Ulrich Bunke*

4. Juli 2003

Inhaltsverzeichnis

*Göttingen, bunke@uni-math.gwdg.de

1 Lineare Operationen und Stetigkeitskonzepte

1.1 Überblick

Seien V und W Vektorräume und $A : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ziel dieses Abschnittes ist die Diskussion der der Relation

$$\lim_{x \to 0} Ax = 0 \ .$$

Um dieser einen Sinn zu geben, müssen offensichtlich Konvergenzbegriffe in V und W festgelegt werden. Dieses Kapitel ist eine Tour durch eine Vielfalt von Beispielen für V, W, A und passender topologischer Strukturen.

1.2 Punktauswertungen - punktweise Konvergenz

Wir betrachten den Raum $V = \mathtt{Stet}(\mathbb{R})$ der $\mathbb{C}$-wertigen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Sei $W := \mathbb{C}$ und $A : V \to W$ die Auswertung $A := \delta_x$ in $x \in \mathbb{R}$, $\delta_x(f) := f(x)$.

Sei x fixiert. Ein erster Ansatz für einen Konvergenzbegriff ist, $f \to 0$ durch $f(x) \to 0$ zu erklären. Dann gilt sicherlich

$$\lim_{f \to 0} \delta_x f = 0 \ .$$

Wir wollen dies in die topologische Sprache übersetzen. Dazu führen wir den Begriff der Halbnorm ein.

Definition 1.1. *Eine Abbildung $p : V \to [0, \infty)$ heißt Halbnorm, falls*

1. $p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$ *für alle* $v \in V$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$ *und*
2. $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$ *für alle* $u, v \in V$

gilt.

Beachte, daß im Gegensatz zu einer Norm aus $p(v) = 0$ nicht $v = 0$ folgen muß.

In unserem Beispiel betrachten wir die Halbnorm $p_x(f) := |f(x)|$.

Mit Hilfe der Halbnorm können wir Umgebungen der Null definieren:

$$U(0,p,\epsilon) := \{p(v) < \epsilon\} \ , \quad \epsilon > 0 \ .$$

Durch Verschieben erhalten wir Umgebungen um den Punkt $v \in V$:

$$U(v,p,\epsilon) := v + U(0,p,\epsilon) \ .$$

Lemma 1.2. *Die Umgebungen $U(v,p,\epsilon)$, $v \in V$, $\epsilon > 0$ bilden die Basis einer Topologie $\mathcal{T}(p)$ auf V. Es gilt $f \to 0$ in dieser Topologie genau dann, wenn $p(f) \to 0$.*

Die Topologie $\mathcal{T}(p_x)$ in unserem Beispiel ist ziemlich singulär. Sie hat zum Beispiel nicht die Hausdorffeigenschaft. Aus $f \to 0$ kann man keine Rückschlüsse über das Verhalten von $f(y)$, $y \neq x$ ziehen.

Wir können sicherlich die Halbnorm p_x für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ bilden. Wir betrachten nun die punktweise Konvergenz: $f \to 0$ falls $f(x) \to 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In anderen Symbolen, $f \to 0$ falls $p_x(f) \to 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 1.3. *Es gilt $f \to 0$ in diesem Sinne genau dann, wenn $f \to 0$ in der von $(\mathcal{T}(p_x))_{x\in\mathbb{R}}$ erzeugten Topologie $\mathcal{T}(p_x, x \in \mathbb{R})$.*

Wenn man $f \to 0$ in dieser Topologie versteht, dann gilt

$$\lim_{f\to 0} \delta_x f = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir haben damit den Begriff der punktweisen Konvergenz in einen topologischen Rahmen gestellt. Diese Topologie ist allerdings kompliziert. So hat sie keine abzähbare Basis und ist nicht metrisierbar (die Menge der nötigen Halbnormen hat die Kardinalität von $\mathbb{R}$).

Aufgabe 1.1 (*). *Wir betrachten die Teilmenge $\{f(\mathbb{R}) \subset [0,1]\} \subset \mathtt{Stet}(\mathbb{R})$. Zeige, daß diese Teilmenge folgenabgeschlossen, aber nicht abgeschlossen ist. (Hinweise : Das Komplement enthält keine offene Teilmenge.)*

1.3 Lokal gleichmäßige Konvergenz

Sei weiterhin $V = \mathtt{Stet}(\mathbb{R})$. Sei $K \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Teilmenge. Für $f \in V$ möge $\mathtt{res}_K(F)$ Einschränkung von f auf K bezeichnen. Es ist klar, daß $\mathtt{res}_K(f)$ stetig und wegen der Kompaktheit von K sogar beschränkt ist. Wir nehmen nun als Bildraum $W := C(K)$ den Banachraum der stetigen Funktionen auf K mit der Norm $\|\phi\|_{C(K)} := \sup_{k\in K} |\phi(k)|$.

Es ist klar, daß $\lim_{f\to 0} \mathtt{res}_K(f) = 0$ nicht richtig ist, wenn man die punktweise Konvergenz in V zugrundelegt. Um einen adäquaten Konvergenzbegriff zu finden, gehen wir wie im vorhergehenden Abschnitt vor. Wir benutzen die Norm im Bildraum und die betrachtete Abbildung, um die Halbnorm

$$p_K(f) := \|\mathtt{res}_K(f)\|_{C(K)}$$

zu definieren. Es ist wieder klar, daß

$$\lim_{f\to 0} \mathtt{res}_K(f) = 0$$

gilt, wenn man $f \to 0$ im Sinne $p_K(f) \to 0$, also in $\mathcal{T}(p_K)$ versteht. Um einen guten Raum zu erhalten, betrachtet man die Topologie $\mathcal{T}(p_K, K \subset \mathbb{R})$ der lokal gleichmaßigen Konvergenz, wobei hier K alle kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ durchläuft.

Es gilt also $f \to 0$ lokal gleichmäßig, falls $\mathtt{res}_K(f) \to 0$ in $C(K)$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}$. Wir bezeichnen den Raum der stetigen Funktionen mit der lokal gleichmäßigen Konvergenz mit $C_{loc}(\mathbb{R})$.

Die Topologie von $C_{loc}(\mathbb{R})$ hat eine abzählbare Basis und ist metrisierbar. In der Tat genügt nämlich eine abzählbare Familie von Halbnormen p_{K_i}, $i \in \mathbb{N}$, um die Topologie in der Form $\mathcal{T}(p_{K_i}, i \in \mathbb{N})$ zu schreiben.

Aufgabe 1.2. *Zeige, daß dazu nur gefordert werden muß, daß $\cup_{i\in\mathbb{N}} K_i = \mathbb{R}$. Finde eine abzählbare Basis offener Umgebungen von 0. Zeige, daß durch*

$$d(f,g) := \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} p_{K_i}(f-g) \wedge 1$$

eine die Topologie erzeugende Metrik auf $C_{loc}(\mathbb{R})$ gegeben wird. Zeige, daß $C_{loc}(\mathbb{R})$ mit dieser Metrik vollständig ist.

Definition 1.4. *Sei V ein komplexer topologischer Vektorraum, dessen Topologie von der Form $\mathcal{T}(p_i, i \in \mathbb{N})$ ist. Sei weiterhin*

$$d(f,g) := \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} p_i(f-g) \wedge 1$$

auf V eine Metrik , in welcher V vollständig ist. Dann nennen wir den topologischen Vektorraum einen Frechétraum.

Aufgabe 1.3 (*). *Den Begriff der stetigen Funktion hat man auf jedem topologischen Raum X. Man kann $C_{loc}(X)$ analog definieren. Finde möglichst allgemeine Bedingungen an X, unter welchen $C_{loc}(X)$ ein Frechétraum ist.*

Aufgabe 1.4. *Sei $f_i(x) = \mathrm{e}^{-(x-i)^2}$. Zeige, daß $\lim_{i\to\infty} f_i = 0$ in $C_{loc}(\mathbb{R})$.*

1.4 Integralnormen

Wir betrachten den Raum $L^1(\mathbb{R}, |.|)$ der integrierbaren Funktionen(klassen) auf $(\mathbb{R}, |.|)$. Wir betrachten die Abbildung $A : L^1(\mathbb{R}, |.|) \to \mathbb{C}$, $A(f) := \int_{\mathbb{R}} f|dx|$.

Um $f \to 0$ zu erklären, können Punktauswertungen nicht verwendet werden, da sie gar nicht wohldefiniert sind. In diesem Fall bietet es sich an, die Norm

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f|d|x|$$

zu verwenden. Wir wissen bereits, daß $L^1(\mathbb{R}, |.|)$ mit dieser Norm vollständig ist.

Zur Erinnerung,

Definition 1.5. *Ein topologischer Vektorraum, dessen Topologie von der Form $\mathcal{T}(\|.\|)$ für eine Norm $\|.\|$ ist, und welcher bezüglich der Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ vollständig ist, heißt Banachraum.*

Der Raum $L^1(\mathbb{R}, |.|)$ ist also ein Beispiel für einen Banachraum.

Aufgabe 1.5. *Führen Sie in Analogie zu $C_{loc}(\mathbb{R})$ einen Frechét-Raum $L^1_{loc}(\mathbb{R}, |.|)$ ein.*

Aufgabe 1.6. *Unter welchen Bedingungen an den topologischen Raum X is $C_{loc}(X)$ ein Banachraum.*

Wir betrachten jetzt konjugierte Exponenten $p, q > 0$, d.h. $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Sei für $g \in L^q(\mathbb{R}, |.|)$ die Abbildung $A_g : L^p(\mathbb{R}, |.|) \to \mathbb{C}$ durch

$$A_g(f) := \int_{\mathbb{R}} gf|dx|$$

definiert. Es gibt mehrere Möglichkeiten, Konvergenzbegriffe $f \to 0$ derart einzuführen, daß

$$\lim_{f\to 0} A_g(f) = 0$$

für alle g.

Eine Möglichkeit ist analog zur punktweisen Konvergenz. Wir bilden die Halnnormen

$$p_g(f) := |A_g(f)|$$

und betrachten die Konvergenz in der Topologie $\mathcal{T}(p_g, g \in L^q(\mathbb{R}, |.|))$. Diese heißt die schwache Topologie.

Aufgabe 1.7 (*). *Untersuche, ob diese Topologie eine Frechét oder Banachraumtopologie ist.*

Wir können die Abbildung $g \mapsto A_g(f)$ aber zum Beispiel auch als stetige Funktion auf der Einheitskugel im Banachraum $(L^q(\mathbb{R}, |.|), \|.\|_{L^q(\mathbb{R},|.|)})$ betrachten. Dies führt zur Halbnorm

$$p(f) := \sup_{g \in L^q(\mathbb{R},|.|), \|g\|_{L^q(\mathbb{R},|.|)}=1} p_g(f) \ .$$

Aufgabe 1.8 (*). *Zeige: Es gilt $p(f) = \|f\|_{L^p(\mathbb{R},|.|)}$.*

Die starke Topologie $\mathcal{T}(p)$ stimmt also mit der Banachraumtopologie von $(L^p(\mathbb{R}, |.|), \|.\|_{L^p(\mathbb{R},|.|)}$ überein.

1.5 Topologien auf Dualräumen

Im vorgehenden Beispiel haben wir $L^p(\mathbb{R}, |.|)$ als Dualraum von $L^q(\mathbb{R}, |.|)$ betrachtet. Die Konstruktion der starken und schwachen Topologie kann man in einem allgemeinen Rahmen betrachten. Sei V ein topologischer Vektorraum, dessen Topologie von der Form $\mathcal{T}(p, p \in I)$ für eine geeignete Menge I von Halbnormen ist. Sei $V' := \mathrm{Hom}_{cont}(V, \mathbb{C})$ der Raum der stetigen Funktionale auf V.

Für $v \in V$ haben wir die Halbnorm $p_v(\phi) := |\phi(v)|$ auf V'.

Definition 1.6. *Die schwache Topologie auf V' ist die Topologie $\mathcal{T}(p_v, v \in V)$.*

Wenn man $\phi \to 0$ in dieser Topologie versteht, dann gilt sicherlich für alle $v \in V$, daß

$$\lim_{\phi \to 0} \phi(v) = 0 \ .$$

Um die starke Topologie zu definieren, brauchen wir den Begriff der beschränkten Menge. Was beschränkte Teilmengen eines Banachraumes sind, ist offensichtlich. Im allgemeinen ist dieser Begriff wie folgt erklärt:

Definition 1.7. *Eine Teilmenge $B \subset V$ ist beschränkt, falls für alle $p \in I$ gilt*

$$\sup_{v \in B} p(v) < \infty \ .$$

Sei $\phi \in V'$ und $B \subset V$ beschränkt.

Aufgabe 1.9. *Zeige: Die Einschränkung $\mathtt{res}_B(\phi)$ ist eine stetige beschränkte Funktion.*

Wir definieren die Halbnorm $p_B(\phi) := \|\mathtt{res}_B(\phi)\|_{C(B)}$.

Definition 1.8. *Die starke Topologie auf V' ist die Topologie $\mathcal{T}(p_B, B \subset V)$, wobei B alle beschränkten Mengen durchläuft.*

Wenn $\phi \to 0$ im starken Sinne verstanden wird, dann gilt

$$\lim_{\phi \to 0} \mathtt{res}_B(\phi) = 0$$

für alle beschränkten Teilmengen $B \subset V$.

Aufgabe 1.10. *Zeige, daß die schwache Topologie in der starken Topologie enthalten ist.*

Wir betrachten den Banachraum $V := L^2(\mathbb{N}, \mu)$ mit dem Zählmaß μ.

Aufgabe 1.11. *Zeige, daß für $n \in \mathbb{N}$ die Auswertung $\delta_n : V \to \mathbb{C}$ in V' liegt. Zeige weiterhin, daß $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ in der schwachen Topologie gilt, aber nicht in der starken Topologie.*

1.6 Ableitungen und C^k-Topologien

Sei $A = \sum_{l=0}^{k} a_l \frac{d^l}{dx^l}$ ein Differentialoperator k-ter Ordnung auf $\mathbb{R}$ mit stetigen Funktionen a_l als Koeffizienten. Für eine k-mal stetig differenzierbare Funktion f auf $\mathbb{R}$ ist Af eine stetige Funktion. Wir wollen den Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit einer Topologie so versehen, saß

$$\lim_{f \to 0} Af = 0$$

in $C_{loc}(\mathbb{R})$ gilt. Die offensichtliche Möglichkeit ist natürlich, für jede Halbnorm p_K von $C_{loc}(\mathbb{R})$ die Halbnorm $p_{A,K}(f) := p_K(Af)$ zu betrachten und als Topologie $\mathcal{T}(p_{A,K}, K \subset \mathbb{R})$ (K kompakt) zu nehmen. Diese hängt allerdings von A ab und hat im allgemeinen keine guten Trennungseigenschaften (Betrachte den Extremfall $A = 0$.)

Universeller kann man $p_{l,K}(f) := p_K(\frac{d^l}{dx^l} f)$ betrachten.

Definition 1.9. *Die Topologie auf dem Raum $C^k_{loc}(\mathbb{R})$ ist $\mathcal{T}(p_{l,K}, l = 0, \dots k, K \subset \mathbb{R})$, ($K$ kompakt).*

Aufgabe 1.12 (*). *Zeige, daß $C^k_{loc}(\mathbb{R})$ ein Frechétraum, aber kein Banachraum ist.*

Aufgabe 1.13. *Zeige, daß $A : C^k_{loc}(\mathbb{R}) \to C_{loc}(\mathbb{R})$ stetig ist.*

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Mit $C^k_K(\mathbb{R}) \subset C^k_{loc}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir den Unterraum derjenigen Funktionen, welche ihren Träger in K haben.

Aufgabe 1.14. *Zeige, daß $C^k_K(\mathbb{R})$ mit der induzierten Topologie ein Banachraum ist.*

1.7 C^∞-Topologien

Wir betrachten $\frac{d}{dx}$. Wir wollen $\frac{d}{dx}$ als Operator $A : V \to V$ auf einem Raum von Funktionen auf $\mathbb{R}$ verstehen. Da wir A beliebig oft anwenden können, sollten diese Funktionen glatt sein.

Für eine Funktion glatte Funktion ϕ betrachten wir den Operator M_ϕ der Multiplikation mit ϕ. Wir wollen eine Topologie auf dem Raum der glatten Funktionen derart, daß $\frac{d}{dx}$ und M_ϕ (für beliebige ϕ) stetig werden.

Definition 1.10. *Der Raum $C^\infty(\mathbb{R})$ ist der Raum der glatten Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit der Topologie $\mathcal{T}(p_{l,K}, l \geq 0, K \subset \mathbb{R})$ (K kompakt).*

Aufgabe 1.15. *Zeige, daß $C^\infty(\mathbb{R})$ ein Frechétraum ist.*

Aufgabe 1.16. *Zeige, daß jeder Differentialoperator (mit glatten Koeffizienten) auf $C^\infty(\mathbb{R})$ stetig ist.*

Aufgabe 1.17 (*). *Zeige, daß $C^0_K(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ ein Frechétraum, aber kein Banachraum ist.*

Aufgabe 1.18. *Zeige, daß für $\lim_{i\to\infty} f_i = 0$ in $C^\infty(\mathbb{R})$ für die Folge (f_i) aus Aufgabe 1.4.*

1.8 Globale Normen - Schwarzraum

Wenn man nicht mit unbeschränkten Funktionen multiplizieren möchte, dann könnte man auf dem Raum der Funktionen mit beschränkten stetigen Ableitungen die Halbnormen $p_{k,\mathbb{R}}$ betrachten.

Der Raum der k-fach beschränkt stetig differenzierbaren Funktionen $C_b^k(\mathbb{R})$ wird mit der Topologie $\mathcal{T}(p_{l,\mathbb{R}}, l = 0, \dots, k)$ versehen.

Aufgabe 1.19. *Zeige, daß $C_b^k(\mathbb{R})$ ein Banachraum ist.*

Aufgabe 1.20. *Zeige, daß ein Differentialoperator A der Ordnung k mit beschränkten stetigen Koeffizienten eine stetige Abbildung $A : C_b^k(\mathbb{R}) \to C_b^0(\mathbb{R})$ definiert. Fixieren Sie Normen und bestimmen Sie $\|A\|$ für*

$$A := a\frac{d^l}{dx^l}, a \in C_b^0(\mathbb{R})$$

Wir wollen jetzt einen Raum beschränkter stetig-differenzierbarer Funktionen angeben, auf welchem Differentialoperatoren beliebiger Ordnung mit polynomialen Koeffizienten stetig wirken. Wir führen dazu die Halbnormen

$$p_{l,k}(f) := p_{k,\mathbb{R}}(x^l f)$$

ein.

Definition 1.11. *Der Schwarzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist der Raum derjenigen glatten Funktionen auf $\mathbb{R}$, für welche*

$$x \mapsto \frac{d^k}{dx^k} x^l f(x)$$

für alle $l, k \in \mathbb{N}_0$ beschränkt ist. Die Topologie ist $\mathcal{T}(p_{l,k}.l, k \geq 0)$.

Aufgabe 1.21. *Zeige, daß $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ein Frechétraum ist.*

Aufgabe 1.22. *Zeige, daß ein Differentialoperator A mit polynomialen Koeffizienten eine stetige Abbildung $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert.*

Aufgabe 1.23. *Zeige, daß für $\lim_{i\to\infty} f_i = 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ für die Folge (f_i) aus Aufgabe 1.4.*

1.9 Funktionen mit kompakten Träger

Sei $C_c(\mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen mit kompakten Träger. Wir führen zuerst den Konvergenzbegriff ein.

Definition 1.12. *Für eine Folge (f_i) in diesem Raum gelte $f_i \to 0$ genau dann, $f_i \to 0$ in $C_{loc}(\mathbb{R})$ und wenn es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ gibt mit $\mathtt{supp}(f_i) \subset K$ für alle i.*

Auch diese Konvergenz kann man in topologischen Termen fassen. Sei $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen natürlicher Zahlen. Sei $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\dots K_i \subset K_{i+1} \dots$ eine Ausschöpfung von $\mathbb{R}$ durch kompakte Teilmenge (z.B. $K_i := [-i, i]$). Für $\kappa \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definieren wir

$$p_\kappa(f) := \sup_{i\in\mathbb{N}} \kappa(i) \sup_{x\in K_{i+1}\setminus K_i} |f(x)| \ .$$

Dies ist eine Halbnorm auf $C_c(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Topologie $\mathcal{T}(p_\kappa, \kappa \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ auf $C_c(\mathbb{R})$.

Aufgabe 1.24 (*). *Zeige, daß diese Topologie Hausdorffsch ist. Zeige weiter, daß aus $f_i \to 0$ die Existenz eines Kompaktums $K \subset \mathbb{R}$ folgt, so daß $\mathtt{supp}(f_i) \subset K$ für alle i gilt.*

Aufgabe 1.25 (*). *Führe auf analoge Weise Räume $C_c^k(\mathbb{R})$ und $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ein.*

Der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist der Raum der Testfunktionen und wird oft mit $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ bezeichnet. Er ist der Ausgangspunkt der Distributionentheorie. Der Raum der Distributionen auf $\mathbb{R}$ ist nämlich gerade $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ (meist mit der schwachen Topologie versehen).

2 Hilbert- versus Banachräume

2.1 Überblick

Hilberträume sind spezielle Banachräume. Eigenschaften wie Existenz von Orthonormalbasen, Lote auf Unterräume, komplementäre Unterräume, Selbstdualität sind besonders wertvolle Eigenschaften von Hilberträumen. Diese sind Thema des Kapitels. Als Ergänzung werden der Satz von Hahn-Banach und der Dualraum von $C(K)$ für kompaktes K diskutiert.

2.2 Konvexität

Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum und $W \subset V$ ein linearer Unterraum. Für $v \in V$ sei

$$\texttt{prox}(W, v) := \{w \in W \mid \|v - w\| = d(v, W)\}$$

die Menge der Punkte von W mit minimalen Abstand von v.

Wir betrachten beispielsweise den Banachraum $V = C([0,1])$. Sei $f \in C([0,1])$, $f(x) = e^x$ und W den Polynomen n-ten Grades aufgespannte Unterraum. Die Elemente von $\texttt{prox}(W, f)$ sind diejenigen Polynome der Form $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, für welche $\|p - f\|$ minimal wird. In diesem Fall ist $\texttt{prox}(W, f)$ nicht leer ($\dim W < \infty$).

Es kann aber auch passieren, daß $\texttt{prox}(W, f) = \emptyset$ gilt. Z.B. wenn man für W den Raum aller Polynome nimmt.

Aufgabe 2.1. *Beweise diese Behauptung.*

Sei $f(x) = x - \frac{1}{2}$ und W der von $p(x) = x$ aufgespannte Unterraum.

Aufgabe 2.2. *Bestimme* $\texttt{prox}(W, f)$*.*

In dieser Aufgabe besteht $\texttt{prox}(W, f)$ aus mehr als einem Element.

Lemma 2.1. *Wenn* $\dim(W) < \infty$*, so ist* $\texttt{prox}(W, v) \neq \emptyset$*.*

Proof. Sei (w_i) eine Folge mit

$$\lim_{i \to \infty} \|w_i - v\| = d(v, W)\|u - v\| \ .$$

Dann ist (w_i) beschränkt. Da beschränkte Mengen in W kompakt sind, besitzt (w_i) einen Häufungspunkt $w \in W$. Dieser liegt in $\texttt{prox}(W, v)$. □

Lemma 2.2. $\texttt{prox}(W, v)$ *ist konvex.*

Proof. Seien $w_0, w_1 \in \texttt{prox}(W, v)$. Dann gilt für $\lambda \in [0,1]$ daß

$$\|\lambda w_0 + (1 - \lambda) w_1 - v\| \leq \lambda \|w_0 - v\| + (1 - \lambda)\|w_1 - v\| = d(v, W) \ .$$

$\square$

Definition 2.3. *$(V, \|.\|)$ heißt gleichmäßig konvex normiert, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, daß aus $x, y \in S(V)$, $\|x - y\| \geq \epsilon$ folgt: $\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta$.*

Aufgabe 2.3. *Sei E eine endliche Menge mit dem Zählmaß μ. Zeige, daß $L^1(E, \mu)$ und $L^\infty(E, \mu)$ nicht gleichmäßig konvex normiert sind. Zeige, daß $L^q(E, \mu)$ für $q \in (1, \infty)$ gleichmäßig konvex normiert ist.*

Satz 2.4. *Ist $(V, \|.\|)$ ein gleichmäßig konvex normierter Banachraum und $W \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann besteht $\mathtt{prox}(W, v)$ immer genau aus einem Element.*

Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Seien $w_0, w_1 \in \mathtt{prox}(W, v)$. Dann gilt $\|v - w_0\| = \|v - w_1\| = d(v, W)$. Wir schließen, daß $d(v, W) > \|\frac{1}{2}((v - w_0) + (v - w_1))\| = \|v - \frac{1}{2}(w_0 + w_1)\|$. Das kann aber nicht sein.

