z]$ mit $q \neq 0$ sind meromorph.
2. Die Funktione tan, cot, Γ sind in $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.
3. Die Funktionen $\sin(\frac{1}{z})$ oder $e^{\frac{1}{z}}$ sind nicht meromorph auf $\mathbb{C}$.

14 Residuum

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $u \in U$ ein Punkt. Sei $f \in \mathcal{M}(U)$ und

$$f(z) = \sum_{n=\nu_f(u)}^{\infty} a_n(z-u)^n$$

die Laurentreihe von f im Punkt u.

Definition 14.1. *Wir definieren wir das Residuum von f im Punkt u durch*

$$\mathrm{res}_u(f) := a_{-1} \ .$$

Die Bedeutung dieses Begriffs ergibt sich aus der folgenden Formel:

Lemma 14.2. *Für alle $r \in \mathbb{R}^{>}$ mit $\overline{B(u,r)} \subseteq U$ gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\partial} B(u,r)} f(z)dz = \mathrm{res}_u(\alpha) \ .$$

Proof. Die Funktion f ist auf dem Kreisring $K(u, r/2, r)$ holomorph. Die Behauptung folgt aus Folgerung 12.2. □

Wir zeigen nun eine Reihe von Rechenregeln für das Residuum.

Lemma 14.3. *1. Die Abbildung $\mathcal{M}(U) \ni f \mapsto\mapsto \mathrm{res}_u(f) \in \mathbb{C}$ ist linear.*

2. Für $f \in \mathcal{M}(U)$ gilt $\mathrm{res}_u(f') = 0$

3. Für $f, g \in \mathcal{M}(U)$ gilt $\mathrm{res}_u(f'g) = -\mathrm{res}_u(fg')$.

4. Für $f \in \mathcal{M}(U)$ gilt $\mathrm{res}_u(\frac{f'}{f}) = \nu_f(u)$.

5. Wenn $f \in \mathcal{M}(U)$ in u einen Pol der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ hat, dann gilt für die bei z holomorphe Funktion $g(z) := (z-x)^n f(z)$

$$\mathrm{res}_u(f) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(u) \ .$$

6. Wenn f in u holomorph ist und eine Nullstelle der Ordnung 1 hat, dann gilt

$$\mathrm{res}_u(\frac{1}{f}) = \frac{1}{f'(u)} \ .$$

Proof. 1. Die Linearität des Residuums ist klar.

2. Sei
$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-u)^n$$
die Laurententwicklung von f bei u. Dann gilt
$$f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n n(z-x)^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n+1}(n+1)(z-x)^n \ .$$
Es folgt
$$\mathrm{res}_u(f') = a_{-1+1}(-1+1) = 0 \ .$$

3. Es gilt die Leibnitzregel $(fg)' = f'g + fg'$. Damit ist
$$\mathrm{res}_u(f'g) + \mathrm{res}_u(fg') = \mathrm{res}_u((fg)') = 0 \ .$$

4. Wir betrachten die Entwicklungen
$$f(w) = \sum_{n\geq\nu_f(u)} b_n(w-u)^n \ , \quad f'(w) = \sum_{n\geq\nu_f(u)-1} b_{n+1}(n+1)(w-u)^n \ .$$
Folglich gilt
$$\begin{aligned} \frac{f'(w)}{f(w)} &= \frac{\sum_{n\geq\nu_f(u)-1} b_{n+1}(n+1)(w-u)^n}{\sum_{n\geq\nu_f(u)} b_n(w-u)^n} \\ &= \frac{1}{w-u}\frac{\sum_{n\geq 0} b_{n+\nu_f(u)}(n+\nu_f(u))(w-u)^n}{\sum_{n\geq 0} b_{n+\nu_f(u)}(w-u)^n} \ . \end{aligned}$$
Nun ist
$$\frac{\sum_{n\geq 0} b_{n+\nu_f(u)}(n+\nu_f(u))(w-u)^n}{\sum_{n\geq 0} b_{n+\nu_f(u)}(w-u)^n}$$
in $w = u$ regulär und hat den Wert $\nu_f(u)$. Daraus folgt
$$\mathrm{res}_u(\frac{f'}{f}) = \nu_f(u) \ .$$

5. Sei
$$f(z) = \sum_{k\geq -n} a_k(z-u)^k$$
die Laurententwicklung von f im Punkt u. Dann gilt
$$g(z) = \sum_{k\geq -n} a_k(z-u)^{k+n} \ , \quad g^{(n-1)}(u) = (n-1)!a_{-1} \ .$$

6. Wenn f in u eine Nullstelle erster Ordnung hat, dann gilt

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(z-u)^n = (z-u)\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(z-u)^n \ .$$

   Die Funktion

$$z \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(z-u)^n$$

   ist in $z = u$ nicht Null. Deshalb gilt

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-u)} \frac{1}{\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(z-u)^n}$$

   und deshalb $\mathrm{res}_u(\frac{1}{f}) = \frac{1}{f'(u)}$.

□

1. Die Funktion $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ hat in $z = 0$ eine Nullstelle der Ordnung 1. Es gilt

$$\tan'(z) = \frac{1}{\cos^2(z)} \ .$$

   Damit ist für $\cot(z) := \frac{1}{\tan(z)}$

$$\mathrm{res}_0(\cot) = \frac{1}{\cos^2(0)} = 1 \ .$$

   Man kann auch $\cot = \frac{\sin'}{\sin}$ schreiben und das Residuum bei 0 als die Vielfachheit der Nullstelle von sin erhalten.

2. Es gilt $\mathrm{res}_x \frac{e^z}{z-x} = e^x$.

3. Es gilt $\mathrm{res}_x \frac{e^z}{(z-x)^3} = \frac{1}{2}e^x$.

4. Es gilt

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{\prod_{n=0}^{k-1}(z+n)} \ .$$

   Wir schließen, daß mit $k = l + 1$

$$\mathrm{res}_{-l}\Gamma = \frac{\Gamma(1)}{\prod_{n=0}^{l-1}(n-l)} = \frac{(-1)^l}{l!} \ .$$

Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen, $h : U \to V$ holomorph und nicht konstant und $f \in \mathcal{M}(V)$. Dann gilt nach Lemma 13.3 auch $h'h^*f \in \mathcal{M}(U)$. Sei $u \in U$.

Lemma 14.4. *Es gilt*

$$\mathrm{res}_u(h'h^*f) = \nu_{h-h(u)}(u)\,\mathrm{res}_{h(u)}f\ .$$

Proof. Wir nehmen zunächst an, daß

$$\mathrm{res}_{h(u)}(f) = 0$$

gilt. Wir wählen $r \in \mathbb{R}^{>}$ so, daß

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-h(u))^n$$

auf $B(h(u),r)\setminus\{h(u)\}$ gilt. Beachte, daß $a_{-1}=0$ ist. Die Funktion

$$F(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{a_n}{n+1}(z-h(u))^{n+1}$$

ist eine Stammfunktion von f auf $B(h(u),r)\setminus\{h(u)\}$.

