

Ulrich Bunke*

23. März 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Integrationstheorie	3
1.1	Aspekte des Integralbegriffs	3
1.1.1	Das Riemann Integral	3
1.1.2	Iteriertes Integral	5
1.1.3	Ansätze zur Verbesserung des Integralbegriffs	5
1.2	Maße	6
1.2.1	Algebren und Prämaße	6
1.2.2	σ -Algebren und Maße	11
1.2.3	Äußere Maße, Ausdehnung von Prämaßen zu Maßen, Vollständigkeit	16
1.3	Das Integral, Meßbarkeit	22
1.3.1	Das Integral positiver Funktionen	22
1.3.2	Approximationssätze	27
1.3.3	Grenzwertsätze für das Integral	30
1.3.4	Integrierbare Funktionen	33
1.3.5	Differenzieren unter dem Integral	37
1.4	L^p -Räume	39
1.4.1	Definitionen	39
1.4.2	Vollständigkeit	43
1.4.3	Weitere Eigenschaften	45
1.5	Produkt von Maßräumen, Satz von Fubini	47
1.5.1	Produkt von Maßräumen	47
1.5.2	Iterierte Integrale	50
1.5.3	Mehrfache und abzählbare Produkte	53

*Göttingen, bunke@uni-math.gwdg.de

1.6	Der Satz von Radon-Nikodym	55
1.6.1	Dichtefunktionen	55
1.6.2	Signierte Maße, Hahnsche Zerlegung	57
1.6.3	Der Satz von Radon-Nikodym	59
1.7	Instruktive Argumente	62
2	Differentialformen und der Satz von Stokes	65
2.1	Vektorfelder und 1-Formen	65
2.1.1	Analysis versus Algebra	65
2.1.2	Grundlegende Definitionen	66
2.1.3	Integration über Wege	69
2.1.4	Koordinaten	70
2.1.5	Derivationen	71
2.2	Multilineare Abbildungen	72
2.2.1	Definition von $\Lambda^p V^*$	72
2.2.2	Das \wedge -Produkt	73
2.2.3	Innere Multiplikation	75
2.2.4	Differentiale und Derivationen	78
2.3	Differentialformen	79
2.3.1	Grundlegende Definitionen	79
2.3.2	Integral über p -Fächen	80
2.3.3	Das Differential	81
2.3.4	Ketten und der Satz von Stokes	85
2.3.5	Innere Multiplikation und Lieableitung	87
3	Untermannigfaltigkeiten	90
3.1	Untermannigfaltigkeiten	90
3.1.1	Definition, Darstellung als Graph, Tangentialraum	90
3.1.2	Abbildungen, Karten, Vektorfelder	93
3.1.3	Formen	97
3.2	Integration von Formen über Untermannigfaltigkeiten	100
3.3	Berandete Untermannigfaltigkeiten, Satz von Stokes	103
3.4	Sätze der Vektoranalysis	105

1 Integrationstheorie

1.1 Aspekte des Integralbegriffs

1.1.1 Das Riemann Integral

Der Einfachheit betrachten wir das Riemann-Integral auf ganz \mathbb{R} für reellwertige Funktionen.

Definition 1.1. *Eine einfache Funktion auf \mathbb{R} ist eine endliche reelle Linearkombination charakteristischer Funktionen halboffener Intervalle der Form $[a, b)$. Sei $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ die Menge der einfachen Funktionen.*

Wir definieren das Integral $\int_{\mathbb{R}} : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b)} := b - a$ und lineare Ausdehnung. Für eine beliebige reellwertige Funktion f auf \mathbb{R} definieren wir das Unterintegral und das Oberintegral durch

$$\int_{*\mathbb{R}} f := \sup_{\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}), \phi \leq f} \int_{\mathbb{R}} \phi$$
$$\int_{\mathbb{R}}^* f := \inf_{\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}), \phi \geq f} \int_{\mathbb{R}} \phi$$

Hierbei ist das Infimum bzw. Supremum über eine leere Menge definitionsgemäß gleich ∞ bzw. $-\infty$.

Definition 1.2. *f heißt Riemann-integrierbar, falls das Oberintegral von f endlich und gleich dem Unterintegral von f ist. Dieser gemeinsame Wert ist das Integral $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ von f . Mit $R(\mathbb{R})$ bezeichnen wir den Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen.*

Es gilt :

1. $\int_{\mathbb{R}} : R(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.
2. $C_c(\mathbb{R}) \subset R(\mathbb{R})$.
3. Kompakt getragene Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen liegen in $R(\mathbb{R})$.

4. Positivität : Das Integral nichtnegativer Funktionen ist nichtnegativ.
5. Stetigkeit : Konvergiert eine Folge $(f_i)_i$ in $R(\mathbb{R})$ gleichmäßig gegen f , dann ist $f \in R(\mathbb{R})$, und das Integral von $\int_{\mathbb{R}} f = \lim_i \int_{\mathbb{R}} f_i$.
6. Transformationsformel : Ist $\Phi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus offener Teilmengen von \mathbb{R} und gilt für eine stetige Funktion $\text{supp}(f) \subset V$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f \circ \Phi |\Phi'| .$$

7. Hauptsatz : Ist $f \in R(\mathbb{R})$ stetig, dann ist durch $F(x) := \int_{\mathbb{R}} f \chi_{(-\infty, x]}$ eine Stammfunktion von f gegeben.

Diese Integralbegriffe haben u.a. folgende Schwächen

1. Wenn $f \in R(\mathbb{R})$, so ist f beschränkt und hat kompakten Träger.
2. Auf $C_c(\mathbb{R})$ möchte man für $p \in [1, \infty)$ eine Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{1/p}$$

betrachten. Insbesondere kommt $\|\cdot\|_2$ von einem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} fg .$$

Allerdings ist $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ nicht vollständig. Die Natur der Elemente der abstrakten Vervollständigung ist zu klären.

3. Sei $f(x) := 1$ falls x rational und $|x| \leq 1$ und $f(x) = 0$ sonst. Dann ist das Oberintegral gleich 2 und das Unterintegral gleich 0. Sehr irreguläre Funktionen sind also auch nicht Riemann-integrierbar Allerdings existiert eine Folge (f_i) in $R(\mathbb{R})$, welche punktweise monoton von unten gegen f konvergiert mit $\int_{\mathbb{R}} f_i = 0$.

Aufgabe 1.1. Zeige die Behauptungen 1. bis 3.

Sinngemäß kann man auf diese Weise ein Riemann-Integral auf \mathbb{R}^n definieren mit ähnlichen positiven Eigenschaften und Schwächen.

1.1.2 Iteriertes Integral

Definition 1.3. Für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ definieren wir $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ durch iterierte eindimensionale Integration :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1 .$$

Dieses Integral stimmt mit dem Riemann-Integral überein. Sie ist besonders gut geeignet, die Transformationsformel zu beweisen. Ist $\Phi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus offener Teilmengen des \mathbb{R}^n und gilt für eine stetige Funktion $\text{supp}(f) \subset V$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\Phi(x)) |\det J\Phi(x)| dx .$$

Eine Schwäche dieser Definition wird hierbei noch deutlicher. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$, so möchte man das Volumen von A definieren durch $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)dx$. Leider ist die charakteristische Funktion nicht stetig.

1.1.3 Ansätze zur Verbesserung des Integralbegriffs

Ziele betreffen :

- Die Vergrößerung der Menge der Integrierbaren Funktionen.
- Die Verbesserung der Stetigkeitssaussagen : Limes unter das Integral ziehen unter schwächeren Voraussetzungen

Ein Ansatz ist der folgende. Für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$ sei $a_i(n) := \frac{i}{2^n}$ und $b_i(n) = \frac{i+1}{2^n}$. Ferner setzen wir $I_i(n) = [a_i(n), b_i(n))$.

Für eine stetige monotone Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir

$$S(f, n) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i(n) \text{vol}(f^{-1}(I_i(n))) .$$

In der Tat ist $f^{-1}(I_i(n))$ ein Intervall.

Aufgabe 1.2. Zeige, daß für $m \geq n$ gilt

$$0 \leq S(f, m) - S(f, n) \leq \frac{1}{2^n} .$$

Eine alternative Definition des Integrals von $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ wäre dann also

$$\int_0^1 f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, n) .$$

Um mit dieser Definition allgemeinere Funktionen zu integrieren, muß $\text{vol}(A)$ für allgemeinere Teilmengen $A \subset [0, 1]$ definiert sein. Will man alle stetigen Funktionen integrieren, so sollten alle offenen Mengen ein Volumen haben. Für unbeschränkte Funktionen oder Integrationsgebiete muß die Definition noch verbessert werden.

Wir werden anders vorgehen. Die Idee ist die folgende. Wir werden eine Teilmenge $R \subset \mathcal{R}(\mathbb{R})$ (die Lebesgue σ -Algebra) finden, welche u.a. alle offenen oder abgeschlossenen Mengen enthält. Auf R werden wir ein Volumen (das Lebesgue Maß) $\text{vol} : R \rightarrow [0, \infty]$ definieren. Unter einer einfachen Funktion verstehen wir eine endliche reelle Linearkombination von charakteristischen Funktionen von Elementen aus R . Wir definieren ein Integral $\int_{\mathbb{R}}'$ für einfache Funktionen durch $\int_{\mathbb{R}}' \chi_A := \text{vol}(A)$ und lineare Fortsetzung. Für beliebiges $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir das Unterintegral

$$\int_{\mathbb{R}} f := \sup_{\phi \leq f} \int_{\mathbb{R}}' \phi ,$$

wobei ϕ einfache Funktionen durchläuft. Auf allen Funktionen betrachtet hat dieses keine guten Eigenschaften. So ist es nicht einmal linear in f . Deshalb führen wir den Begriff der Meßbarkeit ein : Wir nennen f meßbar, wenn $f^{-1}(U) \in R$ für alle offenen $U \subset \mathbb{R}$. Auf dem Unterraum $\mathcal{L}(\mathbb{R}, R)$ der meßbaren Funktionen hat das Integral gute Eigenschaften. Auf der anderen Seite ist $\mathcal{L}(\mathbb{R}, R)$ sehr umfassend : man kann keine Funktion explizit angeben, welche nicht darin enthalten ist.

1.2 Maße

1.2.1 Algebren und Prämaße

Sei Ω eine Menge. Eine Volumen ordnet Teilmengen $X \subset \Omega$ Zahlen $\text{vol}(X) \in \mathbb{R}$ zu. Natürliche Forderungen an ein Volumen sind

1. $\text{vol}(X) \geq 0$ wegen der Volumeninterpretation.
2. Für eine endliche disjunkte Zerlegung $X = \cup_i X_i$ gilt $\sum_i \text{vol}(X_i) = \text{vol}(X)$.

Diese Bedingungen kann man in eine ganz allgemeinen Rahmen stellen und charakterisieren Prämaße. Zuerst betrachten wir die potentiellen Definitionsbereiche von Prämaßen.

Mit $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von Ω .

Definition 1.4. *Eine Algebra auf Ω ist eine Teilmenge $R \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit :*

1. $\emptyset \in R, \Omega \in R$.
2. R ist stabil unter Bildung endlicher Vereinigungen.
3. R ist stabil unter Bildung von Komplementen.

Aufgabe 1.3. 1. Zeige, daß $\{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{P}(\Omega)$ Algebren auf Ω sind.

2. Sei R eine Algebra. Zeige, daß R abgeschlossen unter der Bildung endlicher Durchschnitte und Komplemente der Form $A \setminus B$ für $A, B \in R$ mit $B \subset A$ ist.
3. Zeige, daß für eine Familie (R_i) von Algebren der Durchschnitt $\bigcap_i R_i$ auch eine Algebra ist.
4. Sei $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Familie von Algebren. Zeige, daß $\bigcup_i R_i$ eine Algebra ist. Gilt diese Aussage, wenn man die Voraussetzung aufsteigend wegläßt ?

Um Algebren zu beschreiben, ist die folgende Konstruktion sehr hilfreich. Sei S eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge von Ω .

Lemma 1.5. *Es gibt eine eindeutig bestimmte minimale Algebra $R(S)$, welche S enthält.*

Proof. Der Durchschnitt von beliebigen Familien von Algebren ist eine Algebra. Die $\mathcal{P}(\Omega)$ ist eine S enthaltende Algebra. Wir erhalten also $R(S)$ als Durchschnitt aller S enthaltenden Algebren. □

1. Auf \mathbb{R} haben wir die Algebra $R(Int)$, welche von der Menge $Int := \{[a, b] \mid a < b\}$ erzeugt wird.
2. Für $r \in \mathbb{N}$ haben wir die dyadische Algebra D_r der Stufe r , welche von der Menge der Intervalle der Form $[\frac{p}{2^r}, \frac{p+1}{2^r})$, $p \in \mathbb{Z}$ erzeugt wird. Es gilt für $s \geq r$, daß $D_r \subset D_s$.

3. Auf \mathbb{R}^n haben wir die Algebra $R(Int)$, welche von der Menge der Produkte der Form $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$ erzeugt wird.
4. Die dyadische Algebra D_r der Stufe $r \in \mathbb{N}$ auf \mathbb{R}^n wird durch Produkte der Form $\prod_{i=1}^n [\frac{p_i}{2^r}, \frac{p_i+1}{2^r})$, $p_i \in \mathbb{Z}$, erzeugt.
5. Die Vereinigung $D := \bigcup_r D_r$ ist die dyadische Algebra.
6. Wir betrachten auch die beschränkte dyadische Algebra \bar{D}_r , welche von den Produkten $\prod_{i=1}^n [\frac{p_i}{2^r}, \frac{p_i+1}{2^r})$ mit $p_i \in \mathbb{Z}$, $-2^{2r} \leq p_i < 2^{2r}$ erzeugt wird. Es gilt für $s \geq r$ daß $\bar{D}_r \subset \bar{D}_s$.

Aufgabe 1.4. Zeige, daß $\bigcup_r \bar{D}_r = D$ gilt.

7. Sei (Ω, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Dann können wir die von \mathcal{T} erzeugte Algebra berachten.
8. Seien $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ die p -adischen ganzen Zahlen. Für $r \in \mathbb{N}$ sei mit $\pi_r : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ die Projektion bezeichnet. Wir betrachten die Menge $R \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z}_p)$ welche aus allen Mengen der Form $p_r^{-1}(A)$ mit $A \subset \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}$ besteht.

Aufgabe 1.5. Zeige, daß R eine Algebra ist.

9. Wir betrachten eine endliche Menge A und setzen $\Omega := \times_{i \in \mathbb{N}} A$. Für $r \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge $S_r \subset \mathcal{P}(\Omega)$, deren Elemente die Menge der Teilmengen

$$M(\times_{i=1}^r a_i) := \{ \times_{i \in \mathbb{N}} b_i \mid b_i = a_i \forall i \leq r \}$$

für alle $\times_{i=1}^r a_i \in \times_{i=1}^r A$. Es gilt $R(S_r) \subset R(S_{r+1})$. Wir betrachten die Algebra $R := \bigcup_r R(S_r)$.

Definition 1.6. Ein Paar (Ω, R) einer Menge mit ausgezeichnetener Algebra heißt prämeßbarer Raum.

Definition 1.7. Ein Prämaß μ auf einem prämeßbaren Raum (Ω, R) ist eine Abbildung $\mu : R \rightarrow [0, \infty]$ mit der Eigenschaft, daß für jede paarweise disjunkte endliche Familie (X_i) in R gilt :

$$\sum_i \mu(X_i) = \mu\left(\bigcup_i X_i\right).$$

Im allgemeinen ist es kompliziert, ein Prämaß auf allen Elementen des Ringes anzugeben. Wird ein Ring von S erzeugt, so ist es günstig, ein Prämaß zunächst nur auf S vorzugeben und es dann auf $R(S)$ in eindeutiger Weise auszudehnen. Problematisch ist dabei im allgemeinen, daß die Elemente von $R(S)$ in verschiedener Weise aus den Elementen von S gebildet werden können.

Problem : Man möchte ein Prämaß μ auf \mathbb{R}^n definieren mit dem Definitionsbereich $R(Int)$, so daß $\mu(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Das geht, aber ist nicht einfach.

Besonders einfach ist die Situation, wenn S eine Partition von Ω ist.

Definition 1.8. Eine endliche Teilmenge von $S \subset \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ heißt *Partition*, wenn die Elemente von S paarweise disjunkt sind und die Vereinigung der Elemente von S ganz Ω ergibt.

Lemma 1.9. Ist $S = (S_i)$ eine Partition, dann hat jedes Element $A \in R(S)$ eine eindeutige Darstellung als Vereinigung von endlich vielen Elementen aus S .

Proof. Wir zeigen zuerst, daß die Menge $R(S)$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von Elementen aus S ist. In der Tat ist diese abgeschlossen unter der Bildung endlicher Vereinigungen und der Komplemente.

Sei jetzt $\bigcup_{i \in I} S_i = \bigcup_{j \in J} S_j$. Dann gilt $I = J$. □

Lemma 1.10. Sei S eine Partition und $\mu : S \rightarrow [0, \infty]$ vorgegeben. Dann besitzt μ eine eindeutige Ausdehnung zu einem auf $R(S)$ definierten Prämaß.

Proof. Sei $A \in R$. Dann ist $A = \bigcup_{i \in I} S_i$ für eine eindeutig bestimmte Indexmenge I . Wir definieren $\mu(A) := \sum_{i \in I} \mu(S_i)$. □

Wir benutzen dieses Lemma um das Lebesgue Prämaß auf D zu definieren. Die \bar{D}_r erzeugende Menge S_r welche aus den Produkten $\prod_{i=1}^n [\frac{p_i}{2^r}, \frac{p_i+1}{2^r})$ mit $-2^{2r} \leq |p_i| < 2^{2r}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \prod_{i=1}^n [-2^r, 2^r)$ besteht, ist eine Partition von \mathbb{R}^n . Wir definieren μ auf S_r durch $\mu(\prod_{i=1}^n [\frac{p_i}{2^r}, \frac{p_i+1}{2^r})) := \frac{1}{2^{nr}}$ und $\mu(\mathbb{R}^n \setminus \prod_{i=1}^n [-2^r, 2^r)) := \infty$. Dann hat μ eine eindeutige Ausdehnung μ_r auf \bar{D}_r .

Aufgabe 1.6. Zeige, daß für $s \leq r$ die Einschränkung dieser Ausdehnung auf \bar{D}_s mit μ_s überein stimmt.

Damit erhalten wir ein Prämaß auf $D = \cup_r \bar{D}_r$.

Definition 1.11. Das so definierte Prämaß ist das Lebesgue Prämaß auf (\mathbb{R}^n, D) .

Definition 1.12. Sei $x \in \Omega$. Das Dirac Prämaß mit Zentrum x auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ist durch $\delta_x(A) := 1$ falls $x \in A$ und $\delta_x(A) := 0$ sonst gegeben.

Aufgabe 1.7. Zeige, daß δ_x in der Tat ein Prämaß ist.

Auf (\mathbb{Z}_p, R) betrachten wir $\mu(X) := \frac{1}{p^r} \#A$, wenn $X := p^{-1}A$ für $A \subset \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 1.8. 1. Zeige, daß μ ein wohldefiniertes Prämaß ist.

2. Zeige, daß für $x \in \mathbb{Z}_p$ und $A \in R$ gilt $\mu(x + A) = \mu(A)$ (d.h. μ ist Translationsinvariant).

3. Sei $A \in R$. Zeige, daß $\mu(pA) = p^{-1}\mu(A)$ gilt.

4. Berechne $\mu(nA)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

5. Berechne $\mu(\mathbb{Z}_p)$.

Wir nennen dieses Prämaß das Haarsche Prämaß.

Wir betrachten nun das Beispiel 9. Sei $p : A \rightarrow [0, 1]$ eine Abbildung so daß $\sum_{a \in A} p(a) = 1$. Wir definieren $\mu_r : S_r \rightarrow [0, \infty]$ durch $\mu_r(M(\times_{i=1}^r a_i)) := \prod_{i=1}^r p(a_i)$. Dann dehnen wir μ_r auf $R(S_r)$ aus.

Aufgabe 1.9. Zeige, daß die Einschränkung von μ_{r+1} auf $R(S_r)$ mit μ_r übereinstimmt. Zeige weiter, daß es ein eindeutig bestimmtes Prämaß μ auf R gibt, welches sich zu μ_r auf $R(S_r)$ einschränkt. Sei $T : \Omega \rightarrow \Omega$ gegeben durch $T(\times_i a_i) := \times_i a_{i+1}$. Zeige, daß $T^{-1}(R) \subset R$ und $\mu(T^{-1}(X)) = \mu(X)$ für alle $X \in R$ gilt.

Der so entstehende Prämaßraum (Ω, R, μ) heißt Bernoulli Prämaßraum. Die Abbildung T ist der Schift.

Definition 1.13. Ein Tripel (Ω, R, μ) bestehend aus einer Menge mit Algebra und Prämaß heißt Prämaßraum.

Man könnte die Frage stellen, ob es auf \mathbb{R}^n ein auf allen beschränkten Teilmengen definiertes “Prämaß” μ gibt mit den folgenden Eigenschaften :

1. Normierung : $\mu(\times_{i=1}^n [0, 1]) = 1$
2. Invarianz : Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kongruent, so gilt $\mu(A) = \mu(B)$.
3. μ ist additiv.

Satz 1.14 (Banach). *Ist $n = 1$ oder $n = 2$, dann gibt es ein solches μ . Es ist aber nicht eindeutig bestimmt*

Satz 1.15 (Hausdorff). *Ist $n \geq 3$, so gibt es kein solches μ .*

Proof. Die Idee hierbei ist es, die Kugel B^3 in vier Teilmengen $Z \cup A \cup B \cup C$ zu zerlegen, wobei Z eine abzählbare Vereinigung von Strahlen ist und damit $\mu(Z) = 0$ gilt, und A, B, C paarweise kongruent sind, aber auch A kongruent zu $B \cup C$ ist. Siehe [?] \square

1.2.2 σ -Algebren und Maße

Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum. Wir kommen jetzt zum Integralbegriff zurück. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir müssen sichern, daß immer $f^{-1}([a, b]) \in R$ gilt. Wir nennen eine Funktion mit dieser Eigenschaft R -meßbar. Je kleiner die Algebra ist, umso stärker wird diese Bedingung. Betrachten wir zum Beispiel $\mathbb{R} = \Omega$. Bezüglich $R(\mathcal{T})$ ist jede stetige Funktion oder charakteristische Funktion einer offenen Menge meßbar. Bezüglich $R(Int)$ sind wenigstens monotone Funktionen meßbar. Die Meßbarkeit bezüglich D ist sehr einschränkend, und für \bar{D}_r sind nur bestimmte Stufenfunktionen mit endlich vielen Werten meßbar.

Wir haben bisher das Lebesguesche Prämaß auf D , aber nicht auf $R(\mathcal{T})$. Damit können wir noch nicht einmal alle stetigen Funktionen integrieren. Die Idee ist es nun, eine Bedingung aufzustellen, welche eine eindeutige Ausdehnung des Lebesgue Prämaß auf beispielsweise $R(\mathcal{T})$ sichert. Man kann zum Beispiel offene Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ als abzählbare disjunkte Vereinigungen von Elementen A_i von D darstellen. Dann möchte man $\mu(A) = \sum_i \mu(A_i)$ fordern. Dies legt die folgende Verschärfung des Begriffs der Algebra nahe.

Definition 1.16. Eine Algebra R ist eine σ -Algebra, falls sie abgeschlossen unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen ist.

Aufgabe 1.10. 1. Zeige, daß eine σ -Algebra abgeschlossen unter der Bildung abzählbarer Durchschnitte ist.

2. Sei (R_i) eine Familie von σ -Algebren. Zeige, daß $\bigcap_i R_i$ eine σ -Algebra ist.

Es ist sehr schwierig, interessante σ -Algebren explizit zu beschreiben. Deshalb ist des folgende Lemma sehr hilfreich.

Lemma 1.17. Für jede Teilmenge S der Potenzmenge von Ω existiert eine eindeutige kleinste σ -Algebra $R^\sigma(S)$ welche S enthält.

Proof. Ein Durchschnitt von σ -Algebren ist eine σ -Algebra. Die Potenzmenge ist eine S -enthaltende σ -Algebra. Die kleinste S -enthaltende σ -Algebra ist also der Durchschnitt aller S enthaltenden σ -Algebren. \square

Definition 1.18. Ist (Ω, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, so ist die Borelsche σ -Algebra \mathcal{B} durch $R^\sigma(\mathcal{T})$ gegeben.

Aufgabe 1.11. Zeige, daß $R^\sigma(\text{Int}) = R^\sigma(D) = \mathcal{B}$ auf \mathbb{R}^n gilt.

Aufgabe 1.12. Sei R die oben betrachtete Algebra auf \mathbb{Z}_p . Zeige, daß R^σ invariant unter den Ringoperationen in \mathbb{Z}_p ist.

Aufgabe 1.13. Gilt $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$?

Definition 1.19. Ein meßbarer Raum ist ein prämeßbarer Raum, dessen Algebra eine σ -Algebra ist.

Wir kommen nun zu den Prämaßen zurück. Sei (Ω, R, μ) ein prämeßbarer Raum.

Definition 1.20. μ heißt σ -additiv, falls für jede paarweise disjunkte abzählbare Familie $(A_i)_i$ mit $A_i \in R$, $A := \cup_i A_i \in R$ gilt

$$\mu(A) = \sum_i \mu(A_i) .$$

Aufgabe 1.14. Zeige, daß das Diracmaß δ_x σ -additiv ist.

Lemma 1.21. *Das auf (\mathbb{R}^n, D) definierte Lebesguesche Prämaß ist σ -additiv.*

Aufgabe 1.15. *Beweise das Lemma.* □

Aufgabe 1.16. *Beweise, daß das Haarsche Prämaß μ auf \mathbb{Z}_p σ -additiv ist.*

Aufgabe 1.17. *Zeige, daß das Prämaß des Bernoulli Prämaßraumes σ -additiv ist.*

Es gibt jedoch auch nicht σ -additive Prämaße. Hier ist ein Beispiel.

Definition 1.22. *Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ heißt nicht-trivialer Filter, wenn sie folgende Eigenschaften hat.*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$ und $A \subset B$ impliziert $B \in \mathcal{F}$.
3. Für jede endliche Familie (A_i) in \mathcal{F} ist $\bigcap_i A_i \in \mathcal{F}$.
4. Für jeden Punkt $i \in \mathbb{N}$ gibt es ein $A \in \mathcal{F}$ mit $i \notin A$.

Die Menge der Filter ist durch Inklusion halbgeordnet und nicht leer. Zum Beispiel ist die Menge der Komplemente $\{\{1, \dots, n\}^c \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Filter.

Definition 1.23. *Ein maximaler nicht-trivialer Filter heißt nicht-trivialer Ultrafilter.*

Die Existenz von Ultrafiltern zeigt man mit dem Zornschen Lemma. Sei $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ eine Kette von nicht-trivialen Filtern. Dann ist $\bigcup_i \mathcal{F}_i$ ein nicht-triviales Filter und eine obere Schranke der Kette. Dies zeigt die Voraussetzung des Zornschen Lemmas.

Lemma 1.24. *Sei nun \mathcal{F} ein nicht-trivialer Ultrafilter. Dann gilt für eine Partition $\{A, B\}$ von \mathbb{N} entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$.*

Proof. In der Tat, wenn A und B in \mathcal{F} enthalten wären, so auch $\emptyset = A \cap B$. Sei nun weder A noch B in \mathcal{F} . Dann gilt für alle $U \in \mathcal{F}$, daß $U \cap A \neq \emptyset$. Wir bilden $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \{U \subset \mathbb{N} \mid A \subset U\}$. Dann ist \mathcal{F}' ein Filter und \mathcal{F} wäre nicht maximal. □

Wir definieren nun ein Wahrscheinlichkeitsprämaß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ durch $\mu(A) = 0$ für $A \notin \mathcal{F}$ und $\mu(A) = 1$ für $A \in \mathcal{F}$.