Nun zur Existenz. Wenn $d(v, W) = 0$, so ist $v \in W$ und damit $v \in \mathtt{prox}(W, v)$. Sei jetzt $d(v, W) > 0$. Sei (w_i) eine Folge in W mit $\|w_i - v\| \to d(v, W)$. Wir setzen $e_i := \frac{v - w_i}{d(v,W)}$. Wenn (e_i) eine Cauchyfolge ist, so auch (w_i) und $w_i \to w \in \mathtt{prox}(W, v)$. Ist jedoch (e_i) keine Cauchyfolge, so gibt es $\epsilon > 0$ und Teilfolgen (e_{n_k}), (e_{m_k}) mit $\|e_{n_k} - e_{m_k}\| \geq \epsilon$. Nun gilt $\|e_{m_k}\| \to 1$, $\|e_{n_k}\| \to 1$ und $\|\frac{1}{2}(e_{m_k} + e_{n_k})\| \to 1$. Dies ist jedoch wegen der gleichmäßig konvexen Normiertheit nicht möglich. $\square$

In diesem Beweis wurde nur ausgenutzt, daß W konvex und abgeschlossen ist.

2.3 Skalarprodukt und Norm - Hilberträume

Sei V ein komplexer Vektorraum und $< .,. >$ ein Skalarprodukt (antilinear im ersten Eintrag). Dann ist

$$\|v\| := \sqrt{< v, v >}$$

eine Norm auf V. Durch Polarisation kann das Skalarprodukt aus der Norm zurückgewonnen werden :

Aufgabe 2.4. *Zeige :*

$$< v, w >= \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - i\|v-iw\|^2) \ .$$

Definition 2.5. *Ein Prähilbertraum ist ein Paar* $(V, < ., . >)$*.*

Ein Prähilbertraum ist also inbesondere normiert.

In einem Prähilbertraum gilt die Cauchy-Schwazsche Ungleichung :

$$| < v, w > |^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$$

und die Parallelogrammgleichung

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \ .$$

Die Parallelogrammgleichung kann benutzt werden, um zu zeigen, daß ein normierter Raum kein Prähilbertraum ist.

Lemma 2.6. *Ein Prähilbertraum ist gleichmäßig konvex normiert.*

Proof. Seien x, y Einheitsvektoren. Dann gilt

$$\|\frac{1}{2}(x+y)\|^2 = 1 - \|x-y\|^2 \ .$$

□

Aufgabe 2.5. *Sei* W *ein von der Orthonormalbasis* $(w_0, \dots w_n)$ *aufgespannte Unterraum in* V*. Zeige, daß*

$$\mathtt{prox}(W, v) = \{\sum_{i=1}^{n} < w_i, v > w_i\}$$

gilt.

Aufgabe 2.6. *Sei* $W \subset V$ *ein linearer Teilraum. Zeigen Sie, daß für jedes* $w \in \mathtt{prox}(W, v)$ *die Relation* $< v - w, W >= 0$ *gilt.*

Definition 2.7. *Ein Hilbertraum ist ein Prähilbertraum, welcher als normierter Raum ein Banachraum ist.*

Alle endlichdimensionalen Prähilberträume sind Hilberträume. Ist (X, μ) ein Maßraum, so ist $L^2(X, \mu)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$< f, g > := \int_X \bar{f} g d\mu.$$

Aufgabe 2.7. *Zeige, daß $L^q(X, \mu)$ für $q \neq 2$ kein Hilbertraum ist.*

Aufgabe 2.8. *Zeige, daß $C_b(\mathbb{R})$ kein Hilbertraum ist.*

Aufgabe 2.9. *Sei $(V, < .,. >)$ ein Prähilbertraum. Dann ist die Vervollständigung $\bar{V}$ in natürlicher Weise ein Hilbertraum.*

Aufgabe 2.10. *Wir betrachten den Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit*

1. $< f, g >_{L^2(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} g d|.|$
2. $< f, g >_{W^1(\mathbb{R}^n)} :=< f, g >_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^n < \partial^i f, \partial^i g >_{L^2(\mathbb{R}^n)}$,
3. $< f, g >_1 := \sum_{i=1}^n < \partial^i f, \partial^i g >_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Zeigen Sie, daß alle diese Formeln Skalarprodukte definieren. Zeigen Sie weiter, daß die Vervollständigung von $(C_c^\infty(\mathbb{R}^n), < .,. >_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ genau den Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ liefert.

Definition 2.8. *Die Vervollständigung von*

$$(C_c^\infty(\mathbb{R}^n), < .,. >_{W^1(\mathbb{R}^n)})$$

ist der Sobolevraum $W^1(\mathbb{R}^n)$.

Wir bezeichen die Vervollständigung von $(C_c^\infty(\mathbb{R}^n), < .,. >_1)$ mit $U^1(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 2.11. *Zeigen Sie, daß es natürliche stetige Einbettungen $W^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ und $W^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow U^1(\mathbb{R}^n)$ gibt. Zeigen Sie weiter, daß es keine damit vertägliche Abbildung $U^1(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt.*

2.4 Duale Räume - orthogonale Komplemente - adjungierte Abbildungen

Für einen topologischen Vektorraum V sei V' der duale Raum mit der starken Topologie. Wir wissen schon, daß der duale Raume eines Banachraumes $(V, \|.\|_V)$ wieder ein

Banachraum $(V', \|.\|_{V'})$ mit der Norm

$$\|\phi\|_{V'} = \sup_{v\in V, \|v\|=1} |\phi(v)| \ .$$

Ist $M \subset V$ ein linearer Unterraum.

Definition 2.9. *Wir definieren das orthogonale Komplement von M durch*

$$M^\perp := \{\phi \in V' \mid \phi_{|M} \equiv 0\} \ .$$

Lemma 2.10. *$M^\perp$ ist abgeschlossen.*

Proof. Sei $m \in M$. Dann ist $h_m : V' \to \mathbb{C}$, $h_m(\phi) := \phi(m)$ eine stetige Funktion auf V'. Also ist $\{h_m = 0\}$ abgeschlossen. Damit ist aber auch $M^\perp = \cap_{m\in M}\{h_m = 0\}$ abgeschlossen. □

Sei nun $N \subset V'$ ein linearer Unterraum. Dann definieren wir

Definition 2.11.

$$N_\perp := \{v \in V \mid \phi(v) = 0 \quad \forall \phi \in N\} \ .$$

Ähnlich wie Lemma 2.10 zeigt man auch, daß $N_\perp$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 2.12. *Zeige die Relationen*

1. $M^\perp = \bar{M}^\perp$
2. $N_\perp = \bar{N}_\perp$
3. $M_0 \subset M_1$ *impliziert* $M_1^\perp \subset M_0^\perp$
4. $N_0 \subset N_1$ *impliziert* $(N_1)_\perp \subset (N_0)_\perp$
5. $M \subset (M^\perp)_\perp$.

Sei nun $(V, <.,.>)$ ein Prähilbertraum. Dann definieren wir eine stetige antilineare Abbildung $D : V \to V'$ durch

$$D(v)(w) := <v, w> \ .$$

Sie heißt Dualitätsabbildung. Die Dualitätsabbildung ist in der Tat sogar isometrisch:

Aufgabe 2.13. *Überzeugen Sie sich, daß* $\|D(v)\|_{V'} = \|v\|_V$ *gilt.*

Satz 2.12. *Wenn* V *ein Hilbertraum ist, dann ist die Dualitätsabbildung* $D : V \to V'$ *ist ein Antiisomorphismus.*

Proof. Wegen Aufgabe 2.13 reicht es aus, die Surjektivität von D nachzuweisen. Sei $0 \neq \phi \in V'$. Sei $N = \mathbb{C}\phi$. Dann ist $N_\perp \neq V$. Sei $v_0 \in V \setminus N_\perp$ und $v_1 := \mathtt{prox}(N_\perp, v_0)$. Dann ist $v_2 := v_0 - v_1 \neq 0$, $\phi(v_2) \neq 0$ und $< v_2, N_\perp >= 0$. Wir setzen

$$v := \frac{\phi(v_2)}{< v_2, v_2 >} v_2$$

und behaupten, daß $D(v) = \phi$ gilt. In der Tat, für $w \in V$ $w - \frac{\phi(w)}{\phi(v_2)} v_2 \in N_\perp$ und damit

$$\begin{aligned}
D(v)(w) &= < v, w > \\
&= \frac{\phi(v_2)}{< v_2, v_2 >} < v_2, w > \\
&= \frac{\phi(v_2)}{< v_2, v_2 >} < v_2, w - \frac{\phi(w)}{\phi(v_2)} v_2 + \frac{\phi(w)}{\phi(v_2)} v_2 > \\
&= \frac{\phi(v_2)}{< v_2, v_2 >} < v_2, w - \frac{\phi(w)}{\phi(v_2)} v_2 > + \frac{\phi(v_2)}{< v_2, v_2 >} < v_2, \frac{\phi(w)}{\phi(v_2)} v_2 > \\
&= \phi(w)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2.14. *Charakterisieren Sie durch notwendige und hinreichende Bedingungen diejenigen Abbildugen* $V \to V'$, *die Dualitätsabbildungen von Skalarprodukten entstehen.*

Mittels D können wir nun auf V' eine Hilbertraumstruktur durch

$$< \phi, \psi > := < D^{-1}(\psi), D^{-1}(\phi) >$$

erkären. Folglich ist der Dualraum eines Hilbertraumes in natürlicher Weise ein Hilbertraum.

Für jeden topologischen Vektorraum gibt es eine natürliche Abbildung $I_V : V \to (V')'$, welche durch $I_V(v)(\phi) := \phi(v)$ gegeben ist.

Aufgabe 2.15. *Seien* $D_V : V \to V'$ *und* $D_{V'} : V' \to (V')'$ *die Dualitätsabbildungen von* V *und* V'. *Zeigen Sie, daß* $D_{V'} \circ D_V = I_V$ *gilt.*

Sei $M \subset V$ ein linearer Unterraum.

Definition 2.13. *Wir definieren das orthogonale Komplement von M in V durch*

$$^{\perp}M := D^{-1}(M^{\perp}) \ .$$

Aufgabe 2.16. *Zeige die Relationen:*

1. *$^{\perp}M$ ist abgeschlossen,*
2. *$^{\perp}\bar{M} = {}^{\perp}M$,*
3. *$^{\perp}M \cap M = \{0\}$,*
4. *$M_0 \subset M_1$ impliziert $^{\perp}M_1 \subset {}^{\perp}M_0$,*
5. *$M \subset {}^{\perp}({}^{\perp}M)$.*

Aufgabe 2.17. *Sei $V = L^2(X, \mu)$ und $Y \subset X$. Wir setzen $M := \{\mathtt{supp}(f) \subset Y\}$. Bestimmen Sie $M^{\perp}$.*

Aufgabe 2.18. *Wir betrachten den Hilbertraum $L^2([0,1])$. Bestimmen Sie $M^{\perp}$ für*

1. *$M := \Delta(C^{\infty}([0,1]))$*
2. *$M := \Delta(P)$ für $P := \{f_{|[0,1]} \mid f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \ , f(x) = f(x+1) \forall x\}$,*

wobei $\Delta := -\frac{d^2}{dx^2}$ ist.

Lemma 2.14. *Es gilt $\bar{M} = {}^{\perp}({}^{\perp}M)$.*

Proof. Nach Aufgabe 2.16 reicht es aus, die Surjektivität der Inklusion $\bar{M} \subset {}^{\perp}({}^{\perp}M)$ zu zeigen. Möge ein $v_0 \in {}^{\perp}({}^{\perp}M) \setminus \bar{M}$ existieren. Dann setzen wir $v_1 := \mathtt{prox}(\bar{M}, v_0)$ und $v_2 := v_0 - v_1$. Es gilt $v_2 \neq 0$ und $v_2 \in {}^{\perp}M \cap {}^{\perp}({}^{\perp}M)$. Das ist jedoch unmöglich. □

Die analoge Aussage im Banachraumkontext wäre:

Satz 2.15. *Es gilt $\bar{M} = (M^{\perp})_{\perp}$.*

Proof. Es ist klar, daß $\bar{M} \subset (M^\perp)_\perp$. Wir nehmen an, es gäbe ein $v \in (M^\perp)_\perp \setminus \bar{M}$. Dann gibt es nach Hahn-Banach ein $\phi \in V'$ mit $\phi_{|\bar{M}} = 0$ und $\phi(v) = 1$. Also $\phi \in M^\perp$ und $v \notin (M^\perp)_\perp$. Dies widerspricht unserer Annahme. □

Wir haben hier die folgende Version des Satzes von Hahn-Banach angewendet :

Satz 2.16. *Sei V ein Banachraum, $M \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum und $v \in V \setminus M$. Dann gibt es ein $\phi \in V'$ mit $\phi_{|M} = 0$ und $\phi(v) = 1$.*

Seien V, W Banachräume. Dann haben wir den Banachraum der beschränkten linearen Abbildungen $B(V, W)$ mit der Norm

$$\|A\|_{B(V,W)} := \sup_{v \in V, \|v\|_V = 1} \|Av\|_W .$$

Definition 2.17. *Der zu $A \in B(V, W)$ adjungierte Operator $A' \in B(W', V')$ ist durch*

$$A'(w')(v) := w'(Av)$$

gegeben.

Aufgabe 2.19. *Zeigen Sie, daß $A \mapsto A'$ eine Isometrie $B(V, W) \to B(W', V')$ definiert.*

Seien nun V und W Hilberträume.

Definition 2.18. *Für $A \in B(V, W)$ definieren wir $A^* \in B(W, V)$ durch $A^* = D^{-1}A'D$.*

Aufgabe 2.20. *Zeigen Sie die Relationen*

1. $* : B(V, W) \to B(W, V)$ *ist eine antilineare Isometrie,*
2. $(A^*)^* = A$,
3. $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$
4. $< Av, w >_W = < v, A^*w >_V$
5. $\ker A^* = {}^\perp \mathtt{im} A$
6. $\overline{\mathtt{im} A} = {}^\perp \ker A^*$

Aufgabe 2.21. *Wir betrachten das Diagram*

$$\begin{array}{ccc} W^1(\mathbb{R}^n)' & \stackrel{i^*}{\leftarrow} & L^2(\mathbb{R}^n)' \\ D_{W^1(\mathbb{R}^n)} \uparrow & & \uparrow D_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ W^1(\mathbb{R}^n) & \stackrel{i}{\rightarrow} & L^2(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad .$$

Dieses Diagramm kommutiert nicht. Zeigen Sie, daß vielmehr für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$D_{W^1(\mathbb{R}^n)}(f) = (i^* \circ D_{L^2(\mathbb{R}^n)} \circ i \circ (1 + \Delta))(f)$$

2.5 Komplementäre Räume - Projektoren

Sind V, W topologische Vectorräume, dann ist $V \oplus W$ ein topologischer Vektorraum. Die Topologie wird durch die mengentheoretische Identifikation $V \oplus W \cong V \times W$ induziert.

Aufgabe 2.22. *Seien die Topologien von V und W durch Systeme von Halbnormen $(p_i)_{i \in I}$ und $(q_j)_{j \in J}$ induziert. Geben Sie ein die Topologie von $V \oplus W$ induzierendes System von Halnormen an. Zeigen Sie, daß die Summe von zwei Frechéträumen wieder ein Frechétraum ist.*

Die Summe $V \oplus W$ von zwei Banachräumen ist wieder ein Banachraum mit der Norm

$$\|v \oplus w\| := \sqrt{\|v\|^2 + \|w\|^2}$$

(man könnte hier auch $\|v \oplus w\| := \max(\|v\|, \|w\|)$ oder $\|v \oplus w\| := \|v\| + \|w\|$ nehmen).

Die Summe von zwei Hilberträumen ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$< v \oplus w, v' \oplus w' > = < v, v' > + < w, w' > \quad .$$

Definition 2.19. *Sei V ein topologischer Vektorraum und $M \subset V$ ein linearer Unterraum. Ein Komplement von M ist ein linearer Unterraum $N \subset V$ derart, daß $V = N \oplus M$ als topologischer Vektorraum.*

Definition 2.20. *Eine Projektion auf M ist eine stetige lineare Abbildung $P : V \to V$ derart, daß $P \circ P = P$, $P(V) \subset M$ und $P_{|M} = \mathrm{id}_M$ gilt.*

Lemma 2.21. *M besitzt genau dann ein Komplement, wenn es eine Projektion auf M gibt.*

Proof. Sei N ein Komplement. Dann ist $V = M \oplus N$. Eine Projektion ist dann (mengentheoretisch) durch

$$P : V \cong M \oplus N \cong M \times N \stackrel{\mathrm{pr}_M}{\to} M \hookrightarrow V$$

gegeben.

Sei P eine Projektion auf M. Dann ist $N := \ker(P)$ ein Komplement. In der Tat gilt $V = M \oplus N$ als Vektorraum. Die Abbildung $V \ni v \mapsto Pv \oplus (1 - P)v \in M \oplus N$ ist stetig. Damit ist $N \oplus M \cong V$ als topologischer Vektorraum. □

Sei V ein topologischer Vektorraum mit der Topologie $\mathcal{T}(p, p \in \mathcal{P})$. Sei $M \subset V$ ein linearer Unterraum. Wir bilden den Quotienten M/V. Es gibt mehrere Möglichkeiten, diesen Quotienten mit einer Topologie zu versehen.

1. Eine Möglichkeit ist, die universelle Eigenschaft des Quotienten zu benutzen. Hierbei bekommt V/M die kleinste Topologie derart, daß jede lineare Abbildung $V/M \to W$ in einen topologischen Vektorraum (mit durch Halbnormen gegebener Topologie), für welche der Lift $V \to W$ stetig ist, stetig wird.

   Aufgabe 2.23. *Zeige, daß die Projektion $V \to V/M$ stetig ist.*

2. Wir können Halbnormen $\bar{p}(v + M) = \inf_{m \in M} p(v + m)$, $p \in \mathcal{P}$, definieren und die Topologie $\mathcal{T}(\bar{p}, p \in \mathcal{P})$ festlegen. In diesem Fall ist die Projektion $V \to V/M$ offensichtlich stetig.

   Aufgabe 2.24. *Zeige, daß die unter 2. beschriebene Topologie größer als die in 1. beschriebene ist.*

Aufgabe 2.25. *Ist V ein Frechét (bzw. Banachraum) und M abgeschlossen, dann ist V/M auch ein Frechét (bzw. Banachraum).*

Im Banachraumfall ist V/M mit der Norm $\|v + M\| := d(v, M)$ der Banachraumquotient von V nach M.

Satz 2.22. *Wenn $M \subset V$ ein Komplement N besitzt, dann ist der algebraische Isomorphismus $N \cong V/M$ ein Hömöomorphismus (in beiden oben beschriebenen Topologien, die dann offensichtlich übereinstimmen)*

Proof. Sei $P : V \to M$ die Projektion zu $V = M \oplus N$. Wir betrachten zuerst die universelle Topologie. Wir wissen, daß der Lift von $V/M \to N$ durch $(1 - P) : V \to N$ gegeben ist. Die letztere Abbildung ist stetig und damit auch $V/M \to N$. Auf der anderen Seite ist $N \to V/M$ als Einschränkung von $V \to V/M$ stetig.

Wir betrachten nun die zweite Topologie. Klar ist wieder, daß $N \to V/M$ als Einschränkung von $V \to V/M$ stetig ist. Da die zweite Topologie größer oder gleich der universellen ist, muß auch $V/M \to N$ stetig sein. □

Die Existenz von Komplementen ist im allgemeinen eine schwierige Frage. Wenn $\{0\} \subset V$ abgeschlossen ist, dann ist sicherlich die Abgeschlossenheit von M eine notwendige Bedingung aber keineswegs hinreichende Bedingung.

Hier ist ein Beispiel eines abgeschlossenen Unterraumes, welcher kein Komplement zuläßt. Sei $V = L^\infty(\mathbb{N})$ der Raum der beschränkten Folgen und $M = C_0(\mathbb{N})$ der abgeschlossene Unterraum der Nullfolgen.

Lemma 2.23. *M besitzt kein Komplement in V.*

Proof. Wir nehmen an, daß $V = M \oplus N$. Dann wäre V/M isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum. Die Funktionale δ_n, $n \in \mathbb{N}$ trennen die Punkte von V. Deshalb hat auch N, also V/M eine abzählbare Menge von Funktionalen, die die Punkte trennen. Wir führen dies zu Widerspruch. Sei $l_n \in V/M'$ eine solche Folge. Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine überabzählbare Teilmenge unendlicher Teilmenge mit der Eigenschaft, daß aus $A, B \in \mathcal{R}$, $A \neq B$, folgt, daß $A \cap B$ endlich ist. Wir nehmen erst einmal die Existenz von $\mathcal{R}$ an. Wir betrachten die Menge $U := \{\chi_A \mid A \in \mathcal{R}\}$.

Wir behaupten, $\{A \in \mathcal{R} \mid l_n(\chi_A) \neq 0\}$ für jedes n abzählbar ist. Dazu reicht es aus, zu zeigen, daß $\{A \in \mathcal{R} \mid l_n(\chi_A) \geq k^{-1}\}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ endlich ist. Wir wählen $\alpha_A \in S^1$ derart, daß $l_n(\alpha_A \chi_A) = |l_n(\chi_A)|$. Seien $A_1, \ldots A_m \in \{A \in \mathcal{R} \mid l_n(\chi_A) \not\geq k^{-1}\}$ paarweise verschieden. Dann gilt

$$\| \sum_{i=1}^m \alpha_{A_i} \chi_{A_i} \| \leq 1 \ .$$

Folglich

$$\epsilon m \leq \sum_{i=1}^m |l_n(\chi_{A_i})| \leq \|l_n\| \ .$$

Damit ist $m \leq \|l_n\|/\epsilon$.

Wir schließen, daß

$$\{A \in \mathcal{R} \mid l_n(\chi_A) \neq 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

abzählbar ist. Damit muß aber ein $A \in \mathcal{R}$ existieren, für welches $l_n(\chi_A) = 0$ für alle n gilt. Also ist $\chi_A = 0$ und das ist der Widerspruch.

Wir zeigen jetzt die Existenz von $\mathcal{R}$. Wir wählen eine Abzählung $j : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Sei $I := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Für jedes $x \in I$ sei $(q_n(x))$ eine gegen x konvergierende Folge rationaler Zahlen. Wir setzen

$$\mathcal{R} := \{\{j^{-1}(\{q_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\})\} \mid x \in I\} \ .$$

□

Lemma 2.24. *Sei M ein Banachraum. Wenn* $\dim(M) < \infty$ *so besitzt M ein Komplement.*

Proof. Sei $(e_i)_{i=1}^n$ eine Basis von M. Wir konstruieren Funktionale $\phi_i \in V'$ mit $\phi_i(e_j) = 0$ für $j < i$ und $\phi_i(e_i) = 1$. Sei $M_m = \mathtt{Span}\{e_i \mid i < m\}$ Dann ist $e_m \notin M_m$. Wir finden mittels Hahn-Banach $\phi_m \in V'$ mit $\phi_m(e_m) = 1$. Sei $B \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ die zu $(\phi_i(e_j))$ inverse Matrix. Wir setzen

$$P(v) := \sum_{i,j=1}^{n} B_{i,j}\phi_j(v)e_i \ .$$

Dann ist P eine Projektion auf M. □

Aufgabe 2.26. *Ist M abgeschlossen und hat endliche Kordimension, so besitzt M ein Komplement.*

Beachte, daß es nicht abgeschlossene Räume endlicher Kodimension gibt. Sei $V = C([-1,1])$. Wir betrachten die lineare Abbildung $\phi_1 : f \mapsto f^{(1)}(0)$ auf dem Unterraum $C^1([-1,1])$. Wir können ϕ_1 auf zu ϕ ganz V ausdehnen (durch Wahl eines algebraischen Komplementes zu $C^1([-1,1])$). Sei $M = \ker(\phi)$.