Wir schließen

$$\mathrm{res}_u(h'h^*f) = \mathrm{res}_u((h^*F)') = 0\ .$$

Im allgemeinen zerlegen wir

$$f = \frac{\mathrm{res}_{h(u)}(f)}{z-h(u)} + \tilde f\ .$$

Dann gelten $\tilde f \in \mathcal{M}(V)$ und $\mathrm{res}_{h(u)}(\tilde f) = 0$. Es gilt

$$\mathrm{res}_u(h'h^*f) = \mathrm{res}_u h^*\left(z \mapsto \frac{\mathrm{res}_{h(u)}(f)h'(z)}{z-h(u)}\right) + \mathrm{res}_u(h'h^*\tilde f)\ .$$

Nur der erste Term trägt bei. Es gilt

$$h^*\left(z\mapsto \frac{h'(z)}{z-h(u)}\right)(w) = \frac{h'(w)}{h(w)-h(u)} = \frac{(h-h(u))'}{h-h(u)}(w)\ ,$$

also

$$\mathrm{res}_u\left(z\mapsto\frac{h'(z)}{z-h(u)}\right) = \nu_{h-h(u)}(u)\ .$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Seien U,V offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ und $h: U\to V$ holomoph. Die Definition

$$h^\sharp f := h'h^*f$$

für $f\in\mathcal{M}(V)$ ist durch folgende Formel motiviert.

Sei $f: V\to\mathbb{C}$ stetig und γ ein Weg in U. Wir defineren den Weg $h_*\gamma := h\circ\gamma$ in V. Dann gilt:

Lemma 14.5.
$$\int_\gamma (h^\sharp f)(z)dz = \int_{h_*\gamma} f(z)dz \ .$$

Proof.
$$\begin{aligned}\int_\gamma (h^\sharp f)(z)dz &= \int_0^1 h'(\gamma(t))f(h(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_0^1 f(h(\gamma(t))h(\gamma(t))'dt \\ &= \int_{h_*\gamma} f(z)dz\end{aligned}$$

□

15 Der Residuensatz

Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

Definition 15.1. *Wir definieren die **Umlaufzahl** $n_\gamma(x) \in \mathbb{C}$ durch*
$$n_\gamma(x) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-x} \ .$$

Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z-x}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{x\}$ holomorph. Die Umlaufzahl $n_{\gamma(x)}$ hängt nach dem Cauchyschen Integralsatz nur von der freien Homotopieklasse von γ in $\mathbb{C} \setminus \{x\}$ ab. Desweiteren gilt für flache γ, σ in $\mathbb{C} \setminus \{x\}$ mit $\gamma(1) = \sigma(0)$ daß
$$n_{\gamma(x)} + n_{\sigma(x)} = n_{\sigma\sharp\gamma}(x) \ .$$

Lemma 15.2. *Es gilt*
$$n_\gamma(x) \in \mathbb{Z} \ .$$

Proof. Es gilt
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t)-x} \ .$$
Wir betrachten die Funktionen $h, H : [0,1] \to \mathbb{C}$, welche durch
$$h(s) := \int_0^s \frac{\gamma'(t)dt}{\gamma(t)-x} \ , \quad H(s) := (\gamma(s)-x)\exp(-h(s))$$

gegeben werden. Es gilt

$$H'(s) = \gamma'(s)\exp(-h(s)) - (\gamma(s) - x)\exp(-h(s))\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - x} = 0 \ .$$

Folglich gilt

$$(\gamma(0) - x) = H(0) = H(1) = (\gamma(1) - x)\exp(-h(1)) \ .$$

Wegen $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $\gamma(1) \neq x$ schließen wir, daß $h(1) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ gilt. Nun ist $h(1) = 2\pi i n_\gamma(x)$. $\square$

Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir den Weg

$$n \vec{\partial} B(x,1) \ , \quad t \mapsto x + \exp(2\pi i n t) \ .$$

Dieser Weg umläuft den Punkt x entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn n mal. Man rechnet leicht nach, daß

$$n_{n\vec{\partial} B(x,1)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{n\vec{\partial} B(x,1)} \frac{dz}{z-x} = n$$

gilt.

Sei $x \in \mathbb{C}$ und γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{x\}$.

Satz 15.3. *Die Wege $n_\gamma(x) \vec{\partial} B(x,1)$ und γ sind in $\mathbb{C} \setminus \{x\}$ frei homotop.*

Proof. Diesen Satz werden wir hier nicht zeigen. Er ist eine Aussage über die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus \{x\}$. Es gilt für jedes $y \in \mathbb{C}$ mit $x \neq y$, daß $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{x\}, y) \cong \mathbb{Z}$ ist und von $\vec{\partial} B(x, \|y - x\|)$ erzeugt wird. $\square$

Lemma 15.4. *Es gilt für alle $n \neq -1$*

$$\int_\gamma (z-x)^n dz = 0 \ .$$

Proof. In der Tat ist nämlich $(z-x)^n = F'(z)$ für $F(z) := \frac{1}{(n+1)}(z-x)^{n+1}$. Damit gilt

$$\int_\gamma (z-x)^n dz = \int_\gamma F'(z) dt = 0 \ .$$

$\square$

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, γ ein geschlossener Weg in U und $f \in \mathcal{M}(U)$ derart, daß die Einschränkung von f auf $U \setminus |\gamma|$ holomorph ist.

Satz 15.5 (Residuensatz)**.** *Wenn γ in U frei zusammenziehbar ist, dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{x\in U\setminus|\gamma|} n_\gamma(x)\mathrm{res}_x(f) \ ,$$

wobei in dieser Summe höchstens endlich viele Terme von Null verschieden sind.

Proof. Wir sehen zuerst ein, daß diese Summe endlich ist. Sei $M \subseteq U$ diskret und f auf $U \setminus M$ holomorph. Dann ist $\mathrm{res}_x(f) = 0$ für $x \in U \setminus M$. Sei σ eine Homotopie von γ zu einem konstanten Weg. Dann gilt $n_\gamma(x) = 0$ für alle $x \in U\setminus|\sigma|$ und $|\sigma|$ ist kompakt. Damit können nur die Punkte der endlichen Menge $M \cap |\sigma|$ nichttrivial zur Summe beitragen.

Für $m \in M$ haben wir eine Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=\nu_f(m)}^{-1} a(m)_k(z-m)^k + \sum_{k\geq 0} a(m)_k(z-m)^k = h_m(z) + \phi_m(z) \ .$$

Die Funktion h_m heißt Hauptteil von f in m und ist auf $\mathbb{C}\setminus\{m\}$ holomorph. Die Funktion ϕ_m ist auf $(U \setminus M) \cup \{m\}$ holomorph. Beachte, daß $a(m)_{-1} = \mathrm{res}_m(f)$ gilt.

Die Funktion

$$f - \sum_{m\in M\cap|\sigma|} h_m = \sum_{m\in M\cap|\sigma|} \phi_m$$

ist dann auf $U \setminus \{M \setminus |\sigma|\}$, also auch auf einer Umgebung von $|\sigma|$, holomorph. Es gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{m\in M} \int_\gamma h_m(z)dz \ .$$

Es gilt also mit Lemma 15.4

$$\sum_{m\in M\cap|\sigma|} \int_\gamma h_m(z)dz = \sum_{m\in M\cap|\sigma|} \mathrm{res}_m(f) \int_\gamma \frac{dz}{z-m} = 2\pi i \sum_{m\in M\cap|\sigma|} \mathrm{res}_m(f) n_\gamma(m) \ .$$