Aufgabe 1.18. Zeige, daß μ additiv, aber nicht σ -additiv ist.

Definition 1.25. Ein Maß ist ein σ -additives Prämaß auf einem meßbaren Raum (Ω, R) . Das Tripel (Ω, R, μ) heißt Maßraum.

Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum und $F \in R$. Wir setzen $R_F := \{A \cap F \mid A \in R\}$.

Aufgabe 1.19. Zeige, daß R_F eine Algebra auf F ist und $(F, R_F, \mu|_{R_F})$ ein Prämaßraum. Wenn (Ω, R, μ) sogar ein Maßraum ist, dann auch $(F, R_F, \mu|_{R_F})$.

Definition 1.26. Wir nennen $(F, R_F, \mu|_{R_F})$ die Einschränkung von (Ω, R, μ) auf F .

Wir hatten gesehen, daß man ein Prämaß von einer Partition S auf die von S erzeugte Algebra $R(S)$ ausdehnen kann. Wir wollen nun die Frage studieren, ob man ein auf einer Algebra R gegebenes Prämaß zu einem Maß auf $R^\sigma := R^\sigma(R)$ ausdehnen kann, und ob diese Ausdehnung eindeutig ist. Für den Nachweis der Eindeutigkeit der Fortsetzung ist der folgende Begriff nützlich.

Definition 1.27. Ein Prämaßraum (Ω, R, μ) heißt σ -endlich, wenn es eine aufsteigende Folge (F_i) in R gibt mit $\Omega = \bigcup_i F_i$ und $\mu(F_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Wenn beispielsweise $\mu(\Omega) < \infty$ gilt, so ist (Ω, R, μ) σ -endlich.

Aufgabe 1.20. Zeige, daß der Lebesguesche Prämaßraum $(\mathbb{R}^n, D, |\cdot|)$ σ -endlich ist.

Aufgabe 1.21. 1. Sei R die Algebra auf \mathbb{R} , welche von allen endlichen Teilmengen erzeugt wird. Zeige, daß (\mathbb{R}, R, μ) mit $\mu(A) = \#(A \cap \mathbb{N})$ ein nicht σ -endlicher Prämaßraum ist.

2. Sei $R^\sigma := R^\sigma(R)$. Wir definieren $\tilde{\mu}_0$ auf R^σ durch $\tilde{\mu}_0(A) = \#(A \cap \mathbb{N})$. Zeige, daß $\tilde{\mu}_0$ ein Maß auf R^σ ist, welches μ ausdehnt.

3. Wir definieren $\tilde{\mu}_1$ durch $\tilde{\mu}_1(A) := \tilde{\mu}_0(A)$ für höchstens abzählbare $A \in R^\sigma$ und $\tilde{\mu}_1(A) := \infty$ für überabzählbare A . Zeige, daß auch $\tilde{\mu}_1$ ein Maß ist, welches μ ausdehnt. Zeige, daß $\tilde{\mu}_0 \neq \tilde{\mu}_1$.

Diese Aufgabe zeigt, daß man die Voraussetzung der σ -Endlichkeit im folgenden Satz nicht weglassen kann.

Satz 1.28. Sei (Ω, R, μ) ein σ -endlicher Premaraum. Wenn μ eine Ausdehnung auf R^σ besitzt, so ist diese eindeutig.

Proof. Wir zeigen zunächst :

Lemma 1.29. Die Aussage des Satzes gilt unter der Voraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$.

Proof. Seien $\mu_i, i = 0, 1$ zwei solche Ausdehnungen. Wir betrachten $T := \{A \in R^\sigma \mid \mu_0(A) = \mu_1(A)\}$. Klar ist daß $R \subset T$. Wenn wir zeigen, daß T eine σ -Algebra ist, so gilt $T = R^\sigma$ und deshalb $\mu_0 = \mu_1$.

Offensichtlich ist $\emptyset \in T$ und $\Omega \in T$. Sei $(A_i)_i$ eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Elemente von T und $A := \cup_i A_i$. Dann ist

$$\mu_0(A) = \sum_i \mu_0(A_i) = \sum_i \mu_1(A_i) = \mu_1(A) .$$

Folglich gilt $A \in T$. Sei $A \in T$. Dann gilt wegen $\mu(\Omega) < \infty$, daß $\mu_0(A^c) = \mu_0(\Omega) - \mu_0(A) = \mu_1(\Omega) - \mu_1(A) = \mu_1(A^c)$. Also gilt $A^c \in T$. \square

Wir beweisen nun den Satz im allgemeinen Fall. Seien $\mu_i, i = 0, 1$, wieder zwei Ausdehnungen. Sei (F_n) eine aufsteigende Folge in R von Mengen endlichen Premaes.

Sei

$$T := \{A \subset \Omega \mid A \cap F_n \in (R_{F_n})^\sigma \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} .$$

Wir zeigen, daß $R^\sigma \subset T$. Erst einmal gilt $R \subset T$. In der Tat, wenn $A \in R$ ist, so gilt $A \cap F_n \in R_{F_n} \subset (R_{F_n})^\sigma$ für alle n . Sei jetzt (A_i) eine abzählbare Familie in T . Dann gilt für jedes n und i , daß $A_i \cap F_n \in (R_{F_n})^\sigma$ und damit für jedes n , daß $(\cup_i A_i) \cap F_n = \cup_i (A_i \cap F_n) \in (R_{F_n})^\sigma$. Also ist T abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen. Sei $A \in T$. Dann ist für jedes n $A^c \cap F_n = F_n \setminus (A \cap F_n) \in (R_{F_n})^\sigma$. Damit ist T abgeschlossen unter der Bildung von Komplementen. T ist also eine σ -Algebra welche R enthält, und folglich gilt $R^\sigma \subset T$.

Wegen $R_{F_n} \subset (R^\sigma)_{F_n}$ gilt auch $(R_{F_n})^\sigma \subset (R^\sigma)_{F_n}$. Damit sind $(F, (R_{F_n})^\sigma, \mu_{i|(R_{F_n})^\sigma})$ Ausdehnungen von $(F, R_{F_n}, \mu_{i|R_{F_n}})$. Mit dem Lemma schließen wir, daß $\mu_{0|(R_{F_n})^\sigma} = \mu_{1|(R_{F_n})^\sigma}$.

Sei jetzt $A \in R^\sigma$. Dann gilt $A \in T$, also für jedes $n \in \mathbb{N}$, daß $A \cap F_n \in (R_{F_n})^\sigma$. Wir schließen aus der σ -Additivität der μ_i , daß

$$\mu_0(A) = \lim_n \mu_0(A \cap F_n) = \lim_n \mu_1(A \cap F_n) = \mu_1(A) .$$

□

Die Frage der Existenz einer solchen Ausdehnung ist etwas komplizierter und wird im folgenden untersucht. Notwendig ist sicherlich, daß μ schon σ -additiv ist. Wir werden erst jedem Prämaß ein äußeres Maß zuordnen, um dann jedem äußeren Maß ein Maß auf einer assoziierten σ -Algebra. Dies liefert dann die Existenzaussage.

1.2.3 Äußere Maße, Ausdehnung von Prämaßen zu Maßen, Vollständigkeit

Definition 1.30. 1. Eine Abbildung $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ heißt *monoton*, falls aus $A \subset B$ $\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(B)$ folgt.

2. $\tilde{\mu}$ heißt *(σ -)subadditiv*, falls $\tilde{\mu}(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i)$ für jede endliche (abzählbare) Familie (A_i) von Teilmengen gilt.

3. Eine monotone und σ -subadditive Abbildung $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ mit $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$ heißt *äußeres Maß*

Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum.

Definition 1.31. Für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ definieren wir die *äußere Erweiterung* $\tilde{\mu}(A)$ von μ durch

$$\tilde{\mu}(A) := \inf \left\{ \sum_i \mu(F_i) \right\} ,$$

wobei das Infimum über alle abzählbaren Familien $(F_i)_i$ mit $F_i \in R$ für alle i und $A \subset \bigcup_i F_i$ gebildet wird.

Lemma 1.32. Die äußere Erweiterung ist ein äußeres Maß.

Proof. $\tilde{\mu}$ ist monoton und erfüllt $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Die äußere Erweiterung $\tilde{\mu}$ ist σ -subadditiv: Sei (A_i) eine abzählbare Familie von Teilmengen, $A := \bigcup_i A_i$. Seien $F_{i,j} \in R$ mit $A_i \subset F_{i,j}$. Für $F_j := \bigcup_i F_{i,j}$ gilt $A \subset \bigcup_j F_j$. Folglich

$$\tilde{\mu}(A) \leq \sum_j \sum_i \tilde{\mu}(F_{i,j}) .$$

Wir bilden nun das Infimum der rechten Seiten über alle Wahlen der $F_{i,j}$ und erhalten $\tilde{\mu}(A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i)$. □

Aufgabe 1.22. Bestimme die äußere Erweiterung des Prämaßes in Aufgabe 1.18.

Äußere Maße können auch auf ganz andere Art gewonnen werden. Sei \mathcal{E} ein Vektorraum von \mathbb{R} -wertigen Funktionen auf Ω und $\lambda : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ ein positives lineares Funktional, d.h. $f \geq 0$ impliziert $\lambda(f) \geq 0$. Wir definieren

$$\tilde{\mu}(A) := \inf_{f \in \mathcal{E}, \chi_A \leq f} \lambda(f) .$$

Aufgabe 1.23. Zeige, daß $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß ist.

1. Diese Konstruktion kann man beispielsweise anwenden auf $\Omega := \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E} := C_c(\mathbb{R}^n)$, $\lambda(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$.

Aufgabe 1.24. Zeige, daß $\tilde{\mu}$ mit dem aus dem Lebesgue Prämaßraum (\mathbb{R}^n, D, μ) erhaltenen äußeren Maß übereinstimmt.

2. Ist (Ω, R, μ) ein Prämaßraum, nimmt man für $\mathcal{E} =: \mathcal{E}(R)$ den Raum aller Linearkombinationen $f := \sum_i c_i \chi_{A_i}$ charakteristischer Funktionen von Elementen aus R , und setzt man $\lambda(f) := \int f d\mu := \sum_i c_i \mu(A_i)$, dann ist $\tilde{\mu}$ das aus μ konstruierte äußere Maß.

Aufgabe 1.25. Beweise, daß λ in 2. ein wohldefiniertes positives lineares Funktional ist und verifiziere die Behauptung, daß beide Konstruktionen des äußeren Maßes übereinstimmen.

Sei jetzt $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß auf Ω .

Definition 1.33. Eine Menge $S \in \mathcal{P}(\Omega)$ heißt zerlegend (bez. $\tilde{\mu}$), falls für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt :

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c) .$$

Mit $R_{\tilde{\mu}}$ bezeichnen wir die Menge aller zerlegenden Mengen (bez. $\tilde{\mu}$).

Aufgabe 1.26. Zeige, daß S genau dann zerlegend ist, wenn

$$\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c)$$

für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt.

Satz 1.34. Sei $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß auf Ω . Dann ist $(\Omega, R_{\tilde{\mu}}, \tilde{\mu}|_{R_{\tilde{\mu}}})$ ein Maßraum.

Proof. Wir zeigen zuerst daß $R_{\tilde{\mu}}$ eine Algebra ist. Mit $S \in R_{\tilde{\mu}}$ ist offensichtlich auch $S^c \in R_{\tilde{\mu}}$. Seien nun $S, T \in R_{\tilde{\mu}}$. Wir zeigen, daß $S \cap T \in R_{\tilde{\mu}}$. Für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ setzen wir

$$A_1 := A \cap S \cap T, A_2 := A \cap S \cap T^c, A_3 := A \cap S^c \cap T, A_4 := A \cap S^c \cap T^c .$$

Diese Mengen sind paarweise disjunkt. Da $S, T \in R_{\tilde{\mu}}$ ist, schließen wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) &= \tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2) \\ \tilde{\mu}(A_3 \cup A_4) &= \tilde{\mu}(A_3) + \tilde{\mu}(A_4) \end{aligned}$$

Wir schreiben $A_2 \cup A_3 \cup A_4$ als

$$[(A \cap S^c \cup A \cap S \cap T^c) \cap S] \cup [(A \cap S^c \cup A \cap S \cap T^c) \cap S^c]$$

und schließen weiter, daß

$$\tilde{\mu}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \tilde{\mu}(A_2) + \tilde{\mu}(A_3 \cup A_4) = \sum_{i=2}^4 \tilde{\mu}(A_i) . \quad (1)$$

Es gilt auch

$$\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) + \tilde{\mu}(A_3 \cup A_4) = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mu}(A_i) .$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(A \cap (S \cap T)) + \tilde{\mu}(A \cap (S \cap T)^c) &= \tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\ &= \sum_{i=1}^4 \tilde{\mu}(A_i) \\ &= \tilde{\mu}(A) \end{aligned}$$

Dies zeigt $S \cap T \in R_{\tilde{\mu}}$.

Wir zeigen jetzt, daß $\tilde{\mu}|_{R_{\tilde{\mu}}}$ additiv ist. Sei $S, T \in R_{\tilde{\mu}}$ mit $S \cap T = \emptyset$. Wir wählen $A := S \cup T$. Dann folgt aus (1), daß $\tilde{\mu}(S \cup T) = \tilde{\mu}(S) + \tilde{\mu}(T)$.

Sei jetzt (S_i) eine abzählbare Familie in $R_{\tilde{\mu}}$. Wir zeigen, daß $S := \bigcup_i S_i \in R_{\tilde{\mu}}$. Dazu setzen wir $T_i := \bigcup_{j \leq i} S_j$. Dann ist (T_i) eine aufsteigende Familie in $R_{\tilde{\mu}}$ und es gilt $\bigcup_i T_i = S$. Es gilt $\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A \cap T_i) + \tilde{\mu}(A \cap T_i^c)$. Da $\tilde{\mu}$ monoton ist, gilt

$$\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}(A \cap T_i) + \tilde{\mu}(A \cap S^c) . \quad (2)$$

Es gilt weiter, daß

$$\tilde{\mu}(A \cap T_i) = \tilde{\mu}(A \cap T_i \cap T_{i-1}) + \tilde{\mu}(A \cap T_i \cap T_{i-1}^c) = \tilde{\mu}(A \cap T_{i-1}) + \tilde{\mu}(A \cap (T_i \setminus T_{i-1})) .$$

Induktiv schließen wir, daß

$$\tilde{\mu}(A \cap T_i) = \sum_{j \leq i} \tilde{\mu}(A \cap (T_j \setminus T_{j-1})) .$$

Unter Benutzung der σ -Subadditivität erhalten wir

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(A \cap T_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(A \cap (T_i \setminus T_{i-1})) \geq \tilde{\mu}(A \cap S) . \quad (3)$$

Es folgt

$$\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}(A \cap S) + \tilde{\mu}(A \cap S^c) .$$

Da A beliebig war, gilt $S \in R_{\tilde{\mu}}$.

Wir zeigen nun, daß $\tilde{\mu}$ auf $R_{\tilde{\mu}}$ auch σ -additiv ist. Sei $(S_i)_i$ eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Elemente aus $R_{\tilde{\mu}}$. Wir setzen in (2) $A = S$ und erhalten für jedes i , daß $\tilde{\mu}(S) \geq \tilde{\mu}(T_i)$. Damit gilt $\tilde{\mu}(S) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(T_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(S_i)$. Wegen der σ -Subadditivität haben wir auch die Ungleichung in der anderen Richtung. Also $\tilde{\mu}(S) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(S_i)$. \square

Satz 1.35. *Sei (Ω, R, μ) ein Prämaßraum und μ σ -additiv. Dann besitzt μ eine eindeutige Ausdehnung zu einem Maß auf R^σ .*

Proof. Die Eindeutigkeit hatten wir schon gesehen. Sei $\tilde{\mu}$ die äußere Erweiterung von μ . Wir zeigen daß $R^\sigma \subset R_{\tilde{\mu}}$. Dazu müssen wir nur $R \subset R_{\tilde{\mu}}$ nachprüfen. Sei $S \in R$. Sei $(F_i)_i$ eine abzählbare Familie aus R mit $T \subset \bigcup_i F_i$. Dann gilt

$$\sum_i \mu(F_i) = \sum_i \mu(F_i \cap S) + \sum_i \mu(F_i \cap S^c) .$$

Wir bilden das Infimum über alle Wahlen von (F_i) . Die linke Seite ergibt $\tilde{\mu}(T)$, während die Summen auf der rechten Seite von unten durch $\tilde{\mu}(T \cap S)$ und $\tilde{\mu}(T \cap S^c)$ abgeschätzt werden. Also gilt $\tilde{\mu}(T) \geq \tilde{\mu}(T \cap S) + \tilde{\mu}(T \cap S^c)$. Da T beliebig war, folgt $S \in R_{\tilde{\mu}}$.

Sei $S \in R$. Es ist klar, daß $\tilde{\mu}(S) \leq \mu(S)$. Nehmen wir an, daß diese Ungleichung echt wäre. Dann gibt es eine Familie (F_i) paarweise disjunkter Elemente aus R mit $\mu(\bigcup_i F_i) = \sum_i \mu(F_i) < \mu(S)$ und $S \subset \bigcup_i F_i$. Letztes impliziert aber $\mu(S) \leq \mu(\bigcup_i F_i)$.

Das ist ein Widerspruch. □

□

Definition 1.36. Der Lebesgue Maßraum $(\mathbb{R}^n, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ ist der Maßraum, welcher aus der äußeren Erweiterung des Lebesgue Prämaß konstruiert wird.

Aufgabe 1.27. Zeige, daß $\mathcal{B} \subset R_{|\cdot|}$ gilt.

Somit ist die Einschränkung des Lebesguemaßes auf \mathcal{B} ein Maß. Wir haben damit insbesondere jeder offenen oder abgeschlossenen Teilmenge von \mathbb{R}^n ein Maß zugeordnet.

Aufgabe 1.28. Wir betrachten $(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$.

1. Zeige, daß $|[a, b]| = b - a$.
2. Sei $C \subset [0, 1]$ die Menge der reellen Zahlen x , welche eine triadische Entwicklung $x = \sum_{i \geq 0} \frac{k_i}{3^i}$ mit der Bedingung $k_i \in \{0, 2\}$ für alle i zulassen (C ist die Cantor-menge). Zeige, daß $C \in \mathcal{B}$ gilt und berechne $|B|$. Zeige, daß C keine inneren Punkte enthält und überabzählbar ist.

Aufgabe 1.29. Wir betrachten $(\mathbb{R}^2, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$. Zeige, daß $|D^2| = \pi$ gilt, wobei D^2 der Einheitsball in \mathbb{R}^2 vom Radius 1 um 0 ist.

Aufgabe 1.30. Wir betrachten $(\mathbb{R}^n, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$.

1. Zeige, daß für eine abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt : $|A| = 0$.
2. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $T_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $T_x(y) := x + y$ gegeben. Zeige, daß $T_x^{-1}(R_{|\cdot|}) \subset R_{|\cdot|}$ und für jedes $A \in R_{|\cdot|}$ gilt $|T_x^{-1}(A)| = |A|$.

Wir zeigen nun, daß es nicht Lebesgue-meßbare Mengen gibt.

Satz 1.37. Wir betrachten $(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$. Es gilt $R_{|\cdot|} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proof. Auf $A := [-1/2, 1/2]$ betrachten wir die Relation $x \sim y$, falls $x - y \in \mathbb{Q}$. Diese ist eine Äquivalenzrelation. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Abbildung $f : A/\sim \rightarrow A$ derart, daß $f([x]) \in [x]$. Wir betrachten nun $K := f(A/\sim) \subset A$. Wir werden zeigen, daß $K \notin R_{|\cdot|}$.

Wir nehmen das Gegenteil an. Sei $d := |K|$. Sei $B := [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Für $0 \neq r \in B$ gilt $T_r(K) \cap K = \emptyset$ und $|T_r(K)| = d$. Weiterhin gilt $A \subset \bigcup_{r \in B} T_r(K)$. Da B abzählbar und $|A| = 1$ ist, muß $d > 0$ gelten. Andererseits ist $\bigcup_{r \in B} T_r(K) \subset [-3/2, 3/2]$. Also gilt $\sum_{r \in B} d < 3$, woraus $d = 0$ folgt, da $\#B = \infty$. Das ist ein Widerspruch. \square

Das Haarsche Maß auf (\mathbb{Z}_p, R_μ) ist das Maß μ , welches man durch die Ausdehnung des Haarschen Prämaßes erhält.

Wendet man die Ausdehnungskonstruktion auf das oben konstruierte Prämaß auf dem Schiftraum über der Zustandsmenge A an, so erhält man ein Maß auf (Ω, R_μ) .

Aufgabe 1.31. Sei $T : \Omega \rightarrow \Omega$ der Schift. Zeige, daß $T^{-1}(R_\mu) \subset R_\mu$ und für jedes $X \in R_\mu$ die Gleichung $\mu(T^{-1}(X)) = \mu(X)$ gilt.

Aufgabe 1.32. Sei $B \subset A$ eine Teilmenge und $\Sigma := \times_{i \in \mathbb{N}} B$ der Schiftraum über B . Dann betrachten wir Σ als Teilmenge von Ω . Zeige, daß $\Sigma \in R_\mu$. Berechne $\mu(\Sigma)$.

Der Unterschied zwischen $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$ und $(\mathbb{R}^n, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ ist relativ unwesentlich und wird durch den Begriff der Vervollständigung geklärt.

Definition 1.38. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Ein Element $A \in R$ heißt Nullmenge, wenn $\mu(A) = 0$ gilt.

Aufgabe 1.33. Sei $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ vermöge der Abbildung $z \mapsto ([z]_{p^r})_r$ aufgefaßt. Zeige, daß \mathbb{Z} eine Nullmenge bezüglich des Haarschen Maßes ist.

Aufgabe 1.34. Wir betrachten den Bernoullischen Schiftraum (Ω, R, μ) über A , wobei μ aus $p : A \rightarrow [0, 1]$ mit $\sum_{a \in A} p(a) = 1$ konstruiert wird.

1. Sei $\omega := (a_i) \in \Omega$ ein Punkt. Kann $\mu(\omega) \neq 0$ gelten?
2. Sei $p(a) = \frac{1}{\#A}$. Gibt es in Ω eine überabzählbare Nullmenge?

Definition 1.39. Ein Maßraum (Ω, R, μ) heißt vollständig, falls für jede Menge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $A \subset \bigcup_i N_i$ für eine abzählbare Familie von Nullmengen gilt daß $A \in R$.

Lemma 1.40. Der zu einem äußeren Maß assoziierte Maßraum ist vollständig.

Proof. Sei $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß auf Ω . Sei $A \subset \Omega$ so daß $A \subset \bigcup_i N_i$ für eine abzählbare Familie von Nullmengen (N_i) . Aus Monotonie und σ -Subadditivität folgt $\tilde{\mu}(A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(N_i) = 0$. Damit gilt aber $A \in R_{\tilde{\mu}}$. \square

Wir konstruieren nun die Vervollständigung eines Maßraumes (Ω, R, μ) . Wir definieren \bar{R}^μ als die Menge derjenigen $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, für welche ein $F \in R$ und eine abzählbare Familie (N_i) von Nullmengen existiert, so daß $A \Delta F \subset \bigcup_i N_i$. Hierbei ist $A \Delta F := A \cap F^c \cup F \cap A^c$. Wir definieren ferner $\bar{\mu}(A) := \mu(F)$.

Aufgabe 1.35. 1. Zeige, daß $\bar{\mu} : \bar{R}^\mu \rightarrow [0, \infty]$ wohldefiniert ist.

2. Zeige weiter, daß $(\Omega, \bar{R}^\mu, \bar{\mu})$ ein vollständiger Maßraum ist.

Definition 1.41. Die Vervollständigung eines Maßraumes (Ω, R, μ) ist der Maßraum $(\Omega, \bar{R}^\mu, \bar{\mu})$.

Aufgabe 1.36. Zeige : Der Lebeguesche Maßraum $(\mathbb{R}^n, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ ist die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$.

1.3 Das Integral, Meßbarkeit

1.3.1 Das Integral positiver Funktionen

Wir fixieren einen Maßraum (Ω, R, μ) . Mit \mathcal{E} bezeichnen wir den Vektorraum der einfachen Funktionen, d.h. der Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen χ_A , $A \in R$.

Aufgabe 1.37. Sei $f \in \mathcal{E}$. Zeige, daß es dann ein eindeutig bestimmtes $r \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedene Zahlen $c_i \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_i \in R$, $i = 1, \dots, r$ gibt, so daß $f = \sum_{i=1}^r c_i \chi_{A_i}$.

Definition 1.42. Sei $f \in \mathcal{E}$. Die Darstellung $f = \sum_{i=1}^r c_i \chi_{A_i}$, in welcher die A_i paarweise disjunkt sind, heißt kanonische Darstellung von f .

Definition 1.43. Für $f \in \mathcal{E}$, $f \geq 0$, mit kanonischer Darstellung $f = \sum_{i=1}^r c_i \chi_{A_i}$ definieren wir

$$\int' f d\mu := \sum_{i=1}^r c_i \mu(A_i) .$$

Aufgabe 1.38. Zeige, daß wenn $f := \sum_j d_j \chi_{B_j}$ irgend eine Darstellung von f ist, gilt : $\int' f d\mu = \sum_j d_j \mu(B_j)$.

Aufgabe 1.39. Wir betrachten den Maßraum (\mathbb{Z}_p, R, μ) , welcher aus dem Haarschen Prämaßraum gewonnen wurde. Sei $\mathcal{E}_{\mathbb{C}} := \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ der Raum der komplexwertigen einfachen Funktionen.

1. Zeige, daß sich $\int' \dots d\mu$ eindeutig zu einem linearen Funktional $\mathcal{E}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ausdehnen läßt.
2. Sei $p_r : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ die Projektion. Sei μ eine p^r -te Einheitswurzel. Wir definieren $\phi_{\mu} : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\phi_{\mu}(x) = \mu^{p^r(x)}$. Zeige, daß $\phi_{\mu} \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ wohldefiniert und unabhängig von r ist (μ ist auch p^{rs} -te Einheitswurzel).
3. Zeige, daß $\int_{\mathbb{Z}_p} \phi_{\mu} \phi_{\lambda} d\mu = 1$ genau dann gilt, wenn $\mu = \bar{\lambda}$ ist, und sonst $\int_{\mathbb{Z}_p} \phi_{\mu} \phi_{\lambda} d\mu = 0$ gilt.

Definition 1.44. Für $A \subset \Omega$ und $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ definieren wir

$$\int_A f d\mu = \sup_{\phi \in \mathcal{E}, \phi \leq f \chi_A} \int' \phi d\mu .$$

Aufgabe 1.40. Sei (Ω, R, μ) der Lebesgue Maßraum $(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ und $A = [a, b]$. Zeige, daß für $f \in C(\mathbb{R})$ gilt : $\int_A f d|\cdot| = \int_a^b f(x) dx$ (Riemann-Integral).

Aufgabe 1.41. Zeige, daß für das Dirac Maß gilt :

$$\int_{\Omega} f d\delta_x = f(x) .$$

Aufgabe 1.42. Verifiziere die folgenden Aussagen :

1. Für $\phi \in \mathcal{E}$ mit $\phi \geq 0$ gilt $\int \phi d\mu = \int' \phi d\mu$.
2. Seien $A, B \in R$ disjunkt und $\phi \in \mathcal{E}$, $\phi \geq 0$. Dann gilt

$$\int_{A \cup B} \phi d\mu = \int_A \phi d\mu + \int_B \phi d\mu .$$

3. Für $r \geq 0$ und $\phi, \psi \in \mathcal{E}$ mit $\phi, \psi \geq 0$ gilt

$$\int_{\Omega} (\psi + r\phi) d\mu = \int_{\Omega} \psi d\mu + r \int_{\Omega} \phi d\mu .$$

Aufgabe 1.43. Verifizieren Sie die folgenden Aussagen. Seien f, g nichtnegative Funktionen auf Ω und $A, B \subset \Omega$.