Aufgabe 2.27. *Zeige, daß* $\mathrm{codim}(M) = 1$ *gilt, M aber kein Komplement besitzt.*

Im Kontext von Hilberträumen hat die Frage nach Komplementen eine einfache Antwort.

Lemma 2.25. *Ist V ein Hilbertraum, so hat jeder abgeschlossene Unterraum M ein Komplement N. In der Tat kann man $N = ^{\perp}$ wählen, wobei in diesem Fall $V = M \oplus ^{\perp} M$ als Hilberträume gilt.*

Proof. Wir definieren $P : V \to M$ durch $P(v) := \mathtt{prox}(M, v)$. Es ist klar, daß $P(V) = M$, $P_{|M} = \mathrm{id}$ und $P \circ P = P$ gilt. Wir zeigen

1. P ist linear
2. P ist stetig

Wir zeigen zuerst, daß $z = P(v)$ genau dann, wenn $z \in M$ und $v - z \perp M$ gilt. In der Tat gilt $z - P(v) = z - v + v - P(v) \perp M$. Da aber $z - P(v) \in M$ muß $z = P(v)$ gelten.

Nun ist $P(v) + P(w) \in M$ und $v + w - P(v) - P(w) = (v - P(v) + (w - P(w)) \perp M$. Also gilt $P(v + w)P(v) + P(w)$. Analog sieht man $P(\lambda v) = \lambda P(v)$ ein. Damit ist $P(v)$ linear.

Es gilt $\|P(v)\|^2 + \|v - P(v)\|^2 = \|v\|^2$. Also $\|P(v)\| \leq \|v\|$. Das ist die Stetigkeit von P. □

Der Satz von Lindenstrauß-Tzafriri besagt, daß ein Banachraum, in welchem jeder abgeschlossene Unterraum ein Komplement besitzt, topologisch isomorph zu einem Hilbertraum ist.

2.6 Orthonormalbasen

Eine Basis in einem Vektorraum ist eine maximale Teilmenge linear unabhängiger Vektoren. Sei $S \subset V$ eine Basis. Dann ist jedes v als endliche Linearkombination aus Elementen aus S eindeutig darstellbar. Jeder Vektorraum besitzt Basen.

Eine Basis von V kann auch als eine minimale Teilmenge $S \subset V$ mit der Eigenschaft, daß $\mathtt{Span}(S) = V$ ist, charakterisiert werden.

Sei V nun ein topologischer Vektorraum.

Definition 2.26. *Eine topologische Basis ist eine minimale Teilmenge $S \subset V$ mit $\overline{\mathtt{Span}(S)} = V$.*

Im allgemeinen ist die Frage nach Existenz einer topologischen Basis kompliziert.

Aufgabe 2.28. *Untersuche, ob sich der übliche Existenzbeweis für algebraische Basen auf topologische Basen übertragen läßt (Konstruktion minimaler S mit $\overline{\mathtt{Span}(S)} = V$ mit Hilfe des Zornschen Lemmas).*

Für Hilberträume ist die Situation viel einfacher. Hilberträume besitzen orthonormale Basen.

Definition 2.27. *Eine Orthonomalbasis eines Hilbertraumes ist eine topologische Basis $S \subset V$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß für s, s' entweder $< s, s' >= 0$ oder $s = s'$ und $\|s\| = 1$ gilt.*

Definition 2.28. *Eine orthonormale Teilmenge $S \subset V$ ist eine Teilmenge, welche gleichzeitig eine orthonormale Basis von $\overline{\mathtt{Span}(S)}$ ist.*

Lemma 2.29. *Ein Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis. Jede orthonormale Teilmenge ist Teil ist Teilmenge einer Orthonormalbasis.*

Proof. Sei S_0 eine orthonormale Teilmenge. Die Menge der orthonormalen Teilmengen, die S_0 enthalten, ist halbgeordnet durch Inklusion. Wir zeigen, daß es maximale orthonormale Teilmengen gibt. Ist nämlich (S_α) eine Kette, dann ist $\cup_\alpha S_\alpha$ eine orthonormale Teilmenge, welche S_0 enthält und ein Supremum der Kette. Eine maximale orthonormale Teilmenge $S \subset V$ ist jedoch eine orthonormale Basis, welche S_0 enthält. Andernfalls gäbe es $v \in {}^\perp\overline{\mathtt{Span}(S)}$ mit $\|v\| = 1$, und $S \cup \{v\}$ wäre eine größere S_0 enthaltende orthonormale Teilmenge. □

Lemma 2.30. *Ist $(V, < .,. >)$ ein separabler Hilbertraum, so ist jede Orthonormalbasis V abzählbar.*

Proof. Sei S eine Orthonormalbasis und $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein 1/3-Netz. Dann wählen wir für jedes $s \in S$ ein $i(s) \in \mathbb{N}$ mit $\|s - e_i\| < 1/3$. Wir erhalten somit eine Inklusion $i : S \hookrightarrow \mathbb{N}$. □

Wir betrachten jetzt einige Beispiele.

1. Sei $V = L^2([0,1], |.|)$. Wir setzen $f_n(x) := \exp(2\pi i n x)$. Dann ist $S = \{f_n | n \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis. Sei $f \in L^2([0,1], |.|)$ gegeben. Dann kann man f durch glatte periodische Funktionen in $L^2([0,1], |.|)$ approximieren. Diese lassen sogar gleichmäßig durch Fourierreihen approximieren. Dies zeigt, daß $\overline{\mathtt{Span}(S)} = V$.

2. Sei $p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ mit $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((t^2-1)^n)$ (Legendre-Polynome).

   Aufgabe 2.29. *Zeigen Sie, daß* $\{p_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ *eine Orthonormalbasis von* $L^2([-1,1], |.|)$ *ist. Zeigen Sie weiter, daß diese Basis durch Orthonormalisieren der Folge* $1, x, x^2, \ldots$ *entsteht.*

3. Sei $h_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)$ mit $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ (Hermite-Polynome).

   Aufgabe 2.30. *Zeigen Sie, daß* $\{h_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *eine Orthonormalbasis von* $L^2(\mathbb{R}, |.|)$ *ist. Zeigen Sie weiter, daß sie durch Orthonormalisieren der Folge* $(x^n e^{-x^2})$ *entsteht.*

4. Hier ist ein nichtseparabler Hilbertraum. Sei $V := L^2(\mathbb{R}, \mu)$, wobei μ das Zählmaß ist. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $s_x \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ durch $s_x(x) := 1$ und $s_x(y) = 0$ falls $x \neq y$ gegeben. Dann ist $S := \{s_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ eine Orthonormalbasis.

   Aufgabe 2.31. *Zeige diese Behauptung.*

5. Eine glatte Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist ein trigonometrisches Polynom falls es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ gibt, so daß $f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_n \exp(i\lambda_n x)$. Die Abschluß in $C_b(\mathbb{R})$ der trigonometrischen Polynome ist der Raum $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ der fastperiodischen Funktionen. Wir definieren auf $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

   $$< f, g >_{\mathcal{F}} := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \bar{f}(x) g(x) dx \ .$$

   Aufgabe 2.32. *Zeigen Sie, daß* $< .,. >_{\mathcal{F}}$ *wohldefiniert und* $(\mathcal{F}, < .,. >)$ *ein Prähilbertraum ist. Zeigen Sie weiter, daß* $\bar{\mathcal{F}}$ *nicht separabel ist. Zeigen Sie, daß* $\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $f_\lambda(x) := \exp(i\lambda x)$ *eine Orthonormalbasis ist.*

Satz 2.31. *Sei* $S \subset V$ *eine orthonormale Teilmenge. Für jedes* $v \in V$ *gilt*

$$\sum_{s \in S} | < s, v > |^2 \leq \|v\|^2 \ . \tag{1}$$

Insbesondere ist

$$\sharp\{s \in S \mid \; < s, v > \neq 0\} < \infty \; . \tag{2}$$

Ist S eine Orthonomalbasis, so gilt weiter, daß

$$v \;=\; \sum_{s\in S} < s, v > s \tag{3}$$

$$\|v\|^2 \;=\; \sum_{s\in S} | < s, v > |^2 \; . \tag{4}$$

Proof. Sei $L \subset S$ eine endliche Teilmenge. Dann rechnen wir

$$\begin{aligned} 0 \;&\geq\; \|v - \sum_{s\in L} < s, v > s\|^2 \\ &= \; \|v\|^2 - \sum_{s\in L} \overline{< s, v >} < s, v > - \sum_{s\in L} < s, v >< v, s > + \sum_{s,t\in L} \overline{< s, v >} < t, v >< s, t > \\ &= \; \|v\|^2 - \sum_{s\in L} | < s, v > |^2 . \end{aligned}$$

Daraus folgt (1) und (2).

Sei nun S eine Orthonormalbasis und $S(v) := \{s \in S \mid \; < s, v > \neq 0\}$. Dann ist $V = \overline{\mathtt{Span}(S(v))} \oplus \overline{\mathtt{Span}(S \setminus S(v))}$. Offensichtlich gilt $v \in \overline{\mathtt{Span}(S(v))}$. Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $S(v)$ und $V_n := \mathtt{Span}(s_j \mid j \leq n)$. Wir definieren $v_n := \mathtt{prox}(V_n, v)$. Dann gilt

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} < s_j, v > s_j \; .$$

Die Folge (v_n) ist eine Cauchyfolge. In der Tat gilt für $m \geq n$, daß $\|v_n - v_m\|^2 = \sum_{j=n}^{m} | < s_j, v > |^2$. Wir benutzen nun die Tatsache, daß $\sum_{j=1}^{\infty} | < s_j, v > |^2 < \infty$. Sei $w := \lim_{n\to\infty} v_n$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $v - v_n \perp V_m$ für $n \geq m$. Wir schließen, daß $v - w \perp \overline{\mathtt{Span}(S(v))}$. Da außerdem $v - w \in \overline{\mathtt{Span}(S(v))}$ gilt, haben wir wir $v = w$. Dies zeigt (3). Aus $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2 = \|v\|^2$ und $\|v_n\| = \sum_{j=1}^{n} | < s_j, v > |^2$ schließen wir (4). □

Lemma 2.32. *Seien V und W Hilberträume. Seien S und T jeweils Orthonormalbasen. Wenn S und T gleichmächtig sind, so ist V zu W isomorph.*

Proof. Wenn S und T gleichmächtig sind, so gibt es eine Bijektion $b : S \to T$. Wir definieren einen Abbildung $U : V \to W$ durch

$$U(v) := \sum_{s\in S} < s, v > b(s) \; .$$

Offensichtlich gilt $\|U(v)\| = \|v\|$. Die inverse Abbildung zu U ist durch

$$w \mapsto \sum_{s \in S} < b(s), w > s$$

gegeben. $\square$

Wir bemerken hier, daß auch die Umkehrung dieses Lemmas gilt. Dazu zeigt man, daß zwei Orthonormalbasen S, T von V immer gleichmächtig sind. Die Idee ist die folgende. Für jedes $t \in T$ hat man die abzählbare Menge $S(t)$. Es gilt $\cup_{t \in T} S(t) = S$. Damit konstruiert man eine Surjektion $T \times \mathbb{N} \to S$. Umgekehrt hat man auch eine Surjektion $S \times \mathbb{N} \to T$. Daraus schließt man die Gleichmächtigkeit von S und T.

2.7 Der Dualraum von $C(K)$

Sei K ein kompakter metrisierbarer Raum. Sei $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra. Ein Borelmaß μ ist ein σ-additives Maß auf $\mathcal{B}$. Es ist regulär, falls für jedes $A \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup_{K \subset A} \mu(K) \\ \mu(A) &= \inf_{A \subset U} \mu(U) \end{aligned}$$

wobei K kompakte und U offene Menge bezeichnet.

Definition 2.33. *Ein reguläres komplexes Borelmaß ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, welche eine Darstellung $\mu = \sum_{\alpha=0}^{3} i^\alpha \mu_\alpha$ für reguläre endliche Borelmaße μ_α hat.*

Wir definieren für $f \in \mathcal{L}^\infty(K, \mathcal{B})$ das Integral

$$\int_K f d\mu = \sum_{\alpha=0}^{3} i^\alpha \int_K f d\mu_\alpha \ .$$

Aufgabe 2.33. *Zeige, daß diese Definition unabhängig von der Darstellung von μ als Linearkombination von positiven Maßen ist.*

Sei jetzt μ ein reguläres komplexes Borelmaß.

Definition 2.34. *Die Variation von μ auf $A \in \mathcal{B}$ sei durch*

$$\mathtt{var}(\mu)(A) := \sup \sum_i |\mu(A_i)|$$

gegeben, wobei das Supremum über alle Partitionen von A durch Elemente von $\mathcal{B}$ genommen wird.

Sei $M(K)$ der komplexe Vektorraum der regulären komplexen Borelmaße.

Lemma 2.35. *Die Abbildung $\mu \mapsto \mathtt{var}(\mu)(K)$ ist eine Norm auf $M(K)$.*

Proof. Offensichtlich folgt aus $\mathtt{var}(\mu)(K) = 0$ daß $\mu = 0$. Weiterhin gilt

$$\mathtt{var}(\lambda\mu)(K) = |\lambda|\mathtt{var}(\mu)(K)$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$. Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
\mathtt{var}(\mu+\nu)(K) &= \sup \sum_i |(\mu+\nu)(A_i)| \\
&\le \sup \sum_i (|\mu(A_i)| + |\nu(A_i)|) \\
&\le \sup \sum_i |\mu(A_i)| + \sup \sum_i |\nu(A_i)| \\
&\le \mathtt{var}(\mu)(K) + \mathtt{var}(\nu)(K)
\end{aligned}$$

Lemma 2.36. *Für $f \in \mathcal{L}^\infty(K, \mathcal{B})$ gilt*

$$|\int_K f d\mu| \le \operatorname{ess\,sup}_K(f)\mathtt{var}(\mu)(K)\ .$$

Proof. Ist f eine einfache Funktion, so gilt diese Aussage sicherlich. Der allgemeine Fall folgt aus dem Fakt, daß man jede beschränkte meßbare Funktion gleichmäßig durch einfache Funktionen approximieren kann. □

Folgerung 2.37. *Ein reguläres komplexes Borelmaß μ definiert ein stetiges Funktional $\phi_\mu \in C(K)'$ durch $\phi_\mu(f) = \int_K f d\mu$. Es gilt*

$$\|\phi_\mu\| \le \mathtt{var}(\mu)(A)\ .$$

Wir nutzen nun die Regularität von μ aus, um folgende Behauptung zu zeigen.

Lemma 2.38.

$$\|\phi_\mu\| = \mathtt{var}(\mu)(K)\ .$$

Proof. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wählen eine endliche Partition (A_i) von K derart, daß

$$\mathtt{var}(\mu)(K) - \epsilon/2 > \sum_i |\mu(A_i)|\ .$$

Sei N die Anzahl der Elemente der Partition. Wir wählen Zahlen $\alpha_i \in S^1 \subset \mathbb{C}$ derart, daß $|\mu(A_i)| = \alpha_i \mu(A_i)$ gilt.

Sei $\mu = \sum_{\alpha=0}^{3} i^\alpha \mu_\alpha$ eine Darstellung durch positive reguläre endliche Borelmaße. Wir wählen nun kompakte Mengen $K_i \subset A_i$ und Teilmengen $A_i \subset U_i$ derart, daß $\mu_\alpha(U_i \setminus K_i) \leq \frac{\epsilon}{8N}$ gilt. Wir wählen (K ist metrisierbar) $f_i \in C(K)$ derart, daß $f_{i|K_i} \equiv 1$ und $f_{i|K \setminus U_i \cup \bigcup_{j \neq i} W_j} = 0$. Sei $h := \sum_i f_i \vee 1$ und

$$f := h^{-1} \sum_i \alpha_i f_i \ .$$

Es gilt für alle $x \in K$

$$|f(x)| \leq \frac{\sum_i f_i(x)}{h(x)} \leq 1 \ .$$

Wir schließen, daß

$$\begin{aligned} |\int_K f d\mu| &\geq |\sum_i \alpha_i \mu(A_i)| - \sum_i \int_{U_i \setminus K_i} |f| d\mu \\ &\geq \mathtt{var}(\mu)(K) - \epsilon/2 - \epsilon/2 \\ &\geq \mathtt{var}(\mu)(K) - \epsilon \ . \end{aligned}$$

Also gilt $\|\phi_\mu)\| \geq \mathtt{var}(\mu)(K) - \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$. □

Sei $\bar{M}(K)$ der Banachraum, welcher durch Vervollständigung von $M(K)$ bezüglich der Norm $\mathtt{var}(\dots)(K)$ entsteht. Wie wir gesehen haben, gibt es eine isometrische Einbettung

$$\bar{\phi} : \bar{M}(K) \hookrightarrow C(K)' \ ,$$

welche durch Fortsetung der Abbildung $\mu \mapsto \phi_\mu$ entsteht. Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz 2.39 (Darstellungssatz von Riesz). *Jedes Funktional in $C(K)'$ ist von der Form ϕ_μ für ein $\mu \in M(K)$.*

Es gilt also $\bar{M}(K) = M(K)$ und $\bar{\phi} = \phi$.

Folgerung 2.40. *Der Raum $M(K)$ ist mit $\mathtt{var}(\dots)(K)$ ein Banachraum und vermittels ϕ isometrisch zu $C(K)'$.*

Sei $C(K, \mathbb{R}) \subset C(K)$ der Unterraum der reell-wertigen Funktionen. Er ist ein reeller Banachraum. Auf $C(K, \mathbb{R})$ haben wir die Halbordnung $f \geq g$, falls $f(x) - g(x) \geq 0$ für alle $x \in K$.

Definition 2.41. *Ein Funktional $\phi \in C(K, \mathbb{R})$ heißt nicht-negativ, falls $f \geq 0$ die Relation $\phi(f) \geq 0$ impliziert.*

Ist μ ein Borelmaß, so ist ϕ_μ (auf $C(K, \mathbb{R})$) ein nicht-negatives Funktional. Um den Beweis des Satzes 2.39 zu beenden, wollen wir folgenden Satz verwenden.

Satz 2.42. *Ist ϕ ein nicht-negatives Funktional auf $C(\mathbb{R}, K)$, so gibt es ein endliches reguläres Borelmaß μ derart, daß $\phi_\mu = \phi$.*

Wir starten nun mit einem Funktional $\Phi \in C(K)'$. Sei $\Phi_\mathbb{R}$ die Einschränkung auf $C(K, \mathbb{R})$ und $\phi := \mathtt{Re}(\Phi_\mathbb{R})$ und $\psi := \mathtt{Im}(\Phi_\mathbb{R})$.

Lemma 2.43. *Ist $\phi \in C(K, \mathbb{R})$, so hat ϕ eine eindeutige Zerlegung $\phi = \phi_+ - \phi_-$ in nicht-negative Funktionale.*

Proof. For $f \geq 0$ definieren wir

$$\phi_+(f) := \sup\{\phi(h) \mid 0 \leq h \leq f\} .$$

Es gilt $|\phi(h)| \leq \|\phi\|\|h\| \leq \|\phi\|\|f\|$. Also ist $\phi_+(f) < \infty$. Weiter gilt für $\lambda > 0$ daß $\phi_+(\lambda f) = \lambda \phi_+(f)$. Ist $f, g \in C(K, \mathbb{R})$ und $f, g \geq 0$ und $0 \leq h \leq f + g$, so gilt $h = h_1 + h_2$ mit $0 \leq h_1 \leq f$ und $0 \leq h_2 \leq g$. In der Tat können wir $h_1 := h \wedge f$ setzen. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
\phi_+(f+g) &= \sup\{\phi(h) \mid 0 \leq h \leq f + g\} \\
&= \sup\{\phi(h_1 + h_2) \mid 0 \leq h_1 \leq f \wedge 0 \leq h_2 \leq g\} \\
&= \sup\{\phi(h) \mid 0 \leq h \leq f\} + \sup\{\phi(h) \mid 0 \leq h \leq g\} \\
&= \phi_+(f) + \phi_+(g)
\end{aligned}$$

Für $f \in C(K, \mathbb{R})$ sei nun $f_+ := f \vee 0$ und $f_- = f \wedge 0$. Wir definieren das lineare Funktional

$$\phi_+(f) := \phi_+(f_+) - \phi_+(f_-) .$$

Offensichtlich ist ϕ_+ nicht-negativ. Weiterhin ist $\phi_- := \phi_+ - \phi$ nicht-negativ und es gilt $\phi = \phi_+ - \phi_-$. Damit haben wir eine Zerlegung wie gesucht gefunden.

Aufgabe 2.34. *Zeige die Eindeutigkeit dieser Zerlegung.*

$\square$

Nach Satz 2.42 finden wir also reguläre Borelmaße μ_α, $\alpha = 0, \ldots, 3$ derart, daß

$$\phi_+ = \phi_{\mu_0},\ \phi_- = \phi_{\mu_2},\ \psi_+ = \phi_{\mu_1},\ \psi_- = \phi_{\mu_3}\ .$$

Dann gilt

$$\Phi_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha=0}^{3} i^\alpha \phi_\mu\ .$$

Setzen wir $\mu = \sum_{\alpha=0}^{3} i^\alpha \mu_\alpha$, so gilt

$$\Phi = \phi_\mu\ .$$

$\square$

Wir beweisen nun den Satz 2.42. Sei $\phi \in C(K, \mathbb{R})$ ein nicht-negatives Funktional. Wir beginnen mit der Konstruktion von μ. Für offene Teilmengen $U \subset K$ setzen wir

$$\mu(U) := \sup\{\phi(f) \mid f \leq \chi_U\}\ .$$

Für beliebige Teilmenge $A \subset K$ setzen wir

$$\mu(A) := \inf\{\mu(U) \mid A \subset U,\ U \text{ offen}\}\ .$$

Wir betrachten die folgende Teilmenge $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(K)$

$$\mathcal{R} := \{A \in \mathcal{P}(K) \mid \mu(A) = \sup\{\mu(W) \mid W \subset A,\ W \text{ kompakt}\}\}\ .$$

Wir zeigen:

1. $\mathcal{R}$ ist eine σ-Algebra
2. μ ist ein Maß auf $\mathcal{R}$
3. $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$
4. $\phi_\mu = \phi$
5. μ ist regulär

Lemma 2.44. *μ ist ein äußeres Maß.*

Proof. Wir müssen zeigen, daß μ σ-subadditiv ist. Seien $U, V \subset K$ offen. Sei $g \in C(K, \mathbb{R})$ mit $0 \le g \le \chi_{U+V}$. Wir wählen eine Zerlegung der Eins $\{h_1, h_2, h_3\}$ zu $\{U, V, K \setminus \mathtt{supp}(g)\}$. Dann gilt $g = gh_1 + gh_2$ und damit $\phi(g) = \phi(gh_1) + \phi(gh_2)$. Wir schließen, daß

$$\mu(U \cup V) \le \mu(U) + \mu(V) \ .$$

Sei jetzt $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Teilmengen von K. Wir wählen $\epsilon > 0$ und offene $U_i \subset K$ so daß

$$A_i \subset U_i \ , \quad \mu(U_i) < \mu(A_i) + 2^{-i}\epsilon \ .$$

Wir setzen $U := \cup_i U_i$ und wählen $f \in C(K, \mathbb{R})$ mit $0 \le f \le \chi_U$. Da $\mathtt{supp}(f)$ kompakt ist, gilt $\mathtt{supp}(f) \subset \cup_{i=1}^n U_i$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\phi(f) \le \mu(\bigcup_{i=1}^n U_i) \le \sum_{i=1}^n \mu(U_i) \le \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) + \epsilon \ .$$

□

Lemma 2.45. *Ist $W \subset K$ kompakt, so gilt $W \subset \mathcal{R}$ und*

$$\mu(W) = \inf\{\phi(f) \mid \chi_W \le f\} \ .$$

Proof. Sei $0 \le \chi_W \le f$. Dann gilt $K \subset \{f > \alpha\}$ und $\alpha g \le f$ falls nur $g \le \chi_{\{f>\alpha\}}$. Folglich gilt

$$\mu(W) \le \mu(\{f > \alpha\}) = \sup\{\phi(g) \mid g \le \chi_{\{f>\alpha\}}\} \le \alpha^{-1}\phi(f) \ .$$

Also

$$\mu(W) \le \phi(f) \ .$$

Auf der anderen Seite gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein offenes V mit $W \subset V$ und $\mu(V) \le \mu(W) + \epsilon$ und ein f mit $0 \le \chi_W \le f \le \chi_V$. Also $\phi(f) \le \mu(W) + \epsilon$. Daraus folgt $\mu(W) = \inf\{\phi(f) \mid 0 \le \chi_W \le f\}$. □

Lemma 2.46. *Jede offene Teilemenge U von K gehört zu $\mathcal{R}$.*

Proof. Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $0 \le f \le \chi_U$ derart, daß $\phi(f) + \epsilon \ge \mu(U)$. Für jede offene Teilmenge V mit $\mathtt{supp}(f) \subset V$ gilt $0 \le f \le \chi_V$. Also gilt $\phi(f) \le \mu(V)$

und damit $\mu(\mathtt{supp}f) \geq \phi(f)$. Wir schließen, daß $\mu(\mathtt{supp}f) + \epsilon \geq \mu(U)$. Daraus folgt $\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid W \subset U \text{ kompakt}\}$. □

Lemma 2.47. *Sei $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ eine paarweise disjunkte Familie von Teilmengen aus $\mathcal{R}$. Dann gilt $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$ und*

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \ .$$

Proof. Seien W_1, W_2 disjunkte kompakte Teilmenge. Wir zeigen zuerst, daß

$$\mu(W_1 \cup W_2) = \mu(W_1) + \mu(W_2)$$

gilt. Sei $f \in C(K, \mathbb{R})$ derart, daß $f_{|W_1} = 0$ und $f_{|W_2} = 1$. Sei $\epsilon > 0$ und $\chi_{W_1 \cup W_2} \leq g$ derart, daß $\mu(W_1 \cup W_2) + \epsilon \geq \phi(g)$ (Lemma 2.45). Dann gilt

$$\chi_{W_1} \leq (1 - f)g \ , \quad \chi_{W_2} \leq fg$$

und $\mu(W_1) + \mu(W_2) \leq \mu(W_1 \cup W_2) + \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war und wir die Subaddditivität von μ schon gezeigt haben (Lemma 2.44), gilt $\mu(W_1 \cup W_2) = \mu(W_1) + \mu(W_2)$.