□

1. Wir wollen

$$\int_{\vec{\partial} B(0,2)} \frac{dz}{z^2-1}$$

berechnen. Die Pole des Integranden sind $z_\pm := \pm 1$ der Ordnung 1. Wir berechnen die Residuen. Dazu schreiben wir $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$. Es folgt $\mathrm{res}_1 \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}$ und $\mathrm{res}_{-1} \frac{dz}{z^2-1} = -\frac{1}{2}$. Es folgt

$$\int_{\vec{\partial} B(0,2)} \frac{dz}{z^2-1} = 0 \ .$$

2. Wir wollen
$$\int_{\vec{\partial} B(0,2)} \frac{e^z dz}{z^2-1}$$
berechnen. Die Pole des Integranden sind $z_\pm := \pm 1$ der Ordnung 1. Wir berechnen die Residuen. Dazu schreiben wir $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$. Es folgt $\mathrm{res}_1 \frac{dz}{z^2-1} = \frac{e}{2}$ und $\mathrm{res}_{-1} \frac{dz}{z^2-1} = -\frac{e^{-1}}{2}$. Es folgt
$$\int_{\vec{\partial} B(0,2)} \frac{e^z dz}{z^2-1} = \pi i (e^z - e^{-z}) \ .$$

3. Wir wollen
$$\int_{\vec{\partial} B(0,2)} \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+1)}$$
berechnen. Die Pole liegen in ± 1 und haben die Ordnung 2 in $z = 1$ und 1 in $z = -1$. Wir berechnen
$$\mathrm{res}_1 \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+1)} = \left(\frac{e^z}{z+1}\right)'_{z=1} = \left(\frac{e^z(z+1) - e^z}{(z+1)^2}\right)_{z=1} = \frac{e}{4}$$
und
$$\mathrm{res}_{-1} \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+1)} = \left(\frac{e^z}{(z-1)^2}\right)_{z=-1} = \frac{e^{-1}}{4} \ .$$
Es folgt
$$\int_{\vec{\partial} B(0,2)} \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{\pi i}{2}(e + e^{-1}) \ .$$

4. Wenn der Weg γ in U nicht frei zusammenziehbar ist, dann gilt der Residuensatz im allgemeinen nicht. Als Beispiel betrachten wir den Kreisring $U := K(0,1,3)$ und den Weg $\gamma := \vec{\partial} B(0,2)$. Dann ist $f(z) := z^{-1}$ auf U holomorph. Es gilt also
$$\sum_{x \in U} n_\gamma(x) \mathrm{res}_f(x) = 0 \ , \quad \int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \ .$$

16 Pole zählen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und γ ein geschlossener, frei zusammenziehbarer Weg in U. Sei weiter $f \in \mathcal{M}(U)$ eine nicht-verschwindende meromorphe Funktion ohne Singularitäten auf $|\gamma|$. Aus Lemma 14.3, 4. ziehen wir die folgende Konsequenz.

Folgerung 16.1. *Es gilt*
$$\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = 2\pi i \sum_{x \in U \setminus |\gamma|} n_\gamma(x) \nu_f(x) \ .$$

Mit dieser Formel kann man zum Beispiel Singularitäten in Bällen zählen. Wenn $r \in \mathbb{R}^>$ und $x \in U$ derart gewählt sind, daß $\overline{B(x,r)} \subset U$ gilt und f auf dem Rand dieses Balls keine Singularitäten hat, dann gilt die Gleichung

$$\int_{\vec{\partial} B(x,r)} \frac{f'(z)dz}{f(z)} = 2\pi i \sum_{y \in B(x,r)} \nu_f(y) \ .$$

In der Tat ist $n_{\vec{\partial} B(x,r)}(y) = 1$ für alle Punkte $y \in B(x,r)$ und $n_{\vec{\partial} B(x,r)}(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(x,r)}$.

Hier sind einige Beispielrechnungen für Funktionen mit Polen erster Ordnung oder Nullstellen der Vielfgachheit 1.

1. Für $0 < k \in \mathbb{N}$ gilt
$$\int_{\vec{\partial} B(0,k+1/2)} \frac{\Gamma'(z)dz}{\Gamma(z)} = -2\pi i(k+1) \ .$$
Das Integral zählt die Pole von Γ im Intervall $(-k-1/2, k+1/2)$.

2. Es gilt
$$\int_{\vec{\partial} B(0,(k+1/2)\pi)} \cot(z)dz = 2\pi i(2k+1) \ .$$
Beachte dazu, daß $\cot(z) = \frac{\sin(z)'}{\sin(z)}$ gilt. Das Integral zählt also die Nullstellen von sin im Intervall $(-(k+1/2)\pi, (k+1/2)\pi)$.

Wir definieren die komplexe Zahlenkugel $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ als topologischen Raum derart, daß die auf $\mathbb{C}$-induzierte Topologie die übliche ist und die Teilmengen $\bar{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(0,R)}$ für $R \in \mathbb{R}^>$ eine Basis der Umgebungen von ∞ bilden.

Sei $S \subseteq \bar{\mathbb{C}}$ eine Umgebung von ∞ und $U := S \setminus \{\infty\}$ und $f \in \mathcal{M}(U)$. Sei $M \subset U$ diskret derart, daß $f \in \mathcal{O}(U \setminus M)$ gilt. Wir nehmen an, daß M in S diskret ist. Äquivalent dazu ist, daß es eine Umgebung $V \subseteq \bar{\mathbb{C}}$ von ∞ gibt, so daß $M \cap V$ endlich ist.

Eine Funktion $f : S \to \mathbb{C}$ wird als holomorph (meromorph) betrachtet, wenn $f_{|S\setminus\{\infty\}}$ und $f(z^{-1})$ holomorph (meromorph) sind. Wir schreiben $\mathcal{O}(S)$ oder $\mathcal{M}(S)$ für den Raum der holomorphen oder meromorphen Funktionen auf f.

Beispiel 16.2. 1. Eine rationale Funktion p/q, für $p, q \in \mathbb{C}[z]$ mit $q \neq 0$ ist in $\mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$.

2. Die Funktion sin ist in der Nähe von ∞ nicht meromorph.

Sei $f \in \mathcal{M}(S)$. Sei $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ durch $h(z) := \frac{1}{z}$ gegeben. Es gibt dann ein $r \in \mathbb{R}^>$ derart, daß $h(B(0,r)) \subseteq S$ und

$$h^\sharp f := -z^{-2} h^* f \in \mathcal{M}(B(0,r))$$

gelten. Wir definieren das Residuum von f im Punkt ∞ durch

$$\mathrm{res}_\infty f := \mathrm{res}_0\, h^\sharp f\ .$$

Wenn $|z|$ genügend groß ist, dann konvergiert die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n\ .$$

Es gilt

$$\mathrm{res}_\infty(f) = -a_{-1}\ .$$

In der Tat gilt für z in der Nähe von 0, daß

$$h^\sharp f(z) = -z^{-2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-2}\ .$$

Folglich gilt $-\mathrm{res}_\infty f = a_{-1}$.