1. Wenn $\mu(A) = 0$, so gilt $\int_A f d\mu = 0$.
2. Wenn $\{f > 0\}$ eine Nullmenge ist, so gilt $\int_{\Omega} f d\mu = 0$.
3. Wenn $f \leq g$, so gilt $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$.
4. Für $r \geq 0$ gilt $\int_A r f d\mu = r \int_A f d\mu$.
5. Wenn $A \subset B$, so gilt $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

Beachte, daß das Integral im allgemeinen nicht additiv ist. Für ein Beispiel betrachten wir den folgenden Maßraum : $\Omega := \{x, y\}$, $R := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mu = \delta_x$. Sei $f := \chi_{\{x\}}$ und $g := \chi_{\{y\}}$.

Aufgabe 1.44. Zeige, daß $\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} g d\mu = 1$, aber auch $\int_{\Omega} (f + g) d\mu = 1$.

Der Grund ist, daß f und g nicht meßbar sind. So ist zum Beispiel $f^{-1}(\{1\}) = \{x\} \notin R$. Eine weitere Motivation für die Einführung des Begriffes der Meßbarkeit kommt von der Betrachtung von Transformationen. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und (Σ, S) ein weiterer meßbarer Raum. Sei $T : \Omega \rightarrow \Sigma$ eine Abbildung.

Aufgabe 1.45. Zeige, daß $T^{-1}(S)$ eine σ -Algebra auf Ω ist.

Wenn $T^{-1}(S) \subset R$, dann kann man $T_*\mu : S \rightarrow [0, \infty]$ durch $T_*\mu(U) := \mu(T^{-1}(U))$ definieren.

Aufgabe 1.46. Zeige, daß $T_*\mu$ ein Maß ist.

Definition 1.45. Wir nennen T meßbar (bez. (R, S)), falls $T^{-1}(S) \subset R$.

Aufgabe 1.47. Zeige, daß die Komposition meßbarer Abbildungen meßbar ist.

Aufgabe 1.48. Zeige, daß eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen meßbar bezüglich der Borelschen σ -Algebren ist.

Aufgabe 1.49. Zeige, daß jede Abbildung $T : \mathbb{Z}_p \rightarrow \Sigma$, welche über eine der Projektionen $p_r : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ faktorisiert, meßbar ist (für jede σ -Algebra auf Σ).

Aufgabe 1.50. Zeige für den Bernoullischen Maßraum $\Omega = \times_i A$, daß jede Abbildung $T : \Omega \rightarrow \Sigma$, welche über eine Projektion der Art $\times_i A \ni \times_i a_i \mapsto \times_{j=1}^r a_{i_j} \in \times_{j=1}^r A$ faktorisiert, meßbar ist (für jede σ -Algebra auf Σ).

Aufgabe 1.51. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und \mathcal{E} der Raum der einfachen Funktionen. Zeige, daß jede einfache Funktion (R, \mathcal{B}) -meßbar ist, wobei \mathcal{B} die Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R} ist.

Um die Meßbarkeit von Abbildung nachzuprüfen, ist folgendes Kriterium nützlich. Seien $U \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und $V \subset \mathcal{P}(\Sigma)$ erzeugende Teilmengen von R und S .

Aufgabe 1.52. Zeige, daß aus $f^{-1}(V) \subset U$ folgt, daß f meßbar (bez. (R, S)) ist.

Für die Integrationstheorie besonders wichtig sind meßbare Abbildungen mit Werten in $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B})$, wobei $\bar{\mathbb{R}}$ die Vervollständigung von \mathbb{R} mit $\pm\infty$ ist.

Aufgabe 1.53. Sei $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ so daß $\{f > a\} \in R$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Zeige, daß dann gilt: $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$.

Definition 1.46. Mit $\mathcal{L}(\Omega, R)$ bezeichnen wir die Menge der (R, \mathcal{B}) -meßbaren Abbildungen von Ω nach $\bar{\mathbb{R}}$.

Zur Definition der Rechenoperationen machen wir folgende Konventionen.

$$\infty +_r -\infty = -\infty +_r \infty = r, \quad 0\infty = 0 .$$

Satz 1.47. 1. Für $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt $\{f > r - g\} \in R$.

2. Für $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ gilt $f +_r g \in \mathcal{L}(\Omega, R)$.

3. Für $r \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ gilt $rf \in \mathcal{L}(\Omega, R)$.

4. Für $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ gilt $\frac{1}{f} \in \mathcal{L}(\Omega, R)$.

5. Für $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ mit $f \geq 0$ und für $r \geq 0$ gilt $f^r \in \mathcal{L}(\Omega, R)$.

6. Für eine endliche oder durch \mathbb{N} indizierte Familie $(f_i)_i$ aus $\mathcal{L}(\Omega, R)$ gilt

$$\sup_j f_j, \inf_j f_j, \liminf_j f_j, \limsup_j f_j \in \mathcal{L}(\Omega, R) .$$

Wenn $\lim_j f_j =: f$ (punktweise) existiert, dann ist $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$.

7. Es gilt für $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ auch $f \wedge g, f \vee g, |f|, fg \in L(\Omega, R)$.

Proof.

Aufgabe 1.54. Zeige 3., 4. den iii. und iv. Teil von 6. und 7.

1. folgt aus

$$\{f > r - g\} = \cup_{q \in \mathbb{Q}} \{f \geq q\} \cap \{r - g \leq q\} .$$

Um 2. zu zeigen, setzen wir $\tilde{f}(x) := f(x)$, $\tilde{g}(x) := 0$ für $x \notin N_{f,g} := \{f = \infty\} \cap \{g = -\infty\} \cup \{g = \infty\} \cap \{f = -\infty\}$ und $f(x) := r$, $g(x) := 0$ sonst. Dann sind $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ und $f +_r g = \tilde{f} + \tilde{g}$. Wir wenden nun 1. an auf

$$\{f +_r g > a\} = \{\tilde{f} + \tilde{g} > a\} = \{\tilde{f} > a - \tilde{g}\} .$$

Wir sehen 4. unter der Bedingung $f \geq 0$ ein durch

$$\{f^{-1} > a\} = \{f < 1/a\}$$

Der allgemeine Fall folgt nun durch Kombination mit 2. und 3. Wir zeigen in 6., daß $\sup_j f_j \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ durch

$$\{\sup_j f_j > a\} = \bigcup_j \{f_j > a\} .$$

□

Wir betrachten nun den Maßraum $([a, b], R_{|\cdot|}, |\cdot|)$, der sich durch Einschränken von $(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ auf das Intervall $[a, b]$ ergibt. Sei $R([a, b])$ der Raum der Riemannintegrierbaren Funktionen.

Satz 1.48. Es gilt $R([a, b]) \subset \mathcal{L}([a, b], R_{|\cdot|}, |\cdot|)$.

Proof. Sei $U := \{x \in [a, b] \mid f \text{ un stetig in } x\}$. Wir zeigen, daß U eine Nullmenge ist. Wir setzen $\omega(f)(x) := \inf_U \delta(f(U))$, wobei $\delta(f(U))$ der Durchmesser der Menge $f(U)$ ist und U alle Umgebungen von x durchläuft.

Aufgabe 1.55. Zeige, daß f in x genau dann stetig ist, wenn $\omega(f)(x) = 0$ gilt.

Sei

$$U_k := \{\omega(f) \geq \frac{1}{k+1}\} .$$

Dann ist $U = \bigcup_k U_k$. Wir fixieren k . Sei $\epsilon > 0$ gegeben und $a := t_0 < t_1 \cdots < t_r = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ derart, daß die Differenz der assoziierten Ober- und Untersummen kleiner als ϵ ist. Sei $T := \{j \mid [t_j, t_{j+1}) \cap U_k \neq \emptyset\}$. Dann gilt $\epsilon > \frac{1}{k+1} \sum_{j \in T} (t_{j+1} - t_j)$ und $U_k \subset \bigcup_{j \in T} [t_j, t_{j+1})$. Da ϵ beliebig war, verschwindet das äußere Lebesguemaß von U_k . Folglich ist auch U Lebesgue-meßbar und es gilt $|U| = 0$.

Die Einschränkung $f|_{[a,b] \setminus U}$ ist stetig. Sei jetzt $V \subset \bar{\mathbb{R}}$ offen. Dann gilt $f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U \cup f^{-1}(V) \cap ([a, b] \setminus U)$. Nun ist $f^{-1}(V) \cap ([a, b] \setminus U) = f|_{[a,b] \setminus U}^{-1}(V)$ offen in $[a, b] \setminus U$, also von der Form $W \cap ([a, b] \setminus U)$ für eine offene Teilmenge $W \subset [a, b]$. Weiterhin ist $f^{-1}(V) \cap U$ eine Nullmenge. Also sind beide Mengen $(f^{-1}(V) \cap U)$ und $f^{-1}(V) \cap ([a, b] \setminus U)$ Lebesgue-meßbar. Folglich ist $f^{-1}(V)$ meßbar.

Da dies für alle offenen $V \subset \bar{\mathbb{R}}$ gilt, ist f meßbar. □

1.3.2 Approximationsätze

Wir betrachten einen meßbaren Raum (Ω, R) .

Lemma 1.49. 1. Ist $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ beschränkt, so existiert eine Folge (ϕ_i) einfacher Funktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert.

2. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann meßbar, wenn es eine Folge einfacher Funktionen (ϕ_i) gibt, welche punktweise gegen f konvergiert.

3. Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegativ. Dann existiert eine monotone Folge einfacher Funktionen (ϕ_i) mit $\lim_i \phi_i = f$.

Proof. Zu 1.: Für $i \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $I_i(n) := [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}) \subset \mathbb{R}$. Wir setzen $\phi_n := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{i}{2^n} \chi_{f^{-1}(I_i(n))}$. Da f meßbar und beschränkt ist, ist diese Summe endlich und definiert eine einfache Funktion. Es gilt $\sup_{\Omega} |f - \phi_n| \leq 2^{-n}$.

Zu 2.: Ist f punktweiser Grenzwert einer Folge meßbarer Funktionen, dann ist f meßbar, wie oben schon gezeigt wurde. Sei jetzt umgekehrt $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ gegeben. Wir definieren $f_n := f \chi_{\{|f| \leq n\}} + n(\chi_{\{f = \infty\}} - \chi_{\{f = -\infty\}})$. Die Folge (f_n) von beschränkten Funktionen konvergiert punktweise gegen f . Wir finden nach 1. Folgen einfacher Funktionen $(\phi(n)_i)$

für $n \in \mathbb{N}$, welche gleichmäßig gegen f_n konvergieren so daß $\sup_{\Omega} |f_n - \phi(n)_i| \leq 2^{-i}$. Die Folge $(\phi(n)_n)$ konvergiert dann punktweise gegen f .

Zu 3.: Wir setzen

$$\phi_i := \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{j}{2^i} \chi_{f^{-1}([\frac{j}{2^i}, \frac{j+1}{2^i})} + 2^i \chi_{f^{-1}([2^i, \infty))}.$$

Für $x \in \Omega$ gilt $f(x) \geq \phi_{i+1}(x) \geq \phi_i(x) \geq f(x) - 2^{-i}$ falls $f(x) < 2^i$. Wenn $f(x) \geq 2^i$, so gilt $f(x) \geq \phi_{i+1}(x) \geq \phi_i(x) = 2^i$. □

Aufgabe 1.56. *Wir nehmen an, daß wir einen sequentiellen Computer haben, welcher mit reellen Zahlen arbeiten kann und die arithmetischen Operationen sowie die Relationen $<, >, \geq, \leq$ beherrscht. Er arbeitet ein Programm ab, welches als Input eine reelle Zahl x bekommt. Falls das Programm abbricht, dann setzen wir $P(x) :=$ "42". Andernfalls sei $P(x) :=$ "Erde". Zeigen Sie, daß die Menge $\{P(x) =$ "42" $\} \subset \mathbb{R}$ Borel-meßbar ist.*

Sei jetzt (Ω, R, μ) ein vollständiger Maßraum.

Definition 1.50. 1. Sei $P : \Omega \rightarrow \{\text{"wahr"}, \text{"falsch"}\}$ eine Eigenschaft der Punkte von Ω . Wir sagen, daß fast alle (bez. μ) Punkte die Eigenschaft P haben, wenn $\mu(\{P =$ "falsch" $\}) = 0$.

2. Zwei Funktionen f, g auf Ω stimmen fast überall (bez. μ) überein, falls fast alle Punkte $x \in \Omega$ die Eigenschaft $f(x) = g(x)$ haben, also $\mu(\{f \neq g\}) = 0$ gilt. Wir schreiben diese Relation als $f =_{\mu} g$.

3. Sei X ein topologischer Raum. Eine Folge von Abbildungen (f_i) , $f_i : \Omega \rightarrow X$ konvergiert fast überall (bez. μ) gegen $f : \Omega \rightarrow X$, falls fast alle Punkte $x \in \Omega$ die Eigenschaft $\lim_i f_i(x) = f(x)$ haben. Wir schreiben diese Relation als $f_i \rightarrow_{\mu} f$.

Eine fast überall konvergente Folge kann viele Grenzwerte haben.

Aufgabe 1.57. Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_x)$ ein Maßraum mit Dirac-Maß. Beschreibe alle fast überall (bez. δ_x) konvergenten Folgen von Abbildungen in einen topologischen Raum X .

Aufgabe 1.58. Sei (Ω, R) ein meßbarer Raum und (f_i) eine Folge meßbarer Abbildungen $f_i : \Omega \rightarrow X$, wobei (X, d) ein metrischer Raum ist. Zeige, daß die Menge

$$A := \{x \in \Omega \mid (f_i(x)) \text{ konvergiert}\}$$

eine meßbare Menge ist. Gilt diese Aussage auch dann, wenn man den metrischen Raum durch einen topologischen Raum ersetzt ?

Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge ist nicht durch lokale Betrachtungen festzustellen. Deshalb brauchen wir hier einen neuen Begriff.

Definition 1.51. 1. Eine Eigenschaft P der Elemente von R gilt beinahe für Ω (bez. μ), wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $A \in R$ gibt mit $P(A) = "$ wahr" $"$ und $\mu(A^c) < \epsilon$.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (f_i) von Abbildungen $f_i : \Omega \rightarrow X$ konvergiert beinahe gleichmäßig gegen $f : \Omega \rightarrow X$, wenn die Eigenschaft $P(A) := \{(f_i|_A) \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f|_A\}$ beinahe für Ω (bez. μ) gilt.

Lemma 1.52. 1. Wenn (f_i) beinahe gleichmäßig gegen f konvergiert, dann konvergiert (f_i) fast überall gegen f .

2. Wenn $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt auch umgekehrt, daß (f_i) beinahe gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn (f_i) fast überall gegen f konvergiert.

Proof. Möge (f_i) beinahe gleichmäßig gegen f konvergieren. Wir wählen Teilmengen $A_k \in R$ derart, daß $(f_i|_{A_k})$ gleichmäßig gegen $f|_{A_k}$ konvergiert und $\mu(A_k^c) < \frac{1}{k}$. Sei $A := \cup_k A_k$. Dann konvergiert $(f_i|_A)$ punktweise gegen $f|_A$, und es gilt $\mu(A^c) = 0$.

Sei jetzt $\mu(\Omega) < \infty$ und (f_i) fast überall gegen f konvergent. Sei N eine Nullmenge so daß $(f_i|_{N^c})$ gegen $(f|_{N^c})$ punktweise konvergiert. Wir setzen

$$A_j(k) := \bigcap_{m \geq j} \{d(f_m, f) < 2^{-k-1}\} .$$

Aufgabe 1.59. Zeige, daß $A_j(k)$ meßbar ist.

Die Folge $(A_j(k))_j$ ist aufsteigend und es gilt $N^c \subset \bigcup_j A_j(k)$. Für $\epsilon > 0$ wählen wir $j_\epsilon(k)$ derart, daß $\mu(A_j(k)^c) < \epsilon 2^{-k-1}$ für alle $j \geq j_\epsilon(k)$. Dann setzen wir $A_\epsilon = \bigcap_k A_{j_\epsilon(k)}(k)$. Es gilt $\mu(A_\epsilon^c) < \epsilon$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $j \geq j_\epsilon(k)$, daß $\sup_{x \in A_\epsilon} d(f_j(x), f(x)) < 2^{-k-1}$. □

Die Aussage 2. gilt nicht mehr, wenn man die Endlichkeit des Gesamtmaßes nicht voraussetzt.

Aufgabe 1.60. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei $\mu(A) := \#(A)$. Sei $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_i(x) = \frac{x}{i+1}$ gegeben. Zeige, daß (f_i) fast überall punktweise aber nicht beinahe auf \mathbb{N} gleichmäßig konvergiert.

Hier ist eine weiterer Konvergenzbegriff, welcher sich direkt aus der Konvergenz in Integralnormen ablesen läßt.

Definition 1.53. Sei (f_i) eine Folge von Abbildungen von Ω in einen metrischen Raum (X, d) . Dann konvergiert die Folge stochastisch (bez. μ) gegen f , falls für alle $\epsilon > 0$ gilt :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{d(f, f_n) > \epsilon\}) = 0 .$$

Aufgabe 1.61. Sei (f_i) eine Folge in $C_c(\mathbb{R})$ und $f \in C_c(\mathbb{R})$ derart, daß $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i - f\|_p = 0$. Zeige, daß dann (f_i) stochastisch gegen f konvergiert. Gilt auch die Umkehrung ?

Aufgabe 1.62. 1. Zeige durch ein Gegenbeispiel, daß die stochastische Konvergenz nicht notwendig die punktweise Konvergenz (fast überall) nach sich zieht.

2. Zeige durch ein Gegenbeispiel, daß die punktweise Konvergenz (fast überall) nicht notwendig die stochastische Konvergenz nach sich zieht.

3. Zeige, daß die gleichmäßige Konvergenz beinahe auf Ω die stochastische Konvergenz nach sich zieht.

Aufgabe 1.63. Wir betrachten auf $(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ Abbildungen mit Werten im metrischen Raum $\bar{\mathbb{R}}$ (mit irgend einer geeigneten Metrik). Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz fast überall, auf gleichmäßige Konvergenz beinahe auf Ω und auf stochastische Konvergenz.

1. $f_i := \chi_{[i, i+1]}$

2. $f_i := \chi_{[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]}$, wobei $i = 2^k + j$ mit $j \in [0, 2^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

3. $f_i(x) := \chi_{[0,1]}(x)x^i$

1.3.3 Grenzwertsätze für das Integral

Satz 1.54 (Lemma von Fatou, 1906). Sei $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer nichtnegativer Funktionen auf Ω . Es gilt

$$\int_{\Omega} \liminf_j f_j d\mu \leq \liminf_j \int_{\Omega} f_j d\mu .$$

Proof. Wir setzen $g_k := \inf_{j \geq k} f_j$. Sei $\phi \in \mathcal{E}$ mit $0 \leq \phi \leq \liminf_j f_j$. Wir müssen zeigen, daß dann $\int_{\Omega} \phi d\mu \leq \liminf_j \int_{\Omega} f_j d\mu$ gilt. Die Meßbarkeit von f_j und ϕ sichert die Meßbarkeit von g_k und aller unten gebildeten Mengen.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß $\int_{\Omega} \phi d\mu = \infty$. Dann gibt es ein $a > 0$ derart, daß für $A := \{\phi > a\}$ gilt $\mu(A) = \infty$. Wir setzen $A_k := \{g_k > a\}$. Die Folge (A_k) ist monoton aufsteigend, da (g_k) monoton steigt. Weiter ist $A \subset \bigcup_k A_k$. Es gilt also $\lim_k \mu(A_k) = \infty$. Nun ist für $j \geq k$ $\int_{\Omega} f_j d\mu \geq \int_{\Omega} g_k d\mu \geq a\mu(A_k)$. Damit gilt $\liminf_j \int_{\Omega} f_j d\mu = \infty$.

Sei jetzt $\int_{\Omega} \phi d\mu < \infty$, $0 < \epsilon < 1$ und $P := \{\phi > 0\}$. Dann gilt $\mu(P) < \infty$. Wir setzen $P_k := \{g_k > (1 - \epsilon)\phi\}$. Die Folge (P_k) ist aufsteigend und es gilt $P \subset \bigcup_k P_k$. Es gilt $\lim_k \mu(P \setminus P_k) = 0$. Sei k_1 derart, daß $\mu(P \setminus P_k) < \epsilon$ für alle $k \geq k_1$.

Dann gilt für $k \geq k_1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g_k d\mu &\geq \int_{P_k} g_k d\mu \\ &\geq \int_{P_k} (1 - \epsilon)\phi d\mu \\ &= (1 - \epsilon) \int_{P_k} \phi d\mu \\ &= (1 - \epsilon) \left[\int_P \phi d\mu - \int_{P \setminus P_k} \phi d\mu \right] \\ &\geq (1 - \epsilon) \int_P \phi d\mu - \int_{P \setminus P_k} \phi d\mu \\ &\geq \int_P \phi d\mu - \epsilon \int_P \phi d\mu - \epsilon \sup \phi \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\liminf_j \int_{\Omega} f_j d\mu \geq \liminf_j \int_{\Omega} g_j d\mu \geq \int_{\Omega} \phi d\mu - \epsilon \left[\int_P \phi d\mu + \sup \phi \right].$$

Das ϵ beliebig klein sein darf, gilt $\liminf_j \int_{\Omega} f_j d\mu \geq \int_{\Omega} \phi d\mu$. □

Aufgabe 1.64. Zeige, daß die Aussage des Lemmas von Fatou im allgemeinen falsch wird, wenn man die Forderung, daß die f_j meßbar seien, fallen läßt,

Die Ungleichung im Lemma von Fatou kann nicht zu einer Gleichung verschärft werden.

Aufgabe 1.65. Auf $(\mathbb{R}, \mathcal{R}_{|\cdot|}, |\cdot|)$ betrachten wir die Folge (f_j)

$$f_j := \begin{cases} \chi_{[0,1]} & j \equiv 1(2) \\ \chi_{[1,2]} & j \equiv 0(2) \end{cases} .$$

Berechne und vergleiche $\int_{\Omega} \liminf_j f_j d\mu$ und $\liminf_j \int_{\Omega} f_j d\mu$.

Satz 1.55 (Lebesguescher Satz über monotone Konvergenz, 1902). Sei (f_i) eine monoton wachsende Folge meßbarer nichtnegativer Funktionen auf Ω . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \lim_j f_j d\mu = \lim_j \int_{\Omega} f_j d\mu .$$

Proof. Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$\int_{\Omega} \lim_j f_j d\mu = \int_{\Omega} \liminf_j f_j d\mu \leq \liminf_j \int_{\Omega} f_j d\mu .$$

Wegen $f_k \leq \lim_j f_j$ gilt $\int_{\Omega} f_k d\mu \leq \int_{\Omega} \lim_j f_j d\mu$ und damit

$$\limsup_k \int_{\Omega} f_k d\mu \leq \int_{\Omega} \lim_j f_j d\mu .$$

Es folgt $\int_{\Omega} \lim_j f_j d\mu = \lim_j \int_{\Omega} f_j d\mu$. □

Aufgabe 1.66. Zeige durch ein Gegenbeispiel, daß die Voraussetzung der Monotonie der Folge im Satz über monotone Konvergenz nicht weggelassen werden kann.

Satz 1.56. Seien $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$ nichtnegative Funktionen.

1. Es gilt

$$\int_{\Omega} (f + g) d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu .$$

2. Wenn $f \leq g$ fast überall (bez. μ), dann gilt

$$\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu .$$

Proof. Zu 1.: Wir wählen monotone Folgen einfacher Funktionen (ϕ_i) und (ψ_i) mit $\lim_i \phi_i = f$ und $\lim_i \psi_i = g$. Dann ist $(\phi_i + \psi_i)$ monoton und es gilt $\lim_i (\phi_i + \psi_i) = f + g$. Mit dem

Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz schließen wir, daß

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f + g) d\mu &= \lim_i \int_{\Omega} (\phi_i + \psi_i) d\mu \\ &= \lim_i \int_{\Omega} \phi_i d\mu + \lim_i \int_{\Omega} \psi_i d\mu \\ &= \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu \end{aligned}$$

Zu 2.: Sei $U := \{f \leq g\}$. Dann gilt $\mu(\Omega \setminus U) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu &= \int_U f d\mu + \int_{\Omega \setminus U} f d\mu \\ &= \int_U f d\mu \\ &\leq \int_U g d\mu \\ &= \int_{\Omega} g d\mu . \end{aligned}$$

□

Satz 1.57 (Levi, 1906). Sei (f_i) eine Folge nichtnegativer Funktionen auf Ω . Dann gilt $\int_{\Omega} \sum_j f_j d\mu = \sum_j \int_{\Omega} f_j d\mu$.

Aufgabe 1.67. Zeige diesen Satz.

1.3.4 Integrierbare Funktionen

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum.

Definition 1.58. Sei $A \in R$ und $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Dann heißt f über A integrierbar, falls $\int_A |f| d\mu < \infty$ gilt. Im Fall $A = \Omega$ sagen wir einfach, daß f integrierbar sei. Mit $\mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ bezeichnen wir die Menge der integrierbaren Funktionen.

Für $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sei $f^+ = f \chi_{\{f \geq 0\}}$ und $f^- := -f \chi_{\{f \leq 0\}}$.

Aufgabe 1.68. Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Zeige, daß f genau dann integrierbar ist, wenn $\int_{\Omega} f^+ d\mu < \infty$ und $\int_{\Omega} f^- d\mu < \infty$ gilt.

Aufgabe 1.69. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $A \in R$. Zeige, daß $f|_A \in \mathcal{L}(A, R|_A, \mu|_{R|_A})$ gilt.

Aufgabe 1.70. Wir betrachten $(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$. Welche der folgenden Funktionen sind integrierbar.

1. $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$.
2. $f(x) := \frac{1}{1+|x|} \sin(x)$.
3. $f(x) := \frac{1}{x} \chi_{(-1,1) \setminus \{0\}}(x)$
4. $f(x) := \frac{1}{|x|^{1/2}} \chi_{(-1,1) \setminus \{0\}}(x)$.

Aufgabe 1.71. Wir betrachten den Haarschen Maßraum (\mathbb{Z}_p, R, μ) . Zeigen Sie, daß jede beschränkte Funktion in $\mathcal{L}(\mathbb{Z}_p, R)$ integrierbar ist. Geben sie eine nichtintegrierbare Funktion auf \mathbb{Z}_p an.

Definition 1.59. Sei $A \subset \Omega$. Wir definieren $\int_A : \mathcal{L}(\Omega, R, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\int_A f d\mu := \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu .$$

Wir verabreden für $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$ daß $x + y := x +_0 y$.

Satz 1.60. 1. Wenn $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $r \in \mathbb{R}$, so gilt auch $rf + g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.

2. Sei $A \in R$. Dann gilt für $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $r \in \mathbb{R}$, daß $\int_A (rf + g) d\mu = r \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$.

3. Ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ fast überall gleich Null oder A eine Nullmenge, so gilt $\int_A f d\mu = 0$.

4. Wenn $A, B \in R$ disjunkt sind und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ ist, so gilt

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu .$$

5. Gilt für $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ daß $f \leq_\mu g$, dann ist für jedes $A \in R$

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu .$$

6. Für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $A \in R$ gilt $|\int_A f d\mu| \leq \int_A |f| d\mu$. Gleichheit gilt hier genau dann, wenn f fast überall nichtnegativ oder fast überall nichtpositiv ist.

Proof. Zu 1.: Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, so ist für $r \in \mathbb{R}$ wegen $\int_{\Omega} |rf| d\mu = |r| \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$ auch $rf \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, so gilt $|f+g| \leq |f|+|g|$, also $\int_{\Omega} |f+g| d\mu \leq \int_{\Omega} |f| d\mu + \int_{\Omega} |g| d\mu < \infty$. Folglich ist $f+g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.