Wir wählen kompakte Teilmengen $W_i \subset A_i$ derart, daß $\mu(W_i) + \epsilon 2^{-i} \geq \mu(A_i)$. Dann gilt

$$\mu(A) \geq \mu(\cup_{i \leq n} W_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(W_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \epsilon \ .$$

Da $n > 0$ und $\epsilon > 0$ beliebig sind, folgt aus Lemma 2.44, daß

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \ .$$

Insbesondere ist $\mu(A) = \sup_n \mu(\cup_{i \leq n} W_i)$ und damit erst recht $\mu(A) = \sup\{\mu(W) \mid W \subset A,\ W \text{ kompakt}\}$, also $A \in \mathcal{R}$. □

Lemma 2.48. *Sei $A \in \mathcal{R}$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $W \subset A$ und eine offene Teilmenge $A \subset U$ mit $\mu(U \setminus W) < \epsilon$.*

Proof. Weil $A \in \mathcal{R}$ ist, gibt es ein Kompaktum $W \subset A$ mit $\mu(W) + \epsilon/2 \geq \mu(A)$. Weiter gibt es eine offene Menge $A \subset V$ mit $\mu(A) + \epsilon/2 > \mu(V)$. Damit ist $V \setminus W$ offen, also in

$\mathcal{R}$ nach 2.46. Dann gilt aber nach 2.47 $\mu(W) + \mu(V \setminus W) = \mu(V) < \mu(W) + \epsilon$. $\square$

Lemma 2.49. *$\mathcal{R}$ ist eine Algebra.*

Proof. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$. Sei $\epsilon > 0$ und $W_i \subset A_i \subset V_i$ derart, daß W_i kompakt, V_i offen und $\mu(V_i \setminus W_i) < \epsilon/2$. Dann gilt

$$A_1 \setminus A_2 \subset V_1 \setminus W_2 \subset V_1 \setminus W_1 \cup W_1 \setminus V_2 \cup V_2 \setminus W_2 \ .$$

Damit nach 2.44

$$\mu(A_1 \setminus A_2) \leq \epsilon + \mu(W_1 \setminus V_2) \ .$$

Nun ist $W_1 \setminus V_2 \subset A_1 \setminus A_2$ komkakt. $\epsilon > 0$ war beliebig. Also gilt $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{R}$.

Weiter gilt nach 2.47 $A_1 \cup A_2 = A_1 \setminus A_2 \cup A_2 \in \mathcal{R}$ und $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2) \in \mathcal{R}$. $\square$

Lemma 2.50. *$\mathcal{R}$ ist eine σ-Algebra, welche alle Borelmengen enthält. μ ist ein reguläres Maß auf $\mathcal{R}$.*

Proof. $\mathcal{R}$ enthält abzählbare disjunkte Vereinigungen nach 2.46 und ist eine Algebra nach 2.49. Also ist $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra. Weiterhin enthält $\mathcal{R}$ die offenen Mengen. μ ist σ-additiv nach 2.46 und regulär nach 2.48. $\square$

Lemma 2.51. *Es gilt $\phi_\mu = \phi$.*

Proof. Es reicht zu zeigen, daß für jedes $f \in C(K, \mathbb{R})$ $\phi(f) \leq \phi_\mu(f)$ gilt. Dann ist nämlich auch $-\phi(f) = \phi(-f) \leq \phi_\mu(-f) = -\phi_\mu(f)$, also $\phi(f) \geq \phi_\mu(f)$. Wir fixieren $m \in \mathbb{N}$ und setzen $E_i = f^{-1}((im^{-1}, (i+1)m^{-1}])$ Wir wählen N und $E_i \subset V_i$ derart, daß V_i offen ist und $\mu(V_i) < \mu(E_i) + N^{-1}$ gilt. Weiter wählen wir eine Zerlegung der Eins (h_i). Sei

$a \le \inf(f)$. Es gilt wegen $h_i f \le (i+1)m^{-1}h_i$ und $\sum_i \phi(h_i) = \phi(1) = \mu(K)$

$$\begin{aligned}
\phi(f) &= \sum_i \phi(h_i f) \\
&\le \sum_i (i+1)m^{-1}\phi(h_i) \\
&= \sum_i (|a| + (i+1)m^{-1})\phi(h_i) - \sum_i |a|\phi(h_i) \\
&\le \sum_i (|a| + (i+1)m^{-1})\mu(V_i) - \sum_i |a|\phi(h_i) \\
&\le \sum_i (|a| + (i+1)m^{-1})(\mu(E_i) + N^{-1}) - \sum_i |a|\phi(h_i) \\
&= \sum_i im^{-1}\mu(V_i) + m^{-1}\mu(K) + N^{-1}\sum_i (|a| + (i+1)m^{-1}) \\
&\le \int_K f d\mu + m^{-1}\mu(K) + N^{-1}\sum_i (|a| + (i+1)m^{-1})
\end{aligned}$$

Da wir nun zuerst N und dann m beliebig groß wählen können, gilt $\phi(f) \le \phi_\mu(f)$. □

Aufgabe 2.35 (*). *Sei X ein lokalkompakter metrisierbarer Raum. Identifiziere den Raum der stetigen Funktionale auf $C_c(X)$ mit einem topologischen Vektorraum Raum von komplexen Maßen.*

Aufgabe 2.36. *Wir betrachten $K = [0,1]$. Sei $M := \{\delta_x \mid x \in [0,1]\}$. Zeige, daß M in der schwachen Topologie kompakt ist. Zeige weiter, daß das Lebesguemaß im schwachen Abschluß der konvexen Hülle von M, aber nicht in deren starkem Abschluß liegt.*

Aufgabe 2.37 (*). *Sei K ein kompakter metrisierbarer Raum. Sei (f_n) eine Folge in $C(K)$ und (c_n) eine Folge komplexer Zahlen. Zeige, daß es ein reguläres komplexes Maß μ mit*

$$\mu(f_n) = c_n$$

genau dann gibt, wenn ein $A > 0$ existiert, so daß für jede Folge (λ_n) komplexer Zahlen

$$|\sum_{n=1}^k \lambda_n c_n| \le A\|\sum_{n=1}^k \lambda_n f_n\|$$

gilt.

2.8 Hahn-Banach

Thema dieses Abschnittes ist die stetige Fortsetzung von Funktionalen.

Satz 2.52. *Sei V ein reeller Vektorraum, p eine Halbnorm auf V, $M \subset V$ ein linearer Unterraum und $\phi : M \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $\phi(m) \leq p(m)$ für alle $m \in M$. Dann gibt es eine Fortsetzung von ϕ zu einem linearen Funktional ψ auf V mit $\psi(v) \leq p(v)$ für alle $v \in V$.*

Proof. Wir zuerst, daß wenn $M \neq V$ und $y \in V \setminus M$ ist, man ϕ immer zu $\tilde{\phi}$ auf $M \oplus \mathbb{R}y$ mit $\tilde{\phi}(v) \leq p(v)$ fortsetzen kann. Wir wählen $\xi \in \mathbb{R}$ und setzen

$$\tilde{\phi}(m + \lambda y) = \phi(y) + \lambda\xi \ .$$

Um die Zusatzbedingung $\tilde{\phi}(v) \leq p(v)$ zu erfüllen, müssen wir ξ speziell wählen.

Wir behaupten, daß

$$\sup_{m \in M} (\phi(m) - p(m - y)) \leq \inf_{m \in M} (p(y + m) - \phi(m))$$

gilt. In der Tat ist $\phi(m_1) + \phi(m_2) = \phi(m_1 + m_2) \leq p(m_1 + m_2) \leq p(m_1 - y) + p(m_2 + y)$, also

$$\phi(m_1) - p(m_1 - y) \leq p(m_2 + y) - \phi(m_2) \ .$$

Wir wählen nun $\xi \in (\sup_{m \in M}(\phi(m) - p(m - y)), \inf_{m \in M}(p(y + m) - \phi(m))$. Dann gilt für $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(m + \lambda y) &= \phi(m) + \lambda\xi \\ &= \lambda(\phi(\lambda^{-1}m) + \xi) \\ &\leq \lambda p(y + \lambda^{-1}m) \\ &= p(m + \lambda y) \end{aligned}$$

Für $\lambda < 0$ haben wir

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(m + \lambda y) &= \phi(m) + \lambda\xi \\ &= |\lambda|(\phi(|\lambda|^{-1}y) - \xi) \\ &\leq |\lambda| p(|\lambda|^{-1}m - y) \\ &= p(m + \lambda y) \end{aligned}$$

Eine Ausdehnung von ϕ ist ein Paar $(N, \tilde{\phi})$ mit $M \subset N$, $\tilde{\phi}_{|M} = \phi$ und $\tilde{\phi}(n) \le p(n)$ für alle $n \in N$. Die Menge der Ausdehnungen ist halbgeordnet nach dem Definitionsbereich N.

Ist A eine Kette von Ausdehnungen, so setzen wir $\bar{N} := \cup_{(N,\tilde{\phi})\in A} N$ und $\bar{\phi}(\bar{n}) := \tilde{\phi}(\bar{n})$ für ein $(\tilde{\phi}, N)$ mit $\bar{n} \in N$. Dann ist $(\bar{N}, \bar{\phi})$ ein Supremum der Kette.

Nach dem Lemma von Zorn existiert eine maximale Ausdehnung (N, ψ). Dann muß aber $N = V$ gelten. □

Satz 2.53. *Sei V ein komplexer Vektorraum, p eine Halbnorm auf V, $M \subset V$ ein linearer Unterraum und $\phi : M \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $|\phi(m)| \le p(m)$ für alle $m \in M$. Dann gibt es eine Fortsetzung von ϕ zu einem linearen Funktional ψ auf V mit $|\psi(v)| \le p(v)$ für alle $v \in V$.*

Proof. Es gilt $\mathtt{Im}(\phi)(v) = -\mathtt{Re}(\phi)(iv)$, also $\phi(v) = \mathtt{Re}(\phi)(v) - i\mathtt{Im}(\phi)(iv)$. Es gilt $|\mathtt{Re}(\phi)(v)| \le p(v)$. Wir setzen $\mathtt{Re}(\phi)$ zu einem reell linearen Funktional κ auf ganz V fort, so daß $|\kappa(v)| \le p(v)$ für alle $v \in V$ gilt. Dann setzen wir

$$\psi(v) = \kappa(v) - i\kappa(iv) \ .$$

Dies ist ein komplex-lineares Funktional auf V mit $\psi_{|M} = \phi$. Sei $\psi(v) = u|\psi(v)|$ für $u \in S^1$. Dann gilt

$$|\psi(v)| = u^{-1}\psi(v) = \psi(u^{-1}v) = \kappa(u^{-1}v) = |\kappa(u^{-1}v)| \le p(u^{-1}v) = p(v) \ .$$

□

Satz 2.54. *Sei $(V, \|.\|_V)$ ein normierter Raum, $M \subset V$ ein abgeschlossener linearer Unterraum und $y \in V \setminus M$. Dann existiert ein stetiges Funktional $\psi \in V'$ mit $\psi_{|M} = 0$ und $\psi(y) = 1$.*

Proof. Wir betrachten $(V/M, \|.\|_{V/M})$ mit $\|v + M\|_{V/M} := d(v, M)$. Da M abgeschlossen ist, ist dies eine Norm. Weiter ist $y + M \neq 0$. Wir betrachten das Funktional $\bar{\phi} : \mathbb{C}(y +$

$M) \to \mathbb{C}$, $\phi(\lambda y + M)) := \lambda$ und die Halbnorm

$$p(v+M) := \frac{\|v+M\|_{V/M}}{\|y+M\|_{V/M}} \ .$$

Dann gilt $|\phi(v+M)| \leq p(v+M)$ für $v = \lambda y$. Dieses Funktional dehnen wir nun auf ganz V/M aus, so daß $|\phi(v+M)| \leq p(v+M)$. Dann setzen wir $\psi(v) := \phi(v+M)$. Es gilt

$$|\psi(v)| \leq \frac{\|v+M\|_{V/M}}{\|y+M\|_{V/M}} \leq \frac{1}{\|y+M\|_{V/M}} \|v\|_V \ .$$

Also ist ψ stetig. Weiter gilt $\psi(m) = \phi(m+M) = 0$ für $m \in M$ und $\psi(y) = \phi(y+M) = 1$.

□

Aufgabe 2.38. *Sei K ein kompakter metrisierbarer Raum und μ ein auf der σ-Algebra $\mathcal{R}$ definiertes endliches Maß. Wir nehmen an, daß $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$. Zeigen Sie, daß*

$$\phi_\mu(f) := \int_K f d\mu$$

ein Element $\phi_\mu \in C(K)'$ definiert. Das Integral ist offensichtlich auf $L^\infty(K, \mathcal{R}, \mu)$ definiert und definiert eine stetige Ausdehnung des Funktionals auf diesem Raum. Zeigen Sie, daß es im allgemeinen auch andere Ausdehnungen von ϕ_μ auf $L^\infty(K, \mathcal{R}, \mu)$ gibt.

3 Matrizen, kompakte Operatoren, Fredholmoperatoren

3.1 Überblick

Alle lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen lassen sich durch Matrizen repräsentieren. Die ist für stetige Operatoren zwischen z.B. Banachräumen nicht mehr der Fall. Vielmehr gibt es Matrixdarstellungen nur noch für eine Teilmenge aller Operatoren, der kompakten Operatoren. Auf diese Menge lassen sich viele Aussagen über Operatoren zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen übertragen. Dies ist der Inhalt dieses Kapitels.

3.2 Konvergenzbegriffe - Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Seien V, W topologische Vektorräume. Dann gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, auf dem Raum der stetigen linearen Abbildungen $\mathrm{Hom}(V, W)$ eine Topologie zu definieren. Wir geben hier mögliche Konvergenzbegriffe an:

1. schwache (Operator) Konvergenz : $A \to 0$ falls für jedes $v \in V$ und $w' \in W'$ gilt $w(Av) \to 0$.

2. starke (Operator) Konvergenz : $A \to 0$ falls für jedes $v \in V$ gilt $Av \to 0$.

3. gleichmäßge (Operator) Konvergenz auf beschränkten Mengen : $A \to 0$ falls für jede stetige Halbnorm q von W und beschränkte Menge $B \subset V$ gilt
$$\sup_{v \in B} q(Av) \to 0 \ .$$

Alle diese Konvergenzbegriffe können durch Halbnormen beschrieben werden. Offensichtlich gelten folgende Inklusionen:
$$\text{schwach} \subset \text{stark} \subset \text{gleichmäßig} \ldots \ .$$

Die schwache und die starke Operatorkonvergenz darf nicht mit der starken und schwachen Konvergenz in Dualräumen verwechselt werden. Deshalb der Zusatz "Operator", welchen wir jedoch oft weglassen werden.

Aufgabe 3.1. *Finde für alle drei Konvergenzbegriffe Familien von Halbnormen, die die Topologie erzeugen.*

Ist V endlich-dimensional, dann stimmen alle diese Begriffe überein. Im allgemeinen sind diese jedoch verschieden. Hier sind Beispiele aus dem Hilbertraumkontext.

Sei V ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis (e_i).

1. Die Folge (A_n), $A_n(x) := \sum_{n=1}^{\infty} < e_n, v > e_{n+m}$ konvergiert schwach gegen Null, aber nicht stark.

2. Die Folge (A_n), $A_n(x) :=< e_i, v > e_i$ konvergiert stark gegen Null, aber nicht gleichmäßig.

Aufgabe 3.2. *Zeige diese Aussagen.*

Wir betrachten jetzt einen Banachraum V. Sei p eine Halbnorm auf V. Sei $P := \sup_{\|v\|\leq 1} p(v)$. Dann gilt $p(v) \leq P\|v\|$ für alle $v \in V$. Weiterhin ist p halbstetig nach oben, d.h. für jedes $v \in V$ und $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ derart, daß $\|w - v\| < \delta$ $p(w) - p(v) < \epsilon$ impliziert. In der Tat gilt $p(w) \leq p(w - v) + p(v) \leq p(v) + P\|w - v\|$.

Lemma 3.1. *Ist eine Halbnorm stetig nach unten, so ist sie stetig.*

Proof. Ist p auf $\{\|v\| \leq 1\}$ nicht beschränkt, so ist p auf keiner Kugel beschränkt. Wäre nämlich $v \in V$ und $\delta > 0$ derart, daß $\sup_{\|v-w\|\leq\delta} = C < \infty$, so würde für $\|v - w\| < \delta$

$$p(v - w) \leq p(v) + p(-w) = p(v) + p(w) \leq 2C \ .$$

Wenn $\|x\| < 1$, dann gilt für $w = v + \delta x$ daß $\|v - w\| < \delta$ und

$$p(x) = \frac{1}{\delta} p(v - w) \leq \frac{2C}{\delta} \ .$$

Wäre nun das Lemma falsch, dann gibt es ein $v_1 \in \{\|v\| \leq 1\}$ mit $p(v_1) > 1$. Dann gibt es ein $1/2 > \delta_1 > 0$ derart, daß $p(w) > 1$ für alle $w \in \{\|v_1 - w\| < \delta_1\}$.

Wir nehmen an, daß $v_i \in V$ und $\delta_i > 0$ schon gefunden worden sind. Dann existiert ein $v_{n+1} \in \{\|w - v_n\| \leq \delta_n\}$ mit $p(v_{n+1}) > 2^n$. Dann gibt es $\frac{1}{2}\delta_n > \delta_{n+1}$ mit $p(w) > 2^n$ für alle $w \in \{\|w - v_{n+1}\| < \delta_{n+1}\}$.

Die Folge (v_n) ist eine Cauchyfolge und damit konvergent. Sei $v = \lim_{n\to\infty} v_n$. Dann ist $p(v) > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das geht aber nicht. □

Lemma 3.2. *Sei H eine Menge von stetigen Halbnormen derart, daß für jedes $v \in V$ die Menge der Werte $\{p(v) \mid v \in H\}$ beschränkt ist. Dann ist $q(v) := \sup_{p\in H} p(v)$ eine stetige Halbnorm auf V.*

Proof. q is eine Halbnorm. Wir zeigen, daß q von unten halbstetig ist. Dann wäre q stetig nach Lemma 3.1.

Sei $v \in V$ und $\epsilon > 0$. Sei $p \in H$ mit $q(v) - p(v) < \frac{\epsilon}{2}$. Sei $\delta > 0$ derart, daß aus $\|w - v\| < \delta$ folgt, daß $|p(w) - p(v)| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt für $\|w - v\| < \delta$, daß $q(w) - q(v) \geq$

$p(w) - q(v) > p(v) - q(v) - \frac{\epsilon}{2} > -\epsilon.$ □

Satz 3.3 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für Funktionale). *Jede schwach beschränkte Teilmenge in V' ist beschränkt.*

Proof. Sei $A \subset V'$ schwach beschränkt. Wir betrachten die Menge von Halbnormen H auf V, welche durch $p(v) := |\phi(v)|$, $\phi \in A$ gegeben sind. Dann ist nach Voraussetzung für jedes $v \in V$ die Menge $\{p(v) \mid p \in H\}$ beschränkt. Folglich ist nach Lemma 3.2 $q := \sup_{p \in H} p$ eine stetige Halbnorm. Damit ist $q(v)$ auf der Einheitskugel von V beschränkt. Wir haben für $\phi \in A$

$$\|\phi\| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} |\phi(v)| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} p(v) \leq \sup_{\|v\| \leq 1} q(v) \ .$$

Seien V, W Banachräume.

Satz 3.4 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für Operatoren). *Jede schwach-beschränkte Teilmenge in* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *ist beschränkt.*

Proof. Sei $B \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ schwach beschränkt. Wir betrachten die Menge H der stetigen Halbnormen $p(v) := \|Av\|$ auf V. Die Menge $\{Av \mid v \in V\}$ ist schwach beschränkt in W''. Nach Satz 3.3 ist sie beschränkt in W''. Da $W \to W''$ eine isometrische Einbettung ist, ist $\{Av \mid v \in V\} \subset W$ beschränkt. Damit ist für jedes $v \in V$ die Menge $\{p(v) \mid p \in H\}$ beschränkt. Nach Lemma 3.2 ist dann $q := \sup_{p \in H} p$ stetige Halbnorm und damit auf der Einheitskugel beschränkt. Das bedeutet jedoch, daß

$$\sup_{\|v\| \leq 1, A \in B} \|Av\| = \sup_{A \in B} \|A\| < \infty \ .$$

□

Aufgabe 3.3. *Sei $C(\mathbb{R})_{per}$ der Raum der stetigen periodischen Funktionen mit Periode 1. Zeige, daß es Elemente in $C(\mathbb{R})_{per}$ gibt, deren Fourierreihen nicht in jedem Punkt konvergieren.* `Hinweis: Nimm das Gegenteil an. Betrachte die Auswertung der` n`ten Partialsumme im Punkt` $x \in \mathbb{R}$ `als Element in` $C(\mathbb{R})'_{per}$`. Zeige daß diese Folge von Funktionalen beschränkt sein muß. Berechne dann die Norm dieser Funktionale explizit.`

3.3 Approximation durch Matrizen

Definition 3.5. *Eine lineare Abbildung $A : V \to W$ heißt endlich-dimensional, wenn $A(V)$ endlich-dimensional ist. Sei $F(V,W) \subset \mathrm{Hom}(V,W)$ der Unterraum der endlich-dimensionalen Abbildungen.*

Sei $A \in F(V,W)$. Wir wählen eine Basis $(w_i)_{i=1}^n$ in $A(V)$. Sei (w^i) eine duale Basis. Wir dehnen die w^i zu Elementen in W' aus. Weiter definieren wir Funktionale $v^i \in V'$. $v^i(v) := w^i(Av)$. Dann können wir A durch seine Matrixkoeffizienten darstellen.

$$A(v) = \sum_{i=1}^{n} w_i v^i(v) \ .$$

Umgekehrt, wenn die $w_i \in W$ und $v^i \in V'$ vorgegeben werden, dann ist durch $A(v) = \sum_{i=1}^n w_i v^i(v)$ ein endlich-dimensionaler Operator gegeben.