Es gilt für $t \in \mathbb{R}$ daß

$$h(R^{-1}e^{2\pi i(-t)}) = Re^{2\pi i t}$$

und damit

$$h_* \vec{\partial}\, B(0,R^{-1}) \sim \vec{\partial}\, B(0,R)^{op}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\partial} B(0,R)^{op}} f(z)dz &\overset{Lemma 14.5}{=} \int_{h_*\vec{\partial} B(0,R^{-1})} f(z)dz \\
&= \int_{\vec{\partial} B(0,R^{-1})} h^\sharp f(z)dz \\
&= 2\pi i \mathrm{res}_0(h^\sharp f) \\
&= 2\pi i \mathrm{res}_\infty(f)\ .
\end{aligned}$$

Satz 16.3. *Sei $f \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$, dann gilt*

$$\sum_{x\in\mathbb{C}} \mathrm{res}_x(\alpha) + \mathrm{res}_\infty(\alpha) = 0\ .$$

Proof. Sei $R \in \mathbb{R}^>$ so groß, daß alle Singularitäten von $f_{|\mathbb{C}}$ in $B(0,R)$ liegen. Dann gilt

$$\sum_{x\in\mathbb{C}} \mathrm{res}_x(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\partial} B(0,R)} f(z)dz = -\mathrm{res}_\infty(\alpha)\ .$$

□

In der folgenden Folgerung setzen wir $\nu_f(\infty) := \mathrm{res}_\infty \frac{f'}{f}$. Wir erhalten einen Spezialfall des Satzes von **Riemann-Roch:**

Folgerung 16.4. *Sei $f \in \mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}})$. Dann gilt*

$$\sum_{x \in \bar{\mathbb{C}}} \nu_f(x) = 0 \ .$$

Beispiel 16.5. Wir wenden diese Folgerung auf ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ an. Dann ist $\mathrm{res}_\infty(p) = 0$ und $\nu_p(\infty) = \deg(p)$. Die Folgerung 16.4 besagt, daß p in $\mathbb{C}$ genau $\deg(p)$ Nullstellen hat, wenn man mit Vielfachheit zählt.

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$ nirgends konstant und $w \in \mathbb{C}$. Die Zahl $k := \nu_{f-w}(x) \in \mathbb{N}$ heißt **Vielfachheit der w-Stelle** x.

Satz 16.6 (Rouché)**.** *Es gibt eine Umgebung $W \subseteq \mathbb{C}$ von w und eine Umgebung $V \subseteq U$ von x derart, daß $W \subseteq f(V)$ und für jeden Wert $w' \in W$ die Menge $f^{-1}(w) \cap V$ aus genau k Punkten besteht.*

Proof. Da f nicht konstant ist, gibt es ein $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ derart, daß $\overline{B(x,\epsilon)}$ außer eventuell den Punkt x keine Nullstellen von f' und w-Stellen von f enthält. Wir setzen $V := B(x,\epsilon)$. Die Menge $f_*\partial\overline{B(x,\epsilon)}$ enthält w nicht und ist kompakt und damit abgeschlossen. Sei $W \subset \mathbb{C} \setminus f_*\partial B(x,\epsilon)$ diejenige Zusammenhangskomponente welche w enthält.

Für $w' \in W$ ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\partial} B(x,\epsilon)} \frac{f'(z)dz}{f(z)-w'} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\partial} B(x,\epsilon)} f^\sharp(\frac{dz}{z-w'}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f_*\vec{\partial} B(x,\epsilon)} \frac{dz}{z-w'} = n_{f_*\vec{\partial} B(x,\epsilon)}(w')$$

die Anzahl der w'-Stellen gezählt mit der Vielfachheit. Die rechte Seite zeigt, daß diese Zahl für alle $w' \in W$ die gleiche ist wie für $w' = w$, nämlich k. Wegen $f'(z) \neq 0$ für $w \neq w'$ haben die w'-Stellen mit $w' \neq w$ die Vielfachheit 1. □

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$ nirgends konstant.

Folgerung 16.7. *Das Bild $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ is offen.*

Proof. Sei $w = f(x)$ für $x \in U$. Es gibt eine Umgebung W von w derart, daß $f^{-1}(y)$ genau $\nu_{f-w}(x) \neq 0$ Punkte enthält. Deshalb gilt $W \subseteq f(U)$. □

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$, $x \in U$ und $w = f(x)$.

Folgerung 16.8. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Es gilt $f'(x) \neq 0$.*
2. *Es gibt Umgebungen $V \subseteq U$ von x und $W \subseteq \mathbb{C}$ von w derart, daß $f : V \to W$ eine Bijektion ist.*

Proof. Wenn es eine solche Bijektion gibt, dann ist die Vielfachheit der w-Stelle x gleich 1 und deshalb $f'(x) \neq 0$.

Wenn $f'(x) \neq 0$ ist, dann wählen wir zunächst W, V wie in Lemma 16.6. Dann ersetzen wir V durch $V := f^{-1}(W)$. □

1. Die Abbildung z^k hat eine Nullstelle der Vielfachheit k. In diesem Fall hat jedes $z \neq 0$ genau k verschiedene Urbilder.

2. Die Funktion e^z hat in 0 eine 1-Stelle der Vielfachheit 1. Jeder Punkt in $B(1, 1/10)$ hat genau ein Urbild in $B(0, 1)$. In $B(0, 10)$ gibt es aber mehrere Urbilder, etwa gilt auch $e^{2\pi i} = 1$.

17 Integralberechnungen - trigonometrische Funktionen

Beispiel 17.1. Das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3} dx$$

kann man wie folgt berechnen. Wir setzen

$$\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} - e^{-it}) \ , \quad \sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \ .$$

Wir setzen weiter $e^{it} = z$ und betrachten die Funktion

$$h(z) := \frac{\frac{1}{2}(z + z^{-1})}{\frac{1}{2i}(z - z^{-1}) + 3} \frac{1}{iz} \ .$$

Dann gilt

$$\left((t \mapsto e^{it})^\sharp h\right)(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3} \ .$$

Folglich gilt

$$\int_{\vec{\partial} B(0,1)} h(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3} dx \ .$$

Wir formen um

$$h(z) = \frac{z^2+1}{z^3 - z + 6iz^2} \ .$$

Wir berechnen nun Nullstellen des Nenners. Eine ist $z = 0$. Es bleiben die Nullstellen von $z^2 + 6iz - 1$, nämlich $-3i \pm \sqrt{-9+1} = i(-3 \pm \sqrt{8})$. Davon liegt $i(\sqrt{8} - 3)$ im Einheitsball. Wir berechnen jetzt die Residuen. Wir erhalten

$$\mathrm{res}_0 h = -1$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{i(\sqrt{8}-3)}h &= \frac{z^2+1}{z(z+i(3+\sqrt{8}))}_{|z=i(\sqrt{8}-3)} \\
&= \frac{-(\sqrt{8}-3)^2+1}{i(\sqrt{8}-3)(i(\sqrt{8}-3)+i((3+\sqrt{8}))} \\
&= \frac{-8+6\sqrt{8}-9+1}{i(\sqrt{8}-3)(2i\sqrt{8})} \\
&= \frac{-16-12\sqrt{2}}{-12\sqrt{2}-16} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3} dx = 2\pi i(1-1) = 0 \ .$$

Es gilt auch

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)+3} = \ln(\sin(x)+3)'$$

und damit zum Test

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3} dx = \ln(\sin(x)+3)|_0^{2\pi} = 0 \ .$$

$\square$

Diese Methode funktioniert allgemein. Sei $R(x,y)$ eine rationale Funktion in x,y, also von der Form $\frac{p}{q}$ für $p,q \in \mathbb{C}[x,y]$. Wir nehmen an, daß $R(\sin(t),\cos(t))$ auf $[0,2\pi]$ keine Singularitäten hat. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\sin(x),\cos(x))dx = \int_{\vec{\partial} B(0,1)} R(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2})\frac{dz}{iz} \ .$$

Das rechte Integral läßt sich mit dem Residuensatz ausrechnen.