Zu 2.: Es gilt für $r \geq 0$, daß

$$\int_A r f d\mu = \int_A (rf)^+ d\mu - \int_A (rf)^- d\mu = r \int_A f^+ d\mu - r \int_A f^- d\mu = r \int_A f d\mu .$$

Der Fall $r \leq 0$ geht analog. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Sei $N := \{|f| = \infty\} \cup \{|g| = \infty\}$. Dann ist N eine Nullmenge. Auf $\Omega \setminus N$ gilt

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ .$$

Daraus schließen wir

$$\int_A (f+g)^+ d\mu + \int_A f^- d\mu + \int_A g^- d\mu = \int_A (f+g)^- d\mu + \int_A f^+ d\mu + \int_A g^+ d\mu .$$

Es folgt

$$\int_A (f+g)^+ d\mu - \int_A (f+g)^- d\mu = \left(\int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \right) + \left(\int_A g^+ d\mu - \int_A g^- d\mu \right) .$$

Aufgabe 1.72. Zeige 3. und 4.

Zu 5.: Sei $N := \{f < g\}$. Dann ist N eine Nullmenge. Auf $\Omega - N$ gilt dann $f^+ \leq g^+$ und $g^- \leq f^-$. Wir schließen, daß

$$\int_{A \setminus N \cap A} f d\mu = \int_{A \setminus N \cap A} f^+ d\mu - \int_{A \setminus N \cap A} f^- d\mu \leq \int_{A \setminus N \cap A} g^+ d\mu - \int_{A \setminus N \cap A} g^- d\mu = \int_{A \setminus N \cap A} g d\mu .$$

Da die Integrale über $A \cap N$ verschwinden, folgt die Behauptung.

Aufgabe 1.73. Zeige 6. □

Aufgabe 1.74. Warum ist (trotz der Aussage 1.) $\mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ kein Vektorraum?

Aufgabe 1.75. Zeige :

1. Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und gilt $f =_{\mu} g$, so gilt $\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} g d\mu$.
2. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und $h \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Wenn $f =_{\mu} h$, so ist $h \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.

3. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, $f \geq 0$ und $h \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Zeige, daß aus $|h| \leq_\mu f$ folgt :
 $h \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$.
4. Sei (f_i) eine Folge in $\mathcal{L}(\Omega, R)$. Zeige, daß $\{x \in \Omega \mid \lim_n f(x) \text{ existiert nicht}\}$ eine meßbare Menge ist.
5. Sei (f_i) eine Folge in $\mathcal{L}(\Omega, R)$, $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ und gelte $f_i \rightarrow_\mu f$. Ist (Ω, R, μ) vollständig, so ist f meßbar.

Satz 1.61 (Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz). Sei (f_i) eine Folge in $\mathcal{L}(\Omega, R)$, $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, und gelte $|f_i| \leq_\mu g$ und $f_i \rightarrow_\mu f$. Ist (Ω, R, μ) vollständig oder gilt $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$, so ist

1. $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und

$$\lim_i \int_\Omega f_i d\mu = \int_\Omega f d\mu .$$

2. $\lim_i \int |f - f_i| d\mu = 0$.

Proof. Zu 1.: Wir zeigen zuerst, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß $|f_i| \leq g$ und $f_i \rightarrow f$ gilt. Sei $A_i = \{|f_i| > g\}$ und $A := \{f_i \not\rightarrow f\}$. Dann ist $N := A \cup \bigcup_i A_i$ eine Nullmenge. Wir setzen $\tilde{f} := f\chi_{\Omega \setminus N}$ und $\tilde{f}_i := f_i\chi_{\Omega \setminus N}$. Diese erfüllen die stärkeren Voraussetzungen. Die Behauptung für \tilde{f} , (\tilde{f}_i) impliziert sofort die Behauptung für f , (f_i) .

Wir nehmen jetzt $|f_i| \leq g$ und $f_i \rightarrow f$ an. Es folgt $f_i \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und die Meßbarkeit von f . Weiterhin gilt $|f| \leq g$, womit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ gilt. Wir schließen mit dem Lemma von Fatou, daß

$$\begin{aligned} \int_\Omega g d\mu + \int_\Omega f d\mu &= \int_\Omega (g + f) d\mu \\ &= \int_\Omega \liminf_i (g + f_i) d\mu \\ &\leq \liminf_i \int_\Omega (g + f_i) d\mu \\ &= \int_\Omega g d\mu + \liminf_i \int_\Omega f_i d\mu . \end{aligned}$$

Weiterhin

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} g d\mu - \int_{\Omega} f d\mu &= \int_{\Omega} (g - f) d\mu \\
 &= \int_{\Omega} \liminf_i (g - f_i) d\mu \\
 &\leq \liminf_i \int_{\Omega} (g - f_i) d\mu \\
 &= \int_{\Omega} g d\mu - \limsup_i \int_{\Omega} f_i d\mu .
 \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt wegen $\int_{\Omega} g d\mu \in \mathbb{R}$, daß

$$\limsup_i \int_{\Omega} f_i d\mu \leq \int_{\Omega} f d\mu \leq \liminf_i \int_{\Omega} f_i d\mu ,$$

also

$$\lim_i \int_{\Omega} f_i d\mu = \int_{\Omega} f d\mu .$$

Zu 2.: Es gilt $|f - f_i| \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, $|f - f_i| \rightarrow_{\mu} 0$ und $|f - f_i| \leq_{\mu} g$. Nach 1. gilt

$$\lim_i \int_{\Omega} |f - f_j| d\mu = \int_{\Omega} 0 d\mu = 0 .$$

□

Aufgabe 1.76. Zeige, daß folgender Satz im allgemeinen falsch ist : Sei (f_i) eine Folge in $\mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ mit $f_i \rightarrow_{\mu} f$ und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Dann gilt

$$\lim_i \int_{\Omega} f_i d\mu = \int_{\Omega} f d\mu .$$

Aufgabe 1.77. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Zeige, daß

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{A \in R, \mu(A) < \epsilon} \int_A f d\mu = 0 .$$

1.3.5 Differenzieren unter dem Integral

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Wir betrachten eine Funktion $f : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $U \subset \mathbb{R}$ eine zusammenhängende offene Umgebung von 0 ist. Wir nehmen an, daß für jedes $u \in U$

die Funktion ${}_u f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ${}_u f(x) = f(u, x)$ integrierbar ist. Dann können wir die Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(u) := \int_{\Omega} {}_u f \, d\mu$$

definieren. Für $x \in \Omega$ sei $f_x : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_x(u) := f(u, x)$ gegeben.

Satz 1.62. *Wenn f_x für fast alle $x \in \Omega$ differenzierbar ist, so ist die Funktion ${}_u f'$, welche durch*

$${}_u f'(x) := \begin{cases} f'_x(u) & f_x \text{ differenzierbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist, meßbar. Wenn es ein $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ gibt mit $\sup_u |{}_u f'| \leq g$, dann ist F in $u = 0$ differenzierbar, ${}_0 f'$ integrierbar und es gilt

$$F'(0) = \int_{\Omega} {}_0 f' \, d\mu .$$

Proof. Sei $N := \{f_x \text{ ist nicht differenzierbar}\}$. Nach Voraussetzung ist N eine Nullmenge. Auf $\Omega \setminus N$ gilt

$${}_u f' = \lim_{n \rightarrow \infty} n({}_{u+\frac{1}{n}} f - {}_u f) .$$

Damit ist ${}_u f'$ als punktweiser Limes meßbarer Funktionen auf $\Omega \setminus N$ selbst meßbar.

Sei (h_i) eine Nullfolge. Nach dem Mittelwertsatz gilt für $x \in \Omega \setminus N$ daß $|h_i f(x) - {}_0 f(x)| \leq g(x)|h_i|$. Damit gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ daß $|\frac{1}{h_i}(h_i f - {}_0 f)| \leq_\mu g$. Wir wenden nun den Satz über majorisierte Konvergenz an.

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F(h_i) - F(0)}{h_i} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{h_i} (h_i f - {}_0 f) \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} {}_0 f' \, d\mu \end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.78. *Zeige durch ein Gegenbeispiel, daß es im zweiten Teil des obigen Satzes nicht ausreicht, nur ${}_0 f' \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ zu fordern.*

Aufgabe 1.79. *Berechne für $s \in (0, 1)$ und $p \in \mathbb{R}[x]$ die Funktionen $F_p(s) := \sum_n p(n)s^n$ und $G_p(s) := \int_0^\infty p(x)s^x \, dx$ explizit in Termen von $F_1(s) = ???$ oder $G_1(s) = ???$.*

1.4 L^p -Räume

1.4.1 Definitionen

Wir betrachten einen Maßraum (Ω, R, μ) . Ziel dieses Abschnittes ist es, Banachräume von zur Potenz p integrierbaren Funktionen auf Ω zu definieren.

Definition 1.63. 1. Für $p \in (0, \infty)$ setzen wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu) := \{f \in \mathcal{L}(\Omega, R) \mid |f|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)\}.$$

Für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ setzen wir

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Für $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ definieren wir das wesentliche Supremum

$$\text{ess sup } f := \sup\{r \in \bar{\mathbb{R}} \mid f \leq_{\mu} r\}.$$

Weiter setzen wir

$$\mathcal{L}^{\infty}(\Omega, R, \mu) := \{f \in \mathcal{L}(\Omega, R) \mid \text{ess sup } |f| < \infty\}.$$

Aufgabe 1.80. 1. Zeige: Wenn $p \in (0, \infty)$ und $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$, dann ist $f^{-1}(\{-\infty, \infty\})$ eine Nullmenge.

2. Zeige: Wenn $f \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, R, \mu)$, dann ist $\{|f| > \text{ess sup } |f|\}$ eine Nullmenge.

Aufgabe 1.81. 1. Zeige: Wenn $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt für $0 < q \leq p \leq \infty$, daß

$$\mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu) \subset \mathcal{L}^q(\Omega, R, \mu).$$

2. Zeige weiter, daß die Voraussetzung $\mu(\Omega) < \infty$ i.a. nicht weggelassen werden kann.

Aufgabe 1.82. Sei $\Omega := \mathbb{R}$, R die von allen endlichen Mengen erzeugte σ -Algebra und μ eine Erweiterung von $\mu(A) := \#A$ für jede endliche Menge. Zeige, daß aus $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ folgt, daß f an höchstens abzählbar vielen Stellen nicht verschwindet.

Aufgabe 1.83. Zeige, daß die Relation $f =_{\mu} g$ auf $\mathcal{L}(\Omega, R)$ eine Äquivalenzrelation ist.

Definition 1.64. Für $p \in (0, \infty]$ setzen wir

$$L^p(\Omega, R, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu) / \sim_{\mu}.$$

Wir werden jetzt schrittweise erst eine Vektorraumstruktur auf diesem Raum einführen, dann einsehen, daß $\|\cdot\|_p$ eine Norm induziert und schließlich die Vollständigkeit in dieser Norm zeigen.

Aufgabe 1.84. Sei $\mu = \delta_x$ das Diracmaß in $x \in \Omega$. Bestimme $L^p(\Omega, R, \mu)$.

Lemma 1.65. Jede Klasse $[f] \in L^p(\Omega, R, \mu)$ enthält einen endlichen Vertreter \tilde{f} .

Proof. Sei $p < \infty$. Dann setzen wir $\tilde{f}(x) := f \chi_{f^{-1}(\{-\infty, \infty\}^c)}$. Dann ist \tilde{f} endlich, $f =_\mu \tilde{f}$, und es gilt $\int_\Omega |\tilde{f}|^p d\mu = \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty$. Also $\tilde{f} \in [f]$.

Sei nun $p = \infty$. Wir setzen $\tilde{f} := f \chi_{\{|f| > \text{ess sup}|f|\}^c}$. Dann ist \tilde{f} endlich, $\tilde{f} =_\mu f$, und es gilt $\text{ess sup}|\tilde{f}| = \text{ess sup}|f| < \infty$. Also $\tilde{f} \in [f]$. \square

Aufgabe 1.85. Zeige : Die Begriffe “endlich” und “beschränkt” sind für meßbare Funktionen auf (Ω, R) genau dann äquivalent, wenn R endlich ist.

Wir erklären nun die Vektorraumstruktur auf $L^p(\Omega, R, \mu)$.

Definition 1.66. Seien $[f], [g] \in L^p(\Omega, R, \mu)$, wobei $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ endlich sind. Dann definieren wir für $r \in \mathbb{R}$

$$[f] + r[g] = [f + rg] .$$

Lemma 1.67. Diese Operationen sind wohldefiniert und bilden eine Vektorraumstruktur auf $L^p(\Omega, R, \mu)$.

Proof. Sei $p \in (0, \infty)$. Dann gilt $|f + rg|^p \leq (|f| + |r||g|)^p \leq (2|f| \vee |r||g|)^p \leq 2^p(|f|^p + |r|^p|g|^p)$. Damit gilt $f + rg \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$.

Ist $p = \infty$, so gilt $\text{ess sup}|f + rg| \leq \text{ess sup}(|f| + |r||g|) \leq \text{ess sup}|f| + |r|\text{ess sup}|g|$. Also ist auch in diesem Fall $f + rg \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$.

Seien $\tilde{f} \in [f]$ und $\tilde{g} \in [g]$ andere endliche Vertreter. Dann gilt $f(x) + rg(x) = \tilde{f}(x) + r\tilde{g}(x)$ auf dem Komplement der Nullmenge $\{f \neq \tilde{f}\} \cup \{g \neq \tilde{g}\}$. Also $[f + rg] = [\tilde{f} + r\tilde{g}]$.

Aufgabe 1.86. Zeige, daß $L^p(\Omega, R, \mu)$ ein Vektorraum ist. \square

Wir studieren nun die Norm. Die folgenden Eigenschaften sind einfach zu zeigen.

Aufgabe 1.87. 1. Zeige, daß $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega, R, \mu) \rightarrow [0, \infty)$ durch $\|[f]\|_p := \|f\|_p$ wohldefiniert ist.

2. Zeige, daß $\|r[f]\|_p = |r| \| [f] \|_p$ für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt.

3. Zeige, daß $\|[f]\|_p = 0$ genau dann gilt, wenn $[f] = 0$.

Lemma 1.68. $(L^\infty(\Omega, R, \mu), \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum.

Proof.

Aufgabe 1.88. Zeige die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_\infty$. □

Satz 1.69 (Hölderungleichung). Seien $q, p \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Sei weiter $[f] \in L^p(\Omega, R, \mu)$, $[g] \in L^q(\Omega, R, \mu)$, wobei f, g endliche Vertreter sind. Dann ist $[fg]$ eine wohldefinierte Klasse in $L^1(\Omega, R, \mu)$, und es gilt

$$\|[fg]\|_1 \leq \|[f]\|_p \|[g]\|_q .$$

Proof. Sei $p = 1$ und $q = \infty$. Dann gilt $|fg| \leq_\mu \text{ess sup}|g| |f|$. Folglich ist $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, und es gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 .$$

Sei jetzt $p \in (1, \infty)$. Wenn $f =_\mu 0$ oder $g =_\mu 0$, dann ist $fg =_\mu 0$, und es gilt $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, $\|fg\|_1 = 0 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Sei also $f \neq_\mu 0$ und $g \neq_\mu 0$.

Aufgabe 1.89. Zeige, daß für alle $a, b \in (0, \infty)$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} .$$

Es gilt

$$\frac{|f||g|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} .$$

Wir schließen, daß $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und nach Integration und Multiplikation mit $\|f\|_p \|g\|_q$

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p} \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\|g\|_q^q} \|g\|_q^q \leq \|f\|_p \|g\|_q \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right) = \|f\|_p \|g\|_q .$$

Sind $\tilde{f} \in [f]$ und $\tilde{g} \in [g]$ andere Vertreter, so gilt $\tilde{f}\tilde{g} =_{\mu} fg$ und somit $[\tilde{f}\tilde{g}] = [fg]$.
Damit ist die Klasse $[fg]$ wohldefiniert. \square

Aufgabe 1.90. 1. Für welche $p \in [1, \infty)$ und $a \in \mathbb{R}$ liegen

$$(a) f(x) = x^a \chi_{[1, \infty)}(x)$$

$$(b) g(x) = x^a \chi_{(0, 1]}(x)$$

in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$.

2. Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \neq 1$. Zeige, daß man dann im allgemeinen aus $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, R, \mu)$, wobei f, g endlich sind, nicht $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ schließen kann.

Satz 1.70. Für $p \in [1, \infty)$ ist $(L^p(\Omega, R, \mu), \|\cdot\|_p)$ ein normierter Vektorraum.

Proof. Wir müssen die Dreiecksungleichung zeigen. Der Fall $p = 1$ ist klar. Sei jetzt $p \in (1, \infty)$ und $q \in (1, \infty)$ derart, daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt.

Seien $[f], [g] \in L^p(\Omega, R, \mu)$ mit endlichen Vertretern f, g . Es gilt (beachte, daß $\frac{p}{p-1} = q$ ist) $(|f + g|^{p-1})^q = |f + g|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Wie schließen, daß $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\Omega, R, \mu)$. Nach der Hölderungleichung gilt $(|f| + |g|)|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_{\Omega} |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \| |f| |f + g|^{p-1} \|_1 + \| |g| |f + g|^{p-1} \|_1 \\ &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{p-1}} \end{aligned}$$

Daraus schließen wir $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. \square

Aufgabe 1.91. Zeige, daß die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$ mit $p \in (0, 1)$ im allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 1.92. Sei $([f_i])$ eine 0-Folge in $L^p(\Omega, R, \mu)$. Zeige daß dann $f_i \rightarrow 0$ stochastisch (bez. μ) gilt.

1.4.2 Vollständigkeit

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum.

Folgendes Kriterium ist zum Nachweis der Vollständigkeit eines normierten Vektorraumes $(V, \|\cdot\|)$ nützlich.

Lemma 1.71. $(V, \|\cdot\|)$ ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente Reihe in V konvergiert.

Proof. Sei (v_i) eine Folge in V . Die Reihe $\sum_i v_i$ konvergiert definitionsgemäß absolut, falls $\sum_i \|v_i\| < \infty$ gilt.

Wenn $(V, \|\cdot\|)$ vollständig ist, so konvergiert jede absolut konvergente Reihe in V . Wir zeigen die andere Richtung.

Sei (f_i) eine Cauchyfolge in V . Wir wählen für jedes $\epsilon > 0$ $N(\epsilon)$ derart, daß für alle $n, m \geq N(\epsilon)$ gilt $\|f_n - f_m\| \leq \epsilon$. Wir setzen nun $v_1 := f_{N(1/2)}$ und weiter induktiv

$$v_i := f_{N(2^{-i-1})} - f_{N(2^{-i})} .$$

Dann gilt $\|v_i\| \leq 2^{-i}$. Die Reihe $\sum_i v_i$ ist absolut konvergent. Sei $f := \sum_i v_i$ der Grenzwert dieser Reihe, welcher nach Voraussetzung existiert. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann wählen wir $j \in \mathbb{N}$ so daß $2^{-j+1} < \epsilon$. Es gilt dann $\|\sum_{i \leq j} v_i - f\| \leq 2^{-j} < \frac{1}{2}\epsilon$, also $\|f_{N(2^{-j-1})} - f\| < \frac{1}{2}\epsilon$. Für alle $m \geq N(2^{-j})$ gilt dann $\|f_m - f\| < \epsilon$. Wir haben also gezeigt, daß $\lim f_i = f$. \square

Satz 1.72 (Fischer, Riesz 1907). Für $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(\Omega, R, \mu)$ ein Banachraum.

Proof. Sei $([f_i])$ eine Folge in $L^p(\Omega, R, \mu)$ derart daß $\sum_i [f_i]$ absolut konvergiert. Sei $F_k := \sum_{i \leq k} |f_i|$. Dann existiert $F := \lim_k F_k \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Es gilt $\|F_k\|_p \leq \sum_{i \leq k} \|f_i\|_p \leq \sum_i \|f_i\|_p =: M$.

Sei vorerst $p = \infty$: Für jedes k ist $\{F_k > M\}$ eine Nullmenge. Es gilt $\{F > M\} \subset \bigcup_k \{F_k > M\}$ und damit $F \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu)$. Wir definieren $f(x) := \sum_i f_i(x)$ für $x \in \{F > M\}$ und $f(x) := 0$ sonst. Dann ist $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, R, \mu)$ und $\|f\|_\infty \leq M$.

Sei jetzt $p \in [1, \infty)$. Es gilt nach dem Satz über monotone Konvergenz, daß

$$\int_\Omega F^p d\mu = \lim_k \int_\Omega F_k^p d\mu \leq M^p .$$

Damit ist $A := F^{-1}(\{\infty\})$ eine Nullmenge. Für $x \in \Omega \setminus A$ definieren wir $f(x) := \sum_i f_i(x)$, und wir setzen $f(x) := 0$ für $x \in A$. Dann ist f als punktweiser Grenzwert meßbarer Funktionen meßbar. Wir schließen weiter $|f|^p \leq F^p$ und damit $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ und $\|f\|_p \leq M$.

Wir zeigen nun, daß $[f] = \sum_i [f_i]$ gilt. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $L \in \mathbb{N}$ derart, daß $\sum_{i>L} \|f_i\|_p < \epsilon$

Sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt für alle $m \geq L$ nach dem Lemma von Fatou :

$$\begin{aligned}
\| [f] - \sum_{i \leq m} [f_i] \|_p^p &= \int_{\Omega} |f - \sum_{i \leq m} f_i|^p d\mu \\
&= \int_{\Omega} | \sum_{i > m} f_i |^p d\mu \\
&= \int_{\Omega} \liminf_n | \sum_{i=m+1}^n f_i |^p d\mu \\
&\leq \liminf_n \int_{\Omega} | \sum_{i=m+1}^n f_i |^p d\mu \\
&= \liminf_n \| \sum_{i=m+1}^n f_i \|_p^p \\
&\leq \liminf_n (\sum_{i=m+1}^n \|f_i\|_p)^p \\
&\leq \epsilon^p .
\end{aligned}$$

Für $p = \infty$ gilt für alle $m \geq L$ und $x \in \{F \leq M\}$, daß

$$\begin{aligned}
|f(x) - \sum_{i \leq m} f_i(x)| &= \lim_n | \sum_{i > m}^n f_i(x) | \\
&\leq \lim_n \sum_{i > m}^n |f_i(x)| \\
&\leq \sum_{i > L} |f_i(x)|
\end{aligned}$$

Dann gilt für x im Komplement der Nullmenge $\{F > M\} \cup \bigcup_i \{f_i > \|f_i\|_{\infty}\}$, daß $|f(x) - \sum_{i \leq m} f_i(x)| < \epsilon$. Also $\|f - \sum_{i \leq m} f_i\|_{\infty} < \epsilon$. □

□

1.4.3 Weitere Eigenschaften

Aufgabe 1.93. Zeige, daß das Bild von $\mathcal{E} \cap \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu) \rightarrow L^p(\Omega, R, \mu)$, $\phi \mapsto [\phi]$, dicht ist.

Aufgabe 1.94. Sei $p \in (1, \infty)$.

1. Zeige, daß $C_c(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ dicht liegt. (Zeige dazu : $\mathbb{R} < \chi_{[a,b]} | a < b >$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$. Approximiere dann $\chi_{[a,b]}$ durch stetige Funktionen mit kompakten Träger.)
2. Zeige, daß $C_c^\infty(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ dicht liegt.
3. Ist $C_c(\mathbb{R})$ dicht in $L^\infty(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$.
4. Dehne obige Aussagen von \mathbb{R} auf \mathbb{R}^n aus.

Zur Erinnerung :

Definition 1.73. Ein metrischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Definition 1.74. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum, $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ die äußere Erweiterung von μ und $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Der Raum (Ω, R, μ) heißt von innen S -regulär, falls für jedes $A \in R$ gilt

$$\inf_{B \in S, B \subset A} \mu(A \setminus B) = 0 .$$

Aufgabe 1.95. 1. Zeige, daß $(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ von innen D -regulär ist.

2. Zeige, daß der Haarsche Maßraum (\mathbb{Z}_p, R, μ) von innen S regulär ist, wobei S die durch die Urbilder $p_r^{-1}(\{x\})$, $x \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, $p_r : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ erzeugte Algebra ist.
3. Zeige, daß der Bernoullische Schiftraum über A mit Verteilung $p : A \rightarrow [0, 1]$ (Ω, R, μ) bezüglich der Algebra der Zylindermengen von innen regulär ist.

Aufgabe 1.96. Sei (Ω, R, μ) von innen S regulär und S abzählbar. Zeige, daß dann für $p \in [1, \infty)$ der Raum $L^p(\Omega, R, \mu)$ separabel ist.

Aufgabe 1.97. Sei $p \in [1, \infty)$.

1. Zeige, daß $L^p(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\Delta|)$ separabel ist.
2. Zeige, daß $L^p(\mathbb{Z}_p, R, \mu)$ separabel ist.
3. Zeige, daß für den Bernoullischen Schiftraum $L^p(\Omega, R, \mu)$ separabel ist.

Aufgabe 1.98. *Unter welchen Umständen ist $L^\infty(\Omega, R, \mu)$ separabel.*

Sei $(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$ eine Erweiterung des Maßraumes (Ω, R, μ) . Dann haben wir eine natürliche Einbettung

$$\mathcal{L}(\Omega, R) \hookrightarrow \mathcal{L}(\Omega, \bar{R}) .$$

Wir nehmen an, daß $(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$ von innen R -regulär ist.

Aufgabe 1.99. 1. Zeige, daß für jede nichtnegative einfache Funktion $\phi \in \mathcal{E}(\Omega, \bar{R})$ und jedes $\epsilon > 0$ eine nichtnegative einfache Funktion $\tilde{\phi} \in \mathcal{E}(\Omega, R)$ existiert mit $\tilde{\phi} \leq \phi$ und

$$\int_{\Omega} \phi d\bar{\mu} - \epsilon \leq \int_{\Omega} \tilde{\phi} d\mu \leq \int_{\Omega} \phi d\bar{\mu}$$

2. Zeige, daß für jede nichtnegative Funktion $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ gilt

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f d\bar{\mu} .$$

3. Mögen $[f]$ und $[f^\bar{R}]$ die Äquivalenzklassen bezüglich $=_{\mu}$ und $=_{\bar{\mu}}$ bezeichnen. Sei $p \in [1, \infty]$. Zeige, daß $[f] \mapsto [f^\bar{R}]$ eine lineare Abbildung $I : L^p(\Omega, R, \mu) \rightarrow L^p(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$ definiert.

4. Zeige, daß I injektiv und isometrisch ist.

5. Zeige, daß I auch surjektiv ist. (Hinweis : Sei $[f^\bar{R}] \in L^p(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$ gegeben. Approximiere f in der $\|\cdot\|_p$ -Norm durch eine Folge einfacher Funktionen in $\mathcal{E}(\Omega, \bar{R})$. Approximiere dann jede dieser einfachen Funktionen in der $\|\cdot\|_p$ -Norm durch einfache Funktionen aus $\mathcal{E}(\Omega, R)$. Bilde eine geeignete Diagonalfolge, deren Grenzwert einen Vertreter $\tilde{f} \in [f^\bar{R}]$ mit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(\Omega, R, \mu)$ liefert.)

6. Zeige, daß die Aussagen 2. bis 5. dieser Aufgabe richtig bleiben, wenn man statt der inneren R -Regularität annimmt, daß $(\Omega, \bar{R}, \bar{\mu})$ die Vervollständigung von (Ω, R, μ) ist. Wie muß 1. modifiziert werden ?

Aufgabe 1.100. Zeige, daß für jedes $p \in [1, \infty]$ die Banachräume $L^p(\mathbb{R}^n, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ und $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, |\cdot|)$ natürlich isomorph sind.

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oder $p = 1$ und $q = \infty$ oder $p = \infty$ und $q = 1$. Wir definieren eine Abbildung

$$I : L^q(\Omega, R, \mu) \rightarrow L^p(\Omega, R, \mu)'$$

durch

$$I(g)(f) := \int_{\Omega} gf \, d\mu$$

(hierbei ist V' der duale Raum zu V). Die Hölderungleichung zeigt, daß $|I(g)(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$ gilt. Damit ist $I(g)$ tatsächlich eine stetiges Funktional auf $L^p(\Omega, R, \mu)$. Weiter sehen wir, daß $\|I\| \leq 1$. In der Tat gilt nun folgendes:

- Satz 1.75 (ohne Beweis).**
1. Wenn $p \in (1, \infty)$, dann ist I ein isometrischer Isomorphismus.
 2. Wenn $p = 1$ und (Ω, R, μ) σ -endlich ist, so ist I eine isometrischer Isomorphismus.
 3. Wenn $p = \infty$, dann ist I eine isometrische Einbettung.