Wir wollen dies nun auf unendliche Summen ausdehnen. Dabei ist zu beachten, in welcher Topologie man die Konvergenz verstehen will.

Hier ein Beispiel. Sei V ein separabler nicht endlich-dimensionaler Hilbertraum, (v_i) eine Orthonormalbasis und P_n der Projektor auf $\mathtt{span}\{v_i \mid i = 1, \dots n\}$.

Lemma 3.6. *Es gilt $P_n \to 1$ in der starken, aber nicht in der schwachen Topologie.*

Proof. Sei $v \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{\infty} < v_i, v > v_i \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} < v_i, v > v_i \\ &= \lim_{n\to\infty} P_n(v) \end{aligned}$$

Es gilt jedoch $\|P_n - 1\| = 1$ für alle n. □

Für jeden Operator A gilt offensichtlich $P_n A \to A$ in der starken Topologie. Folglich läßt sich jeder Operator auf einem Hilbertraum stark durch endlich-dimensionale Operatoren approximieren.

Lemma 3.7. *If V ein unendlich-dimensionaler Banachraum, dann läßt sich die Identität nicht gleichmäßig durch endlich-dimensionaler Operatoren approximieren.*

Proof. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es ein endlich-dimensionales A mit $\|A-1\|<1$. Dann ist aber $A=1+(A-1)$ invertierbar. Damit wäre aber V endlich-dimensional. □

Seien V und W Banachräume.

Definition 3.8. *Ein Operator $A \in \mathrm{Hom}(V,W)$ heißt kompakt, wenn $A(B(0,1)) \subset W$ präkompakt ist. Mit $K(V,W)$ bezeichnen wir den Raum der kompakten Operatoren*

Aufgabe 3.4. *Zeige, daß $K(V,W)$ ein linearer Unterraum ist.*

Aufgabe 3.5. *Zeige, daß das die Komposition eines kompakten Operators mit einem stetigen Operator wieder kompakt ist.*

Aufgabe 3.6. *Seien V,W Banachräume und $\mathrm{Hom}(V,W)$ der mit der Operatornorm versehene Banachraum. Sei $A \in \mathrm{Hom}(V,W)$ kompakt. Sei $\tilde{A}$ die durch $B \mapsto AB$ gegebene Abbildung $\mathrm{Hom}(V,V) \to \mathrm{Hom}(V,W)$. Untersuche, ob diese Abbildung kompakt ist.*

Lemma 3.9. *Es gilt $F(V,W) \subset K(V,W)$.*

Proof. In der Tat ist für $A \in F(V,W)$ die Menge $A(B(0,1))$ eine beschränkte Teilmenge eines endlich-dimensionalen Banachraumes und damit präkompakt. □

Lemma 3.10. *$K(V,W) \subset \mathrm{Hom}(V,W)$ ist abgeschlossen in der gleichmäßigen Topologie.*

Proof. Sei (A_n) eine Folge in $K(V,W)$, welche in $\mathrm{Hom}(V,W)$ gegen A konvergiert. Sei (v_i) eine Folge in $B(0,1)$. Wir müssen zeigen, daß (Av_i) eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir wählen induktiv Teilfolgen aus. Im n-ten Schritt ersetzen wir (v_i^{n-1}) durch eine Teilfolge, für welche $(A_n v_i^n)$ konvergiert. Dann setzen wir $w_n := v_n^n$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen n so groß, daß $\|A - A_n\| < \epsilon/3$. Dann ist

$$\|Aw_m - Aw_l\| \le \|Aw_m - A_n w_m\| + \|A_n w_m - A_n w_l\| + \|A_n w_l - Aw_l\| \le \epsilon \ ,$$

wenn nur $l,m >> 0$. Damit ist (Aw_m) eine Cauchy-Folge, also konvergent. □

Insbesondere gilt

$$\bar{F}(V,W) \subset K(V,W) \ .$$

Die Gleichheit gilt hier im allgemeinenen nicht.

Lemma 3.11. *Ist B kompakt und gilt $A_n \to 0$ in der starken Topologie, so gilt $A_nB \to 0$ gleichmäßig.*

Proof. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Sei $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$. Es gilt $C < \infty$ nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Wir wählen ein endliches $\epsilon/2C$-Netz $(w_i)_{i=1}^r$ in $B(B(0,1))$. Wir wählen nun $n_0 >> 0$ derart, daß $\|A_n w_i\| \le \epsilon/2$ für alle $i = 1,\dots r$. Dann gilt für alle $v \in B(0,1)$, daß $\|A_n v\| \le \epsilon$ ist, falls nur $n \ge n_0$.

Folgerung 3.12. *Wenn es eine Folge (P_n) in $F(W,W)$ gibt mit $P_n \to 1$ im starken Sinne, dann gilt $\bar{F}(V,W) = K(V,W)$. Dies ist also insbesondere richtig, wenn W ein separabler Hilbertraum ist.*

Proof. In der Tat kann gilt $P_nB \to B$ im gleichmäßigen Sinne für alle $B \in K(V,W)$. □

Satz 3.13 (Schauder). *$A \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ist genau dann kompakt, wenn $A' \in \mathrm{Hom}(W',V')$ kompakt ist.*

Proof. Sei A kompakt. Wir betrachten die kompakte Teilmenge $K := \overline{A(B_V(0,1))} \subset W$. Die Menge $\mathtt{res}_K(B_{W'}(0,1)) \subset C(K)$ ist gleichgradig stetig und nach dem Satz von Arzela-Ascoli prekompakt in $C(K)$. Sei nun (w'_n) eine Folge in $B_{W'}(0,1)$. Nach Wahl einer Teilfolge können wir annehmen, daß $(\mathtt{res}_K(w'_n))$ gleichmäßig konvergiert. Damit konvergiert aber $(A'w'_n)$ in $C(B_V(0,1))$ gleichmäßig.

Wir schließen, daß A' kompakt ist.

Sei nun A' kompakt. Dann ist A'' kompakt. Mit der Einbettung $i_V : V \to V''$ und $A'' \circ i_V = i_W \circ A$ sehen wir, daß $i_W \circ A$ kompakt ist. Da $i_W(W) \subset W''$ ein abgeschlossener Unterraum ist, ist auch A kompakt. □

3.4 Typische kompakte Operatoren

Wir besprechen zuerst das Hilbertraumtensorprodukt. Seien (X, R, μ) und $Y, S, \nu)$ Maßräume und $V := L^2(X, \mu)$, $W = L^2(Y, \nu)$. Wir haben eine bilineare Abbildung

$$\times : V \times W \to L^2(X \times Y, \mu \times \nu) \ ,$$

$(\psi, \phi) \mapsto \phi \times \psi$, $\phi \times \psi(x, y) := \phi(x)\psi(y)$. In der Tat gilt nach Fubini $\|\psi \times \phi\| = \|\phi\|\|\psi\|$. Die Abbildung $\times$ faktorsiert über das algebraische Tensorprodukt $V \otimes W$. Wir definieren ein Skalarprodukt auf $V \otimes W$ durch $< \phi \otimes \psi, \phi' \otimes \phi' >=< \phi, \phi' >< \psi, \psi' >$. Dieses ist gerade das durch $\times$ induzierte Skalarprodukt.

Aufgabe 3.7. *Zeige diese Aussage.*

Definition 3.14. *Das Hilbertraumtensorprodukt von V und W ist der Abschluß $V \hat{\otimes} W$ von $V \otimes W$ mit dem Skalarprodukt*

$$< \phi \otimes \psi, \phi' \otimes \phi' >=< \phi, \phi' >< \psi, \psi' > \quad .$$

Die Abbildung $\otimes$ dehnt sich stetig auf $V \hat{\otimes} W$ aus. Wir erhalten also eine isometrische Einbettung $I : V \hat{\otimes} W \to L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$.

Lemma 3.15. *Die Abbildung I ist ein Isomorphismus.*

Proof. In der Maßtheorie hatten wir gesehen, daß die lineare Hülle der Menge der einfachen Funktionen $\chi_{A \times B}$ mit $A \in R$, $B \in S$, so daß $\mu(A) < \infty$ und $\nu(B) < \infty$ gilt, in $L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ dicht liegt. Dies impliziert die Dichtheit des Bildes von I. $\square$

Wir bilden nun ein partielles adjungiertes dieser Einbettung. Wir betrachten $a \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$. Wir wollen einen Operator $A \in \mathrm{Hom}(W, V)$ mit dem Integralkern a definieren durch

$$A\psi(x) = \int_X a(x, y)\psi(y)\nu(dy) \ .$$

Um dieser Formel einen Sinn zu geben, kann man wie folgt vorgehen. Wir definieren ein stetiges Funktional $\alpha \in V'$ durch $\alpha(\phi) :=< a, \phi \otimes \bar{\psi} >$. Dieses Funktional wird durch einen Vektor $A(\psi) \in V$ representiert, $\alpha(\phi) =< A(\psi), \phi >$. Offensichtlich ist A linear in ψ und es gilt $\| < A(\psi), \phi > \| \leq \|a\|\|\psi\|\|\phi\|$, also $\|A\| \leq \|a\|$.

Definition 3.16. *Der eben definierte Operator A ist der Integraloperator mit Kern a.*

Aufgabe 3.8. *Untersuche, unter welchen Umständen $d\|A\| = \|a\|$ gilt.*

Der abstrakte Gehalt der obigen Konstruktion ist der folgende. Wir haben $a \in V\hat{\otimes}W$. Dazu konstruieren wir $A \in \mathrm{Hom}(\bar{V}, W)$ durch die Formel

$$< A(\psi), \phi > := < a, \psi \otimes \phi > \quad .$$

Lemma 3.17. *Wenn V und W separabel sind, dann ist A kompakt.*

Proof. Seien (v_i) und (w_j) Orthonormalbasen von V und W. Dann ist $(v_i \otimes w_j)$ eine Orthonormalbasis von $V\hat{\otimes}W$. Sei

$$a_n := \sum_{i,j \le n} < v_i \otimes w_j, a > v_i \otimes w_j$$

und A_n der dazugehörige Operator. Dann gilt $\dim(\mathtt{im} A_n) \le n$. Wegen $\|a_n - a\| \to 0$ gilt $\|A_n - A\| \to 0$. Damit ist $A \in \bar{F}(\bar{V}, W)$ und damit kompakt. □

Wir betrachten den Raum $C^\infty(\mathbb{R})_{per}$ der glatten periodischen Funktionen mit Periode 1 auf $\mathbb{R}$. Wir definieren Skalarprodukte

$$< f, g > := \int_0^1 \bar{f}(x) g(x) dx$$

und

$$< f, g >_1 = < f, g > + \int_0^1 \bar{f}'(x) g'(x) dx \ .$$

Seien $H^0(S^1)$ und $H^1(S^1)$ die dazugehörigen Hilberträume. Da $\|f\| \le \|f\|_1$ gilt, gibt es eine stetige Einbettung $R : H^1(S^1) \to H^0(S^1)$. Die folgende Aussage ist ein Spezialfall des Rellich-Lemmas:

Lemma 3.18. *R ist kompakt.*

Proof. Wir betrachten die Orthonormalbasis $f_n(x) = \mathrm{e}^{2\pi i n x}$, $n \in Z$ von $H^0(S^1)$. Sei P_n der Projektor auf $\mathtt{span}\{f_m \mid |m| < n\}$. Es reicht aus, zu zeigen, daß

$$P_n R \to R$$

gleichmäßig. Es gilt

$$P_n R\phi - R\phi = \sum_{|m|>n} < f_m, \phi > f_m \ .$$

Wir haben für $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})_{per}$

$$< f_m, \phi >= \frac{-1}{2\pi i m} < f', \phi >= \frac{1}{2\pi i m} < f_m, \phi' > \ .$$

Da nun $\phi' \in H^0(S^1)$ und $\|\phi'\| \leq \|\phi\|_1$ gilt, haben wir

$$\begin{aligned} \|P_n R\phi - R\phi\|^2 &\leq \sum_{|m|>n} | < f_m, \phi > |^2 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{|m|>n} \frac{1}{m^2} \sum_{|m|>n} | < f_m, \phi' > |^2 \\ &\leq \frac{\|\phi\|_1}{2\pi} \sum_{|m|>n} \frac{1}{m^2} \ . \end{aligned}$$

Also gilt $\|P_n R - R\| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{|m|>n} \frac{1}{m^2}$. Da $\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{m^2} < \infty$ gilt, sehen wir, daß $\|P_n R - R\| \to 0$ für $n \to \infty$. □

3.5 Fredholmoperatoren

Sind V, W endlich-dimensionale Vektorräume und $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, so kann man über die Lösbarkeit der Gleichung $Ax = b$, $x \in V$ gesucht, $b \in W$ gegeben, folgendes sagen.

1. Die Gleichung ist genau dann lösbar, wenn $b \in \mathtt{im}(A)$.
2. Es gilt $b \in \mathtt{im}(A)$ genau dann, wenn $b \in \ker(A')_\perp$.
3. Wenn die Gleichung lösbar ist, dann ist die Lösungsmenge ein affine Unterraum von V der Form $x_0 + \ker(A)$, wobei $Ax_0 = b$ gilt.
4. Es gilt $\mathtt{index}(A) := \dim\ker(A) - \dim(W/\mathtt{im}(A)) = \dim(V) - \dim(W)$.
5. Ist V_1 ein Komplement von $\ker(A)$ und sucht man die dann eindeutige Lösung von $Ax = b$ in V_1, dann hängt diese stetig von $b \in \mathtt{im}(A)$ ab.

Hier kann $\dim(W/\mathtt{im}(A))$ als Anzahl der Bedingungen an b interpretiert werden, welche die Lösbarkeit sichern.

Seien nun V und W Banachräume. Diese Aussagen 1. und 3. sind algebraischer Natur und deshalb allgemein richtig. 2. gilt, wenn $\mathtt{im}(A)$ abgeschlossen ist. Die Aussage von 4. wird sinnlos, aber der Index von A ist eine wichtige Invariante. Die Aussage 5. gilt, wenn $\mathtt{im}(A)$ abgeschlossen ist. Das geforderte Komplement gibt es zum Beispiel, wenn $\dim\ker(A) < \infty$.

Definition 3.19. *Sei $A \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Eine linke (rechte) Parametrix von A ist ein Operator $Q_l \in \mathrm{Hom}(W,V)$ ($Q_r \in \mathrm{Hom}(V,W)$) derart, daß $Q_lA-1 \in K(V,V)$ ($AQ_r-1 \in K(W,W)$) gilt. A heißt Fredholmoperator, wenn er eine linke und eine rechte Parametrix besitzt. Mit $\mathtt{Fred}(V,W)$ bezeichnen wir die Menge der Fredholmoperatoren.*

Aufgabe 3.9. *Zeige, daß wenn A ein Fredholmoperator ist, jede linke Parametrix auch eine rechte Parametrix ist, und umgekehrt jede rechte auch eine linke Parametrix ist.*

Lemma 3.20. *Ist A ein Fredholmoperator, so gilt:*

1. $\dim\ker(A) < \infty$
2. $\mathtt{im}(A)$ *ist abgeschlossen*
3. $\dim(W/\mathtt{im}(A)) < \infty$

Proof. Die Einschränkung des kompakten Operators Q_lA-1 auf $\ker(A)$ ist die Identität. Diese ist aber nur dann kompakt, wenn $\ker(A)$ endlich-dimensional ist.

Sei $V = \ker(A) \oplus U$. Sei (v_n) eine Folge in U derart, daß $Av_n \to w$. Wir wollen zeigen, daß $w \in \mathtt{im}(A)$. Sei $K+1 := Q_lA$ für einen kompakten Operator K. Es gilt $Q_lAv_n = Kv_n + v_n \to Q_lw$. Sei $v_n^0 = v_n/\|v_n\|$. Wenn $\|v_n\| \to \infty$ (nach Wahl einer Teilfolge), dann gilt $Kv_n^0 + v_n^0 \to 0$. Nach Wahl einer Teilfolge gilt $Kv_n^0 \to u$, also $v_n^0 \to u$. Es gilt aber $Aw_1 = 0$, also $w_1 \in \ker(A) \cap U$, also $u = 0$. Das ist nicht möglich, daß $\|w_1\| = 1$.

Also ist $(\|v_n\|)$ beschränkt. Nach Wahl einer Teilfolge gilt $Kv_n \to u_1$. Also $v_n \to Q_lw - u =: v$ und $Av = w$.

Mit A ist auch A' ein Fredholmoperator.

Aufgabe 3.10. *Zeige diese Aussage.*

Damit gilt

$$\dim(W/\mathtt{im}(A)) = \dim(W/\overline{\mathtt{im}(A)}) = \dim(\ker(A')) < \infty \ .$$

□

Sei A ein Fredholmoperator. Wir wählen ein Komplement V_1 von $\ker(A)$ und $\mathtt{im}(A)$. Dann ist $A_1 := A_{|V_1} : V_1 \to \mathtt{im}(A)$ ein stetiger Vektorraumisomorphismus von Banachräumen. Wir wollen daraus schließen, daß das Inverse stetig ist. Dies liefert der Satz von der offenen Abbildung:

Satz 3.21 (Satz von der offenen Abbildung). *Sei $A : V \to W$ ein stetiger Vektorraumisomorphismus, dann ist A^{-1} stetig.*

Proof. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt offen, wenn die Bilder offener Teilmengen offen sind. Ein offene Bijektion hat dann ein stetiges Inverses. Wir müssen also zeigen, daß A offen ist. Da A linear ist, reicht es aus, folgende Eigenschaft nachzuweisen: *Es gibt $\epsilon > 0$ derart, daß $B_W(0,\epsilon) \subset A(B_V(0,1))$.*

Aufgabe 3.11. *Begründe diese Reduktion.*

Wir zeigen zuerst die Existenz von $\epsilon_0 > 0$ derart, daß

$$B_W(0,\epsilon_0) \subset \overline{A(B_V(0,1))} \ .$$

Wir schreiben $W = \cup_{n\in\mathbb{N}} A(B_V(0,n))$. Es gibt nach dem Baireschen Kategoriensatz (W ist nicht eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Teilmengen ohne inneres) ein n_0 derart, daß $\overline{A(B_V(0,n_0))}$ einen inneren w_0 Punkt besitzt. Sei $B(w_0,\epsilon) \subset \overline{A(B_V(0,n_0))}$. Dann ist $B(-w_0,\epsilon) \subset \overline{A(B_V(0,n_0))}$. Für $\|w\| < \epsilon$ gilt $w_0 + w, -w_0 + w \in \overline{A(B_V(0,n_0))}$, und damit wegen der Konvexität von $\overline{A(B_V(0,n_0))}$ auch $\frac{1}{2}(w_0+w)+(-w_0+w) = w \in \overline{A(B_V(0,n_0))}$. Also gilt $B_W(0,\epsilon) \subset \overline{A(B_V(0,n_0))}$. Mit $\epsilon_0 := \epsilon/N$ gilt demnach

$$B_W(0,\epsilon_0) \subset \overline{A(B_V(0,1))} \ .$$

Wir zeigen nun, daß sogar $B_W(0,\epsilon_0) \subset A(B_V(0,1))$ gilt. Sei $\|w\| < \epsilon_0$. Sei $\|w\| < \delta < \epsilon_0$ und $\bar{w} := \frac{\epsilon_0}{\delta} w$. Dann gilt immer noch $\|\bar{w}\| < \epsilon_0$ und $\bar{w} \in \overline{A(B_V(0,1))}$. Sei $1 > \alpha > 0$ so klein, daß $\frac{\delta}{\epsilon_0(1-\alpha)} < 1$ und $v_0 \in B_V(0,1)$ derart, daß $\|Av_0 - \bar{w}\| < \epsilon_0\alpha$. Sei $w_1 := \frac{1}{\alpha}(\bar{w} - Av_0)$.

Dann gilt $\|w_1\| < \epsilon_0$. Wir wählen $v_1 \in B_V(0,1)$ derart, daß $\|w_1 - Av_1\| < \alpha\epsilon_0$ und setzen $w_2 := \alpha^{-2}(\bar{w} - A(v_0 + \alpha v_1))$. Wir setzen diese Konstruktion fort. $v_m \in B_V(0,1)$ erfülle $\|w_m - Av_m\| \leq \epsilon_0\alpha$ und $w_{m+1} := \alpha^{-m-1}(\bar{w} - A(\sum_{n=0}^m \alpha^n v_n))$. Wir erhalten auf diese Weise fortfahrend eine Folge (v_i) derart, daß $\|\bar{w} - A(\sum_{n=0}^m \alpha^n v_n)\| \leq \alpha^{m+1}\epsilon_0$. Wir sehen, daß mit $\bar{v} := \sum_{n=0}^\infty \alpha^n v_n$ auch $\bar{w} = A(\bar{v})$ gilt. Dann ist aber $w = \frac{\delta}{\epsilon_0}\bar{w} = Av$ für $v := \frac{\delta}{\epsilon_0}\bar{v}$. Es gilt $\|v\| \leq \frac{\delta}{\epsilon_0}\sum_{n=0}^\infty \alpha^n \|v_n\| \leq \frac{\delta}{\epsilon_0(1-\alpha)} < 1$. Also ist $w \in A(B_V(0,1))$. □

Satz 3.22 (Satz von Baire). *Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener dichter Teilmengen. Dann ist $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ eine dichte Teilmenge.*

Proof. Sei $D := \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Sei $x_0 \in X$ und $\epsilon > 0$. Wir müssen zeigen, daß $B(x_0,\epsilon) \cap D \neq \emptyset$. Nun ist $U_1 \cap B(x_0,\epsilon)$ offen und nicht leer. Sei $\frac{1}{2}\epsilon > \epsilon_1 > 0$ und $x_1 \in U_1 \cap B(x_0,\epsilon)$ derart, daß $\overline{B(x_1,\epsilon_1)} \subset U_1 \cap B(x_0,\epsilon)$. Nun ist $U_2 \cap B(x_1,\epsilon_1)$ offen und nicht leer. Wir weiderholen die Konstruktion und erhalten induktiv eine Folge (ϵ_n) mit $0 < \epsilon_{n+1} < \frac{1}{2}\epsilon_n$ und (x_n), $x_{n+1} \in B(x_n,\epsilon_n)$, mit $\overline{B(x_n,\epsilon_n)} \subset \cap_{m\leq n} U_n$. Die Folge (x_n) ist eine Cauchyfolge und hat den Grenzwert $x \in X$. Es gilt $x \in D \cap B(x_0,\epsilon)$. □

Folgerung 3.23. *Seien $A \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $V_1 \subset \ker(A)$ derart, daß $\mathtt{im}(A)$ abgeschlossen und V_1 ein Komplement zu $\ker(A)$ ist. Dann ist $A_{|V_1} : V_1 \to \mathtt{im}(A)$ ein topologischer Isomorphismus.*

Lemma 3.24. *Ein stetiger Operator $A : V \to W$ ist genau dann Fredholm, wenn*

1. $\dim\ker(A) < \infty$
2. $\mathtt{im}(A)$ *ist abgeschlossen*
3. $\dim(W/\mathtt{im}(A)) < \infty$

gilt.