Beispiel 17.2. Hier ist ein zweites Beispiel. Sei $a>1$. Wir rechnen

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos(t)} = \int_{\vec{\partial} B(0,1)} \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\frac{dz}{iz} = -2i\int_{\vec{\partial} B(0,1)} \frac{dz}{2az+z^2+1} \ .$$

Die Nullstellen des Nenners sind

$$-a \pm \sqrt{a^2-1} \ .$$

Davon liegt $-a+\sqrt{a^2-1}$ im Einheitskreis. Das Residum des Integranden ist

$$\frac{-2i}{(-a+\sqrt{a^2-1})-(-a-\sqrt{a^2-1})} = \frac{-i}{\sqrt{a^2-1}} \ .$$

Damit ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} \ .$$

□

18 Integrale über $\mathbb{R}$ - Schließen nach oben und unten

Beispiel 18.1. Wir wollen nun das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$$

berechnen. Dieses unbestimmte Integral konvergiert. Für $R \in \mathbb{R}^>$ betrachten wir den Weg $c_R : [0,1] \to \mathbb{C}$, welcher durch $c_R(t) := 2Rt - R$ gegeben wird. Dann gilt

$$\int_{-R}^{R} \frac{1+x}{x^4+1} dx = \int_{c_R} \frac{1+x}{x^4+1} dx$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{c_R} \frac{1}{x^4+1} dx \ .$$

Wir schließen den Weg c_R durch Komposition mit einem Kreisbogen vom Radius R, $b_R : [0,1] \to \mathbb{C}$, $b_R(t) := Re^{\pi i t}$. Es gilt

$$|\int_{b_R} \frac{1}{x^4+1} dx = |\int_0^1 \frac{1}{R^4 e^{4\pi i t}+1} R\pi i e^{\pi i t} dt| \le \sup_{t\in[0,1]} |\frac{\pi R}{R^4 e^{4\pi i t}+1}| \ .$$

Nun gilt

$$|\frac{\pi R}{R^4 e^{4\pi i t}+1}| = R^{-3} |\frac{\pi}{e^{4\pi i t}+R^{-4}}| \ ,$$

also

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |\frac{\pi R}{R^4 e^{4\pi i t}+1}| = 0 \ .$$

Damit folgt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{b_R} \frac{1}{x^4+1} dx = 0$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{c_R} \frac{1}{x^4+1} dx + \lim_{R\to\infty} \int_{b_R} \frac{1}{x^4+1} dx \ .$$

Wir ersetzen c_R und b_R durch flache Versionen und schreiben die rechte Seite als Integral über den geschlossenen Weg $b_R \sharp c_R$. Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^4+1}$ ist auf $\mathbb{C}$ meromorph. Die

Nullstellen von x^4+1 sind durch ξ^{2n+1}, $n=0,1,2,3$ mit $\xi := e^{\frac{2\pi i}{8}}$ gegeben. In der Tat ist nämlich $(e^{\frac{(2n+1)2\pi i}{8}})^4 = e^{\pi i} = -1$. Davon liegen ξ und ξ^3 in der oberen Halbebene und ξ^5, ξ^7 in der unteren. Es gilt für die Umlaufzahlen

$$n_{b_R \sharp c_R}(\xi^n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n=1,3 \\ 0 & n=5,7 \end{array} \right\}$$

falls $R>1$ ist. Daraus folgt

$$\int_{b_R \sharp c_R} \frac{1}{x^4+1} dx = 2\pi i (\mathrm{res}_\xi + \mathrm{res}_{\xi^3})(x \mapsto \frac{1}{x^4+1}) \ .$$

Wir schreiben

$$x^4+1 = (x-\xi)(x-\xi^3)(x-\xi^5)(x-\xi^7) \ .$$

Dann ist

$$\mathrm{res}_\xi \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{(\xi-\xi^3)(\xi-\xi^5)(\xi-\xi^7)} = \frac{\xi^5}{(1-\xi^2)(1-\xi^4)(1-\xi^6)} = \frac{\xi^5}{4}$$

und

$$\mathrm{res}_{\xi^3} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{(\xi^3-\xi)(\xi^3-\xi^5)(\xi^3-\xi^7)} = \frac{\xi^7}{(1-\xi^6)(1-\xi^2)(1-\xi^4)} = \frac{\xi^7}{4} \ .$$

Wir haben hier die Identität $(1-\xi^2)(1-\xi^4)(1-\xi^6) = (1-i)(1-(-1))(1+i) = 4$ benutzt. Wir summieren und erhalten mit $\xi^5+\xi^7 = -\sqrt{2}i$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = 2\pi i \frac{-i\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ .$$

Wir sagen, daß wir daß Integral über $\mathbb{R}$ durch **Schließen nach oben** berechnet haben.

$\square$

Diese Methode funktioniert ganz allgemein. Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ Polynome, so daß

$$\mathrm{ord}(p) + 2 \leq \mathrm{ord}(q)$$

gilt und q keine reellen Nullstellen hat. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(x)>0\}} \mathrm{res}_x(\frac{p}{q}) = -2\pi i \sum_{\{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(x)<0\}} \mathrm{res}_x(\frac{p}{q}) \ .$$

In der Tat ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \lim_{R \to \infty} \int_{c_R} \frac{p(x)}{q(x)} dx \ ,$$

und es existieren $M, R_0 \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß für alle $R \in [R_0, \infty)$ die Abschätzung

$$\sup_{|x|=R} |\frac{p(x)}{q(x)}| \leq MR^{-2}$$

und damit

$$\lim_{R\to\infty} \int_{b_R} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 0$$

gilt. Deshalb gilt durch Schließen nach oben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{b_R \sharp c_R} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\{x\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(x)>0\}} \mathrm{res}_x(\frac{pdx}{q}) \ .$$

Die andere Formel folgt z.B. aus Lemma 16.3, oder man ersetze b_R durch $\bar{b}_R$, das heißt, wir schließen nach unten.

In der Fourieranalysis muß man oft Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)} dx \tag{4}$$

ausrechnen, wobei λ reell ist, $p, q \in \mathbb{C}[z]$ mit $\mathrm{ord}(p) + 2 \leq \mathrm{ord}(q)$ gilt und q keine reellen Nullstellen hat. Es gilt immer noch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{c_R} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)} dx \ .$$

Wegen $|e^{i\lambda x}| = e^{-\lambda \mathrm{Im}(x)}$ gilt für $\lambda > 0$

$$\sup_{|b_R|} |\frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)}| \leq MR^{-2} \ .$$

Damit können wir immer noch nach oben schließen und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\{x\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(x)>0\}} \mathrm{res}_x(\frac{p(z)e^{i\lambda z}}{q(z)}) \ .$$

Falls $\lambda < 0$ ist, gilt

$$\sup_{|\bar{b}_R|} |\frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)}| \leq MR^{-2} \ .$$

Damit können wir nach unten schließen und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)} dx = -2\pi i \sum_{\{x\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(x)<0\}} \mathrm{res}_x(\frac{p(z)e^{i\lambda z}}{q(z)}) \ .$$

Beispiel 18.2. Als Beispiel berechnen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}dx}{x^2+1} \ .$$

Es gilt wegen $x^2+1=(x+i)(x-i)$

$$\mathrm{res}_{\pm i}\frac{e^{i\lambda x}dx}{x^2+1} = \frac{e^{\mp\lambda}}{\pm 2i}$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}dx}{x^2+1} = \begin{cases} \pi e^{-\lambda} & \lambda > 0 \\ \pi e^{\lambda} & \lambda < 0 \end{cases}$$

□

Wenn $\mathrm{ord}(p) = \mathrm{ord}(q)-1$ ist, dann konvergiert das unbestimmte Integral (4) nicht absolut Wir zeigen aber, daß es immer noch konvergent ist im Sinne daß

$$\lim_{R_1,R_2\to\infty} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)}dx$$

existiert. Für $S>0$ betrachten wir Wege

$$c_{R_1,R_2}(t) := -R_1 + (R_2-R_1)t \ , \quad a_{R_1,S}(t) := -R_1 + iS - iSt$$

$$b_{R_1,R_2,S}(t) := R_2 + iS + (-R_1-R_2)t \ , \quad d_{R_2,S}(t) := R_2 + iSt \ .$$