1.5 Produkt von Maßräumen, Satz von Fubini

1.5.1 Produkt von Maßräumen

Sei $((\Omega_i, R_i))$ eine Familie meßbarer Räume und (T_i) eine Familie von Abbildungen $T_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$.

Definition 1.76. Die von (T_i) erzeugte σ -Algebra ist die kleinste σ -Algebra R auf Ω derart, daß T_i für alle i meßbar (bez. (R, R_i)) ist.

Aufgabe 1.101. Zeige : Die von (T_i) erzeugte σ -Algebra ist die von $\bigcup_i T_i^{-1}(R_i) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ erzeugte σ -Algebra.

Sei $\Omega := \prod_i \Omega_i$ und $p_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$ die Projektionen.

Definition 1.77. Das Produkt der Familie meßbarer Räume $((\Omega_i, R_i))$ ist der meßbare Raum (Ω, R) , wobei R die von (p_i) erzeugte σ -Algebra ist.

Aufgabe 1.102. Sei (Ω, R) der meßbare Raum, welcher dem Bernoullischen Schiftraum über der endlichen Menge A zugrunde liegt. Zeige, daß dieser meßbare Raum das Produkt der Familie (A_i, R_i) mit $A_i = A$ und $R_i = \mathcal{P}(A)$ ist.

Aufgabe 1.103. Zeige, daß $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ das Produkt von n Kopien des meßbaren Raumes $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist.

Wir betrachten nun zwei Maßräume (Ω_i, R_i, μ_i) , $i = 0, 1$. Sei $(\Omega, R) := (\Omega_0, R_0) \times (\Omega_1, R_1)$ das Produkt der unterliegenden meßbaren Räume. Es stellt sich die Frage, ob und wieviele Maße μ auf (Ω, R) existieren mit $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1)$ für $A_i \in R_i$. Beachte, daß hier R von Produkten der Form $A_0 \times A_1$ erzeugt wird.

Satz 1.78. Solche Maße existieren.

Proof. Sei \mathcal{F}_0 der von den charakteristischen Funktionen $\chi_{A_0 \times A_1}$ aufgespannte Unterraum von $\mathcal{L}(\Omega, R)$. Für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ ist $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto \chi_{A_0 \times A_1}(\omega_0, \omega_1) = \chi_{A_0}(\omega_0)\chi_{A_1}(\omega_1)$ meßbar. Weiter ist für $B \in R_1$ die Funktion

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_B \chi_{A_0 \times A_1}(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \in \bar{\mathbb{R}}$$

durch $\omega_0 \mapsto \chi_{A_0}(\omega_0)\mu_1(B \cap A_1)$ gegeben und deshalb auch meßbar. Wir betrachten nun den Raum $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{L}(\Omega, R)$ der beschränkten Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

1. für jedes $\omega_0 \in \Omega$ ist die Funktion $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto f(\omega_0, \omega_1)$ in $\mathcal{L}^1(\Omega_1, R_1, \mu_1)$
2. für jedes $B \in R_1$ ist die Funktion

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_B f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

meßbar

Offensichtlich ist \mathcal{F}_1 ein Vektorraum. Wir setzen

$$\mathcal{F}_2 := \{f \in \mathcal{L}(\Omega, R) \mid fg \in \mathcal{F}_1 \ \forall g \in \mathcal{F}_1 \text{ und } \sup |f| < \infty\} .$$

Dann ist \mathcal{F}_2 ein Ring. Man prüft weiter leicht nach, daß $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_2$ gilt.

Wir setzen jetzt $U := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \chi_A \in \mathcal{F}_2\}$. Diese Teilmenge ist eine Algebra, da \mathcal{F}_2 ein Ring ist. Wir definieren $\mu : U \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\mu(A) = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \chi_A(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) .$$

Wir zeigen nun, daß U eine σ -Algebra und μ ein σ -additives Maß ist. Die Additivität von μ folgt aus der Additivität des Integrals.

Wir betrachten die σ -Additivität. Sei (A_k) eine aufsteigende Folge in U und $A := \bigcup_k A_k$. Sei $g \in \mathcal{F}_1$. Dann ist für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ die Funktion

$$\omega_1 \mapsto \chi_A(\omega_0, \omega_1)g(\omega_0, \omega_1) = \lim_k \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1)g(\omega_0, \omega_1)$$

als Grenzwert einer Folge meßbarer Funktionen meßbar. Weiter ist $|(\chi_A g)(\omega_0, \omega_1)| \leq |g(\omega_0, \omega_1)|$ und damit die Funktion $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto (\chi_A g)(\omega_0, \omega_1)$ für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ integrierbar. Für jedes $B \in R_1$ ist die Funktion

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_B \lim_k \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1)g(\omega_0, \omega_1)d\mu_1(\omega_1) = \lim_k \int_B \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1)g(\omega_0, \omega_1)d\mu_1(\omega_1)$$

meßbar (hier haben wir den Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz mit Majorante $|g|$ angewendet). Wir schließen, daß $\chi_A \in \mathcal{F}_2$ und $A \in U$.

Wir sehen, daß U abgeschlossen unter der Bildung von abzählbaren Vereinigungen und folglich eine σ -Algebra ist.

Weiterhin gilt nach mehrfacher Anwendung des Satzes über monotone Konvergenz :

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \lim_k \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1)d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\ &= \int_{\Omega_0} \lim_k \left(\int_{\Omega_1} \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1)d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\ &= \lim_k \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \chi_{A_k}(\omega_0, \omega_1)d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\ &= \lim_k \mu(A_k) . \end{aligned}$$

Dies zeigt die σ -Additivität von μ .

Es folgt nun direkt aus der Definition, daß $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu(A_1)$. Wegen $R \subset U$ haben wir damit den Beweis der Existenz von Maßen mit dieser Eigenschaft erbracht. \square

Um die Eindeutigkeit zu erzwingen, machen wir eine zusätzlich Voraussetzung.

Satz 1.79. *Wenn (Ω_i, R_i, μ_i) σ -endlich sind, dann gibt es genau ein Maß auf (Ω, R) mit $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu(A_1)$.*

Proof. Die Mengen der Form $A_0 \times A_1$ erzeugen eine Algebra R^0 . Das Prämaß auf R^0 ist durch $\mu(A_0 \times A_1) = \mu_0(A_0)\mu(A_1)$ und Additivität eindeutig bestimmt. Der Prämaßraum

$(\Omega, R^0, \mu|_{R^0})$ ist σ -endlich und σ -additiv. Damit besitzt μ eine eindeutige Ausdehnung auf R . \square

Aufgabe 1.104. Zeige, daß $(\mathbb{R}^n, R_{|\Delta|}, |\Delta|)$ die Vervollständigung des Produktes von n Kopien von $(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ ist.

Seien $A_i, i = 0, 1$ endliche Mengen und $p_i : A_i \rightarrow [0, 1]$ so daß $\sum_{a \in A_i} p_i(a) = 1$. Seien (Ω_i, R_i, μ_i) die dazugehörigen Bernoullischen Schifträume.

Aufgabe 1.105. Zeige, daß $(\Omega_0, R_0, \mu_0) \times (\Omega_1, R_1, \mu_1)$ wieder ein Bernoullischer Schiftraum ist. Welches sind die unterliegenden endlichen Mengen und Verteilungen.

Wir ziehen nun eine Folgerung aus dem Beweis des Existenzsatzes. Sei U die σ -Algebra, welche im Beweis konstruiert wurde.

Folgerung 1.80. Wenn $f \in \mathcal{L}(\Omega, U)$, dann ist für jedes $\omega_0 \in \Omega_0$ die Funktion $\Omega_1 \ni \omega_1 \rightarrow f(\omega_0, \omega_1)$ meßbar.

Proof. Nach Konstruktion gilt diese Eigenschaft für die einfachen Funktionen auf (Ω, U) . Für allgemeine f folgt die Aussage durch Darstellung von f als punktweiser Grenzwert einer Folge einfacher Funktionen. \square

1.5.2 Iterierte Integrale

In diesem Abschnitt nehmen wir an, daß (Ω, R, μ) das Produkt zweier σ -endlicher Maßräume $(\Omega_i, R_i, \mu_i), i = 0, 1$ ist.

Lemma 1.81. Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegativ. Dann ist

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

meßbar und es gilt

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) .$$

Proof. Es gibt eine Folge (ϕ_i) einfacher nichtnegativer Funktionen welche monoton wächst und punktweise gegen f konvergiert. Es gilt nach dem Satz über monotone Konvergenz

$$\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) = \lim_i \int_{\Omega_1} \phi_i(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) .$$

Da die Funktionen

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} \phi_i(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

meßbar sind, ist es auch

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) .$$

Die Formel

$$\int_{\Omega} \phi d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} \phi(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0)$$

gilt für charakteristische Funktionen $\phi = \chi_A$, $A \in R$, und damit für alle einfachen Funktionen ϕ . Weiter gilt wieder mit dem Satz über monotone Konvergenz, daß

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu &= \lim_i \int_{\Omega} \phi_i d\mu \\ &= \int_{\Omega_0} \lim_i \left(\int_{\Omega_1} \phi_i(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) . \end{aligned}$$

□

Satz 1.82 (Satz von Fubini). Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$. Die Funktionen

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} f^{\pm}(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

sind genau dann in $\mathcal{L}^1(\Omega_0, R_0, \mu_0)$, wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Es gilt in diesem Fall

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) .$$

Proof. Wir nehmen zunächst an, daß $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Wir wenden das obige Lemma auf f^{\pm} an und sehen, daß

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} f^{\pm}(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

in $\mathcal{L}^1(\Omega_0, R_0, \mu_0)$ sind. Insbesondere ist damit für fast alle $\omega_0 \in \Omega_0$ die Funktion $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto f(\omega_0, \omega_1)$ integrierbar. Dies begründet die Richtigkeit der folgenden Rechnung.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu &= \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f^+(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\ &\quad - \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f^-(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} (f^+(\omega_0, \omega_1) - f^-(\omega_0, \omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) \end{aligned}$$

Seien nun die Funktionen

$$\Omega_0 \ni \omega_0 \mapsto \int_{\Omega_1} f^{\pm}(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1)$$

in $\mathcal{L}^1(\Omega_0, R_0, \mu_0)$. Dann gilt nach dem Lemma

$$\int_{\Omega} f^{\pm} d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f^{\pm}(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) < \infty,$$

also $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. □

Wir halten als Folgerung fest.

Folgerung 1.83. *Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, dann gilt*

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_0(\omega_0) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_0} f(\omega_0, \omega_1) d\mu_0(\omega_0) \right) d\mu_1(\omega_1)$$

Aufgabe 1.106. *Berechne (unter Verwendung des Satzes von Fubini und Induktion nach n) die Maße $|D^n|$ für die Einheitskugeln $D^n := \{\|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$*

Aufgabe 1.107. *Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist*

$$x \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|^\alpha}$$

in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$.

Aufgabe 1.108. Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ möchten wir gerne die Identität

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d|\cdot| = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d|y| \right) d|x|$$

haben. Kann man den Satz von Fubini hier direkt anwenden (Die Antwort ist : "nein", aber warum ?). Finde einen Ausweg, dieser Gleichung dennoch Gültigkeit zu verschaffen.

1.5.3 Mehrfache und abzählbare Produkte

Wir haben das Produkt zweier σ -endlicher Maßräume konstruiert. Die Konstruktion erweitert sich leicht auf endlich viele Faktoren.

Aufgabe 1.109. Sei $((\Omega_i, R_i, \mu_i))$ eine endliche Familie von Maßräumen und (Ω, R) das Produkt der unterliegenden meßbaren Räume. Man kann nun ein Produktmaß μ auf (Ω, R, μ) konstruieren, indem man die Produktmaß-Konstruktion für zwei Maßräume iteriert. Zeige, daß das Ergebnis nicht von der Reihenfolge abhängt.

Sei nun $((\Omega_i, R_i, \mu_i))_{i \in I}$ eine abzählbare Familie von Maßräumen mit $\mu_i(\Omega_i) = 1$ und (Ω, R) das Produkt der unterliegenden meßbaren Räume.

Satz 1.84. Es gibt genau ein Maß μ auf (Ω, R) mit der Eigenschaft, daß für jede endliche Familie $(A_s)_{s \in S}$, $S \subset I$, $A_s \in R_s$, gilt

$$\mu\left(\prod_{i \in I} A_i\right) = \prod_{s \in S} \mu_s(A_s)$$

wobei wir $A_i := \Omega_i$ für alle $i \in I \setminus S$ gesetzt haben.

Proof. Für jede endliche Teilmenge $S \subset I$ sei $R^S \subset R$ die σ -Algebra, welche von den Projektionen $p_s : \Omega \rightarrow \Omega_s$, $s \in S$, erzeugt wird. Weiter sei

$$R_0 := \bigcup_{S \subset I, \#S < \infty} R^S.$$

Aufgabe 1.110. 1. Zeige, daß R^0 eine Algebra ist.

2. Zeige, daß $R^\sigma(R^0) = R$ gilt.

Wir konstruieren μ zuerst als ein Prämaß auf R^0 und zeigen, daß dieses eindeutig bestimmt ist. Wir zeigen dann, daß μ σ -additiv ist. Daraus folgt die eindeutige Ausdehnung zu einem Maß auf R .

Für eine endliche Teilmenge $S \subset I$ sei (Ω_S, R_S, μ_S) das Produkt von $(\Omega_s, R_s, \mu_s)_{s \in S}$. Sei $T_S : \Omega \rightarrow \Omega_S$ die Projektion. T_S ist meßbar.

Seien μ und μ' zwei verschiedene solche Prämaße auf R^0 . Dann existiert $U \in R^0$ mit $\mu(U) \neq \mu'(U)$. Sei $S \subset I$ endlich derart, daß $U \in R^S$. Nun sind $T_{S*}\mu$ und $T_{S*}\mu'$ zwei Prämaße auf (Ω_S, R_S) .

Aufgabe 1.111. *Verifiziere, daß $T_{S*}\mu = T_{S*}\mu' = \mu_S$ gilt.*

Nun ist $U = T_S^{-1}(\bar{U})$ für $\bar{U} \in R_S$. Damit gilt aber $\mu(U) = \mu_S(\bar{U}) = \mu'(U)$. Widerspruch. Folglich ist das Prämaß μ eindeutig bestimmt.

Jetzt zeigen wir die Existenz. Sei $S \subset I$ endlich. Wenn $A \in R^S$ so ist es von der Form $T_S^{-1}(\bar{A})$ für ein eindeutiges $\bar{A} \in R_S$. Wir setzen

$$\mu^S(A) := \mu_S(\bar{A}) .$$

Aufgabe 1.112. 1. *Zeige, daß $\mu^S(A)$ nicht von der Wahl von S mit $A \in R^S$ abhängt.*

2. *Zeige, daß μ^S additiv ist.*

Aus diesen beiden Fakten folgt die Existenz von μ . In der Tat setzen wir $\mu(A) := \mu^S(A)$, wobei $S \subset I$ geeignet mit $A \in R^S$ gewählt wird.

Wir zeigen nun die σ -Additivität von μ . Wir nehmen o.B.d.A. an, daß $I = \mathbb{N}$. Sei (A_i) eine disjunkte Familie in R^0 derart, daß $\bigcup_i A_i \in R^0$. Sei $B_n := \bigcup_{i > n} A_i$. Dann gilt $\bigcap_n B_n = \emptyset$. Wir müssen zeigen, daß $\lim_n \mu(B_n) = 0$ gilt. Sei $S_n \subset \mathbb{N}$ derart gewählt, daß $B_n \in R^{S_n}$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $S_n = \{0, \dots, m_n\}$ für eine monoton wachsende Folge (m_n) ist. Sei $\bar{B}_n \in R_{S_n}$ derart, daß $T_{S_n}^{-1}(\bar{B}_n) = B_n$. Dann gilt $\mu(B_n) = \mu_{S_n}(\bar{B}_n)$.

Wir nehmen nun an, daß nicht $\lim_n \mu(B_n) = 0$ gilt. Da die Folge $(\mu(B_n))$ monoton fällt, gilt dann $\lim_n \mu(B_n) > 0$. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\mu(B_n) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_{S_n \setminus \{1\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \tilde{x}) d\mu_{S_n \setminus \{1\}}(\tilde{x}) \right) d\mu_1(x_1) .$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz gibt es einen Punkt $x_1 \in \Omega_1$ mit

$$\lim_n \int_{\Omega_{S_n \setminus \{1\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \tilde{x}) d\mu_{S_n \setminus \{1\}}(\tilde{x}) \neq 0 .$$

Wir wenden wieder Fubini an und schreiben für große n (mit $m_n \geq 2$)

$$\int_{\Omega_{S_n \setminus \{1\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \tilde{x}) d\mu_{S_n \setminus \{1\}}(\tilde{x}) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_{S_n \setminus \{1,2\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, x_2, \tilde{x}) d\mu_{S_n \setminus \{1,2\}}(\tilde{x}) \right) d\mu_2(x_2) .$$

Wir finden wieder mit dem Satz über monotone Konvergenz ein $x_2 \in \Omega_2$ mit

$$\lim_n \int_{\Omega_{S_n \setminus \{1,2\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, x_2, \tilde{x}) d\mu_{S_n \setminus \{1,2\}}(\tilde{x}) \neq 0 .$$

In der gleichen Weise verfahren wir weiter und finden eine Folge (x_m) mit

$$\lim_n \int_{\Omega_{S_n \setminus \{1, \dots, m\}}} \chi_{\bar{B}_n}(x_1, \dots, x_m, \tilde{x}) d\mu_{S_n \setminus \{1, \dots, m\}}(\tilde{x}) \neq 0 .$$

Aufgabe 1.113. *Schließe daraus, daß*

$$\{x_1\} \times \cdots \times \{x_{m_n}\} \times \Omega_{m_n+1} \times \Omega_{m_n+2} \times \cdots \subset B_n$$

gilt.

Damit ist aber $\prod_i x_i \in \bigcap_i B_i$. Widerspruch! □

Aufgabe 1.114. *Sei (Ω, R, μ) der Bernoullische Schiftraum über einer endlichen Menge A mit Dichte $p : A \rightarrow [0, 1]$. Wir betrachten das Maß $\lambda := \sum_{a \in A} p(a) \delta_a$. Zeige, daß (Ω, R, μ) das Produkt von abzählbar vielen Kopien des Maßraumes $(A, \mathcal{P}(A), \lambda)$ ist.*

1.6 Der Satz von Radon-Nikodym

1.6.1 Dichtefunktionen

Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Ist $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegativ, dann definieren wir

Definition 1.85.

$$f\mu : R \rightarrow [0, \infty], \quad f\mu(A) := \int_A f d\mu .$$

Lemma 1.86. *$f\mu$ ist ein Maß auf (Ω, R) .*

Proof. Aus den elementaren Eigenschaften des Integrals folgt die endliche Additivität. Wir müssen zeigen, daß $f\mu$ auch σ -additiv ist. Sei (A_i) eine aufsteigende Familie in R mit $A := \bigcup_i A_i$. Dann ist $(\chi_{A_i}f)$ eine aufsteigende Familie nichtnegativer Funktionen in $\mathcal{L}(\Omega, R)$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz gilt

$$f\mu(A) = \lim_i \int_{\Omega} \chi_{A_i} f d\mu = \lim_i f\mu(A_i) .$$

□

Aufgabe 1.115. Zeige, daß $f\mu(A) = 0$ für jede Nullmenge $A \in R$ gilt.

Definition 1.87. Ein Maß ν auf (Ω, R) ist absolutstetig bezüglich μ , falls für jedes $A \in R$ mit $\nu(A) < \infty$ gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{B \in R, B \subset A, \mu(B) < \epsilon} \nu(B) = 0 .$$

Aufgabe 1.116. Zeige, daß $f\mu$ absolutstetig bezüglich ν ist. (siehe Aufgabe 1.77).

Aufgabe 1.117. Sei ν σ -endlich und absolutstetig bezüglich μ . Zeige, daß dann $\nu(A) = 0$ für alle μ -Nullmengen gilt. Zeige, daß diese Aussage falsch wird, wenn man die Voraussetzung, daß ν σ -endlich ist, wegläßt (vergl. Aufgabe 1.21).

Der Satz von Radon-Nikodym besagt nun im wesentlichen, daß die Bedingung " $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ " impliziert, daß $\nu = f\mu$ für ein geeignetes $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ ist.

Aufgabe 1.118. Zeige, daß die Gleichung $\nu = f\mu$ die Klasse $[f]$ bezüglich der Äquivalenzrelation " $=_{\mu}$ " eindeutig festlegt.

Aufgabe 1.119. Sei (\mathbb{Z}_p, R, μ) der Haarsche Maßraum auf den p -adischen ganzen Zahlen und $x \in \mathbb{Z}_p$. Sei $T(x) : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ die Multiplikation mit x . Zeige, daß $T(x)_*\mu$ absolutstetig bezüglich μ ist. Bestimme $f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_p, R)$ derart, daß $T(x)_*\mu = f(x)\mu$.

Aufgabe 1.120. Sei $c \geq 0$. Wir betrachten $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $h(x) := e^{-cx^2}$. Seien $T(x), M(r) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildungen $T(x)(y) := x + y$ und $M(r)(y) := ry$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $r \in (0, \infty)$. Zeige, daß $T(x)_*h|\cdot|$ und $M(r)_*h|\cdot|$ absolutstetig bezüglich $h|\cdot|$ sind. Bestimme $t(x), m(r) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, R_{|\cdot|})$ derart, daß $T(x)_*h|\cdot| = t(x)h|\cdot|$ und $M(r)_*h|\cdot| = m(r)h|\cdot|$.

1.6.2 Signierte Maße, Hahnsche Zerlegung

Bisher hatten wir immer positive Maße betrachtet. In der Physik beschreibt man zum Beispiel Ladungsverteilungen als Maße. So wird ein Elektron am Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ durch $e\delta_x$ beschrieben, wobei $e < 0$ die Ladung des Elektron ist. Nun gibt es auch positiv geladene Teilchen. Ein System aus endlich vielen solchen Ladungen e_i an den Orten x_i ist dann durch $\sum_i e_i \delta_{x_i}$ modelliert, wobei die $e_i \in \mathbb{R}$ verschiedene Vorzeichen haben.

Dies ist ein typisches Beispiel eines signierten Maßes. Sei (Ω, R) ein meßbarer Raum.

Definition 1.88. Eine σ -additive Funktion $\mu : R \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt signiertes Maß.

Bei der Betrachtung signierter Maße entsteht das folgende Problem. Sei $\mu(A) = \infty$ und $\mu(B) = -\infty$ für disjunkte $A, B \in R$. Was ist dann $\mu(A \cup B) = \infty - \infty$? Damit der die σ -Additivität beschreibende Ausdruck überhaupt definiert ist, muß also μ genau in eine der folgenden drei Klassen fallen

1. $\mu \in M^+$, falls $\mu(A) > -\infty$ für alle $A \in R$ und $\mu(\Omega) = \infty$.
2. $\mu \in M^-$, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in R$ und $\mu(\Omega) = -\infty$.
3. $|\mu(A)| < \infty$ für alle $A \in R$.

Aufgabe 1.121. 1. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$. Zeige, daß dann $f\mu$ ein signiertes Maß in M ist, wobei

$$f\mu(A) := \int_A f d\mu .$$

2. Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ nichtnegativ. Zeige, daß $\pm f\mu$ ein signiertes Maß in M^\pm ist, wobei

$$\pm f\mu(A) := \pm \int_A f d\mu .$$

Sei μ ein signiertes Maß auf (Ω, R) .

Definition 1.89. Eine Partition $\{S, T\} \subset R$ von Ω heißt Hahnsche Zerlegung von Ω zu μ , falls für alle $A \in R$ gilt

$$\mu(A \cap S) \leq 0, \quad \text{und} \quad \mu(A \cap T) \geq 0 .$$

Aufgabe 1.122. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R)$. Bestimme eine Hahnsche Zerlegung von $f\mu$. Ist diese eindeutig?

Satz 1.90. Sei μ ein signiertes Maß auf (Ω, R) . Dann besitzt μ eine Hahnsche Zerlegung.

Proof. Wir nehmen o.B.d.A. an (ersetze notfalls μ durch $-\mu$), daß $\mu(A) > -\infty$ für alle $A \in R$. Wir definieren

$$\mu^+(A) := \sup_{B \in R, B \subset A} \mu(B).$$

Wegen $\mu(\emptyset) = 0$ gilt $\mu^+(A) \geq 0$. Weiter gilt für $B \subset A$, daß $\mu^+(B) \leq \mu^+(A)$.

Wir setzen

$$R^- := \{A \in R \mid \mu^+(A) = 0\}.$$

Dann gilt für $A \in R^-$, daß $\mu(A) \leq 0$. Sei $a := \inf_{A \in R^-} \mu(A)$. Dann ist $-\infty < a \leq 0$. Sei (S'_i) eine Folge in R^- derart, daß $\mu(A_i)$ monoton fällt und $\lim_i \mu(S'_i) = a$ gilt. Wir setzen $S_j = S'_j \setminus \bigcup_{i < j} S'_i$. Sei ferner $S := \bigcup_i S_i$ und $T := \Omega \setminus S$.

Für $A \in R$ gilt nun (beachte, daß $A \cap S_i \subset S'_i$)

$$\begin{aligned} \mu(A \cap S) &= \mu\left(A \cap \bigcup_i S_i\right) \\ &= \sum_i \mu(A \cap S_i) \\ &\leq \sum_i \mu^+(S'_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß auch $\mu(A \cap T) \geq 0$ gilt.

Sei

$$F := \{A \in R \mid A \subset T \text{ und } \mu(A) < 0\}.$$

Wir müssen zeigen, daß $F = \emptyset$. Wir nehmen das Gegenteil an.

Zuerst zeigen wir, daß für alle $A \in F$ die Ungleichung $\mu^+(A) > 0$ gilt. Es gilt $\mu(S) = \mu(S \setminus S_i) + \mu(S_i)$. Folglich gilt $\mu(S) \leq \mu(S_i)$ für alle i und damit $-\infty < \mu(S) \leq a$. Aus der Definition von a und $a \geq \mu(S) > \mu(A) + \mu(S) = \mu(A \cup S)$ folgt, daß $A \cup S \notin R^-$. Damit ist $\mu^+(A \cup S) > 0$. Sei $B \subset A \cup S$ mit $0 < \mu(B)$. Dann gilt $0 < \mu(B \cap A) + \mu(B \cap S) \leq \mu(B \cap A)$. Also ist $\mu^+(A) > 0$.

Wir konstruieren nun induktiv eine absteigende Folge (A_i) in R . Sei $A_0 \in F$ beliebig. Eine solche Menge existiert nach unserer Annahme. Seien jetzt die A_i für $i \leq n$ schon konstruiert. Wir wählen $B_n \subset A_n$ derart, daß

$$\mu(B_n) \geq \begin{cases} 1 & \left| \mu^+(A_n) = \infty \right. \\ \frac{1}{2}\mu^+(A_n) & \left. \mu^+(A_n) < \infty \right. \end{cases} .$$

Wir setzen $A_{n+1} := A_n \setminus B_n$. Es gilt dann

$$0 > \mu(A_0) = \mu(A) + \sum_n \mu(B_n) \geq \mu(A) > -\infty .$$

Damit ist $A \in F$ und $0 < \mu^+(A) \leq \mu^+(A_n)$ für alle n . Nun gilt wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_n \mu(B_n)$, daß $\lim_n \mu(B_n) = 0$. Daraus folgt aber auch $\lim_n \mu^+(A_n) = 0$. Also gilt $\mu^+(A) = 0$. Dies ist ein Widerspruch. \square

1.6.3 Der Satz von Radon-Nikodym

Wir betrachten einen Maßraum (Ω, R, μ) . Sei λ ein signiertes Maß auf (Ω, R) .