Proof. Wir müssen nur noch zeigen, daß diese Bedingungen die Existenz einer Parametrix implizieren. Sei V_1 ein Komplement von $\ker(A)$ und W_1 ein Komplement von $\mathtt{im}(A)$. Sei $Q_1 := A_{|V_1}^{-1} : \mathtt{im}(A) \to V_1$. Wir definieren $Q := Q_1 \circ P$, wobei $P : W \to W_1$ die Projektion

ist. Ist $1 - Q \circ A$ die Projektion auf $\ker(A)$ und $P = 1 - A$
$circQ$. Beider Projektionen sind endlich-dimensional und deshalb kompakt. Also ist Q eine Parametrix von A. □

Satz 3.25. *Die Menge der Fredholmoperatoren* $\mathtt{Fred}(V, W) \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ *ist offen. Ist* $K \in K(V, V)$*, so gilt* $\mathtt{index}(1+K) = 0$*. Die Abbildung* $\mathtt{index} : \mathtt{Fred}(V, W) \to \mathbb{Z}$ *ist stetig. Für* $A \in \mathtt{Fred}(V_0, V_1)$ *und* $B \in \mathtt{Fred}(V_1, V_2)$ *gilt* $B \circ A \in \mathtt{Fred}(V_0, V_2)$ *und* $\mathtt{index}(B \circ A) = \mathtt{index}(A) + \mathtt{index}(B)$*.*

Proof. Sei $A \in \mathtt{Fred}(V, W)$ und Q eine Parametrix. $K_0 = QA - 1$, $K_1 := AQ - 1$ sind kompakt. Wir zeigen, daß $B(A, \frac{1}{\|Q\|} \subset \mathtt{Fred}(V, W)$. Sei $\|T\| < \frac{1}{\|Q\|}$. Dann ist $(1 + QT)^{-1}Q$ eine linke Parametrix von $A + T$ und $Q(1 + TQ)^{-1}$ eine rechte.

$$\begin{aligned}
(1 + QT)^{-1}Q(A + T) &= (1 + QT)^{-1}(QA + QT) \\
&= (1 + QT)^{-1}(1 - K_0 - QT) \\
&= 1 - (1 + QT)^{-1}K_0 \\
(A + T)Q(1 + TQ)^{-1} &= AQ + TQ(1 + TQ)^{-1} \\
&= (K_1 + 1 + TQ)(1 + TQ)^{-1} \\
&= K_1(1 + TQ)^{-1} + 1
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Offenheit von $\mathtt{Fred}(V, W)$. Sei jetzt $A \in \mathtt{Fred}(V_0, V_1)$ und $B \in \mathtt{Fred}(V_1, V_2)$. Seien P eine Parametrix von A und Q eine Parametrix von B. Dann ist $P \circ Q$ eine Parametrix von $B \circ A$ in der Tat gilt ($\sim$ bedeutet gleich bis auf kompakte Operatoren)

$$B \circ A \circ P \circ Q \sim B \circ Q \sim 1$$
$$P \circ Q \circ B \circ A \sim P \circ A \sim 1$$

Wir berechnen mit Hilfe von Folgerung 3.23

$$\dim(\ker(B \circ A)) = \dim(\ker(A)) + \dim(\ker(B) \cap \mathtt{im}(A))$$

und

$$\dim(\mathtt{coker}(B \circ A)) = \dim(\mathtt{coker}(B)) + \dim(V_1/\ker(B) + \mathtt{im}(A)) \ .$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\dim(V_1/\ker(B) + \mathtt{im}(A)) &= \dim((V_1/\mathtt{im}(A))/((\ker(B) + \mathtt{im}(A))/\mathtt{im}(A)) \\
&= \dim(\mathtt{coker}(A)) - \dim(\ker(B) \cap \mathtt{im}(A)) \ .
\end{aligned}$$

Setzt man diese Rechnung ein, so ergibt sich

$$\mathtt{index}(B \circ A) = \mathtt{index}(A) + \mathtt{index}(B) \ .$$

Wir zeigen nun, daß die Indexfunktion lokal konstant ist. Sei $A \in \mathtt{Fred}(V, W)$. Wir wählen Zerlegungen $V = \ker(A) \oplus V_1$ und $W = \mathtt{im}(A) \oplus W_1$. Seien P und Q die Projektoren auf V_1 und $\mathtt{im}(A)$. Dann sind $P \in \mathtt{Fred}(V, V)$ und $Q \in \mathtt{Fred}(W, W)$ und es gilt $\mathtt{index}(P) = 0$, $\mathtt{index}(Q) = 0$. Wir schreiben für $S \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$$\mathtt{index}(Q \circ (A + S) \circ P) = \mathtt{index}(Q) + \mathtt{index}(A + S) + \mathtt{index}(P) = \mathtt{index}(A + S) \ .$$

Wir können $Q \circ (A + S) \circ P = Q \circ Q \circ (A + S) \circ P \circ P$ aber auch in der Faktorisierung

$$V \stackrel{\bar{P}}{\to} V_1 \stackrel{Q(A+S)P}{\to} \mathtt{im}(A) \stackrel{\bar{Q}}{\to} W$$

mit $\bar{P} \in \mathtt{Fred}(V, \mathtt{im}(P))$ und $\bar{Q} \in \mathtt{Fred}(\mathtt{im}(A), W)$ verstehen, wobei dann $\mathtt{index}(\bar{P}) = \dim(\ker(A))$ und $\mathtt{index}(\bar{Q}) = -\dim(\mathtt{coker}(A))$ gilt. Da für genügend kleine S der Operator $Q \circ (A + S) \circ P \in \mathrm{Hom}(V_1, \mathtt{im}(A)$ als kleine Störung des invertierbaren Operators QAP invertierbar ist, gilt offensichtlich

$$\mathtt{index}(A + S) = \mathtt{index}(\bar{P}) + \mathtt{index}(Q \circ (A + S) \circ P) + \mathtt{index}(\bar{Q}) = \mathtt{index}(A) \ .$$

Sei nun $K \in K(V, V)$. Dann ist $(1 + tK)_{t \in [0,1]}$ ein stetiger Weg in $\mathtt{Fred}(V, V)$ von $1 + K$ nach 1. Wir schließen, daß $\mathtt{index}(1 + K) = \mathtt{index}(1)$. □

Aufgabe 3.12. *Zeige: Ist* $A \in \mathtt{Fred}(V, W)$ *und* $P \in \mathrm{Hom}(W, V)$ *eine Parametrix von* A*, so ist* $P \in \mathtt{Fred}(W, V)$ *und es gilt* $\mathtt{index}(A) = -\mathtt{index}(P)$*.*

Aufgabe 3.13. *Zeige: Ist* $A \in \mathtt{Fred}(V, W)$ *und* $K \in K(V, W)$*, dann gilt* $A + K \in \mathtt{Fred}(V, W)$ *und* $\mathtt{index}(A) = \mathtt{index}(A + K)$*.*

3.6 Ein Beispiel : Toeplitzoperatoren

Wir betrachten $L^2(S^1)$ mit der orthonormalen Basis $f_m(x) = \exp(2\pi i m x)$, $m \in \mathbb{Z}$. Sei

$$H := \overline{\mathtt{Span}\{f_m \mid m \geq 0\}}$$

der Hardyraum und $P : L^2(S^1) \to H$ der Projektor. Für eine stetige Funktion $f \in C^\infty(S^1)$ sei M_f der Multiplikationsoperator mit f.

Aufgabe 3.14. *Zeige, daß $[P, M_f]$ ist kompakt ist. (Hinweis: f kann gleichmäßig durch endliche Linearkombinationen der Basisvektoren approximiert werden. Zeige dann, daß $[P, M_{f_m}]$ endlich-dimensional ist. Schließe daraus auf die Kompaktheit von $[P, M_f]$*

Wir nehmen nun an, daß $f : S^1 \to C^*$ gilt, also f nirgends verschwindet.

Definition 3.26. *Der zu f gehörige Toeplitzoperator ist durch*

$$T_f := P M_f P \in \operatorname{Hom}(H, H)$$

gegeben.

Der Toeplitzoperator T_f ist ein Fredholmoperator mit Parametrix $T_{f^{-1}}$. In der Tat gilt modulo kompakter Operatoren $T_f T_{f^{-1}} = P H_f P M_{f^{-1}} P \sim P M_f M_{f^{-1}} P = P$ und analog $T_{f^{-1}} T_f \sim P$, wobei hier P als id_H interpretiert wird.

Wir berechnen explizit aus $f_m f_n = f_{m+n}$, daß

$$\dim \ker T_{f_m} = \left(\begin{array}{cc} 0 & m \geq 0 \\ -m & m < 0 \end{array} \right.$$

und

$$\dim \mathtt{coker} T_{f_m} = \left(\begin{array}{cc} m & m \geq 0 \\ 0 & m < 0 \end{array} \right. .$$

Wir erhalten

$$\mathtt{index} T_{f_m} = -m \ .$$

Eine Abbildung $f : S^1 \to C^*$ hat eine wohldefinierte Windungszahl $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ bezüglich $0 \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3.15 (*). *Zeige, daß* $\mathtt{index}(T_f) = -\deg(f)$ *gilt.*

3.7 Spektralsatz für kompakte Operatoren

Sei V ein topologischer Vektorraum und $A \in \operatorname{Hom}(V, V)$.

Definition 3.27. *Das Spektrum von A is die Teilmenge*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - A \textit{ besitzt kein stetiges Inverses}\}$$

von $\mathbb{C}$. Die Resolventenmenge ist $\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$.

Hier sind zwei einfache Anwendungen der Neumannschen Reihe.

Aufgabe 3.16. *Sei V ein Banachraum. Zeige, daß $\sigma(A)$ abgeschlossen ist. Zeige dazu, daß wenn $\lambda \in \rho(A)$, auch $B(\lambda, \frac{1}{\|(\lambda-A)^{-1}\|}) \subset \rho(A)$.*

Aufgabe 3.17. *Sei $\lambda \in \rho(A)$ derart, daß $B(\lambda, \epsilon) \subset \rho(A)$. Zeige, daß dann $\lambda \in \rho(B)$ für alle $B \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit $\|A - B\| < \epsilon$ gilt.*

Definition 3.28. *Ein Eigenwert von A ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, daß $\ker(\lambda - A) \neq \{0\}$.*

Die Eigenwerte gehören zum Spektrum. Im allgemeinen ist das Spektrum jedoch größer.

Aufgabe 3.18. *Sei $V = C([0,1])$ und $A := M_\phi$ die Multiplikation mit einer Funktion $\phi \in C([0,1])$. Bestimme das Spektrum von A sowie die Eigenwerte und Eigenräume. Unter welchen Umständen ist A kompakt.*

Sei jetzt A kompakt.

Lemma 3.29. *Ist $\dim(V) = \infty$, so gilt $0 \in \sigma(A)$.*

Proof. Wäre A invertierbar, so wäre $1 \in K(V, V)$ und $\dim(V) < \infty$. □

Lemma 3.30. *Ist $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, so ist λ ein Eigenwert endlicher Vielfachheit und $|\lambda| \leq \|A\|$.*

Proof. Wenn $|\lambda| > A$, dann ist $\lambda(1 - \lambda^{-1}A) = (\lambda - A)$ invertierbar und deshalb $\lambda \in \rho(A)$. Wenn $\lambda \in \sigma(A)$, so ist $\lambda - A$ nicht invertierbar. Da $\lambda - A$ die Parametrix $\lambda^{-1} - A$ besitzt, ist $\lambda - A$ ein Fredholmoperator. Es gilt $\mathtt{index}(\lambda - A) = \mathtt{index}(1 - \lambda^{-1}A) = 0$. Wäre $\ker(\lambda - A) = 0$ so wäre $(\lambda - A)$ auch surjektiv und damit stetig invertierbar und $\lambda \notin \sigma(A)$. Es gilt $\dim(\ker(\lambda - A)) < \infty$. □

Die Zahl $0 \in \mathbb{C}$ muß nicht notwendig ein Eigenwert von A sein. Sei V ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis (v_i). Wir setzen

$$A(v) := \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} < v_i, v > v_i \ .$$

Aufgabe 3.19. *Zeige, daß A kompakt ist. Berechne $\sigma(A)$ und bestimme alle Eigenwerte.*

Wir haben gesehen, daß das Spektrum $\sigma(A) \subset B(0, \|A\|)$ aus dem Punkt 0 und weiter aus den Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht. Wir nehmen jetzt an, daß V ein Hilbertraum und $A = A^*$ gilt.

Lemma 3.31. *Ist $\mu \neq \lambda$, so gilt $< \ker(\mu - A), \ker(\lambda - A) >= 0$. Weiterhin gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ und $\|A\| \in \sigma(A)$ oder $-\|A\| \in \sigma(A)$. Ist $\mu \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von $\sigma(A)$, dann gilt $\mu = 0$.*

Proof. Sei $Av = \mu v$, $\|v\| = 1$. Dann gilt $\mu = \mu < v, v >=< v, Av >=< Av, v >= \bar{\mu} < v, v >= \bar{\mu}$. Folglich $\mu \in \mathbb{R}$. Sei zusätzlich $Aw = \lambda w$, $\lambda \neq \mu$, dann gilt

$$0 =< (A - \mu)v, w >=< v, (A - \lambda + \lambda - \mu)w >= (\lambda - \mu) < v, w > ,$$

also $< v, w >= 0$.

Sei (λ_n) eine Folge in $\sigma(A)$ verschiedener Eigenwerte mit $\lambda_n \to \mu$. Sei $v_n \in (\ker(\lambda_n - A))$ und $\|v_n\| = 1$. Dann gilt $v_n \to 0$ schwach. Wir schließen, daß $Av_n \to 0$ also $\lambda_n v_n \to 0$, im starken Sinne gilt. Also muß $\lambda_n \to 0$ gelten.

Sei nun weder $\|A\|$ noch $-\|A\|$ ein Eigenwert von A. Wir können eine orthonormale Folge (v_n) wählen derart, daß $\|Av_n\| \to \|A\|$.

Aufgabe 3.20. *Zeige diese Behauptung unter der Voraussetzung, daß $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ ist.*

Es gilt $v_n \to 0$ schwach und deshalb $Av_n \to 0$ stark. Also $\|A\| = 0$ und $A = 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

Wir nehmen weiterhin an, daß A ein kompakter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum ist. Sei (λ_n) die (eventuell endliche) Folge der betragsmäßig geordneten von Null verschiedenen Eigenwerte von A. Zu jedem n wählen wir eine Orthonormalbasis $(v_{n,m})_{m=1,\dots,\dim(\ker(\lambda_n - A))}$. Wir definieren den Operator $A_N \in \mathrm{Hom}(V, V)$ durch

$$A_N := \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\dim(\ker(\lambda_n - A))} < v_{n,m}, v > v_{n,m} \ .$$

Satz 3.32 (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren). *Es gilt $A_N \to A$ gleichmäßig, d.h.*

$$A. = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\dim(\ker(\lambda_n - A))} \lambda_n < v_{n,m}, . > v_{n,m}$$

Proof. In der Tat gilt für $M \geq N$ daß $\|A_M - A_N\| \leq |\lambda_N|$. Entweder ist $\sigma(A)$ und damit die Summe endlich, oder es gilt $\lambda_N \to 0$ für $N \to 0$. Daraus folgt die Konvergenz von (A_N) gegen $A_\infty \in K(V, V)$.

Sei $V_1 = \overline{\mathtt{im}(A_\infty)}$. Es ist klar, daß $A_{|V_1} = (A_\infty)_{|V_1}$. Weiter gilt $(A_\infty)_{|^\perp V_1} = 0$. Ist $v \in {}^\perp V_1$, dann gilt $< Av, V_1 >=< v, AV_1 >\subset< v, V_1 >= \{0\}$. Also gilt $A({}^\perp V_1) \subset {}^\perp V_1$. Da $A_{|^\perp V_1}$ auch kompakt und selbstadjungiert ist, aber keinen von Null verschiedenen Eigenwert hat, gilt $\sigma(A_{|^\perp V_1}) = \{0\}$ und folglich $A_{|^\perp V_1} = 0$. □

3.8 Eine Anwendung auf Schrödinger-Operatoren

Wir betrachten den Operator

$$H := \Delta + V, \quad \Delta = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad V \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

auf den 1-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Sei (λ_n) die dem Betrage nach geordnete Folge von Eigenwerten von H.

Lemma 3.33. *Die Eigenwerte haben endliche Vielfachheit. Es gilt $\lambda_n \to \infty$. Es gibt eine Orthonormalbasis von $L^2(S^1)$ aus Eigenvektoren von H.*

Proof. Sei $C > \inf_{x \in S^1} V(x)$. Dann gibt es ein $c > 0$ derart, daß für all $f \in H^2(S^1)$ gilt $< (V + C)f, f >> c\|f\|^2$. Es gilt weiterhin $< \Delta f, f >= \int_0^1 |f'| dx \geq 0$. Wir schließen daraus, daß $< (H + C)f, f >> c\|f\|^2$ für eine $c > 0$. Offensichtlich ist $H + C : H^2(S^1) \to L^2(S^1)$ ein stetiger Operator. Es gilt weiterhin $\ker(H + C) = 0$.

Der Operator $\Delta + C : H^2(S^1) \to L^2(S^1)$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 3.21. *Zeige diese Aussage. (Man kann die Wirkung auf der Basis $f_n(x) = \exp(2\pi i n x)$ betrachten).*

Der Operator $V : H^2(S^1) \to L^2(S^1)$ ist kompakt, da er eine Faktorsierung

$$H^2(S^1) \stackrel{R}{\to} L^2(S^1) \stackrel{V}{\to} L^2(S^1)$$

über die kompakte Einbettung R zuläßt. Folglich ist $H + C : H^2(S^1) \to L^2(S^1)$ ein Fredholmoperator mit $\mathtt{index}(H + C) = 0$. Wir schließen, daß $\mathtt{im}(H + C) = L^2(S^1)$. Wir definieren

$$R_{-H}(C) : L^2(S^1) \stackrel{(H+C)^{-1}}{\to} H^2(S^1) \stackrel{R}{\to} L^2(S^1).$$

Dieser Operator ist kompakt, weil R kompakt ist.

Aufgabe 3.22. *Zeige, daß $R_{-H}(C)$ selbstadjungiert ist.*

Wenn $R_{-H}(C)f = \mu f$ gilt, dann gilt auch $f \in H^2(S^1)$ und $(H + C)f = \mu^{-1}f$. Folglich ist f ein Eigenvektor von H zum Eigenwert $\mu^{-1} - C$. Weiterhin ist $\mu \neq 0$.

Aufgabe 3.23. *Schließe aus $Hf = \lambda f$ und $f \in H^2(S^1)$, daß $f \in C^\infty(S^1)$ gilt.*

Wir sehen also, daß wenn (μ_n) eine entsprechend geordnete Folge der Eigenwerte von $R_{-H}(C)$ ist,

$$\lambda_n = \mu_n^{-1} - C$$

gilt. Weiterhin gilt

$$\ker(H - \lambda_n) = \ker(R_{-H}(C) - \mu_n) \ .$$

Dieser Raum ist als Kern eines Fredholmoperators endlich-dimensional. Die restlichen Aussagen des Lemmas folgen aus dem Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren. □

3.9 Funktionen selbstadjungierter kompakter Operatoren - Polarzerlegung

Sei A ein selbstadjungierter Operator. Nach dem Spektralsatz schreiben wir

$$A. = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\dim(\ker(\lambda_n - A))} \lambda_n < v_{n,m}, . > v_{n,m}$$

Als Teilmenge von $\mathbb{C}$ besitzt $\sigma(A)$ eine Topologie. Sei $C_0(\sigma(A)) \subset C(\sigma(A))$ die Algebra der stetigen Funktionen mit $f(0) = 0$.

Definition 3.34. *Für $f \in C_0(\sigma(A))$ setzen wir*

$$f(A). := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\dim(\ker(\lambda_n - A))} f(\lambda_n) < v_{n,m}, . > v_{n,m}$$

Aufgabe 3.24. *Zeige, daß die obige Summe gleichmäßig konvergiert und einen kompakten Operator $f(A)$ definiert. Zeige weiter, daß $f \mapsto f(A)$ ein stetiger Algebrahomomorphismus $C_0(\sigma(A)) \to \mathrm{Hom}(V, V)$ ist.*

Definition 3.35. *Ein selbstadjungierter Operator A heißt nicht-negativ, falls $< Av, v > \geq 0$ für alle $v \in V$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall $A \geq 0$.*

Aufgabe 3.25. *Zeige, daß $\geq$ eine mit der Addition verträgliche Halbordnung definiert. Zeige weiter, daß für $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ immer $A^*A \geq 0$ gilt (dies gilt auch umgekehrt: Wenn $A \geq 0$, dann ist $A = \sum_i B_i^* B_i$).*

Eine Verträglichkeit mit der Multiplikation gibt es nicht, da i.a. $A \circ B$ für selbstadjungierte A, B nichteinmal selbstadjungiert sein muß.

Aufgabe 3.26. *Ist A kompakt, selbstadjungiert und nicht-negativ, dann gilt $\sigma(A) \subset [0, \|A\|]$.*

Sei nun A kompakt. Dann ist A^*A kompakt und selbstadjungiert. Es gilt $\sqrt{(.)} \in C_0(\sigma(A^*A))$.

Definition 3.36. *Für einen kompakten Operator setzen wir*

$$|A| := \sqrt{A^*A} \ .$$

Wir definieren $U : \mathtt{im}(|A|) \to \mathtt{im}(A)$ durch $U|A|v := Av$. Es gilt $\|Av\|^2 =< v, A^*Av >=< v, |A|^2 v >= \||A|v\|^2$. Daraus sehen wir, daß erstens, daß U wohldefiniert ist, und zweitens, daß U sich zu einer Isometrie von $U : \overline{\mathtt{im}(|A|)} \to \overline{\mathtt{im}(A)}$ ausdehnt. Wir definieren $U_{|^\perp \overline{\mathtt{im}(|A|)}} := 0$. Dann gilt $A = U|A|$.

Definition 3.37. *Die Zerlegung $A = U|A|$ heißt Polarzerlegung von A.*

Wir werden später sehen, daß jeder Operator $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ eine Polarzerlegung besitzt, indem wir die Definition von $|A|$ verallgemeinern.

Sei

$$|A|. = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\dim(\ker(\lambda_n - A))} \lambda_n < v_{n,m}, . > v_{n,m}$$

die durch den Spektralsatz gegebene Darstellung. Dann gilt

$$A. = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\dim(\ker(\lambda_n - A))} \lambda_n < v_{n,m}, . > U(v_{n,m}) \ .$$

Beachte, daß $(U(v_{n,m}))$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\mathtt{im}(A)}$ ist. Wir haben damit den folgenden Satz gezeigt.

Satz 3.38. *Ist A eine kompakter Operator auf einem Hilbertraum, dann gibt es Orthonormalbasen (v_n) und (w_n) sowie eine Folge (μ_n) nichtnegativer Zahlen (die charakteristischen Zahlen von A) mit $\mu_n \to 0$ derart, daß*

$$A. := \sum_n \mu_n < v_n, . > w_n$$

gilt.

Aufgabe 3.27. *Zeige, daß die Zahlen μ_n (einschließlich ihrer Vielfachheit) eindeutig bestimmt sind.*

Aufgabe 3.28. *Sei $K(x) = \frac{\sin(\pi N x)}{\sin(\pi x)}$. Wir betrachten den Integraloperator*

$$Af(x) := \int_0^1 \exp(10\pi i x) K(x-y) f(y) dy$$

auf $L^2(S^1)$. Bestimme die charakteristischen Zahlen von A. Stelle A in der im obigen Satz angegebenen Form dar.

4 Spektrum und holomorphe Funktionen von Operatoren

4.1 Überblick

Das Spektrum eines Operators A ist die Menge derjenigen komplexen Zahlen μ, für welche $R(\mu) := (A - \mu)^{-1}$ nicht existiert. Wir studieren hier grundlegende Eigenschaften dieser Menge.

Eine typische Aufgabenstellung ist die Lösung des Anfangswertproblemes

$$\frac{d}{dt} f(a) = Af(t) \ , \quad f(0) = f_0 \ ,$$

wobei f eine Funktion einer reellen Veränderlichen t mit Werten in einem Banachraum ist. Formal kann man die Lösung etwa in der Form

$$f(t) = \mathrm{e}^{tA} f_0$$

hinschreiben. Es ergibt sich die Aufgabe, Ausdrücken wie e^{tA} einen Sinn zu geben.

Inhalt diese Kapitels ist ein Funktionentheoretischer Zugang, welcher auf dem Cauchy-Integral beruht, wobei $R(\mu)$ die Rolle des Kernes $(z-\mu)^{-1}$ spielt.

5 C^*-Algebren - stetige Funktionen von Operatoren

5.1 Überblick

C^*-Algebren sind abschlossene selbstadjungierte Algebren von Operatoren auf Hilberträumen. Typische kommutative Beispiele sind die Algebren beschränkter Funktionen auf topologischen Räumen. In der Tat, wie wir sehen werden, sind alle kommutativen C^*-Algebren von dieser Form.