Dann ist $u_{R_1,R_2,S} := c_{R_1,R_2}\sharp a_{R_1,S}\sharp b_{R_1,R_2,S}\sharp d_{R_2,S}$ geschlossen (wobei wir hier die Wege durch flache Versionen ersetzen). Für genügend große S, R_1, R_2 gilt

$$\int_{u_{R_1,R_2,S}} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)}dx = 2\pi i \sum_{\{x\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(x)>0\}} \mathrm{res}_x(\frac{p(z)e^{i\lambda z}}{q(z)}) \ .$$

Es gilt für $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

$$\sup_{z\in|b_{R_1,R_2,S}|} |\frac{p(z)e^{i\lambda z}}{q(z)})| \le Me^{-\lambda S}S^{-1}$$

und damit

$$|\int_{b_{R_1,R_2,S}} \frac{p(z)e^{i\lambda z}dz}{q(z)}| \le M(R_1+R_2)S^{-1}e^{-\lambda S} \ .$$

Weiter gilt

$$|\frac{p(a_{R_1,S}(t))e^{i\lambda a_{R_1,S}(t)}}{q(a_{R_1,S}(t))})| \le \sup_{|a_{R_1,S}|} |\frac{p(z)}{q(z)}|e^{-St} \le MR_1^{-1}e^{-St}$$

und damit

$$|\int_{a_{R_1,S}} \frac{p(x)e^{i\lambda x}dx}{q(x)}| \le MR_1^{-1} \ .$$

Analog erhalten wir

$$|\int_{d_{R_2,S}} \frac{p(x)e^{i\lambda x}dx}{q(x)}| \leq MR_2^{-1} \ .$$

Die Konstante M hängt hier nicht von S, R_1, R_2 ab. Wir bilden nun

$$\lim_{R_1,R_2\to\infty} \lim_{S\to\infty} \int_{u_{R_1,R_2,S}} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)}dx = \lim_{R_1,R_2\to\infty} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)}dx \ .$$

Folglich gilt für $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)}dx = \sum_{\{x\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(x)>0\}} \mathrm{res}_x(\frac{p(z)e^{i\lambda z}}{q(z)}) \ .$$

Analog erhält man für $\lambda < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)}dx = -\sum_{\{x\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(x)<0\}} \mathrm{res}_x(\frac{p(z)e^{i\lambda z}dz}{q(z)}) \ .$$

Beispiel 18.3. Als Beispiel berechnen wir für $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}xdx}{x^2+1} = i\pi e^{-\lambda} \ .$$

□

Beispiel 18.4. Diese Techniken kann man weiter verfeinern. Wir berechnen etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)dx}{x} \ .$$

Der Integrand ist in $x = 0$ regulär. Wir ersetzen den Weg c_{R_1,R_2} durch den frei homotopen Weg u, welcher sich als Komposition der Wege $c_{R_1,\epsilon}$, $c_{R_2,\epsilon}$, f_ϵ, mit

$$c_{R_1,\epsilon}(t) = -R_1 + (-\epsilon + R_1)t \ , \quad c_{R_2,\epsilon}(t) = \epsilon + t(R_2 - \epsilon) \ , \quad f_\epsilon(t) = -\epsilon e^{\pi it}$$

darstellen läßt. Beachte, daß u von R_1 und R_2 abhängt, auch wenn das nicht notiert wird. Dann ist nach dem Cauchy Integralsatz

$$\int_u \frac{\sin(x)dx}{x} = \int_{c_{R_1,R_2}} \frac{\sin(x)}{x} \ .$$

Wir schreiben nun $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Wir setzen

$$\int_u \frac{\sin(x)dx}{x} = \int_u \frac{e^{ix}dx}{2ix} - \int_u \frac{e^{-ix}dx}{2ix} \ .$$

Für den ersten Term erhalten wir wie oben durch Schließen nach oben

$$\lim_{R_1,R_2\to\infty}\int_u \frac{e^{ix}dx}{2ix} = 0 \ ,$$

da die Umlaufzahl von des geschlossenen Weges um 0 verschwindet. Auf der andere Seite erhalten wir durch Schließen nach unten, daß

$$\begin{aligned}\lim_{R_1,R_2\to\infty}\int_u \frac{e^{-ix}dx}{2ix} &= -2\pi i \operatorname{res}_0 \frac{e^{-ix}}{2ix}\\ &= -\pi\end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)dx}{x} = \pi$$

gilt. □

Beispiel 18.5. Ähnliche Methoden funktionieren auch für andere Beispiele, etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{x+i}}{x^2+1}dx \ .$$

Wir betrachten hier die Quadratwurzel auf $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ mit $\sqrt{i}=e^{i\pi/4}$. Wir haben die Abschätzung

$$|\frac{\sqrt{x+i}}{x^2+1}|dx \le MR^{-\frac{3}{2}}$$

für große x. Deshalb konvergiert dieses Integral. Wir schreiben wieder wegen

$$|\int_{b_R}\frac{\sqrt{x+i}}{x^2+1}dx| \le MR^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{x+i}}{x^2+1}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{c_R}\frac{\sqrt{x+i}}{x^2+1}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{c_R\sharp b_R}\frac{\sqrt{x+i}}{x^2+1}dx \ .$$

Es gilt

$$\int_{c_R\sharp b_R}\frac{\sqrt{x+i}}{x^2+1}dx = 2\pi i \operatorname{res}_i\frac{\sqrt{x+i}}{x^2+1}dx = 2\pi i\,\frac{\sqrt{2i}}{2i} = \pi(1+i) \ .$$

Also

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{x+i}}{x^2+1}dx = \pi(1+i) \ .$$

□

19 Fouriertransformation

Wir betrachten eine meß- und integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Definition 19.1. *Die Fouriertransformierte von f ist die Funktion*

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx \ .$$

Die Fouriertransformierte $\hat{f}$ ist stetig und durch $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$ beachränkt.

Beispiel 19.2. Für $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ betrachten wir

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon}} \ .$$

Dann gilt wegen

$$-ix\xi - \frac{x^2}{2\epsilon} = -(\frac{x}{\sqrt{2\epsilon}} + i\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\xi)^2 - \frac{\epsilon}{2}\xi^2$$

und dem Cauchy-Integralsatz

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{e^{-\frac{\epsilon}{2}\xi^2}}{2\pi\sqrt{\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x}{\sqrt{2\epsilon}} + i\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\xi)^2} dx = \frac{e^{-\frac{\epsilon}{2}\xi^2}}{2\pi\sqrt{\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon}} dx = \frac{e^{-\frac{\epsilon}{2}\xi^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Beispiel 19.3. Sei $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Dann gilt nach einer Residuensatzrechnung

$$\hat{h}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{cases} e^{-\xi} & \xi > 0 \\ e^{\xi} & \xi < 0 \end{cases} \ .$$

Beispiel 19.4. Sei $\chi_{[a,b]}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi} \ .$$

Die Integrale in der folgenden Rechnung existieren und der Satz von Fubini kann angewendet werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2\epsilon}} d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2\epsilon}} dx d\xi \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2\epsilon}} d\xi dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sqrt{\epsilon} e^{-\frac{\epsilon}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx \end{aligned}$$