Definition 1.91. 1. Eine Menge $T \subset R$ heißt Träger von λ , falls $\lambda(A) = 0$ für alle meßbaren $A \subset T^c$ gilt.

2. λ heißt singulär zu μ , falls λ eine Trägermenge besitzt, welche eine μ -Nullmenge ist.

Aufgabe 1.123. Zeige, daß δ_0 singulär zu $|\cdot|$ auf $(\mathbb{R}^n, R_{|\cdot|}, |\Delta|)$.

Aufgabe 1.124. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum. Zeige: Ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$, so ist $\{f \neq 0\}$ eine Trägermenge von $f\mu$.

Aufgabe 1.125. Sei (Ω, R, μ) ein Maßraum und (λ_n) eine Folge von zu μ singulären Maßen. Zeige, daß $\sum_i \lambda_i$ ein zu μ singuläres Maß ist.

Aufgabe 1.126. Sei (Ω, R, μ) ein σ -endlicher Maßraum. Zeige, daß es höchstens abzählbar viele Punkte $x \in \Omega$ gibt mit $\mu(\{x\}) \neq 0$. Zeige weiter, daß es ein eindeutig bestimmtes Maß ν gibt, welches zu $\sigma := \sum_{x \in \Omega} \mu(\{x\})\delta_x$ singulär ist, so daß $\nu + \sigma = \mu$ gilt.

Aufgabe 1.127 (Etwas in Richtung des Riemann-Stieltjesschen Integrales). Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Wir ordnen jedem Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ die Zahl $\mu((a, b)) := f(b) - f(a)$ zu. Zeige:

1. μ dehnt sich eindeutig zu einem Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ aus.
2. Ist f stetig, so ist $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
3. Ist f differenzierbar, so gilt $\mu = f'|\cdot|$.
4. Wenn f stetig ist, dann gilt $\mu = f_*^{-1}|\cdot|$.
5. Ist f stetig, so gilt für jedes $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $g \geq 0$, daß

$$\int_{\mathbb{R}} f^* g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} g \, d|\cdot| .$$
6. Ist $g \in C_c^1(\mathbb{R})$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu = - \int_{\mathbb{R}} g' f \, d|\cdot| .$$
7. Sei $f := \chi_{(0, \infty)}$. Zeige, daß $\mu = \delta_0$ gilt.

Satz 1.92. Sei (Ω, R, μ) ein σ -endlicher Maßraum und ν ein weiteres σ -endliches Maß auf (Ω, R) . Dann existiert ein nichtnegatives $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ und ein zu μ singuläres Maß λ derart, daß $\nu = f\mu + \lambda$. Dabei sind ν eindeutig und f bis auf " $=_{\mu}^{\nu}$ " eindeutig bestimmt.

Proof. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeitsaussagen. Seien f_i und λ_i , $i = 0, 1$, wie im Satz. Seien Z_i Trägermengen von λ_i mit $\mu(Z_i) = 0$. Wir setzen $Z := Z_0 \cup Z_1$. Dann ist Z eine μ -Nullmenge und damit auch eine $f\mu$ -Nullmenge. Es gilt für $A \subset Z$, daß $\lambda_0(A) = \nu(A) = \lambda_1(A)$. Für $A \subset Z^c$ haben wir $\lambda_0(A) = 0 = \lambda_1(A)$. Damit gilt $\lambda_0 = \lambda_1$. Weiter gilt für solche Menge $f_0\mu(A) = \nu(A) = f_1\mu(A)$. Damit gilt $f_0|_{Z^c} =_{\mu} f_1|_{Z^c}$. Da Z selbst eine μ -Nullmenge ist, gilt $f_0 =_{\mu} f_1$.

Wir erbringen nun den Existenzbeweis. Zunächst nehmen wir an, daß $\nu(\Omega) < \infty$ ist. Sei $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{L}(\Omega, R) \mid f \geq 0 \text{ und } f\mu \leq \nu\}$. Diese Menge ist halbgeordnet durch folgende Relation :

$$f'' \geq'' g \Leftrightarrow f\mu \geq g\mu .$$

Wir zeigen, daß \mathcal{F} ein maximales Element enthält, welches wir mit f bezeichnen werden.

Seien $h, g \in \mathcal{F}$. Dann ist auch $h \vee g \in \mathcal{F}$. In der Tat gilt für alle $A \in R$, daß

$$\begin{aligned} (h \vee g)\mu(A) &= \int_A (h \vee g) \, d\mu \\ &= \int_{A \cap \{h \geq g\}} h \, d\mu + \int_{A \cap \{h < g\}} g \, d\mu \\ &\leq \nu(A \cap \{h \geq g\}) + \nu(A \cap \{h < g\}) \\ &= \nu(A) . \end{aligned}$$

Sei (g_n) eine aufsteigende Folge in \mathcal{F} . Dann ist auch $\lim_n g_n =: g \in \mathcal{F}$. Sei $A \in \mathcal{R}$. In der Tat gilt $g_n \mu(A) = \int_A g_n d\mu \leq \nu(A)$. Mit dem Satz über monotone Konvergenz schließen wir

$$g\mu(A) = \int_A g d\mu = \int_A \lim_n g_n d\mu = \lim_n \int_A g_n d\mu \leq \nu(A) .$$

Sei nun $K := \sup_{g \in \mathcal{F}} g\mu(\Omega)$. Klar ist $K \leq \nu(\Omega) < \infty$. Sei (h_n) eine Folge in \mathcal{F} mit $\lim_n h_n \mu(\Omega) = K$. Wir setzen $g_n := \bigvee_{i \leq n} h_i$. Dann gilt wegen $h_n \leq g_n$ auch $\lim_n g_n \mu(\Omega) = K$. Dann ist (g_n) monoton wachsend. Wir setzen $f := \lim_n g_n$. Es gilt

$$\infty > \nu(\Omega) \geq K = \lim_n \int_{\Omega} g_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu .$$

Sei jetzt $g \in \mathcal{F}$ und $A \in \mathcal{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g\mu(A) + f\mu(A^c) &\leq (g \vee f)\mu(A) + (g \vee f)\mu(A^c) \\ &\leq K \\ &= f\mu(A) + f\mu(A^c) . \end{aligned}$$

Da $f\mu(A^c) < \infty$ ist, gilt $g\mu(A) \leq f\mu(A)$. Wir schließen, daß $g \leq f$ ist. Dies zeigt, daß f maximal in \mathcal{F} ist.

Wir definieren nun das Maß $\lambda := \nu - f\mu$. Wir müssen zeigen, daß λ zu μ singulär ist. Wir betrachten dazu die signierten Maße $\alpha_n := \frac{1}{n}\mu - \lambda = (f + \frac{1}{n})\mu - \nu$. Sei (S_n, T_n) eine Hahnsche Zerlegung zu α_n . Wir setzen $S := \bigcup S_n$. Wir werden zeigen, daß S eine Trägermenge von λ mit $\mu(S) = 0$ ist. Es gilt für $A \in \mathcal{R}$, daß

$$\begin{aligned} (f + \frac{1}{n}\chi_{S_n})\mu(A) &= f\mu(A) + \frac{1}{n}\mu(A \cap S_n) \\ &= f\mu(A) + \lambda(A \cap S_n) + \alpha_n(A \cap S_n) \\ &\leq f\mu(A) + \lambda(A) \\ &= \nu(A) . \end{aligned}$$

Damit ist $f + \frac{1}{n}\chi_{S_n} \in \mathcal{F}$. Wegen der Maximalität von f gilt $\chi_{S_n}\mu = 0$, also $\mu(S_n) = 0$. Wir sehen, daß $\mu(S) = 0$.

Sei $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω mit durch meßbare Mengen mit $\mu(\Omega_i) < \infty$. Wir betrachten $A \subset S^c = \bigcap_n T_n$. Dann gilt $\alpha_n(A \cap \Omega_i) = \alpha_n(A \cap \Omega_i \cap T_n) \geq 0$. Wir sehen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt :

$$\frac{1}{n}\mu(A \cap \Omega_i) = \lambda(A \cap \Omega_i) + \alpha_n(A \cap \Omega_i) \geq \lambda(A \cap \Omega_i) \geq 0 .$$

Wir schließen, daß $\lambda(A \cap \Omega_i) = 0$. Damit gilt auch $\lambda(A) = \lim_i \lambda(A \cap \Omega_i) = 0$.

Wir haben jetzt den Satz unter der Voraussetzung, daß ν endlich ist, gezeigt. Wir nehmen nun an, daß ν nur σ -endlich ist. Sei (X_n) eine abzählbare paarweise disjunkte Zerlegung von Ω mit $\nu(X_n) < \infty$. Wir wenden den Satz auf $\nu_n := \chi_{X_n} \nu$ an und erhalten Funktionen f_n und Maße λ_n derart, daß $\nu_n = f_n \mu + \lambda_n$. Sei $f := \sum_n f_n$ und $\lambda = \sum_n \lambda_n$. Dann ist λ zu μ singulär und es gilt $\nu = f\mu + \lambda$. \square

Folgerung 1.93 (Satz von Radon-Nikodym). Sei (Ω, R, μ) ein σ -endlicher Maßraum und ν ein σ -endliches bezüglich μ absolutstetiges Maß. Dann existiert eine bis auf μ eindeutig bestimmte nichtnegative Funktion $f \in \mathcal{L}(\Omega, R)$ derart, daß

$$\nu = f\mu .$$

Proof. Wir schreiben $\nu = f\mu + \lambda$, wobei λ zu μ singulär ist. Sei Z eine Trägermenge von λ mit $\mu(Z) = 0$. Dann gilt $\lambda(Z^c) = 0$ und $\lambda(Z) = \nu(Z) = 0$. Damit gilt $\lambda = 0$. \square

Folgerung 1.94 (Lebesguesche Zerlegung). Sei μ ein σ -endliches Maß auf $(\mathbb{R}^n, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes atomares Maß μ_p , ein atomfreies zu $|\cdot|$ singuläres Maß μ_{sing} und ein $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, R_{|\cdot|})$, $f \geq 0$, so daß

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing} + \mu_p$$

gilt, wobei $\mu_{ac} := f|\cdot|$ ist.

Proof.

Aufgabe 1.128. Zeige diese Folgerung.

\square

1.7 Instruktive Argumente

Satz 1.95. Für jedes endliche $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$ gilt $\int_{\mathbb{R}} f d|\cdot| = 0$.

Proof. Wir betrachten die Funktion $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch $h(t, x) = \chi_{\{y \leq t\}}(x) f(x)$ gegeben ist. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R} \ni x \mapsto h(t, x)$ integrierbar. Wir setzen

$$\psi(t) := \int_{\mathbb{R}} h(t, x) d|x| .$$

Weiter gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$, daß $\lim_{t \rightarrow -\infty} h(t, x) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t, x) = f(x)$. Dann gilt nach dem Satz über majorisierte Konvergenz (mit integrierbarer Majorante $|f|$) daß

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow -\infty} h(t, x) d|x| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow \infty} h(t, x) d|x| = \int_{\mathbb{R}} f d|\cdot| . \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun sofort aus der folgenden Tatsache : Die Funktion ψ ist in jedem $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dt} \psi(t) = 0$.

Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt $\psi(t) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{t_0\}} h(t, x) d|x|$ weil $\{t_0\}$ eine $|\cdot|$ -Nullmenge ist. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ existiert ein Intervall $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, so daß $\frac{d}{dt} h(t, x) = 0$ für alle $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$.

Die Funktion $h(t, x)$ ist also für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ in einer Umgebung von t_0 bezüglich differenzierbar. Dabei ist die Ableitung gleich Null und hat insbesondere eine Majorante, nämlich die Nullfunktion, welche natürlich integrierbar ist. Damit können wir die Ableitung unter das Integral ziehen. Es gilt

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=t_0} \psi(t) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{t_0\}} \left(\frac{d}{dt} \right)_{|t=t_0} h(t, x) d|x| = 0 .$$

Die Behauptung folgt nun, da wir t_0 beliebig vorgeben können. □

Satz 1.96. *Für jedes reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ gilt $r = 0$.*

Proof. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $r > 0$ annehmen. Wir betrachten die folgenden beiden Maßräume :

1. $(\Omega_1, R_1, \mu_1) = (\mathbb{R}, R_{|\cdot|}, |\cdot|)$,
2. $(\Omega_2, R_2, \mu_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu_2)$, wobei $\mu_2(A) := \sharp A$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, das Zählmaß ist .

Sei nun $(\Omega, R, \mu) = (\Omega_1, R_1, \mu_1) \times (\Omega_2, R_2, \mu_2)$. Insbesondere gilt $\Omega = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die nichtnegative Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 0 & x = y \text{ und } x \notin [0, 1] \\ r & x = y \text{ und } x \in [0, 1] \end{cases}$$

gegeben ist. Diese Funktion nimmt nur zwei Werte an. Die Menge $f^{-1}(\{r\}) = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$ ist meßbar. In der Tat ist sie abgeschlossen. Sie ist meßbar, weil $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset R$. In der Tat ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ sogar in der Algebra \tilde{R} von $(\mathbb{R}, R_{|\cdot|}) \times (\mathbb{R}, R_{|\cdot|}) = (\mathbb{R}^2, \tilde{R})$ enthalten. Da nun sicherlich $R_{|\cdot|} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt, haben wir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset R$. Die Funktion f ist somit sogar einfach.

Wir berechnen nun

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = r .$$

Das innere Integral ergibt

$$\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) = \begin{cases} r & x \in [0, 1] \\ 0 & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

In der Tat, für $x \in [0, 1]$ ist $y \mapsto f(x, y)$ gleich $r\chi_{\{x\}}$. Sie ist gleich Null falls $x \notin [0, 1]$. Es gilt aber $\mu_2(\{x\}) = 1$. Damit ist $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ gleich $r\chi_{[0,1]}$. Diese hat Lebesgueintegral r .

Aus der Endlichkeit dieser Integrale schließen wir mit dem Satz von Fubini, daß $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, R, \mu)$ und

$$\int_{\Omega} f d\mu = r$$

gilt. Natürlich können wir die Integrationen auch in der anderen Reihenfolge ausführen. Es gilt

$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = 0 .$$

In der Tat ist für ein festes $y \in [0, 1]$ die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ gleich $r\chi_{\{y\}}$. Sie ist Null für $y \notin [0, 1]$. Da $\{y\}$ aber eine $|\cdot| = \mu_1$ -Nullmenge ist, gilt schon $\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) = 0$. Damit haben wir

$$0 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{\Omega} f d\mu$$

gezeigt. Folglich muß $r = 0$ gelten. □

Satz 1.97. *Jedes σ -endliche Maß ist atomar.*

Folgerung 1.98. \mathbb{R} ist abzählbar.

Proof. Sei (Ω, R, ν) ein σ -endlicher Maßraum. Wir betrachten das Zählmaß μ auf R mit $\mu(A) := \#(A)$. Dann gilt für jede Menge $A \in R$, daß

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \nu(A) = 0 .$$

Wir wenden nun den Satz von Radon-Nikodym an, welcher eine Darstellung $\nu = f\mu$ für eine meßbare nichtnegative Funktion f liefert. Da $\mu = (\sum_{x \in \Omega} \delta_x)|_R$ ist, gilt $\nu = (\sum_{x \in \Omega} f(x)\delta_x)|_R$. \square

Proof. (der Folgerung) Das Lebesguemaß ist σ -endlich und damit atomar. Da es nicht verschwindet, gibt es einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit $c := |\{x\}| \neq 0$. Wegen der Translationsinvarianz gilt dann $|\{x\}| = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da das Lebesguemaß σ -endlich ist, muß also \mathbb{R} abzählbar sein. \square

2 Differentialformen und der Satz von Stokes

2.1 Vektorfelder und 1-Formen

2.1.1 Analysis versus Algebra

Wir betrachten eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in U$.

Lemma 2.1. *Ist $f \in C^\infty(U)$, so existieren glatte Funktionen f_i $i \in \{1, \dots, n\}$ und ψ derart, daß*

$$f(x) = f(0) + \sum_i f_i(x)x^i + \psi^2(x)f(x) ,$$

wobei $0 \notin \text{supp}(\psi)$

Proof. Sei $r > 0$ derart, daß $B(0, r) \subset U$. Seien ϕ und ψ glatte Funktionen mit $\phi|_{B(0,r)} \equiv 1$ und $\phi + \psi^2 \equiv 1$. Wir setzen $\tilde{f} = \phi f$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} \tilde{f}(tx) dt + \psi^2(x) f(x) \\ &= f(0) + \int_0^1 d\tilde{f}(tx)(x) dt + \psi(x) f(x) \end{aligned}$$

Wir setzen also

$$f_i(x) := \int_0^1 d\tilde{f}(tx)(e_i) dt .$$

□

Lemma 2.2. *Sei W ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $X : U \rightarrow W$ glatt mit $X(0) = 0$. Dann gibt es endlich viele glatte Funktionen $f^i \in C^\infty(U)$ und $Y_i \in C^\infty(U, W)$ mit $X = \sum_i f^i Y_i$ und $f^i(0) = 0$.*

Proof. Sei (w_i) eine Basis von W und $Y_i \in C^\infty(U, W)$ die konstante Funktion mit Wert w_i . Dann schreiben wir $X = \sum_i f^i Y_i$. Die Funktionen $f^i \in C^\infty(U)$ sind eindeutig bestimmt und es gilt $f^i(u) = 0$ für alle i . □

2.1.2 Grundlegende Definitionen

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Sei $U \subset V$ eine offene Teilmenge.

Definition 2.3. *Ein Vektorfeld auf U ist eine glatte Abbildung von U mit Werten in V . Mit $C^\infty(U, V)$ bezeichnen wir die Menge der Vektorfelder auf U .*

Die Menge der Vektorfelder ist ein reeller Vektorraum. Weiter können Vektorfelder mit Funktionen multipliziert werden :

Definition 2.4. *Für $f \in C^\infty(U)$ und $X \in C^\infty(U, V)$ definieren wir $fX \in C^\infty(U, V)$ durch $fX(u) = f(u)X(u)$.*

Aufgabe 2.1. *Zeige, daß $C^\infty(U, V)$ ein Modul über dem Ring $C^\infty(U)$ ist.*

Funktionen können nach Vektorfeldern abgeleitet werden.

Definition 2.5. Sei $f \in C^\infty(U)$ und $X \in C^\infty(U, V)$. Dann definieren wir die Funktion $X(f) \in C^\infty(U)$ durch

$$X(f)(u) := \frac{d}{dt}_{t=0} f(u + tv) = df(u)(v) .$$

Aufgabe 2.2. Zeige, daß

1. $C^\infty(U, V) \times C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$, $(X, f) \mapsto X(f)$ eine bilineare Abbildung ist.
2. $X(fg) = gX(f) + fX(g)$ gilt.
3. $(gX)(f) = gX(f)$ gilt.

Hierbei sind $X \in C^\infty(U, V)$ und $f, g \in C^\infty(U)$.

Sei V^* der zu V duale Vektorraum.

Definition 2.6. Eine 1-Form auf U ist eine glatte Abbildung $\omega : U \rightarrow V^*$. Mit $C^\infty(U, V^*)$ bezeichnen wir die Menge der 1-Formen auf U .

Die Menge der 1-Formen ist ein reeller Vektorraum. Weiter können 1-Formen mit Funktionen multipliziert werden :

Definition 2.7. Für $f \in C^\infty(U)$ und $\omega \in C^\infty(U, V^*)$ definieren wir $f\omega \in C^\infty(U, V^*)$ durch $f\omega(u) = f(u)\omega(u)$.

Aufgabe 2.3. Zeige, daß $C^\infty(U, V^*)$ ein Modul über dem Ring $C^\infty(U)$ ist.

Sei $f \in C^\infty(U)$. Dann ist $df(u) \in V^*$.

Definition 2.8. Für $f \in C^\infty(U)$ sei $df \in C^\infty(U, V^*)$ diejenige 1-Form, deren Wert in u durch $df(u)$ gegeben ist. Eine 1-Form der Form df nennen wir exakt.

Aufgabe 2.4. Zeige : Für $g, f \in C^\infty(U)$ gilt $d(fg) = fdg + gdf$.

Sei $\text{Hom}_{C^\infty(U)}(C^\infty(U, V), C^\infty(U))$ der Raum der $C^\infty(U)$ -linearen Abbildungen, d.h. von \mathbb{R} -linearen Abbildungen $\Phi : C^\infty(U, V) \rightarrow C^\infty(U)$ mit $\Phi(fX) = f\Phi(X)$ für alle $f \in C^\infty(U)$, $X \in C^\infty(U, V)$. Sei ω eine 1-Form auf U . Dann definieren wir $\Phi_\omega \in \text{Hom}_{C^\infty(U)}(C^\infty(U, V), C^\infty(U))$ durch $\Phi_\omega(X)(u) := \omega(u)(X(u))$. Sei $\phi : C^\infty(U, V^*) \rightarrow \text{Hom}_{C^\infty(U)}(C^\infty(U, V), C^\infty(U))$ die durch $\phi : \omega \mapsto \Phi_\omega$ gegebene Abbildung.

Lemma 2.9. $\phi : C^\infty(U, V^*) \rightarrow \text{Hom}_{C^\infty(U)}(C^\infty(U, V), C^\infty(U))$ ist ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen.

Proof. Wir konstruieren die zu ϕ inverse Abbildung $\psi : \text{Hom}_{C^\infty(U)}(C^\infty(U, V), C^\infty(U)) \rightarrow C^\infty(U, V^*)$. Sei $\Phi \in \text{Hom}_{C^\infty(U)}(C^\infty(U, V), C^\infty(U))$ und $u \in U$. Wir müssen $\psi(\Phi)(u) \in V^*$ definieren. Sei $A \in V$. Sei X_A das konstante Vektorfeld mit dem Wert A . Dann setzen wir $\psi(\Phi)(u)(A) := \Phi(X_A)(u)$. In der Tat ist die Abbildung $A \mapsto X_A$ linear und damit ist $\psi(\Phi)(u) \in V^*$. Die Abbildung $V \ni u \mapsto \psi(\Phi)(u) \in V^*$ ist glatt, da $V \ni u \mapsto \psi(\Phi)(u)(A) = \Phi(X_A)(u) \in \mathbb{R}$ für alle $A \in V$ glatt ist. Also ist $\psi(\Phi) \in C^\infty(U, V^*)$.

Wir berechnen nun die Kompositionen $\phi \circ \psi$ und $\psi \circ \phi$. Es gilt

$$\begin{aligned} \psi(\phi(\omega))(u)(A) &= \psi(\Phi_\omega)(u)(A) \\ &= \Phi_\omega(X_A)(u) \\ &= \omega(u)(X_A(u)) \\ &= \omega(u)(A) \end{aligned}$$

Wir schließen, daß $\psi \circ \phi = \text{id}$. Sei $X \in C^\infty(U, V)$ und $u \in U$. Mit Lemma 2.2 schreiben wir $X - X_{X(u)} = \sum_i f^i Y_i$ mit $f^i(u) = 0$.

$$\begin{aligned} \phi(\psi(\Phi))(X)(u) &= \Phi(X_{X(u)})(u) \\ &= \Phi(X - X_{X(u)})(u) + \Phi(X)(u) \\ &= \Phi\left(\sum_i f^i Y_i\right)(u) + \Phi(X)(u) \\ &= \sum_i f^i(u) \Phi(Y_i)(u) + \Phi(X)(u) \\ &= \Phi(X)(u) \end{aligned}$$

Also gilt auch $\phi \circ \psi = \text{id}$. Wir müssen jetzt noch das Lemma zeigen. □

Aufgabe 2.5. Zeige, daß $\phi(df)(X) = X(f)$ gilt.

Aufgabe 2.6. Finde eine linearen Isomorphismus

$$C^\infty(U, V) \cong \text{Hom}_{C^\infty(U)}(C^\infty(U, V^*), C^\infty(U)) .$$

2.1.3 Integration über Wege

Definition 2.10. 1. Ein parametrisierter Weg in U ist eine glatte Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$.

2. Wir definieren eine Äquivalenzrelation " \sim " auf der Menge aller parametrisierter Wege in U durch: $\gamma_0 \sim \gamma_1$ genau dann, wenn es einen Diffeomorphismus $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\phi(i) = i$, $i = 0, 1$, gibt mit $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$.

3. Ein Weg ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Wegen bezüglich " \sim ". Mit $[\gamma]$ bezeichnen wir die durch γ repräsentierte Klasse.

Aufgabe 2.7. Zeige, daß " \sim " eine Äquivalenzrelation ist.

Ist γ ein parametrisierter Weg, so ist $\gamma'(u) := \frac{d}{du}\gamma(u) \in V$ der Geschwindigkeitsvektor von γ in $u \in [0, 1]$.

Wir können 1-Formen über Wege integrieren.

Definition 2.11. Sei ω eine 1-Form und $[\gamma]$ ein Weg in U . Dann definieren wir

$$\int_{[\gamma]} \omega = \int_0^1 \omega(\gamma(u))(\gamma'(u)) du .$$

Lemma 2.12. $\int_{[\gamma]} \omega$ ist wohldefiniert.

Proof. Wir müssen die Unabhängigkeit von dem Repräsentanten von $[\gamma]$ zeigen. Sei $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$. Dann gilt $\gamma_1'(u) = \phi'(u)\gamma_0'(\phi(u))$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega(\gamma_1(u))(\gamma_1'(u)) du &= \int_0^1 \omega(\gamma_0(\phi(u)))(\phi'(u)\gamma_0'(\phi(u))) du \\ &= \int_0^1 \omega(\gamma_0(\phi(u)))(\gamma_0'(\phi(u)))\phi'(u) du \\ &= \int_0^1 \omega(\gamma_0(u))(\gamma_0'(u)) du \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2.8. 1. Zeige, daß für $f \in C^\infty(U)$ gilt :

$$\int_{[\gamma]} df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) .$$

Das heißt, das Integral einer exakten 1-Form über einen Weg hängt nur von den Endpunkten des Weges ab.

2. Sei ω eine 1-Form auf U mit der Eigenschaft, daß $\int_{[\gamma]} \omega$ nur von den Endpunkten $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ abhängt. Zeige, daß die 1-Form dann exakt ist. (Hinweis: Sei U bogenzusammenhängend und $u_0 \in U$. Wir definieren $f(u) := \int_{[\gamma]} \omega$, wobei γ irgend ein Weg mit $\gamma(0) = u_0$ und $\gamma(1) = u$ ist. Es gilt $df = \omega$.)

2.1.4 Koordinaten

Sei (v_i) eine Basis von V . Dann erhalten wir konstante Vektorfelder $\partial_i := X_{v_i}$. Sei (v^i) eine zu (v_i) duale Basis von V^* . Wir erhalten konstante 1-Formen d^i . Wir können v^i als lineare Funktion auf U auffassen.

Aufgabe 2.9. Zeige, daß $\partial_i v^i = d^i$ gilt.

Lemma 2.13. $C^\infty(U, V)$ ist ein freier $C(U)$ -Modul, welcher von (∂_i) aufgespannt wird. Analog ist $C^\infty(U, V^*)$ ein freier $C^\infty(U)$ -Modul, welcher von (d^i) aufgespannt wird.

Proof. Sei $X \in C^\infty(U, V)$. Dann definieren wir Funktionen $X^i := d^i(X)$. Es gilt $X = \sum_i X^i \partial_i$. In der Tat ist

$$X(u) = \sum_i d^i(X(u))v_i = \sum_i d^i(X)(u)v_i = \sum_i X^i(u)\partial_i(u) .$$

Also wird $C^\infty(U, V)$ von (v_i) erzeugt. Sei $\sum_i f^i \partial_i = 0$ für Funktionen (f^i) . Dann gilt $0 = d^i(\sum_i f^i \partial_i) = f^i$. Folglich bildet (∂_i) eine Basis von $C^\infty(U, V)$ über $C^\infty(U)$. Der Beweis für $C^\infty(U, V^*)$ geht analog.