Andererseits erzeugt jeder normale Operator auf einem Hilbertraum eine kommutative C^*-Algebra. Wir werden diese mit der Algebra der Funktionen auf dem Spektrum von A identifizieren. Dies wird es uns ermöglichen, für jede beschränkte stetige Funktion f einer Veränderlichen den Operator $f(A)$ zu erklären.

5.2 Spektraltheorie in Banachalgebren

Definition 5.1. *Eine Banachalgebra* $\mathbf{A}$ *ist eine komplexe Algebra mit 1, deren unterliegender Vektorraum ein Banachraum ist für welchen*

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \forall A, B \in \mathbf{A}$$

und

$$\|1\| = 1$$

gilt.

Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $C_b(X)$ mit eine kommutative Banachalgebra.

Ist V ein Banachraum, so ist $B(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$ eine Banachalgebra.

Sei ab jetzt $\mathbf{A}$ eine Banachalgebra.

Definition 5.2. *Gibt es für $B \in \mathbf{A}$ ein Element $C \in \mathbf{A}$ mit der Eigenschaft $BC = CB = 1$, so heißt $B^{-1} := C$ das Inverse zu B und B Einheit in $\mathbf{A}$. Die Menge der Einheiten in A sei $GL(\mathbf{A})$.*

Aufgabe 5.1. *Zeige, daß $GL(\mathbf{A})$ offen in $\mathbf{A}$ ist.*

Die Begriffe Spektrum, Resolvente und Resolventenmenge lassen sich auf Banachalgebren übertragen.

Definition 5.3. *Sei $A \in \mathbf{A}$. Die Resolventenmenge von A ist durch*

$$\rho(A) := \{\mu \in C|\ (\mu - A)^{-1} \text{ existiert in } \mathbf{A}\}$$

Das Spektrum von A ist das Komplement $\sigma(A) := \mathbb{C} - \rho(A)$.

Aufgabe 5.2. *Zeige, daß für $A \in \mathbf{A}$ gilt:*

1. *$\rho(A)$ ist offen in $\mathbb{C}$.*
2. *$\sigma(A) \subset B(0, \|A\|)$*
3. *$\sigma(A) \neq \emptyset$*
4. *$\|R(\lambda)\| \ \geq \mathtt{dist}(\lambda, \sigma(A))^{-1}$*
5. *Die Resolvente $\lambda \mapsto R_A(\lambda)$ ist eine holomorphe Funktion auf $\rho(A)$.*

Definition 5.4. *Der Spektralradius von $A \in \mathbf{A}$ wird durch*

$$r(A) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

definiert.

Es gilt offensichtlich $r(A) \leq \|A\|$.

Lemma 5.5. *Für $A \in \mathbf{A}$ gilt $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ und $\sup |\sigma(A)| = r(A)$.*

Proof. Sei
$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}} \ .$$
Diese Reihe konvergiert für $\lambda > r(A)$ (Wurzelkriterium) und liefert $R_A(\lambda)$. Damit folgt $\sup|\sigma(A)| \leq r(A)$.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt für $\varepsilon > 0$ mit $r := \sup|\sigma(A)|$
$$A^k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r+\varepsilon} z^k f(z)\ dz \ .$$

Sei $C_\epsilon = \sup_{|z|=r+\epsilon} \|R_A(z)\|$. Dann gilt $\|A^k\| \leq C_\varepsilon (r+\varepsilon)^k$. Es folgt $\sqrt[k]{\|A^k\|} \leq \sqrt[k]{C_\varepsilon}(r+\varepsilon)$ und $r(A) \leq r + \varepsilon$, da $\sqrt[k]{C_\varepsilon} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, ergibt sich $r(A) \leq \sup|\sigma(A)|$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|A^k\|} = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\|A^k\|}$. Sei $\lambda \in \sigma(A)$. Dann ist $(\lambda - A)$ nicht invertierbar und damit auch $(\lambda^k - A^k)$ nicht, da
$$(\lambda^k - A^k) = (\lambda - A)(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2}A + \ldots + A^{k-1}).$$
Daraus folgt $\lambda^k \in \sigma(A^k)$ Demnach ist $|\lambda^k| \leq \|A^k\|$, also $|\lambda| \leq \sqrt[k]{\|A^k\|}$ für alle k. Wir schließen, daß $|\lambda| \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}$. Dies zeigt, daß $\sup|\sigma(A)| \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}$. □

Aufgabe 5.3 (Resolventengleichung). *Seien $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Dann gilt für die Resolventen von A die Identität*
$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

5.3 Abstrakte C^*-Algebren

Sei V ein Hilbertraum. Dann haben wir den $*$-Operator $* : \mathrm{Hom}(V,V) \to \mathrm{Hom}(V,V)$. Er erfüllt

(i) $(A+B)^* = A^* + B^*$

(ii) $(AB)^* = B^*A^*$

(iii) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$

(iv) $\|A^*\| = \|A\|$

(v) $(A^*)^* = A$.

Lemma 5.6 (C^*–Eigenschaft). *Sei* $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$. *Dann gilt*

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

Proof.

$$\begin{aligned}\|A^*A\| &= \sup_{\|x\|=1,\|y\|=1} |< A^*Ax, y >| = \sup_{\|x\|=1,\|y\|=1} |< Ax, Ay >| \\ &= \sup_{\|x\|=1} |< Ax, Ax >| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2.\end{aligned}$$

□

Wir erinnern daran, daß eine Banachalgebra ein Banachraum mit einem Produkt ist derart, daß die Norm eines Produktes kleiner als das Produkt der Normen der Faktoren ist.

Definition 5.7. *(i) Eine Banachalgebra mit einer $*$–Operation, die den erwähnten Eigenschaften (i) - (v) genügt, heißt involutive Banachalgebra.*

(ii) Eine involutive Banachalgebra mit C^*–Eigenschaft heißt C^*–Algebra.

Hier sind einige Beipiele von C^*-Algebren.

1) Sei V ein Hilbertraum. Nach obiger Diskussion ist $\mathrm{Hom}(V, V)$ eine C^*-Algebra.

2) Jede topologisch und unter $*$ abgeschlossene Unteralgebra von $\mathrm{Hom}(V, V)$ ist eine C^*–Algebra.

3) Sei X ein kompakter topologischer Raum. Mit $f^*(x) := \overline{f(x)}$, $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ wird $C(X)$ zu einer C^*-Algebra.

Man kann zeigen, daß jede C^*-Algebra eine topologisch und $*$-abgeschlossene Unteralgebra von $\mathrm{Hom}(V, V)$ für einen geeigneten Hilbertraum V ist.

Aufgabe 5.4 (*). *Zeige, daß für jeden kompakten topologischen Raum X die Algebra $C(X)$ eine solche Darstellung als Unteralgebra hat.*

Ist $\mathbf{A}$ eine Banachalgebra mit $1 \in \mathbf{A}$, so können wir das Spektrum $\sigma(A)$ und die Resolventenmenge $\rho(A)$ für $A \in \mathbf{A}$ dann können genau wie früher definieren, wenn wir für $\lambda \in \rho(A)$ verlangen, daß $(\lambda - A)^{-1} \in \mathbf{A}$ existiert.

Aufgabe 5.5. *Zeige, daß $\sigma(A) \subset B(0, \|A\|)$ abgeschlossen ist.*

Lemma 5.8. *Sei $\mathbf{A}$ eine C^*–Algebra, $A \in \mathbf{A}$. Dann gilt*

(i) $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$

(ii) $A^* = A \Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$

Proof. Die erste Behauptung folgt aus:

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(A) &\Leftrightarrow (\lambda - A)^{-1} \in \mathbf{A} \text{ existiert} \\ &\Leftrightarrow [(\lambda - A)^{-1}]^* = [(\lambda - A)^*]^{-1} = (\overline{\lambda} - A^*)^{-1} \in \mathbf{A} \text{ existiert} \\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(A^*) \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die zweite Behauptung. Sei $\alpha + i\beta \in \sigma(A)$. Wir müssen $\beta = 0$ zeigen. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha + i(\beta + \lambda) \in \sigma(A + i\lambda)$. Aus

$$\begin{aligned} |\alpha + i(\beta + \lambda)|^2 &\leq \|A + i\lambda\|^2 \quad \text{da allgemein } \sigma(A) \subset B(0, \|A\|) \\ &= \|(A + i\lambda)^*(A + i\lambda)\| \quad (C^*\text{-Eigenschaft}) \\ &= \|(A - i\lambda)(A + i\lambda)\| \quad (\text{da } A = A^*) \\ &= \|A^2 + \lambda^2\| \\ &\leq \|A\|^2 + |\lambda|^2 \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \end{aligned}$$

folgt

$$2\beta\lambda \leq \|A\|^2 - \alpha^2 - \beta^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dies ist nur für $\beta = 0$ erfüllt. □

5.4 Raum der Charaktere - Satz von Alaoglu

Sei $\mathbf{A}$ eine Banachalgebra und $I \subset \mathbf{A}$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann hat der Banachraum $\mathbf{A}/I$ eine Algebrastruktur. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|(A+I)(B+I)\| &= \inf_{C\in I} \|AB+C\| \\
&\leq \inf_{C_1,C_2\in I} \|(A+C_1)(B+C_2)\| \\
&\leq \inf_{C_1,C_2\in I} \|(A+C_1)\|\|(B+C_2)\| \\
&= \|A+I\|\|B+I\| \ .
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathbf{A}/I$ auch eine Banachalgebra.

Definition 5.9. *Ein Charakter auf* $\mathbf{A}$ *ist ein stetiger Algebrenhomomorphismus* $\mathbf{A} \to \mathbb{C}$. *Die Menge der Charaktere* $X(\mathbf{A})$ *wird als Teilmenge von* $\mathbf{A}'$ *betrachtet und mit der durch die schwache Topologie induzierten Topologie versehen.*

Satz 5.10. *Sei* $\chi : \mathbf{A} \to \mathbb{C}$ *ein Charakter und* $A \in \mathbf{A}$. *Dann gilt:*

(i) $\chi(A) \in \sigma(A)$

(ii) $\|\chi\| = 1$

Proof. Sei $\lambda := \chi(A) \in \rho(A)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \chi(1) \\
&= \chi((\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)) \\
&= \chi((\lambda - A)^{-1})\chi(\lambda - A) \\
&= \chi((\lambda - A)^{-1})(\chi(\lambda) - \chi(A)) \\
&= \chi((\lambda - A)^{-1})(\lambda - \chi(A)) \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Es gilt wegen (i) weiter, daß

$$\begin{aligned}
\|\chi\| &= \sup_{\|A\|\leq 1} |\chi(A)| \\
&\leq \sup_{\|A\|\leq 1} \sup |\sigma(A)| \\
&= 1 \ .
\end{aligned}$$

Damit ist $\|\chi\| \leq 1$. Wegen $\chi(1) = 1$ gilt $\|\chi\| = 1$. $\square$

Nach der Definition der schwachen Topologie konvergiert eine Folge von Charakteren (χ_i) gegen in $\lambda \in \mathbf{A}'$ genau dann, wenn $\chi_i(A) \to \lambda(A)$ für alle $A \in \mathbf{A}$.

Aufgabe 5.6. *Zeige, daß $\lambda \in X(\mathbf{A})$.*

Damit wird $X(\mathbf{A}) \subset S_{\mathbf{A}'}(0,1)$ eine abgeschlossene Teilmenge. Es gelten folgende Sätze:

Satz 5.11 (Alaoglu). *Sei B ein Banachraum. Dann ist die mit der schwachen Topologie versehene Einheitskugel in B' präkompakt.*

Proof. Wir betrachten die Abbildung

$$I : \bar{B}_{B'}(0,1) \to \prod_{v \in B_B(0,1)} \bar{B}_{\mathbb{C}}(0,1) \ ,$$

$$I(\phi) = \prod_{v \in B_B(0,1)} \phi(v) \ .$$

I ist injektiv. Die Komposition von I mit der Projektion auf die Komponente mit Index $v \in B_B(0,1)$ ist die Auswertung in v und damit stetig. Da die Komposition von I mit allen Projektionen stetig ist, ist I selbst stetig. Die inverse Abbildung ist stetig, da die Komposition von I^{-1} mit der Auswertung in $v \in B_B(0,1)$ als Projektion für alle v stetig ist. Also ist I ein Homöomorphismus auf das Bild. Das Produkt $\prod_{v \in B_B(0,1)} \bar{B}_{\mathbb{C}}(0,1)$ kompakter Räume ist kompakt. Folglich ist $\bar{B}_{B'}(0,1)$ kompakt. $\square$

Satz 5.12. *Sei B ein separabler Banachraum. Dann ist $B_{B'}(0,1)$ mit der schwachen Topologie metrisierbar.*

Proof. Sei $E = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $B_B(0,1)$. Wir setzen

$$d(\phi, \psi) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} |\phi(e_i) - \psi(e_i)| \ .$$

Diese Reihe konvergiert und definiert einen Abstand auf $B_{B'}(0,1)$. Für festes ψ ist die Abbildung $\phi \mapsto d(\psi, \phi)$ stetig. In der Tat, sei $\phi_0 \in B_{B'}(0,1)$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen N so groß daß $2^{-N+2} < \epsilon$. Dann ist

$$U = \{\phi \in B_{B'}(0,1) \mid |\phi(e_i) - \phi_0(e_i)| < \frac{\epsilon}{2N} \, \forall i \in \{1, \ldots N\}\}$$

eine schwach offene Umgebung von ϕ_0 mit $|d(\psi, U) - d(\phi, \phi_0)| \subset [0, \epsilon)$.

Sei $e \in B_B(0,1)$ gegeben. Dann ist die Halbnorm $\phi \mapsto |\phi(e)|$ stetig in der metrischen Topologie. In der Tat, es möge $\phi_i \to \psi$ in der metrischen Topologie gelten. Dann gilt $|\phi_i(e_j) - \psi(e_j)| \to 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Sei nun j so gewählt, daß $\|e - e_j\| < \epsilon$. Dann gilt

$$\limsup_i |\phi_i(e) - \psi(e)| \leq 2\epsilon \ .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, gilt $|\phi_i(e) - \psi(e)| \to 0$. $\square$

Folgerung 5.13. *Der Raum der Charaktere $X(\mathbf{A})$ ist kompakt. Wenn $\mathbf{A}$ separabel ist, dann ist $X(\mathbf{A})$ auch metrisierbar.*

Aufgabe 5.7. *Zeige, daß wenn V ein separabler Banachraum ist, auch* $\mathrm{Hom}(V, V)$ *separabel ist.*

Definition 5.14. *Sei $\mathbf{A}$ eine kommutative Banachalrebra. In diesem Fall heißt die Menge der Charaktere $X(\mathbf{A})$, versehen mit der schwachen Topologie, das Spektrum von $\mathbf{A}$.*

5.5 Die Gelfandtransformation

In diesem Kapitel ist $\mathbf{A}$ eine kommutative Banachalgebra.

Satz 5.15 (Gelfand/Mazur). *Ist $\mathbf{A}$ ein Körper, dann ist $\mathbf{A}$ isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$.*

Proof. Sei $A \in \mathbf{A}$. Da $\sigma(A) \neq \emptyset$ ist, gibt es ein $\lambda \in \sigma(A)$, also ist $\lambda - A$ nicht invertierbar. Weil $\mathbf{A}$ ein Körper ist, gilt $A = \lambda$. Damit ist aber $\sigma(A) = \{\lambda\}$. Um die Abhängigkeit von A hervorzuheben, bezeichnen wir diesen Punkt mit λ_A. Die Abbildung

$$\mathbf{A} \to \mathbb{C} \quad A \mapsto \lambda_A$$

ist deshalb wohldefiniert, isometrisch und ein Isomorphismus von Algebren. $\square$

Definition 5.16. *Sei $A \in \mathbf{A}$. Die Funktion*

$$G_A : X(\mathbf{A}) \to \mathbb{C}, \quad G_A(\chi) := \chi(A)$$

heißt Gelfand–Transformierte von A.

Satz 5.17. *(i) Die Abbildung*

$$G : \mathbf{A} \to C(X(\mathbf{A})), \quad A \mapsto G_A$$

ist ein Homomorphismus von Banachalgebren.

(ii) $G_A(X(\mathbf{A})) = \sigma(A) \quad \forall A \in \mathbf{A}$

Proof. Die Abbildung $\chi \mapsto \chi(A)$ ist stetig, deshalb ist $G_A \in C(X(\mathbf{A}))$. Da

$$G_{A+B}(\chi) = \chi(A+B) = \chi(A) + \chi(B) = G_A(\chi) + G_B(\chi)$$

und analog

$$G_{AB}(\chi) = G_A(\chi)G_B(\chi)$$

gilt, ist G ein Algebrenhomomorphismus. G ist stetig, denn

$$\|G_A\| = \sup_{\chi \in X(\mathbf{A})} |G_A(\chi)| = \sup_{\chi \in X(\mathbf{A})} |\chi(A)| \leq \|A\|$$

Daraus folgt $\|G\| \leq 1$. Wegen $\|G_1\| = 1$ gilt sogar $\|G\| = 1$.

Es wurde schon bewiesen, daß $G_A(\chi) = \chi(A) \in \sigma(A)$ gilt. Daraus folgt $G_A(X(\mathbf{A})) \subset \sigma(A)$. Sei $\lambda \in \sigma(A)$. Wir zeigen, daß es ein $\chi \in X(\mathbf{A})$ mit $\chi(A) = \lambda$ gibt. Da $\lambda - A$ nicht invertierbar ist, ist $J := \mathbf{A}(\lambda - A)$ ein echtes Ideal in $\mathbf{A}$. Die Menge der J enthaltenden echten Ideale ist eine durch Inklusion halbgeordnete Menge. Wir zeigen mit Hilfe des Zornschen Lemmas, das es ein maximales echtes J enthaltendes Ideal gibt.

Sei K eine Kette J enthaltender echter Ideale von $\mathbf{A}$. Dann gilt für $I \in K$, daß $I \cap GL(\mathbf{A}) = \emptyset$.

Aufgabe 5.8. *Die Vereinigung* $\bar{K} := \overline{\bigcup_{I \in K} I}$ *ist wieder ein Ideal und obere Schranke der Kette. Zudem ist* $\bar{K}$ *echt.*

Nach dem Zornschen Lemma gibt es somit zu J ein echtes maximales Ideal $J \subset I_{\max}$, das zudem abgeschlossen ist, sonst wäre $I_{max} \subset \bar{I}_{max}$ und deshalb nicht maximal.

Der Quotient $\mathbf{A}/I_{\max}$ ist ein Körper und mit der Quotientennorm eine Banachalgebra. Nach dem Satz von Gelfand/Mazur folgt daraus: $\mathbf{A}/I_{max} \cong \mathbb{C}$.

Nach Konstruktion ist $(\lambda - A)$ im Kern des durch $\chi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/I_{max} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ gegebenen Charakters. Insbesondere gilt $\chi \in X(\mathbf{A})$ und $\chi(A) = \lambda$. $\square$

Satz 5.18 (Gelfand/Naimark). *Sei* $\mathbf{A}$ *eine* C^**–Algebra. Dann ist die Gelfandtransformation*

$$G : \mathbf{A} \to C(X(\mathbf{A})), \quad A \mapsto G_A$$

ein isometrischer Isomorphismus von C^**–Algebren.*

Proof. Wir sehen zuerst ein, daß G ein ein Homomorphismus von C^*–Algebren ist. Sei $A \in \mathbf{A}$. Dann gilt

$$A = \frac{A + A^*}{2} + i\frac{A - A^*}{2i} =: A_1 + i\ A_2,$$

wobei A_1 und A_2 selbstadjungiert sind. Wegen $\chi(A_i) \in \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ gilt folglich

$$\begin{aligned} \chi(A^*) &= \chi(A_1) - i\chi(A_2) \\ &= \overline{\chi(A_1) + i\chi(A_2)} \\ &= \overline{\chi(A)} \end{aligned}$$

Also gilt $G_{A^*} = \overline{G_A}$. Wir zeigen nun, daß $G_\mathbf{A}$ dicht in $C(X(\mathbf{A}))$ ist. Es gelten nämlich die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß:

- $G_\mathbf{A}$ trennt die Punkte von $X(\mathbf{A})$
- $1 = G_1 \in G_\mathbf{A}$
- $\overline{G_A} = G_{A^*} \in G_\mathbf{A}$
- $X(\mathbf{A})$ ist kompakt.

Schließlich zeigen wir, daß G isometrisch ist. Sei $B \in \mathbf{A}$ selbstadjungiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} r(B) &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[2^k]{\|B^{2^k}\|} \\ &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[2^k]{\|B\|^{2^k}} \quad (C^*\text{–Eigenschaft}) \\ &= \|B\|. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \|G_B\| &= \sup_{\chi \in X(\mathbf{A})} |\chi(B)| \\ &= \sup |\sigma(B)| \\ &= r(B) \\ &= \|B\| \end{aligned}$$

Für ein allgemeines $A \in \mathbf{A}$ folgt die Behauptung aus der Selbstadjungiertheit von A^*A, da

$$\|G_A\|^2 \;=\; \|\overline{G}_A G_A\| \;=\; \|G_{A^*A}\| \;=\; \|A^*A\| \;=\; \|A\|^2$$

Da $\mathbf{A}$ vollständig und G isometrisch ist, ist das Bild von G abgeschlossen in $C(X(\mathbf{A}))$. Da es zudem dicht sein sollte, muß G surjektiv sein.

Die Injektivität von G ist klar. □

5.6 Der Kalkül für stetige Funktionen

Sei $\mathbf{A}$ eine C^*–Algebra.

Definition 5.19. *Ein Operator $A \in \mathbf{A}$ heißt normal, wenn $A\,A^* = A^*A$ gilt.*

Sei $A \in \mathbf{A}$ ein normaler Operator. Wir betrachten die kommutative Polynomalgebra $\mathbb{C}[x,y]$ mit der $*$-Operation $x^* := y$, $y^* = x$. Durch $\Phi(A) : \mathbb{C}[x,y] \ni P \mapsto P(A,A^*) \in \mathbf{A}$ wird ein $*$-Homomorphismus von $*$-Algebren definiert. Wir setzen $C(A) := \overline{\mathtt{im}(\Phi)}$. Dies ist (als Abschluß einer kommutativen $*$ Algebra) eine kommutative C^*-Algebra.

Beispiele normaler Operatoren sind selbstadjungierte und unitäre Operatoren.

Satz 5.20. *Sei $A \in \mathbf{A}$ normal. Dann gibt es einen isometrischen Isomorphismus*

$$T : C(\sigma(A)) \to C(A).$$

Proof. Nach dem Satz von Gelfand–Naimark ist $G : C(A) \to C(X(C(A))$ ein Isomorphismus. Es wurde schon bewiesen, daß

$$G_A : X(C(A)) \to \sigma(A), \quad \chi \mapsto \chi(A) \in \sigma(A)$$

surjektiv ist. Daraus folgt die Injektivität und Isometrie von

$$T : C(\sigma(A)) \overset{G_A^*}{\to} C(X(C(A))) \overset{G^{-1}}{\to} C(A)$$

wobei $G_A^*(f) := f \circ G_A$. Wir zeigen, daß T auch surjektiv ist.

Für die Inklusion $I : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ gilt:

$$G_A^*(I)(\chi) = I \circ G_A(\chi) = I(\chi(A)) = \chi(A) \ ,$$

also $T(I) = A$. Analog erhält man $T(\bar{I}) = A^*$.

Da T ein Homomorphismus ist, folgt für $P \in \mathbb{C}[x, y]$ daß $T(P(I, \bar{I})) = \Phi(P)$. Da $\mathbb{C}(z, \bar{z})$ (als stetige Funktionen auf $\sigma(A)$ aufgefaßt) dicht in $C(\sigma(A))$ liegt ($\sigma(A)$ ist kompakt), und T isometrisch ist, ist $T(C(\sigma(A))) = C(A)$. □

Lemma 5.21. *Sei $A \in \mathbf{A}$ normal. Wenn $T' : C(\sigma(A)) \to C(A)$ ein stetiger C^*– Algebrenhomomorphismus mit $T'(I) = A$ ist ($I : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ ist die Inklusion), dann gilt $T = T'$.*

Proof. Die von I und $\bar{I}$ erzeugte Unteralgebra liegt dicht in $C(\sigma(A))$. Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt die Behauptung. □

Definition 5.22 (Stetiger Funktionenkalkül). *Sei $A \in \mathbf{A}$ normal, $T : C(\sigma(A)) \to C(A)$ sei wie oben definiert. Für $h \in C(\sigma(A))$ setzt man*

$$h(A) := T(h).$$

Satz 5.23. *Der Funktionenkalkül erfüllt:*

$$\begin{aligned}
(\alpha h + \beta h')(A) &= \alpha h(A) + \beta h'(A) \\
hh'(A) &= h(A)h'(A) \\
\bar{h}(A) &= h(A)^* \\
\sigma(h(A)) &= h(\sigma(A)) \\
g(h'(A)) &= g \circ h'(A), \ \textit{für } g \in C(\sigma(h'(A))),
\end{aligned}$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $h, h' \in C(\sigma(A))$

Proof.