Wir bilden den Grenzwert $\epsilon \to \infty$. Wenn f im Punkt 0 stetig ist, dann erhalten wir

$$\lim_{\epsilon \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2\epsilon}} d\xi = f(0) \ .$$

Für $y \in \mathbb{R}$ sei die Translation von f um y durch

$$(T_y f)(x) := f(x-y)$$

definiert. Dann gilt

$$\widehat{T_y f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x-y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x+y)\xi} f(x)dx = e^{-iy\xi} \hat{f}(\xi) \ .$$

Da $(T_{-y}f)(0) = f(x)$ ist, folgt für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}$, in welchem f stetig ist, die Gleichung

$$\lim_{\epsilon \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{iy\xi - \frac{\xi^2}{2\epsilon}} d\xi = f(y) \ .$$

Insbesondere, wenn $\hat{f}(\xi)$ integrierbar ist, dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{iy\xi} d\xi = f(y) \ .$$

Das ist die **Umkehrformel für die Fouriertransformation**. Wir notieren

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{iy\xi} d\xi = \check{g}(y) \ .$$

Beispiel 19.5. Es gilt

$$\check{\hat{\phi}} = \phi \ .$$

Das kann man auch explizit nachrechnen.

Beispiel 19.6. Es gilt

$$\check{\hat{h}} = h \ .$$

Wir überprüfen das explizit:

$$\begin{aligned}
\check{\hat{h}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi| + ix\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{(ix-1)\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{(ix+1)\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+ix} - \frac{1}{-1+ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Beispiel 19.7. Wir berechnen die Rücktransformation der Fouriertransformierten von $\chi_{[a,b]}$. Dazu betrachten wir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi} d\xi \ .$$

Das Integral existiert. Wir umgehen den Punkt $\xi = 0$ über die obere Halbebene. Sei γ der entsprechende durch $\mathbb{R}$ parametriserte Weg. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{i(x-a)\xi}}{\xi}dx = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x > a \\ \frac{1}{2\pi i}(-2\pi i \mathrm{res}_0 \frac{e^{i(x-a)\xi}}{\xi}) & x < a \end{array} \right. = -\chi_{(-\infty,a]}(x)$$

Wir erhalten für $x \notin \{a,b\}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-ia\xi}-e^{-ib\xi}}{i\xi}d\xi = \chi_{(-\infty,b]}(x) - \chi_{(-\infty,a]}(x) = \chi_{[a,b]}(x) \ .$$

Beispiel 19.8. Wir wollen die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t f(t,x) = \partial_x^2 f(t,x) \ , \quad f(0,x) = h(x)$$

lösen. Diese beschreibt die zeitliche Entwicklung einer anfänglichen Wärmeverteilung h mit der Zeit t. Wir machen den Ansatz

$$f(t,x) = \check{g}(t,-)(x) \ .$$

Wenn $(1+\xi^2)\hat{g}$ integrierbar ist, dann gilt $\partial_x^2 f(t,x) = \check{\tilde{g}}(t,-)$ mit $\tilde{g}(t,\xi) = -\xi^2 g(t,\xi)$. Folglich sollte g der Gleichung

$$\partial_t g = -\xi^2 g \ , \quad g(0,\xi) = \hat{h}(\xi)$$

genügen. Diese Gleichung hat die Lösung

$$g(t,\xi) = e^{-\xi^2 t}\hat{h}(\xi) \ .$$

Wir erhalten also

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}e^{-\xi^2 t}\hat{h}(\xi)dx \ .$$

Wenn $\hat{h}$ integrierbar ist, dann ist klar, daß diese Funktion unser Problem löst.

Wir machen zwei explizite Beispiele. Sei

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2} \ .$$

Dann gilt

$$\hat{h}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{ \begin{array}{cc} e^{-\xi} & \xi > 0 \\ e^{\xi} & \xi < 0 \end{array} \right.$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{ix\xi}e^{-\xi}e^{-\xi^2 t}d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^0 e^{ix\xi}e^{\xi}e^{-\xi^2 t}d\xi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{ix\xi}e^{-\xi}e^{-\xi^2 t} + e^{-ix\xi}e^{-\xi}e^{-\xi^2 t}\right)d\xi \\ &= \int_0^\infty \cos(\xi x)e^{-\xi}e^{-\xi^2 t}d\xi \end{aligned}$$

Wir berechnen den Temperaturverlauf im Ursprung weiter, d.h. wir setzen $x = 0$.

$$\begin{aligned} f(t,0) &= e^{\frac{1}{4t}} \int_0^\infty e^{-(\xi\sqrt{t}+\frac{1}{2\sqrt{t}})^2} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{1}{4t}} \int_0^\infty e^{-(\xi+\frac{1}{2\sqrt{t}})^2} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{1}{4t}} \int_{\frac{1}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-\xi^2} d\xi \\ &= e^{\frac{1}{4t}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} (1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{2t}})) \end{aligned}$$

Für große t ist

$$f(t,0) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$$

Als zweites Beispiel rechnen wir mit $\hat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Dann gilt

$$f(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ix\xi} e^{-\xi^2 t} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \ .$$

Diese Funktion erfüllt die Wärmeleitungsgleichung. Da $(1+\xi^2)\hat{h}$ nicht integrierbar ist, ist der Grenzwert $t \to 0$ problematisch. Es gilt in der Tat

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \delta_0(x)$$

im Sinne von Distributionen. In der Tat ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \hat{\delta}_0 \ .$$

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ integrierbar.

Definition 19.9. *Die **Laplacetransformierte** von f ist durch*

$$L(f)(p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx$$

definiert.

Da Integral konvergiert für $\mathrm{Re}(p) \geq 0$ und es ist klar, daß $L(f)(p)$ für $\mathrm{Re}(p) >$ holomorph ist. Man kann f durch Null auf die negative Halbgrade fortsetzen zu einer Funktion F. Dann hat die Fouriertransformierte $\hat{F}(\xi)$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\{\xi \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(\xi) \leq 0\}$ und es gilt

$$L(f)(p) = \sqrt{2\pi}\hat{F}(-ip)$$

für $p \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(p) > 0$.

Die Umkehrformel für die Fouriertransformation liefert

$$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(f)(i\xi) e^{ix\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2\epsilon}} d\xi$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ in welchen F stetig ist.

Beispiel 19.10. Wir sagen, daß $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine **asymptotische Entwicklung** der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$ hat, wenn $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Re}(\lambda) \to \infty$ ist und für jedes $R \in \mathbb{R}$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\sup_{x \in [0,\infty)} e^{Rx} |f(x) - \sum_{n=0}^{k} a_n e^{-\lambda_n x}| < \infty$$

gilt. Wir schreiben

$$f(x) \overset{x \to \infty}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \ .$$

Wenn f eine solche asymptotische Entwicklung besitzt, dann hat $L(f)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} L(f)(p) &= \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-px} (f(x) - \sum_{n=0}^{k} a_n e^{-\lambda_n x}) dx + \int_0^{\infty} e^{-px} \sum_{n=0}^{k} a_n e^{-\lambda_n x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-px} \left(f(x) - \sum_{n=0}^{k} a_n e^{-\lambda_n x} \right) dx + \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{p + \lambda_n} \end{aligned}$$

Der erste Term ist holomorph auf $\{p \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(p) > -R\}$ und der zweite Term ist meromorph. Wir sehen weiter, daß die Pole von $L(f)$ in den Punkten $-\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$ liegen und $a_n = \mathrm{res}_{-\lambda_n} L(f)$ gilt.