Aufgabe 2.10. Sei $\omega = \sum_i \omega_i d^i$ exakt. Zeige, daß dann für alle i, j gilt

$$\partial_j \omega_i = \partial_i \omega_j . \tag{4}$$

Aufgabe 2.11. Die Umkehrung von 2.10 gilt nicht. Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sei $\omega(x) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(x_1 d^2 - x_2 d^1)$. Zeige, daß ω die Gleichungen (4) erfüllt. Zeige, daß ω nicht exakt ist (Hinweis : Berechne das Integral von ω über einen Weg, welcher geschlossen ist und 0 einmal umläuft.)

2.1.5 Derivationen

Definition 2.14. Eine Derivation von $C^\infty(U)$ ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $D : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ mit $D(fg) = fD(g) + gD(f)$. Sei $\text{Der}(C^\infty(U))$ der \mathbb{R} -Vektorraum der Derivationen von $C^\infty(U)$.

Aufgabe 2.12. Zeige, daß für jede Derivation D von $C^\infty(U)$ gilt : $D(1) = 0$.

Aufgabe 2.13. Zeige, daß $\text{Der}(C^\infty(U))$ ein Modul über $C^\infty(U)$ ist.

Wir haben gesehen, daß ein Vektorfeld $X \in C^\infty(U, V)$ eine Derivation D_X auf $C^\infty(U)$ durch $D_X(f) := X(f)$ definiert. Wir sehen, daß jede Derivation von einem eindeutig bestimmten Vektorfeld kommt.

Lemma 2.15. Die Abbildung $U : C^\infty(U, V) \rightarrow \text{Der}(C^\infty(U))$, $X \mapsto D_X$, ist ein Isomorphismus von $C^\infty(U)$ -Moduln.

Proof. Offensichtlich ist D eine Abbildung von $C^\infty(U)$ -Moduln. Wir zeigen nun die Bijektivität. Sei $D \in \text{Der}(C^\infty(U))$. Wir fassen v^i als lineare Funktion auf U auf durch $u \mapsto v^i(u)$. Wir definieren $X^i := D(v^i)$ und setzen $X := \sum_i X^i \partial_i$. Dann gilt

$$D_X(v^j) = \sum_i X^i \partial_i(v^j) = X^j .$$

Folglich stimmen D_X und D auf den Linearkombinationen von 1 und v^i überein. Sei nun $f \in C^\infty(U)$ und $u \in U$. Wir schreiben $f = f(u) + \sum_i f_i(v^i - v^i(u)) + \psi^2 f$, mit glatten Funktionen f_i und ψ derart, daß $u \notin \text{supp}(\psi)$. Dann ist

$$\begin{aligned} (D_X - D)f(u) &= \sum_i [(D_X - D)((v^i - v^i(u))f_i)](u) + [(D_X - D)(\psi^2 f)](u) \\ &= \sum_i [(D_X - D)(v^i - v^i(u))f_i](u) + [(D_X - D)(\psi^2 f)](u) \\ &= \sum_i \{ [(D_X - D)(v^i - v^i(u))](u)f_i(u) + (v^i(u) - v^i(u))(u)[(D_X - D)f_i](u) \} \\ &\quad + \psi^2(u)[(D_X - D)(f)](u) + f(u)[(D_X - D)(\psi^2)](u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

weil $[(D_X - D)(\psi^2)](u) = 2\psi(u)[(D_X - D)(\psi)](u) = 0$. Da u beliebig war, gilt offensichtlich $Df = D_X f$. Dies zeigt die Surjektivität von U .

Sei $U(X) = 0$ für $X = \sum_i X^i \partial_i$. Dann gilt $0 = D_X(v^i) = X^i$. Folglich ist $X = 0$. Dies zeigt die Injektivität von U . \square

Lemma 2.16. Sind $A, B \in \text{Der}(C^\infty(U))$, so ist $[A, B] := A \circ B - B \circ A : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ wiederum eine Derivation.

Proof. Es ist klar, daß $[A, B]$ eine lineare Abbildung ist. Wir rechnen

$$\begin{aligned} [A, B](gf) &= A(B(fg)) - B(A(fg)) \\ &= A(fB(g) + gB(f)) - B(fA(g) + gA(f)) \\ &= A(f)B(g) + fA(B(g)) + A(g)B(f) + gA(B(f)) \\ &\quad - B(f)A(g) - fB(A(g)) - B(g)A(f) - gB(A(f)) \\ &= f[A, B](g) + g[A, B](f) . \end{aligned}$$

\square

Definition 2.17. Für Vektorfelder $X, Y \in C^\infty(U, V)$ definieren wir das Vektorfeld $[X, Y] \in C^\infty(U, V)$ durch $D_{[X, Y]} = [D_X, D_Y]$.

Aufgabe 2.14. Zeige :

1. $[X, Y] = -[Y, X]$
2. die Jacobiidentität : $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
3. $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$
4. $[X, Y] = \sum_i (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j$, wobei $X = \sum_{i,j} X^i \partial_i$ und $Y = \sum_i Y^i \partial_i$.

2.2 Multilineare Abbildungen

2.2.1 Definition von $\Lambda^p V^*$

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Mit Σ_n bezeichnen wir die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, \dots, n\}$.

Definition 2.18. Eine Abbildung $\phi : \times_{i=1}^n V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *multilinear*, falls sie linear in jedem Argument ist. Den Raum dieser multilinearen Abbildungen bezeichnen wir mit $T^n(V^*)$ oder $\otimes_{i=1}^n V^*$. Wir setzen ferner $T^0(V^*) := \mathbb{R}$.

Der Raum $T^n(V^*)$ ist ein Vektorraum. Für $\sigma \in \Sigma_n$ und $\phi \in T^n(V^*)$ definieren wir $\sigma\phi \in CT^n(V^*)$ durch

$$\sigma\phi(X_1, \dots, X_n) = \phi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) .$$

Aufgabe 2.15. Zeige, daß durch $(\sigma, \phi) \mapsto \sigma\phi$ eine Wirkung von Σ_n auf $T^n(V^*)$ durch lineare Transformationen definiert wird.

Definition 2.19. Eine multilineare Abbildung $\phi \in T^n(V^*)$ heißt *alternierend*, falls $\sigma\phi = \text{sign}(\sigma)\phi$ für alle $\sigma \in \Sigma_n$ gilt. Mit $\Lambda^n V^*$ bezeichnen wir den Unterraum der alternierenden multilinearen Abbildungen. Wir setzen ferner $\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$.

Sei $A \in \text{Hom}(V, W)$ für einen weiteren endlich-dimensionalen reellen Vektorraum W . Für $\phi \in T^n(W^*)$ definieren wir $T^n(A^*)\phi \in T^n(V^*)$ durch

$$(T^n(A^*)\phi)(X_1, \dots, X_n) = \phi(AX_1, \dots, AX_n) .$$

Aufgabe 2.16. Zeige, daß sich $T^n(A^*)$ zu einer linearen Abbildung $\Lambda^n A^* : \Lambda^n W^* \rightarrow \Lambda^n V^*$ einschränkt. Weise die Formel $\Lambda^n(A \circ B)^* = \Lambda^n B^* \circ \Lambda^n A^*$ nach.

2.2.2 Das \wedge -Produkt

Definition 2.20. Wir definieren ein Produkt

$$\otimes : T^n(V^*) \times T^m(V^*) \rightarrow T^{n+m}(V^*) ,$$

$n, m \geq 1$, durch

$$(\phi \otimes \psi)(X_1, \dots, X_{n+m}) = \phi(X_1, \dots, X_n)\psi(X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) .$$

Aufgabe 2.17. Zeige, daß \otimes assoziativ ist. Schließe, daß

$$T(V^*) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} T^n(V^*)$$

eine \mathbb{R} -Algebra ist.

Definition 2.21. Eine Algebra A über \mathbb{R} heißt \mathbb{N}_0 -graduiert, falls $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} A^i$ als Vektorraum und $A^i A^j \subset A^{i+j}$ gilt. Eine \mathbb{N}_0 -graduierte Algebra heißt graduiert kommutativ, falls für $a \in A^i$ und $b \in A^j$ gilt $ab = (-1)^{ij}ba$.

Die Tensoralgebra Algebra $T(V^*)$ ist \mathbb{N}_0 -graduiert.

Es gilt $\Lambda^n V^* \otimes \Lambda^m V^* \subset T^{n+m}(V^*)$. Das Produkt ist aber nicht in $\Lambda^{n+m}(V^*)$ enthalten. Deshalb definieren wir ein neues Produkt $\wedge : \Lambda^n V^* \times \Lambda^m V^* \rightarrow \Lambda^{n+m} V^*$.

Definition 2.22. Wir setzen

$$(\phi \wedge \psi) = \frac{1}{n!m!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m}} \text{sign}(\sigma) \sigma(\phi \otimes \psi)$$

Lemma 2.23. \wedge ist ein assoziatives Produkt, welches auf $\Lambda V^* := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} \Lambda^i V^*$ die Struktur einer graduierten Algebra definiert. Diese Algebra ist graduiert kommutativ.

Proof. Die Abbildung $(\psi, \phi) \mapsto \psi \wedge \phi$ ist offensichtlich bilinear. Wir zeigen die Assoziativität. Für $\tau \in \Sigma_n$ sei (τ, id_m) die natürliche Fortsetzung in Σ_{n+m} . Beachte, daß $\text{sign}(\tau) = \text{sign}(\tau, \text{id}_m)$ gilt. Analog definieren wir $(\text{id}_n, \tau) \in \Sigma_{n+m}$ für $\tau \in \Sigma_m$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\phi \wedge \psi) \wedge \omega &= \frac{1}{(n+m)!r!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m+r}} \text{sign}(\sigma) \sigma((\phi \wedge \psi) \otimes \omega) \\ &= \frac{1}{(n+m)!r!n!m!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m+r}} \text{sign}(\sigma) \sum_{\tau \in \Sigma_{n+m}} \text{sign}(\tau) \sigma(\tau(\phi \otimes \psi) \otimes \omega) \\ &= \frac{1}{(n+m)!r!n!m!} \sum_{\tau \in \Sigma_{n+m}} \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m+r}} \text{sign}(\tau) \text{sign}(\sigma) \sigma(\tau(\phi \otimes \psi) \otimes \omega) \\ &= \frac{1}{(n+m)!r!n!m!} \sum_{\tau \in \Sigma_{n+m}} \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m+r}} \text{sign}(\sigma \circ (\tau, \text{id}_r)) ((\sigma \circ (\tau, \text{id}_r))(\phi \otimes \psi) \otimes \omega) \\ &= \frac{1}{r!n!m!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m+r}} \text{sign}(\sigma) \sigma(\phi \otimes (\psi \otimes \omega)) \\ &= \phi \wedge (\psi \wedge \omega) \end{aligned}$$

Damit wird ΛV^* eine \mathbb{N}_0 -graduierte \mathbb{R} -Algebra.

Sei nun $\phi \in \Lambda^n V^*$ und $\psi \in \Lambda^m V^*$. Sei ferner $u \in \Sigma_{n+m}$ die Permutation $u : \{1, \dots, n+m\}$

$m\} \mapsto \{n+1, \dots, n+m, 1, 2, \dots, n\}$. Es gilt $\text{sign}(u) = (-1)^{ij}$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\phi \wedge \psi &= \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m}} \text{sign}(\sigma) \sigma(\phi \otimes \psi) \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m}} \text{sign}(\sigma) \sigma(u(\psi \otimes \phi)) \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m}} \text{sign}(u) \text{sign}(\sigma \circ u) (\sigma \circ u)(\psi \otimes \phi) \\
&= (-1)^{nm} \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m}} \text{sign}(\sigma) (\psi \otimes \phi) \\
&= (-1)^{nm} \psi \wedge \phi
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2.18. Zeige, daß für $A \in \text{Hom}(V, W)$ die Abbildung $\bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p(A^*) : \Lambda W^* \rightarrow \Lambda V^*$ ein Homomorphismus von Algebren ist (wobei $\Lambda^0(A^*) := 1$ gesetzt ist).

Aufgabe 2.19. Sei (dx, dy, dz) eine Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ dual zu der Basis $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ von \mathbb{R}^3 . Berechne

1. $(dx + 3dy) \wedge (2dx + dz)$.
2. $(dx + dy + dz) \wedge (dx + dy + dz) \wedge (dx + dy + dz)$
3. $((dx + 2dy) \wedge (dz + 5dy))(\partial_x, \partial_y)$

Aufgabe 2.20. Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum mit Basis (v_i) und dualer Basis (v^i) . Sei $A = (A_{i,j})$ eine antisymmetrische $n \times n$ -Matrix und $\omega := \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{i,j} v^i \wedge v^j$. Zeige: Wenn $n = 2m$ ist, so gibt es eine in A polynomiale Funktion $\text{Pf}(A)$ derart, daß

$$\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{m \times} = \text{Pf}(A) v^1 \wedge \dots \wedge v^n .$$

Es gilt weiter $\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$.

2.2.3 Innere Multiplikation

Sei $X \in V$.

Definition 2.24. Die innere Multiplikation $i_X : \Lambda^p V^* \rightarrow \Lambda^{p-1} V^*$ mit X ist durch

$$i_X \omega(Y_1, \dots, Y_{p-1}) := \omega(X, Y_1, \dots, Y_{p-1})$$

gegeben.

Lemma 2.25. Seien $\omega \in \Lambda^p V^*$ und $\alpha \in \Lambda^q V^*$. Es gilt

$$i_X(\omega \wedge \alpha) = (i_X \omega) \wedge \alpha + (-1)^p \omega \wedge (i_X \alpha) .$$

Proof. Die innere Multiplikation kann mit der gleichen Formel auch auf $T^p(V^*)$ definiert werden. Wenn $\sigma \in \Sigma_{p+q}$ die Gleichung $\sigma(n) = 1$ erfüllt, dann sei $\sigma' \in \Sigma_{p+q-1}$ durch $\sigma'(r) = \sigma(r) - 1$ für $r < n$ und $\sigma'(r) = \sigma(r+1) - 1$ für $r \geq n$ gegeben.

Aufgabe 2.21. Zeige, daß $\text{sign}(\sigma') = (-1)^n \text{sign}(\sigma)$ gilt.

Wir rechnen :

$$\begin{aligned} i_X(\omega \wedge \alpha) &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \text{sign}(\sigma) i_X \sigma(\omega \otimes \alpha) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{n=1}^p \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}, \sigma(1)=n} \text{sign}(\sigma) i_X \sigma(\omega \otimes \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{p!q!} \sum_{n=p+1}^{p+q} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}, \sigma(1)=n} \text{sign}(\sigma) i_X \sigma(\omega \otimes \alpha) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{n=1}^p \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}, \sigma(1)=n} \text{sign}(\sigma) \sigma'(i_X \omega \otimes \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{p!q!} \sum_{n=p+1}^{p+q} (-1)^p \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}, \sigma(1)=n} \text{sign}(\sigma) \sigma'(\omega \otimes i_X \alpha) \\ &= \frac{1}{(p-1)!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q-1}} \text{sign}(\sigma) \sigma(i_X \omega \otimes \alpha) \\ &\quad + (-1)^p \frac{1}{p!(q-1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q-1}} \text{sign}(\sigma) \sigma(\omega \otimes i_X \alpha) \\ &= (i_X \omega) \wedge \alpha + (-1)^p \omega \wedge (i_X \alpha) . \end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun die Abbildung

$$Q := \sum_{i=1}^n v^i \wedge i_{v_i} : \Lambda V^* \rightarrow \Lambda V^* .$$

Lemma 2.26. *Es gilt*

$$Q|_{\Lambda V^p} = p .$$

Proof. Wir rechnen

$$\begin{aligned} Q\omega(X_1, \dots, X_p) &= \sum_i (v^i \wedge i_{v_i} \omega)(X_1, \dots, X_p) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \text{sign}(\sigma) v^i(X_{\sigma(1)}) \omega(v_i, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \text{sign}(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \\ &= p\omega(X_1, \dots, X_p) \end{aligned}$$

□

Sei M_p die Menge der geordneten p -Tupel $m_1 < \dots < m_p$ von Zahlen zwischen 1 und n . Für $m \in M_p$ schreiben wir $v^m := v^{m_1} \wedge \dots \wedge v^{m_p}$.

Satz 2.27. *Die Formen $(v^m)_{m \in M_p}$ bilden eine Basis von $\Lambda^p V^*$. Insbesondere ist*

$$\dim \Lambda^p V^* = \frac{n!}{p!(n-p)!} .$$

Proof. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach p . Für $p = 1$ ist offensichtlich die Aussage richtig. Sei $\omega \in \Lambda^p V^*$. Wir schreiben $\omega = \frac{1}{p} Q\omega = \frac{1}{p} \sum v^i \wedge \omega_i$, wobei $\omega_i = i_{v_i} \omega \in \Lambda^{p-1} V^*$ ist. Wir schreiben $\omega_i = \sum_{m \in M_{p-1}} b_{i,m} v^m$. Damit gilt $\omega = \frac{1}{p} \sum_i \sum_{m \in M_{p-1}} b_{i,m} v^i \wedge v^m$. Für $m \in M_{p-1}$ ist $v^i \wedge v^m$ entweder Null oder gleich $\pm v^r$ für ein eindeutig bestimmtes $r \in M_p$. Folglich kann ω als Linearkombination der v^r , $r \in M_p$ geschrieben werden.

Sei jetzt $\omega = \sum_{r \in M_p} b_r v^r$. Sei $s \in M_p$. Die Auswertung $v^r(v_{s_1}, \dots, v_{s_p})$ ist 1 für $r = s$ und verschwindet sonst. Deshalb gilt $b_r = \omega(v_{r_1}, \dots, v_{r_p})$. Die Koeffizienten der Darstellung sind also durch ω eindeutig bestimmt. Damit ist (v^m) linear unabhängig. □

Insbesondere ist also $\dim \Lambda^n V^* = 1$.

Lemma 2.28. *Die Abbildung $\Lambda^n(A^*) : \dim \Lambda^n V^* \rightarrow \dim \Lambda^n V^*$ ist durch Multiplikation mit $\det(A)$ gegeben.*

Proof. Wir erinnern an die axiomatische Definition der Determinante von A . Sei A_j^i die Matrix von A bezüglich der Basis (v_i) , also $A_j^i = v^i(A(v_j))$. Die Determinante ist charakterisiert als eine alternierende n -Linearform in den Spalten (oder Zeilen) von A derart, daß $\det(\text{id}) = 1$ ist. Wir weisen nach, daß die Zahl $\Lambda^n(A^*)$ genau diese Eigenschaften hat. In der Tat gilt $\Lambda^*(\text{id}^*) = 1$. Weiter ist

$$\Lambda^*(A^*)(v^1 \wedge \cdots \wedge v^n)(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i_1=1, \dots, i_n=1}^n (v^1 \wedge \cdots \wedge v^n)(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) A_1^{i_1} \cdots A_n^{i_n}.$$

Diese Formel zeigt, daß $\Lambda^n(A^*)$ eine alternierende n -Linearform in den Zeilen von A ist. \square

Wir können an der letzten Gleichung die Entwicklungsformel ablesen.

2.2.4 Differentiale und Derivationen

Sei $A = \bigoplus_{n \geq 0} A^n$ eine graduiert-kommutative Algebra über \mathbb{R} .

Definition 2.29. *Ein Differential d vom Grad $r \in \mathbb{Z}$ auf A ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $d : A \rightarrow A$ derart, daß $d(A^n) \subset A^{n+r}$, $d^2 = 0$ und $d(ab) = (da)b + (-1)^{rn}adb$ gilt, wobei $a \in A^n$.*

Lemma 2.30. *Für $X \in V$ ist die innere Multiplikation $i_X : \Lambda V^* \rightarrow \Lambda V^*$ ein Differential vom Grad -1 .*

Proof. Es ist klar, daß $i_X : \Lambda^p V^* \rightarrow \Lambda^{p-1} V^*$. Wir haben die Leibnitzregel schon in Lemma 2.25 gezeigt. Wir müssen noch $i_X^2 = 0$ zeigen. Dies ist aber klar, da

$$i_X^2 \omega(Y_1, \dots, Y_{p-2}) = \omega(X, X, Y_1, \dots, Y_{p-2}) = 0$$

wegen der Antisymmetrie von ω . \square

Differentiale sind spezielle Derivationen.

Definition 2.31. Eine Derivation d vom Grad $r \in \mathbb{Z}$ auf A ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $d : A \rightarrow A$ derart, daß $d(A^n) \subset A^{n+r}$, und $d(ab) = (da)b + (-1)^{rn}adb$ gilt, wobei $a \in A^n$. Sei $\text{Der}^r(A)$ der Raume der Derivationen vom Grad r und $\text{Der}(A) := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \text{Der}^r(A)$.

Die Derivationen bilden einen graduierte Liealgebra. In der Tat gilt :

Aufgabe 2.22. Zeige, daß für $X \in \text{Der}^r(A)$ und $Y \in \text{Der}^s(A)$ gilt :

$$[X, Y] := X \circ Y - (-1)^{rs}Y \circ X \in \text{Der}^{r+s}(A) .$$

Aufgabe 2.23. Wir nehmen an, daß A^0 und A^1 die Algebra A erzeugen. Zeige, daß eine Derivation vom Grad r von A durch ihre Wirkung auf A^0 und A^1 bestimmt ist. Insbesondere gibt es keine Derivationen vom Grad $r < -1$.

2.3 Differentialformen

2.3.1 Grundlegende Definitionen

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $U \subset V$ offen.

Definition 2.32. Eine p -Form auf U ist eine glatte Abbildung von U nach $\Lambda^p V^*$. Mit $C^\infty(U, \Lambda^p V^*)$ bezeichnen wir den Raum der p -Formen.

Der Raum $C^\infty(U, \Lambda^p V^*)$ ist ein $C^\infty(U)$ -Modul. Für $m \in M_p$, $m = (m_1 < \dots < m_p)$ sei $d^m := d^{m_1} \wedge \dots \wedge d^{m_p}$.

Aufgabe 2.24. Zeige, daß $C^\infty(U, \Lambda^p V^*)$ ein freier $C^\infty(U)$ -Modul mit Basis $(d^m)_{m \in M_p}$ ist.

Definition 2.33. Für $\alpha \in C^\infty(U, \Lambda^p V^*)$ und $\beta \in C^\infty(U, \Lambda^q V^*)$ definieren wir $\alpha \wedge \beta \in C^\infty(U, \Lambda^{p+q} V^*)$ durch $(\alpha \wedge \beta)(u) := \alpha(u) \wedge \beta(u)$.

Aufgabe 2.25. Zeige, daß $C^\infty(U, \Lambda V^*)$ eine graduiert-kommutative Algebra über $C^\infty(U)$ ist. Zeige weiter, daß $C^\infty(U, \Lambda V^*)$ von $C^\infty(U, \Lambda^0 V^*) \oplus C^\infty(U, \Lambda^1 V^*)$ erzeugt wird.

Aufgabe 2.26. Jeder p -Form $\omega \in C^\infty(U, \Lambda^p V^*)$ ordnen wir eine alternierende $C^\infty(U)$ -multilineare Abbildung $\Phi_\omega : C^\infty(U, V) \times \dots \times C^\infty(U, V) \rightarrow C^\infty(U)$ zu durch

$$\Phi_\omega(X_1, \dots, X_p)(u) := \omega(u)(X_1(u), \dots, X_p(u)) .$$

Zeige, daß $\omega \mapsto \Phi_\omega$ einen Isomorphism von \mathbb{R} -Vektorräumen definiert.

Sei $U' \subset W$ eine offene Teilmenge eines weiteren endlich-dimensionalen Vektorraumes und $\phi : U \rightarrow U'$ eine glatte Abbildung. Dann haben wir die Zurückziehung

$$\phi^* : C^\infty(U') \rightarrow C^\infty(U), \quad f \mapsto \phi^* f := f \circ \phi.$$

Beachte, daß $d\phi(u) \in \text{Hom}(V, W)$.

Definition 2.34. Wir definieren $\phi^* : C^\infty(U', \Lambda^p W^*) \rightarrow C^\infty(U, \Lambda^p V^*)$ durch

$$(\phi^* \omega)(u) = \Lambda^p(d\phi(u)^*) \omega(\phi(u)) .$$

Aufgabe 2.27. Zeige, daß $\phi^* : C^\infty(U', \Lambda W^*) \rightarrow C^\infty(U, \Lambda V^*)$ eine Homomorphismus von Algebren (über \mathbb{R} bzw. $\phi^* : C^\infty(U') \rightarrow C^\infty(U)$) ist.

Lemma 2.35. Sei $U'' \subset Z$ offen in Z und $\psi : U' \rightarrow U''$ glatt. Dann gilt $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

Proof.

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)^* \omega(u) &= \Lambda^p(d(\psi \circ \phi)(u)^*) \omega(\psi \circ \phi(u)) \\ &= \Lambda^p((d\psi(\phi(u)) \circ d\phi(u))^*) \omega(\psi \circ \phi(u)) \\ &= \Lambda^p(d\phi(u)^* \circ d\psi(\phi(u))^*) \omega(\psi \circ \phi(u)) \\ &= \Lambda^p(d\phi(u)^*) \circ \Lambda^p(d\psi(\phi(u))^*) \omega(\psi \circ \phi(u)) \\ &= \Lambda^p(d\phi(u)^*) \psi^* \omega(\phi(u)) \\ &= \phi^*(\psi^* \omega)(u) \end{aligned}$$

□

2.3.2 Integral über p -Fächen

Eine p -Form kann über p -dimensional Flächen integriert werden.

Definition 2.36. 1. Eine parametrisierte p -Fläche in U ist eine glatte Abbildung $\gamma : [0, 1]^p \rightarrow U$.

2. Wir definieren eine Äquivalenzrelation " \sim " auf der Menge aller parametrisierter p -Flächen in U durch : $\gamma_0 \sim \gamma_1$ genau dann, wenn es einen Diffeomorphismus $\phi : [0, 1]^p \rightarrow [0, 1]^p$ gibt, welcher auf dem Rand die Identität ist und $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$ erfüllt.

3. Eine p -Fläche ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten p -Flächen bezüglich " \sim ". Mit $[\gamma]$ bezeichnen wir die durch γ repräsentierte Klasse.

Aufgabe 2.28. Zeige, daß " \sim " eine Äquivalenzrelation ist.

Definition 2.37. Für eine p -Form ω und eine p -Fläche $[\gamma]$ definieren wir

$$\int_{[\gamma]} \omega = \int_{[0,1]^p} \gamma^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_p)(s) |ds| .$$

Lemma 2.38. Das Integral $\int_{[\gamma]} \omega$ is wohldefiniert.

Proof. Seien $\gamma_1 = \gamma_0 \circ \phi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^p} \gamma_1^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_p)(s) |ds| \\ &= \int_{[0,1]^p} (\gamma_0 \circ \phi)^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_p)(s) |ds| \\ &= \int_{[0,1]^p} \phi^* \gamma_0^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_p)(s) |ds| \\ &= \int_{[0,1]^p} \Lambda(d\phi(s)^*) (\gamma_0^* \omega)(\phi(s))(\partial_1, \dots, \partial_p)(s) |ds| \\ &= \int_{[0,1]^p} (\gamma_0^* \omega)(\phi(s))(\partial_1, \dots, \partial_p)(s) \det(d\phi(s)) |ds| \\ &= \int_{[0,1]^p} \gamma_0^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_p)(s) |ds| \end{aligned}$$

□

2.3.3 Das Differential

Wir hatten schon eine Abbildung $d : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U, \Lambda^1 V^*)$ betrachtet.

Satz 2.39. Es gibt genau ein Differential d auf $C^\infty(U, \Lambda V^*)$ vom Grad 1 derart, daß d auf $C^\infty(U, \Lambda^0 V^*) = C^\infty(U)$ mit dem schon betrachteten Differential d übereinstimmt.