Aufgabe 5.9. *Beweise diesen Satz.*

□

5.7 Beispiele und Anwendungen

Sei $\mathbf{A}$ eine C^*-Algebra.

Aufgabe 5.10. *Zeige, daß der stetige Funktionenkalkül mit dem Funktionenkalkül für kompakte selbstadjungierte Operatoren übereinstimmt.*

Aufgabe 5.11. *Zeige, daß jeder Operator $A \in \mathbf{A}$ eine Polarzerlegung $A = U|A|$ mit $|A| = \sqrt{A^*A}$ und einer partiellen Isometrie U besitzt.*

Aufgabe 5.12. *Sei $A \in \mathcal{A}$ normal. Sei $z_0 \in \sigma(A)$, $\sigma(A) \subset B_{\mathbb{C}}(z_0, r)$ und $f \in C(B_{\mathbb{C}}(z_0, r)$ eine holomorphe Funktion. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f in z_0. Zeigen Sie, daß dann $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (A - z_0)^n$ gilt.*

Aufgabe 5.13. *Sei $A \in \mathbf{A}$ normal. Sei W eine Zusammenhangskomponente von $\sigma(A)$. Zeigen Sie, daß $\chi_W(A)$ ein mit A kommutierender Projektor und $\sigma(PA) = W$ ist.*

Aufgabe 5.14. *Sei $\mathbf{A} = C(X)$ für einen kompakten topologischen Raum X. Sei $f \in C(X)$. Zeigen Sie, daß dann $\sigma(f) = \overline{f(X)}$ und für $h \in C(\sigma(f))$ auch $h(f) = h \circ f$ gilt.*

Sei $V = L^2(S^1)$ und $V \in C^\infty(S^1)$. Wir hatten gesehen, daß für große $C \in \mathbb{R}$ das Inverse $R_{-H}(C)$ des Operators $H + C = \Delta + V + C$ als selbstadjungierter Operator auf $L^2(S^1)$ eine sinnvolle Definition hatte. Es gilt $\sigma(R_{-H}(C)) \subset [0, c]$. Wir können mit Hilfe des Funktionenkalküls zeigen, daß das Anfangswertproblem der Schrödingergleichung (mit imaginärer Zeit)

$$\partial_t \psi(t) = -H\psi(t)$$

für jedes $\psi \in L^2(S^1)$ eine Lösung besitzt. Dazu interpretieren wir diese Gleichung zuerst als

$$\partial_t(\mathrm{e}^{-Ct}\psi(t)) = -(H + C)(\mathrm{e}^{-Ct}\psi(t)) \ .$$

Die formale Lösung dieser Gleichung ist dann $\mathrm{e}^{-Ct}\psi(t) = \mathrm{e}^{-t(H+C)}\psi(0)$. Sei nun $f_t(x) := \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Dann ist $f \in C(\sigma(R_{-H}(C))$ und $f_t(R_{-H}(C))$ eine sinnvolle Definition von $\mathrm{e}^{-t(H+C)}$.

Wir erhalten die Lösung des Anfangswertproblems als

$$\psi(t) = \mathrm{e}^{tC} f_t(R_{-H}(C))\psi(0).$$

Die eigentliche Schrödingergleichung lautet

$$\partial_t \psi(t) = iH\psi(t)\ .$$

Aufgabe 5.15. *Warum kann man zur Lösung des Anfangswertproblems dieser Gleichung nicht analog zu dem oben beschriebenen Fall vorgehen.*

6 Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren auf Hilberträumen - meßbare Funktionen

6.1 Überblick

Wir werden die Feinstruktur des Spektrums eines selbstadjungierten Operators A auf einem Hilbertraum im Detail untersuchen. Wir werden den Operator durch ein projektorwertiges Maß beschrieben. Letztlich werden wir in der Lage sein, für wesentlich beschränkte meßbare Funktionen f den Operator $f(A)$ zu definieren.

6.2 Projektorwertige Maße

Sei V ein Hilbertraum. Ein (orthogonaler) Projektor auf V ist ein Operator $P \in \mathrm{Hom}(V,V)$ mit $P = P^*$ und $P^2 = P$. Dann ist P genau die Projektion auf den Unterraum PV bezüglich der orthogonalen Zerlegung $V = PV \oplus (1-P)V$. Die Menge der Projektoren auf V werde mit $\mathcal{P}(V)$ bezeichnet.

Sei $(X,\mathcal{R})$ ein meßbarer Raum.

Definition 6.1. *Ein projektorwertiges Maß auf* $(X,\mathcal{R})$ *ist eine Abbildung*

$$E : \mathcal{R} \to \mathcal{P}(V)$$

mit

(i) $E(\emptyset) = 0$

(ii) $E(X) = 1$ *(Zerlegung der Eins)*

(iii) $E(U \cap V) = E(U)\, E(V)$

(iv) $E(U \cup V) = E(U) + E(V) - E(U \cap V)$

(v) $E\left(\bigcup_{n=1}^{N} U_n\right) \overset{N\to\infty}{\to} E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right)$ *im starken Sinn, wobei die Folge* (U_n) *aus paarweise disjunkten Teilmengen besteht (starke* σ*–Additivität).*

Hier ist ein Beispiel. Sei μ ein positives Maß auf $(X, \mathcal{R})$ und $V := L^2(X, \mu)$. Durch

$$E(U)f := \chi_U f\ , \quad U \in \mathcal{R},\ \ f \in L^2(X, \mu)$$

wird ein projektorwertiges Maß auf X definiert.

Sei nun $B(X) := \{f : X \to \mathbb{C}$ beschränkt und meßbar$\}$. Mit

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

und $f^*(x) := \bar{f}(x)$ wird $B(X)$ eine C^*–Algebra.

Wie in der komplexen Maßtheorie möchte man die Integration von Funktionen aus $B(X)$ bezüglich projektorwertiger Maße definieren. Das Ergebnis der Integration liegt dann in $\mathrm{Hom}(V, V)$. Dazu nutzt man aus, daß jede solche Funktion durch eine Folge von einfachen Funktionen gleichmäßig approximiert werden kann. Das Integral einer Treppenfunktion hat eine offensichtliche Definition

Definition 6.2. *Ist* $f \in B(X)$ *einfach,* $f = \sum a_i\, \chi_{A_i}$*, so definiert man*

$$\begin{aligned} E(f) &:= \int f(s)\ E(ds) \\ &:= \sum_{i \in I} a_i\ E(A_i). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Eindeutigkeit der reduzierten Darstellung von f überzeugt man sich leicht davon, daß diese Definition unabhängig von der Wahl der Darstellung von f ist.

Lemma 6.3. *Die Menge der einfachen Funktionen liegt dicht in* $B(X)$*.*

Proof. Sei $f \in B(X)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze

$$A_k := f^{-1}\big((\varepsilon(k - \frac{1}{2}),\ \varepsilon(k + \frac{1}{2})]\big) \text{ für } k \in \mathbf{Z}$$

und

$$f_\varepsilon := \sum_{k \in \mathbf{Z}} \varepsilon k\ \chi_{A_k}.$$

Da f beschränkt ist, ist f_ε einfach (d.h. die Summe ist endlich) und außerdem gilt nach Konstruktion $\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. □

Lemma 6.4.

1. *Für ein einfaches $f \in B(X)$ gilt $\|E(f)\| \leq \|f\|$.*
2. *E besitzt eine stetige Ausdehnung zu einer Abbildung auf $E : B(X) \to \mathrm{Hom}(V, V)$.*
3. *E ist ein $*$–Homomorphismus.*

Proof. Sei $f = \sum_i a_i \chi_{A_i}$, wobei die Mengen A_i paarweise disjunkt angenommen werden. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\|E(f)\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|E(f)x\|^2 \\
&= \sup_{\|x\|=1} < \sum_i a_i\, E(A_i)x,\ \sum_j a_j\, E(A_j)x > \\
&= \sup_{\|x\|=1} \sum_{i,j} \bar{a}_i\, a_j < x,\ E(A_i)E(A_j)x > \\
&= \sup_{\|x\|=1} \sum_i |a_i|^2 < x,\ E(A_i)x > \quad \text{wegen } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \max_i |a_i|^2 \sum_i < x,\ E(A_i)x > \\
&\leq \|f\|^2
\end{aligned}$$

Die Linearität der Abbildung E ist klar. Damit hat E eine stetige Ausdehnung auf ganz $B(X)$. Um einzusehen, daß diese Abbildung ein $*$-Homomorphismus ist, genügt es einzusehen, daß $E(fg) = E(f)E(g)$ und $E(f^*) = E(f)^*$ für einfache Funktionen gilt. Die zweite Identität ist klar wegen $E(A)^* = E(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

Zwei einfache Funktionen f und g lassen sich mittels eines gemeinsamen Systems von paarweise disjunkten Mengen $\{A_i|\ i \in I\} \subset \mathcal{R}$ darstellen:

$$f = \sum_{i \in I} f_i \, \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{i \in I} g_i \, \chi_{A_i}$$

Damit ergibt sich für die Multiplikation:

$$E(fg) = E(\sum_{i \in I} f_i \, g_i \, \chi_{A_i}) = \sum_{i \in I} f_i \, g_i \, E(A_i) = E(f)E(g).$$

□

Sei $v \in V$.

Aufgabe 6.1. *Zeige, daß $\mathcal{R} \ni A \mapsto < v, E(A)v > \in \mathbb{C}$ ein positives Maß $\mu_{v,v}$ auf X ist. Zeige weiter, daß für $f \in B(X)$ gilt*

$$\int_X f d\mu_{v,v} = < v, E(f)v > \quad .$$

6.3 Der Kalkül für wesentlich beschränkte, meßbare Funktionen

Sei $(X, \mathcal{R})$ weiterhin ein meßbarer Raum und $E : \mathcal{R} \to \mathcal{P}(V)$ ein projektorwertiges Maß mit Werten in den Projektoren auf dem Hilbertraum V.

Definition 6.5. *Eine meßbare Funktion $f : X \to C$ heißt E–wesentlich beschränkt, falls*

$$\|f\|_E := \inf_{U \in \mathcal{R}, E(U)=1} \ \sup_{s \in U} |f(s)| \ < \infty \ .$$

Lemma 6.6. *Sei $f : X \to \mathbb{C}$ eine wesentlich beschränkte meßbare meßbare Funktion. Dann gibt es eine beschränkte meßbare Funktion $f' \in B(X)$ mit $E(\{f \neq f'\}) = 0$.*

Proof. Es gibt es $U \in \mathcal{R}$ mit $E(U) = 1$, so daß $\sup_{s \in U} |f(s)| < \infty$ ist. Wir definieren f' durch $f'|_U := f|_U$ und $f'|_{X-U} := 0$. □

Definition 6.7. *Zwei wesentlich beschränkte meßbare komplexwertige Funktionen f, f' auf X heißen E–äquivalent (wir schreiben $f \sim_E f'$), falls $\|f - f'\|_E = 0$. Die Menge der Äquivalenzklassen werde mit $EB(X)$ bezeichnet.*

Man prüft in der Tat leicht nach, daß E-Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation ist.

Wir definieren die Norm einer Klasse $[f] \in EB(X)$ durch $\|[f]\|_E := \|f\|_E$. Dies ist unabhängig von der Wahl des Vertreters . In Zukunft werden wir die Elemente $[f], [g]$ von $EB(X)$ einfach (wie in der Maßtheorie üblich) durch ihre Repräsentaten f, g bezeichnen. Der Raum $EB(X)$ wird mit $\|.\|_E$ zu einem Banachraum (dies ist völlig analog zu der Konstruktion von $L^\infty(X, \mathcal{R}, \mu)$ für einen Maßraum $(X, \mathcal{R}, \mu)$).

Sind $f, f' \in B(X)$ und gilt $\|f - f'\|_E = 0$, dann gilt offensichtlich auch $E(f) = E(f')$. Sei $N := \{f \in B(X) \mid \|f\|_E = 0\}$. Da $f \mapsto \|f\|_E$ stetig ist, ist N ein abgeschlossener linearer Unterraum. Man überzeigt sich leicht, daß N ein Ideal in $B(X)$ ist. Damit ist $EB(X) = B(X)/N$ als Banachalgebra.

Der Homomorphismus $E : B(X) \to B(V)$ faktorisiert zu einem stetigen Homomorphismus über $B(X)/N = EB(X)$. Daraus folgt auch $\|E(f)\| \le \|f\|_E$.

Satz 6.8. *Die Abbildung $E : EB(X) \to B(V)$ ist ein stetiger, isometrischer Isomorphismus auf eine abgeschlossene kommutative Unteralgebra von $B(V)$.*

Proof. Wir zeigen, daß die Abbildung $E : EB(X) \to B(V)$ eine Isometrie ist. Sei $EB(X) \ni f \ge 0$. Für $\varepsilon > 0$ gilt $E(\{f \ge \|f\|_E - \varepsilon\}) \ne 0$. Wähle $\varphi \in E(\{f \ge \|f\|_E - \varepsilon\})V$ mit $\|\varphi\| = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|E(f)\| &\ge \; < \varphi, E(f)\varphi > \\ &= \int f(s) < \varphi, E(ds)\varphi > \\ &\ge (\|f\|_E - \varepsilon) \int\limits_{\{f \ge \|f\|_E - \varepsilon\}} < \varphi, E(ds)\varphi > \\ &= (\|f\|_E - \varepsilon) < \varphi, E(\{f \ge \|f\|_E - \varepsilon\})\varphi > \\ &= (\|f\|_E - \varepsilon) \; . \end{aligned}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, gilt $\|E(f)\| \ge \|f\|_E$. Zusammen mit der schon bewiesenen umgekehrten Ungleichung ergibt sich letztlich $\|E(f) = \|f\|_E$ für nichtnegative f.

Für eine beliebige Funktion $f \in EB(X)$ gilt $f^* f \ge 0$. Wir schließen weiter

$$\|f\|_E^2 = \|f^* f\|_E = \|E(f^* f)\| = \|E(f)^* E(f)\| = \|E(f)\|^2$$

Dies zeigt, daß $E : EB(X) \to B(V)$ eine Isometrie ist. Damit ist E ein Isomorphismus auf das Bild, welches eine abgeschlossene kommutative Unteralgbera von $B(V)$ ist. □

6.4 Der Spektralsatz für normale beschränkte Operatoren

Sei $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ ein normaler Operator und $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ sein Spektrum. Sei $\mathcal{B}$ die Borelalgebra auf $\sigma(A)$.

Satz 6.9. *Es gibt ein eindeutig bestimmtes projektorwertiges Maß $E : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(V)$ derart, daß für alle $x, y \in V$ das komplexe Maß $\mathcal{B} \ni U \mapsto \mu_{x,y}(U) :=< x, E(U)y >$ regulär ist und für $f \in C(\sigma(A))$ die Relation $E(f) = f(A)$ gilt.*

Definition 6.10. *Man nennt dieses projektorwertige Maß das Spektralmaß von A und schreibt dafür oft E_A, wenn man die Abhängigkeit von A hervorheben möchte.*

Proof. Seien $x, y \in V$. Durch $C(\sigma(A)) \ni f \mapsto< x, E(f)y >$ wird eine stetige Linearform $\phi_{x,y} \in C(\sigma(A))'$ definiert. Da $\sigma(A)$ kompakt ist, gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz 2.39 ein eindeutig bestimmtes reguläres komplexes Maß $\mu_{x,y}$ auf $\mathcal{B}$ mit

$$\phi_{x,y}(f) = \int_{\sigma(A)} f d\mu_{x,y} \ .$$

Sei $U \in \mathcal{B}$. Dann ist $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}(U)$ eine hermitische Sesquilinearform auf V. Wir zeigen, daß sie stetig ist. Zunächst wird gezeigt, daß diese Sesquilinearform ist positiv semidefinit ist. Die Linearform $\phi_{x,x}$ ist positiv, denn für $f \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\phi_{x,x}(f) &= \ =< x, f(A)x > \\
&= < x, (\sqrt{f}\sqrt{f})(A)x > \\
&= < x, \sqrt{f}(A)\sqrt{f}(A)x > \\
&= < \sqrt{f}(A)x, \sqrt{f}(A)x > \\
&\geq 0 \ .
\end{aligned}$$

Daher ist auch das Maß $\mu_{x,x}$ positiv, d.h. für $U \in \mathcal{B}$ ist $\mu_{x,x}(U) \geq 0$. Die quadratische

Form zu dieser Sesquilinearform ist beschränkt, da

$$\begin{aligned} \mu_{x,x}(U) &= \int \chi_U d\mu_{x,x} \\ &\leq \int_{\sigma(A)} d\mu_{x,x} \\ &= \|x\|^2 \ . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit der Sesquilinearform.

Die stetige hermitische Sesquilinearform $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}(U)$ sich durch einen eindeutig bestimmten selbstadjungierten beschränkten Operator darstellen, den wir mit $E(U)$ bezeichnen werden. Wegen $\mu_{x,x}(U) \leq \|x\|^2$ ist $\|E(U)\| \leq 1$.

Wir zeigen die folgenden Eigenschaften.

(i) $E(U)^* = E(U)$

(ii) $E(\emptyset) = 0$ und $E(\sigma(A)) = 1$

(iii) $\|E(U)\| \leq 1$

(iv) $E(U \cup U') = E(U) + E(U') - E(U \cap U')$

(v) E ist schwach σ–additiv, d.h. für eine Folge paarweise disjunkter Borelmengen $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und alle $x, y \in V$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} < x,\ E(\bigcup_{n=1}^{N} U_n)y >=< x,\ E(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n)y > \ .$$

(vi) $E(U)E(U') = E(U \cap U')$

(vii) $E(U) \in \mathcal{P}(V)$

(viii) E ist stark σ–additiv, d.h. für eine Folge paarweise disjunkter Borelmengen $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und für alle $x \in V$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} E(\bigcup_{n=1}^{N} U_n)x \to E(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n)x$$

Die Eigenschaften (i) und (iii) sind ist klar nach Konstruktion. Die Eigenschaften (ii), (iv) und (v) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von $\mu_{x,y}$ als komplexes Maß.

Die Relation (vi) wird unten gezeigt werden. Aus (vi) folgt direkt (vii). Die Eigenschaft (viii) ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
\|E(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n)x - E(\bigcup_{n=1}^{N} U_n)x\|^2 &= \|E(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} U_n)x\|^2 \\
&= < x, E(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} U_n)x >
\end{aligned}$$

wobei der letzte Term wegen (v) für $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Wir zeigen nun (vi). Seien $f, g \in C(\sigma(A))$. Die Gleichung

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(A)} f d\mu_{x,g(A)y} &= < x, f(A)g(A)y > \\
&= < x, (fg)(A)y > \\
&= \int fg d\mu_{x,y}
\end{aligned}$$

besagt

$$\mu_{x,g(A)y} = g\mu_{x,y} \ .$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(A)} g d\mu_{E(U)x,y} &= < E(U)x, g(A)y > \\
&= < x, E(U)g(A)y > \\
&= \int_U d\mu_{x,g(A)y} \\
&= \int_U g d\mu_{x,y} \ .
\end{aligned}$$

Daraus schließen wir, daß

$$\mu_{E(U)x,y} = \chi_U \mu_{x,y} \ .$$

Damit erhält man (vi):

$$\begin{aligned}
< x, E(U)E(U')y > &= < E(U)x, E(U')y > \\
&= \mu_{E(U)x,y}(U') \\
&= \int_{\sigma(A)} \chi_{U'} d\mu_{E(U)x,y} \\
&= \int \chi_{U'}\chi_U d\mu_{x,y} \\
&= \int \chi_{U' \cap U} d\mu_{x,y} \\
&= < x, E(U \cap U')y > \ .
\end{aligned}$$

$E : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(V)$ ist also ein projektorwertiges Maß. Es gilt für $f \in C(\sigma(A))$ und alle $x, y \in V$ daß

$$< x, f(A)y >= \int_{\sigma(A)} f d\mu_{x,y} =< x, E(f), y > ,$$

also $f(A) = E(f)$. $\square$

6.5 Beipiele

Wir betrachten den Raum $V = L^2(\mathbb{R}, |\Delta|)$. Wir betrachten den Integraloperator $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$, welcher durch den Kern

$$a(x, y) = \mathrm{e}^{-|x-y|}$$

gegeben ist, also

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x-y|} f(y) dy .$$

Aufgabe 6.2. *Zeige, daß* $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ *ist. Zeige weiter, daß A selbstadjungiert und nicht-negativ ist.*

Es gilt für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ daß

$$(\Delta + 1)Af = A(\Delta + 1)f$$

gilt, wobei $\Delta f = -f''$.

Aufgabe 6.3. *Zeige diese Gleichung.*

In anderen Worten, $A = R_1(-\Delta)$ nach einer entsprechenden Definition der rechten Seite. Wir wollen das Spektralmaß E von A bestimmen. Da $\sigma(A) \subset [0, \infty)$ gilt, kann man E als Maß auf $[0, \infty)$ betrachten. Wir behaupten, daß $E((\lambda, \infty)) = 0$ für $\lambda \geq 1$ und für $\lambda \in (0, 1)$ der durch den Kern

$$e(\lambda)(x, y) = \frac{2 \sin((\lambda^{-1} - 1)(y - x))}{y - x}$$

gegebene Operator ist. Daraus kann durch bilden Differenzen der Kern des Projektors $E(a, b)$ gewonnen werden.

Aufgabe 6.4. *Zeige diese Behauptung. (Hinweis: Zeige zuerst, daß E (durch den angegebenen Kern definiert) ein projektorwertiges Maß ist, A mit E kommutiert und für alle* $\epsilon > 0$

$$\|(\lambda - A)E((\lambda, \lambda + \epsilon))\| \leq \epsilon$$

gilt.)

Ein einfacherer Weg, diese Aufgabe zu bearbeiten, ist es, die Fouriertransformation zu benutzen.

Wir betrachten nun $V := L^2(S^1)$. Für $q \in \mathbb{R}$ ist der Translationsoperator definiert als

$$A_q \in \mathrm{Hom}(V, V), \quad (A_q f)(t) := f(t - q).$$

A_q ist unitär und daher normal. Außerdem gilt $A_q^* = A_{-q}$. In unserer ONB $f_n(t) = \exp(2\pi inx)$ gilt

$$A_q f_n = \mathrm{e}^{-2\pi inq} f_n \ .$$

Daraus erhält man das Spektrum von A_q.

$$\sigma(A_q) = \begin{cases} \{|z| = 1\} & q \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ \{\mathrm{e}^{-2\pi inq} \mid n \in \mathbb{Z}\} & q \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wenn $q \in \mathbb{Q}$, so ist das Spektrum endlich. Für $U \in \mathcal{B}$ ist $E(U)$ der Projektor auf den von $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ mit } e^{-2\pi inq} \in U\}$ aufgespannten abgeschlossenen Unterraum in $L^2(S^1)$.

7 Harmonische Analysis - Fouriertransformation - explizite Spektraldarstellungen

7.1 Überblick

Nachdem die Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren auf der abstrakten Ebene geklärt ist, ergibt sich die Frage, wie man diese in Beispielen explizit verstehen kann.

Dieses Problem soll für invariante Operatoren, welche auf L^2-Räumen über abelschen Gruppen wie $\mathbb{R}^1$, S^1, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ erkärt sind, mit Methoden der harmonischen Analysis studiert werden. In den Beispielen werden wir Rahmen der Fourieranalysis (Bestimmung der dualen Gruppe, Haarsches Maß, Fouriertransformation, Plancherelsatz) explizit entwickeln und anwenden.