Sei etwa $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Dann gilt für $f(x) := \phi(e^{-x})$

$$f(x) \overset{x \to \infty}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} e^{-nx} \ .$$

Folglich ist $L(f)$ eine meromorphe Funktion mit den Polen in den Zahlen $-n$, $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\mathrm{res}_{-n} L(f) = \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} \ .$$

20 Aufgaben

Aufgabe 20.1. *Wir definieren für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ die Wurzel $\sqrt{z}$ als die durch $\sqrt{z}^2 = z$ und $\mathrm{Re}(\sqrt{z}) > 0$ eindeutig bestimmte komplexe Zahl. Zeigen Sie, daß $\sqrt{z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$*

gilt.

Zusatzaufgabe: *Zeigen Sie, daß man $\sqrt{z}$ nicht auf eine größere Teilmenge als holomorphe Funktion fortsetzen kann.*

Aufgabe 20.2. *Zeigen Sie, daß es eine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und einen geschlossenen Weg γ in $\mathbb{C}$ gibt, so daß $\int_\gamma f(z)dz \neq 0$ gilt.*

Aufgabe 20.3. *Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den Grenzwert*

$$\lim_{z\to -n} (z+n)\Gamma(z) \ .$$

Aufgabe 20.4. *Sei $\phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Zeigen Sie, daß die Funktion*

$$f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ , \quad f(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t-z} dt$$

holomorph ist.

Zusatzaufgabe: *Zeigen Sie, daß für alle $s \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte*

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} f(s \pm i\epsilon) =: a_\pm(\phi)(s)$$

existieren und berechnen Sie $a_+(\phi) - a_-(\phi)$ explizit.

Aufgabe 20.5.

1. *Zeigen Sie, daß die Homotopie von Wegen eine Äquivalenzrelation ist.*
2. *Zeigen Sie, daß jede Homotopieklasse von Wegen einen flachen Repräsentanten besitzt.*
3. *Sei γ ein flacher geschlossener Weg. Zeigen Sie, daß $\gamma \sharp \gamma^{op}$ homotop zu einem konstanten Weg ist.*
4. *Wir betrachten die Menge $\pi_1(U, u)$ der Homotopieklassen geschlossener Wege in U mit Anfangspunkt $u \in U$. Zeigen Sie, daß durch*

   $$[\gamma] \circ [\sigma] := [\gamma \sharp \sigma]$$

   eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(U, u)$ definiert wird. In dieser Formel sind γ und σ flache Repräsentanten.
5. *Zeigen Sie, daß $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1)$ unendlich viele Elemente enthält.*
   Hinweis: Betrachten Sie dazu die Abbildung

   $$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) \ni [\gamma] \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z} \ .$$

Aufgabe 20.6. 1. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ eine Gerade, also eine Teilmenge der Form $\{z_0 + tz_1 | t \in \mathbb{R}\}$ mit $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ und $z_1 \neq 0$. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $f_{|U \setminus G}$ holomorph. Zeigen Sie, daß dann f holomorph ist.*
Hinweis: Versuchen Sie, lokal in der Nähe von G Stammfunktionen von f zu konstruieren.

2. *Sei $H_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ die obere Halbebene. Sei $f : \overline{H_+} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so daß $f_{|H_+}$ holomorph und $f_{|\partial\overline{H_+}}$ reelle Werte hat. Zeigen Sie, daß f dann eine holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ besitzt.*

Aufgabe 20.7. *Wir betrachten die holomorphe Funktion*

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}\ , \quad f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\ .$$

Zeigen Sie, daß f auf $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 20.8. *Zeigen Sie, daß die Funktion*

$$f : \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup [1, \infty)) \to \mathbb{C}\ , \quad f(z) := \frac{\ln(1-z)}{z}$$

eine Stammfunktion besitzt. Zeigen Sie, daß sich diese Stammfunktion holomorph auf $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ fortsetzt. Berechnen Sie die Taylorentwicklung dieser Fortsetzung im Punkt 0.

Aufgabe 20.9. *Sei f eine ganze Funktion. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:*

1. *Die Funktion f hat keine Nullstellen.*
2. *Es gibt eine ganze Funktion g, so daß $f = \exp(g)$ gilt.*

Aufgabe 20.10. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f \in \mathcal{O}(U)$ nicht identisch Null. Wir setzen $Z := \{f = 0\}$ und definieren $\partial := \partial_x - i\partial_y$. Zeigen Sie, daß $g := \partial \ln |f| : U \setminus Z \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Zeigen Sie weiter, daß g in Z Pole 1. Ordnung hat und berechnen Sie die Residuen.*

Aufgabe 20.11. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, einfach zusammenhängend und $g : U \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, also zweimal stetig differenzierbar und gelte $\Delta g = 0$. Zeigen Sie, daß es dann eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $\mathrm{Re}(f) = g$ gibt.*
Hinweis: Zeigen Sie, daß

$$dg - I \circ dg \circ I : U \to \mathrm{End}(\mathbb{C}_{|\mathbb{R}})$$

Werte in $\mathrm{End}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ hat, holomorph ist, und man f als Stammfunktion dieser Funktion wählen kann.

Aufgabe 20.12. *Geben Sie eine möglichst kleine Zahl $M \in \mathbb{R}$ an, welche der folgenden Bedingung genügt: Für jedes $f \in \mathcal{O}(B(0, 2))$ mit*

$$\sup_{z \in B(0,2)} |f(z)| \leq 1$$

gilt

$$\sup_{\{z\in\mathbb{C}\ |2|\mathrm{Im}(z)|+3|\mathrm{Re}(z)|\leq 1\}} |f'(z)| \leq M\ .$$

Geben Sie weiter eine möglichst große untere Schranke für die möglichen Wahlen von M. Begründen Sie ihre Entscheidungen.

Aufgabe 20.13. *Berechnen Sie die folgenden Residuen:*

1. $\mathrm{res}_2 \frac{\ln(z)}{(z-2)^2}$
2. $\mathrm{res}_\pi \frac{1}{\sin(4z)}$
3. $\mathrm{res}_i \frac{e^{iz}}{z^2+1}$.
4. $\mathrm{res}_\infty \frac{z-1}{z+1}$.

Aufgabe 20.14 (5 Punkte)**.** 1. *Wir betrachten den Raum*

$$V(k) := \{(f,g) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \times \mathcal{O}(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \mid f(z) = z^k g(z^{-1}) \textit{ für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}\ .$$

Berechnen Sie $\dim V(k)$.

2. *Wir betrachten den Raum*

$$W(k) := \{(f,g) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \mid f(z) = z^k g(z^{-1}) \textit{ für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}\ .$$

Zeigen Sie, daß die Zahl

$$\sum_{\{x\in\bar{\mathbb{C}}\mid |x|\leq 1\}} \nu_f(x) + \sum_{\{x\in\bar{\mathbb{C}}\mid |x|>1\}} \nu_g(x)$$

nicht von $0 \neq (f,g) \in W(k)$ abhängt und berechnen sie diese.

Aufgabe 20.15. *Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ und $\deg(p) \geq \deg(q)$. Zeigen Sie, daß es $R, R' \in \mathbb{R}^>$ gibt, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$*

$$\sharp\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \geq R' \textit{ und } p(w) = zq(w)\} = \deg(p) - \deg(q)$$

gilt.

Aufgabe 20.16. *Berechnen Sie:*

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{1+2x^2} dx$$

   für $\xi \in \mathbb{R}$.

2. $$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^4+1} dx\ .$$

3. $$\int_0^{4\pi} \frac{1}{2+\sin(2x)^2} dx$$