Proof. Wir haben gesehen, daß sich die p -Form ω auf eindeutige Weise in der Form

$$\omega = \sum_{m \in M_p} \omega_m d^m$$

dastellen läßt. Nun ist nach Voraussetzung $d(d^m) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} d^{m_1} \wedge \dots \wedge d(d^{m_i}) \dots \wedge d^{m_p} = 0$, da $d(d^i) = d^2 x^i = 0$. Wir sind also gezwungen

$$d\omega := \sum_{m \in M_p} d\omega_m \wedge d^m$$

zu definieren. Wir zeigen, daß d die gewünschten Eigenschaften hat. Die Abbildung d ist sicherlich \mathbb{R} linear. Wir zeigen nun $d^2 = 0$. Es reicht, $d^2\omega = 0$ für ω der Form $\omega = f d^m$ für ein $m \in M_p$ zu zeigen.

$$\begin{aligned} d^2\omega &= d(df \wedge d^m) \\ &= d\left(\sum_i \partial_i f d^i \wedge d^m\right) \\ &= \sum_i d(\partial_i f) \wedge d^i \wedge d^m \\ &= \sum_{j,i} \partial_j(\partial_i f) d^j \wedge d^i \wedge d^m \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,i} [\partial_j(\partial_i f) - \partial_i(\partial_j f)] d^j \wedge d^i \wedge d^m \\ &= 0 \end{aligned}$$

weil $[\partial_j(\partial_i f) - \partial_i(\partial_j f)] = 0$ gilt.

Es genügt wiederum, die Leibnitzregel für ein Produkt $\alpha \wedge \beta$ mit $\alpha = f d^m$ und $\beta = g d^n$, $m \in M_p$, $n \in M_q$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(f g d^m \wedge d^n) \\ &= d(f g) \wedge d^m \wedge d^n \\ &= g(df) \wedge d^m \wedge d^n + f dg \wedge d^m \wedge d^n \\ &= (df \wedge d^m) \wedge (g d^n) + (-1)^p (f d^m) \wedge (dg \wedge d^n) \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

□

Definition 2.40. Eine p -Form ω heißt geschlossen, wenn $d\omega = 0$ gilt. Sie heißt exakt, falls $\omega = d\alpha$ für eine $p-1$ -Form α gilt.

Offensichtlich ist jede exakte Form geschlossen, da $d(d\alpha) = d^2\alpha = 0$ gilt. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht (siehe Aufgabe 2.11).

Aufgabe 2.29. Prüfe, unter welchen Umständen die Identität $d(\omega^n) = n d\omega \wedge \omega^{n-1}$ gilt.

Sei $U' \subset W$ offen und $\phi : U \rightarrow U'$ glatt. Sei $\phi^* : C^\infty(U', \Lambda W^*) \rightarrow C^\infty(U, \Lambda V^*)$ die Zurückziehung.

Satz 2.41. Es gilt $d \circ \phi^* = \phi^* \circ d$

Proof. Sei $f \in C^\infty(U', \Lambda^0 W^*)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi^* df(u) &= df(\phi(u)) \circ d\phi(u) \\ &= d(f \circ \phi)(u) \\ &= d\phi^* f(u) \end{aligned}$$

Es genügt, die Identität für Formen der Form $\omega = f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_p$ mit $f_i \in C^\infty(U')$ zu zeigen, da sich jedes andere Form als Linearkombination von derartigen Formen schreiben läßt.

$$\begin{aligned} d\phi^* \omega &= d\phi^*(f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_p) \\ &= d[(\phi^* f_0)(\phi^* df_1) \wedge \cdots \wedge (\phi^* df_p)] \\ &= d[\phi^* f_0 d(\phi^* f_1) \wedge \cdots \wedge d(\phi^* f_p)] \\ &= d(\phi^* f_0) \wedge d(\phi^* f_1) \wedge \cdots \wedge d(\phi^* f_p) \\ &= \phi^*(df_0 \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_p) \\ &= \phi^* d[f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge f_p] \\ &= \phi^* d\omega \end{aligned}$$

□

Manchmal ist es günstig zu wissen, wie $d\omega$ auf Vektorfelder wirkt.

Satz 2.42. Es gilt

$$\begin{aligned} (d\omega)(X_0, \dots, X_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \end{aligned}$$

Proof. Wir sehen zuerst ein, daß beide Seiten in allen Argumenten $C^\infty(U)$ -linear sind. Auf der linken Seite ist das klar. Wir zeigen die $C^\infty(U)$ -Linearität der rechten Seite im

ersten Argument. Wir setzen anstelle von X_0 das Produkt fX_0 ein.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^p (-1)^i X_i(\omega(fX_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) \\
& \quad + \sum_{0 < i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], fX_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \\
& \quad + \sum_{0 < j \leq p} (-1)^j \omega([fX_0, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \\
& = f \sum_{i=0}^p (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) \\
& \quad + \sum_{i=1}^p (-1)^i X_i(f) \omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p) \\
& \quad + f \sum_{0 < i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \\
& \quad + f \sum_{0 < j \leq p} (-1)^j \omega([X_0, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \\
& \quad - \sum_{0 < j \leq p} (-1)^j X_j(f) \omega(X_0, X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \\
& = f \left[\sum_{i=0}^p (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \right]
\end{aligned}$$

Es reicht also, diese Identität für $X_i = \partial_{m_i}$ für alle $m \in M_{p+1}$ und Formen der Gestalt $\omega = fd^n$, $n \in M_p$, zu zeigen. Es reicht sogar, nur $m = (0 < 1 \cdots < p)$ zu betrachten. Beide Seiten sind nur dann von Null verschieden, wenn $n_p \leq p$ gilt. Sei dann $i \in \{0, \dots, p\}$ der eindeutige nicht in n enthaltende Index. Der Wert der linken Seite ist dann

$$d\omega(\partial_0, \dots, \partial_p) = (-1)^i \partial_i f .$$

Dies ist aber auch der Wert der rechten Seite. □

Aufgabe 2.30. *Leite folgende Spezialfälle für 1- und 2-Formen ab.*

1. $(d\omega)(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$
2. $(d\omega)(X, Y, Z) = X(\omega(Y, Z)) + Y(\omega(Z, X)) + Z(\omega(X, Y)) - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y)$

2.3.4 Ketten und der Satz von Stokes

Das Integral einer exakten 1-Form $\omega = df$ über einen Weg hängt nur von den Endpunkten des Weges ab :

$$\int_{[\gamma]} \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) .$$

Für p -Wege muß man anstelle der Endpunkte den Rand nehmen. Der Rand setzt sich aus $p - 1$ -dimensionalen Wegen zusammen. Im Fall $p = 1$ sind das die beiden 0-dimensionalen Wege $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$. Wir müssen den Fakt formalisieren, daß in der obigen Formel Vorzeichen auftreten.

Definition 2.43. Die Gruppe der p -Ketten $C^p(U)$ ist die freie abelsche Gruppe, welche von den parametrisierten Wegen erzeugt wird.

Eine p -Kette ist also eine endliche Linearkombination $\sum_i z_i \gamma_i$, wobei $z_i \in \mathbb{Z}$ und γ_i parametrisierte Wege sind.

Das Intervall $[0, 1]^p$ hat $2p$ Randkomponenten welche alle mit $[0, 1]^{p-1}$ identifiziert werden können. Für jedes Element $u = (l_u, e_u) \in \{1, \dots, p\} \times \{+, -\}$ definieren wir $i_u : [0, 1]^{p-1} \rightarrow [0, 1]^p$ durch

$$i_u(s_1, \dots, s_{p-1}) = (s_1, \dots, s_{l_u}, e_u, s_{l_u+1}, \dots, s_{p-1}) .$$

Definition 2.44. Sei γ ein parametrisierter Weg. Für $u \in \{1, \dots, p\} \times \{+, -\}$ definieren wir $\partial_u \gamma := \gamma \circ i_u$. Weiter definieren wir die Kette

$$\partial \gamma := \sum_{u \in \{1, \dots, p\} \times \{+, -\}} (-1)^{l_u + e_u} \partial_u \gamma \in C^{p-1}(U) .$$

Der Operator ∂ dehnt sich linear aus zu einem Homomorphismus

$$\partial : C^p(U) \rightarrow C^{p-1}(U) .$$

Aufgabe 2.31. Zeige, daß $\partial \circ \partial = 0$ gilt.

Definition 2.45. Eine p -Kette C heißt geschlossen, wenn $\partial C = 0$ gilt.

Wir können p -Formen über Ketten integrieren, indem wir das Integral über p -Flächen linear auf $C^p(U)$ forsetzen.

Definition 2.46. Sei $C = \sum_i z_i \gamma_i \in C^p(U)$ und $\omega \in C^\infty(U, \Lambda^p V^*)$. Dann definieren wir

$$\int_C \omega := \sum_i z_i \int_{[\gamma_i]} \omega .$$

Satz 2.47 (Satz von Stokes für Ketten). Sei $\omega \in C^\infty(U, \Lambda^{p-1} V^*)$ und $C \in C^p(U)$.

Dann gilt

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega .$$

Proof. Es genügt wegen der Linearität in C beider Seiten, den folgenden Spezialfall zu beweisen:

$$\int_\gamma d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega$$

Ausgeschrieben bedeutet diese Gleichung

$$\int_{[0,1]^p} \gamma^* d\omega(\partial_1, \dots, \partial_p)(s) = \sum_{u \in \{1, \dots, p\} \times \{+, -\}} (-1)^{l_u + e_u} \int_{[0,1]^{p-1}} (\gamma \circ i_u)^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_{p-1})(t) dt ,$$

oder äquivalent dazu

$$\int_{[0,1]^p} d\gamma^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_p)(s) = \sum_{u \in \{1, \dots, p\} \times \{+, -\}} (-1)^{l_u + e_u} \int_{[0,1]^{p-1}} i_u^* \gamma^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_{p-1})(t) dt .$$

Wir schreiben nun $\gamma^* \omega = \sum_{i=1}^p f_i ds^1 \wedge \dots \wedge \hat{ds}^i \wedge \dots \wedge ds^p$. Dann ist $d\gamma^* \omega = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \partial_i f_i ds^1 \wedge \dots \wedge ds^p$.

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^p} d\gamma^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_p)(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{p \times} \partial_i f_i(s_1, \dots, s_p) ds \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \sum_{e \in \{0,1\}} (-1)^{e+1} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{p-1 \times} f_i(t_1, \dots, t_i, e, t_{i+1}, \dots, t_{p-1}) dt \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^i \sum_{e \in \{0,1\}} (-1)^e \int_{[0,1]^{p-1}} \gamma^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_{i-1}, \hat{\partial}_i, \partial_{i+1}, \dots, \partial_p)(t_1, \dots, t_i, e, t_{i+1}, \dots, t_{p-1}) dt \\ &= \sum_{u \in \{1, \dots, p\} \times \{+, -\}} (-1)^{l_u + e_u} \int_{[0,1]^{p-1}} i_u^* \gamma^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_{p-1})(t) dt \end{aligned}$$

□

Folgerung 2.48. 1. Das Integral einer geschlossenen Form über einen Rand verschwindet.

2. Das Integral einer exakten Form über eine geschlossene Kette verschwindet.

3. Das Integral einer exakten Form über eine Kette hängt nur vom Rand der Kette ab.

2.3.5 Innere Multiplikation und Lieableitung

Sei $X \in C^\infty(U, V)$ und $\omega \in C^\infty(U, \Lambda^p V^*)$.

Definition 2.49. Wir definieren $i_X \omega \in C^\infty(U, \Lambda^{p-1} V^*)$ durch

$$i_X \omega(u) = i_{X(u)} \omega(u) .$$

Aufgabe 2.32. Zeige, daß die Abbildung $C^\infty(U, V) \times C^\infty(U, \Lambda^p V^*) \rightarrow C^\infty(U, \Lambda^{p-1} V^*)$ eine $C^\infty(U)$ -bilineare Abbildung ist.

Die Abbildung i_X ist ein Differential auf $C^\infty(U, \Lambda^p V^*)$ vom Grad -1 . Es ergibt sich die Frage, welche Interpretation die Derivation $[d, i_X]$ hat.

Ein Vektorfeld $X \in C^\infty(U, V)$ erzeugt einen lokalen Fluß Φ^X . Dieser ist durch folgende Daten gegeben.

1. eine Familie von Intervallen $(I_x)_{x \in U}$, welches die Null enthalten.
2. eine Familie offener Umgebungen $(U_x)_{x \in U}$ mit $U_x \in U$
3. eine Familie von glatten Abbildungen $\Phi^x : I_x \times U_x \rightarrow U$

Dabei ist für $y \in U_x$ die Kurve $I_x \ni t \mapsto \Phi_t^x(y)$ die eindeutig bestimmte Integralkurve von X , welche in y beginnt. Es gilt die Relation $\Phi_s^y(\Phi_t^x) = \Phi_{s+t}^x$ (dort, wo alles definiert ist).

Sei nun $\omega \in C^\infty(U, \Lambda^p V^*)$. Sei $x \in U$. Dann können wir die Familie von p -Formen $\omega_t^x := (\Phi_t^x)^* \omega \in C^\infty(U_x, \Lambda^p V^*)$ betrachten.

Lemma 2.50. Seien $x, y \in U$ und $t \in I_x \cap I_y$. Dann stimmen die Formen ω_t^x und ω_t^y auf $U_x \cap U_y$ überein.

Proof. Es gilt $(\Phi_t^x)|_{U_x \cap U_y} = (\Phi_t^y)|_{U_x \cap U_y}$. □

Definition 2.51. Wir definieren die Lieableitung $\mathcal{L}\omega \in C^\infty(U, \Lambda^p V^*)$ von ω in Richtung X durch $\mathcal{L}_X \omega|_{U_x} := \frac{d}{dt}|_{t=0} \omega_t^x$.

Wegen Lemma 2.50 ist die Lieableitung wohldefiniert.

Lemma 2.52. 1. Die Lieableitung ist eine Derivation vom Grad 0 auf $C^\infty(U, \Lambda V^*)$.

2. Es gilt $[d, \mathcal{L}_X] = 0$.

3. Es gilt $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$.

Proof. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta)(x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} (\Phi_t^x)^*(\alpha \wedge \beta)(x) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} ((\Phi_t^x)^*\alpha \wedge (\Phi_t^x)^*\beta)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dt}|_{t=0} (\Phi_t^x)^*\alpha \wedge \beta\right)(x) + \left(\alpha \wedge \frac{d}{dt}|_{t=0} (\Phi_t^x)^*\beta\right)(x) \\ &= (\mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta)(x) + (\alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta)(x) \end{aligned}$$

2. folgt aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_X\omega|_{U_x} &= d\frac{d}{dt}|_{t=0} (\Phi_t^x)^*\omega \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} d(\Phi_t^x)^*\omega \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} (\Phi_t^x)^*d\omega \\ &= \mathcal{L}_X\omega \end{aligned}$$

Die Gleichung 3. ergibt sich aus der Definition des lokalen Flusses :

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} ((\Phi_t^x)^*f)(x) = X(f)(x) .$$

□

Satz 2.53. *Es gilt für Vektorfelder X, Y und eine Funktion f*

$$1. \mathcal{L}_X = [d, i_X] = d \circ i_X + i_X \circ d$$

$$2. [\mathcal{L}_X, i_X] = 0$$

$$3. \mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y].$$

$$4. \mathcal{L}_X \circ f = f \circ \mathcal{L}_X + X(f)$$

$$5. \mathcal{L}_{fX} = f \circ \mathcal{L}_X + df \wedge i_X$$

Proof. Da eine Derivation auf $C^\infty(U, \Lambda V^*)$ auf durch ihre Wirkung auf den 0- und 1-Formen bestimmt ist, genügt es, die Identitäten 1. und 3. für 0- und 1-Formen zu zeigen. In der Tat ist jede 1-Form Linearkombination von Formen der Gestalt fdg mit $f, g \in C^\infty(U)$. Da \mathcal{L}_X mit d vertauscht, reicht es sogar, die Identitäten auf 0-Formen zu zeigen.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g(x) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\Phi_t^x)^*(g)(x) \\ &= X(g)(x) \\ &= dg(x)(X(x)) \\ &= (d \circ i_X + i_X \circ d)g(x) \end{aligned}$$

Daraus folgt 1. Die dritte Identität folgt aus

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X, Y](f) = \mathcal{L}_{[X, Y]}(f) .$$

Aufgabe 2.33. *Zeige 2. 3. und 4.*

□

Sei $Y \in C^\infty(U)$ ein weiteres Vektorfeld. Wir können ein neues Vektorfeld $\mathcal{L}_X(Y)$ durch

$$\mathcal{L}_X(Y)(x) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} d\Phi_{-t}^x(\Phi_t^x)(Y(\Phi_t^x)(x)) .$$

definieren.

Lemma 2.54. *Es gilt $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$.*

Proof. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
 df(\mathcal{L}_X(Y))(x) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} df(x)(d\Phi_{-t}^x(\Phi_t^x)(Y(\Phi_t^x)(x))) \\
 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} df(\Phi_{-t}^x(\Phi_t^x(x)))(d\Phi_{-t}^x(\Phi_t^x)(Y(\Phi_t^x)(x))) \\
 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ((\Phi_{-t}^x)^* df)(\Phi_t^x(x))(Y(\Phi_t^x)(x)) \\
 &= -(\mathcal{L}_X df)(Y) + X(df(Y)) \\
 &= -Y(X(f)) + X(Y(f)) \\
 &= [X, Y]
 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2.34. Zeige, daß auch für die Lieableitung \mathcal{L}_X auf Vektorfeldern die folgende Identität gilt :

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$$

3 Untermannigfaltigkeiten

3.1 Untermannigfaltigkeiten

3.1.1 Definition, Darstellung als Graph, Tangentialraum

Untermannigfaltigkeiten sind Teilmengen reeller Vektorräume, welche sich durch Systeme unabhängiger Gleichungen beschreiben lassen. Beispiele sind etwa offene Teilmenge, affine Unterräume, die Sphären und viele andere.

Seien V und W ein n - bzw. m -dimensionaler reeller Vektorräume. Sei $U \subset V$ offen, $f \in C^\infty(U, W)$ und $p \in U$.

Definition 3.1. Die Funktion f heißt im Punkt p regulär, wenn $df(p) : V \rightarrow W$ surjektiv ist.

Definition 3.2. Eine Teilmenge $M \subset V$ heißt (reguläre) $(n - m$ -dimensionale) - Untermannigfaltigkeit (der Kodimension m), falls jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung U besitzt,

auf welcher eine in p reguläre Funktion $f : U \rightarrow W$ definiert ist, so daß $M \cap U = \{f = 0\}$ gilt. Eine solche Funktion heißt definierende Funktion von M in p .

Im allgemeinen gibt es viele Funktionen, welche M in p definieren. Hier sind Beispiele von Untermannigfaltigkeiten.

1. jede offene Teilmenge von V ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0.
2. Jeder affine Unterraum $M \subset V$ der Dimension $n - m$ ist Untermannigfaltigkeit von V der Kodimension m .

Aufgabe 3.1. Finde eine Funktion, welche einen gegebenen affinen Unterraum in allen Punkten definiert.

3. Die Spären

$$S_r^{n-1} := \{\|x\| = r\} \subset \mathbb{R}^n$$

für $r > 0$ sind Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 1.

Aufgabe 3.2. Beweis !

4. Sei $V = V_0 \oplus V_1$, $\dim(V_1) = m$, $U_0 \subset V_0$ offen und $h : U_0 \rightarrow V_1$ glatt. Wir betrachten den Graphen $\Gamma(h) := \{(v_0, h(v_0)) \mid v_0 \in U_0\}$. Dann ist $\Gamma(h)$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit der Kodimension m .

Aufgabe 3.3. Zeige, daß $f : U_0 \times V_1 \rightarrow V_1$, $f(v_0, v_1) := h(v_0) - v_1$ eine $\Gamma(h)$ -definierende Funktion ist.

5. Ist M eine reguläre Untermannigfaltigkeit und $q \in V$. Dann ist $M + q := \{m + q \mid m \in M\}$ auch eine reguläre Untermannigfaltigkeit.

Aufgabe 3.4. Beweis !

Aufgabe 3.5. Zeige, daß $\{xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ keine reguläre Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 3.6. Zeige, daß der Graph von $h(x) = \sqrt{|x|}$ keine reguläre Untermannigfaltigkeit ist.

Satz 3.3. Jede Untermannigfaltigkeit läßt sich lokal als Graph darstellen.

Proof. Durch Verschieben genügt es, folgenden Spezialfall zu zeigen. Sei M Untermannigfaltigkeit und $0 \in M$. Dann ist M in einer Umgebung von 0 als Graph darstellbar.

Sei $f : U \rightarrow W$ definierend für M in 0 . Sei $V_0 := \ker(df(p))$. Wir wählen ein Komplementären Raum V_1 so daß $V = V_0 \oplus V_1$ gilt. Für $(v_0, v_1) \in U$ gilt $(v_0, v_1) \in M$ genau dann, wenn $f(v_0, v_1) = 0$. Es gilt $\text{im}(d_0f(0, 0)) = \text{im}(df(0, 0))$. Aus Dimensionsgründen ist deshalb $d_0f(0, 0)$ invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren also Umgebungen $U_0 \subset V_0$ und $U_1 \subset V_1$ der Null und eine glatte Funktion $g : U_0 \rightarrow U_1$ derart, daß $U_0 \times U_1 \subset U$, $g(0) = 0$ und für $(v_0, v_1) \in U_0 \times U_1$ die Gleichung $f(v_0, v_1) = 0$ genau dann gilt, wenn $v_1 = g(v_0)$ ist. Wir sehen, daß

$$M \cap (U_0 \times U_1) = \Gamma(g) .$$

□

Zur Verkürzung der Darstellung werden wir in Zukunft einfach sagen, daß (V_0, V_1, U_0, U_1, g) eine lokalen Graphendarstellung von M in 0 ist.

Definition 3.4. Der Unterraum $T_pM := \ker(df(p)) \subset V$ heißt *Tangentialraum an M in p* .

Lemma 3.5. Der *Tangentialraum ist wohldefiniert*.

Proof. Sei $f' : U \rightarrow W$ eine weitere definierende Funktion. Wir müssen zeigen, daß $\ker(df'(p)) = \ker(df(p))$ gilt. Es reicht, $\ker(df(p)) \subset \ker(df'(p))$ nachzuweisen.

O.B.d.A ist $p = 0$. Sei $(\ker(df(0)), V_1, U_0, U_1, g)$ eine lokale Graphendarstellung. Es gilt $dg(0) = -d_1f(0)^{-1} \circ d_0f(0) = 0$. Weiter folgt aus $f'(v_0, g(v_0)) = 0$ für alle $v_0 \in U_0$, daß $d_0f'(0, 0) + d_1f'(0, 0) \circ dg(0) = 0$. Sei jetzt $X \in \ker(df(0)) = V_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} df'(0)(X) &= df'(0)(X + dg(0)(X)) \\ &= d_0f'(0, 0)(X) + d_1f'(0, 0) \circ dg(0)(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Sei $M \subset V$ eine Untermannigfaltigkeit.

Definition 3.6. Das *Tangentialbündel TM* ist die *Untermannigfaltigkeit*

$$TM := \{(p, v) \in V \oplus V \mid v \in T_pM\} .$$

Wenn f definierend für M in p ist, so ist $V \oplus V \ni (p, v) \mapsto F(p, v) := (f(p), df(p)(v)) \in W \oplus W$ definierend für TM . In der Tat gilt

$$dF(p, v) = \begin{pmatrix} df(p) & * \\ 0 & df(p) \end{pmatrix}$$

und diese lineare Abbildung $V \oplus V \rightarrow W \oplus W$ ist sicher surjektiv, wenn es $df(p)$ ist.

3.1.2 Abbildungen, Karten, Vektorfelder

Sei $M \subset V$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei Z irgend ein reeller Vektorraum endlicher Dimension.

Definition 3.7. Eine Funktion $f : M \rightarrow Z$ heißt *glatt*, wenn es eine Umgebung U von M und eine glatte Funktion $\tilde{f} : U \rightarrow Z$ gibt, so daß $\tilde{f}|_M = f$ ist. Wir schreiben $C^\infty(M, Z)$ für die Menge der glatten Funktionen auf M mit Werten in Z . Insbesondere ist $C^\infty(M)$ die Algebra der reellen glatten Funktionen auf M .

Eine äquivalente Beschreibung von $C^\infty(M, Z)$, welche wir später auf Formen ausdehnen wollen, geht wie folgt. Wir betrachten die Menge der Paare (U, f) , $f : U \rightarrow Z$, wobei U eine Umgebung von M ist. Auf dieser Menge betrachten wir die Äquivalenzrelation :

$$(U_0, f_0) \sim (U_1, f_1), \quad \text{falls} \quad (f_0)|_M = (f_1)|_M.$$

Dann ist $C^\infty(M)$ gerade die Menge der Äquivalenzklassen.

Seien $M_i \subset V_i$, $i = 0, 1$, Untermannigfaltigkeiten.

Definition 3.8. Eine Abbildung $f : M_0 \rightarrow M_1$ ist eine *glatte Abbildung*, falls es eine Umgebung U von M_0 und eine glatte Abbildung $\tilde{f} : U \rightarrow V_1$ gibt derart, daß $\tilde{f}|_M = f$. Wir schreiben $C^\infty(M_0, M_1)$ für die Menge der glatten Abbildungen von M_0 nach M_1 . Invertierbare glatte Abbildungen heißen *Diffeomorphismen*.

Aufgabe 3.7. Zeige, daß die Komposition von glatten Abbildungen wieder eine glatte Abbildung ist.

Beispiele

1. Für jede Untermannigfaltigkeit $M \subset V$ ist die Einbettung $i : M \rightarrow V$ eine glatte Abbildung.

2. Die Abbildung $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi(p, v) := p$, ist eine glatte Abbildung. Wir können $\tilde{\pi} := V \oplus V \rightarrow V$ durch $\tilde{\pi}(p, v) := p$ definieren.

Sei $M \subset V$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension k .

Definition 3.9. Eine Karte von M ist ein Paar (U, ϕ) , wobei $U \subset M$ offen und $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^k$ ein Diffeomorphismus von U und $\phi(U)$ ist.

Wir werden oft das Symbol ϕ alleine benutzen, um Karten zu indizieren. Ist zum Beispiel (U, ϕ) eine Karte von M , so erhalten wir die Koordinatenfunktionen $x_\phi^i := \phi^* x^i \in C^\infty(U)$, $i = 1, \dots, k$.

Lemma 3.10. Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Kartenumgebung (U, ϕ) .

Proof. O.B.d.A sei $p = 0$. Sei $(T_p M, V_1, U_0, U_1, g)$ eine lokale Graphendarstellung von M in 0. Wir setzen $U := (U_0 \times U_1) \cap M$. Wir wählen einen Isomorphismus $i : T_p M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$ und setzen $\phi := i \circ \text{pr}_{T_p M}$. Diese Abbildung ist glatt. In der Tat ist $\tilde{\phi} := i \circ \text{pr}_{V_0} : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Ausdehnung. Die zu ϕ inverse Abbildung ist $(\text{id}, g) \circ i^{-1} : \phi(U) \rightarrow U$. \square

Mit Hilfe der Karten können wir glatte Funktionen charakterisieren.

Lemma 3.11. Eine Abbildung $f : M \rightarrow Z$ ist genau dann glatt, wenn für jede Karte (U, ϕ) gilt : $f_\phi := f \circ \phi^{-1} \in C^\infty(\phi(U), Z)$.

Proof. Wenn f glatt ist, so gilt sicher $f \circ \phi^{-1} \in C^\infty(\phi(U), Z)$.

Für die Rückrichtung wählen wir eine lokal endliche Überdeckung von M durch Karten (U_i, ϕ_i) . Wir wählen weitere offene Teilmengen $\tilde{U}_i \subset V$ derart, daß $U_i = M \cap \tilde{U}_i$ und glatte Abbildungen $\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ existieren, welche die ϕ_i ausdehnen. Wir wählen eine glatte Zerlegung der Eins, welche der Überdeckung (\tilde{U}_i) untergeordnet ist. Wir definieren

$$\tilde{f} := \sum_i \tilde{\phi}_i^* \circ (\phi_i^{-1})^* (\chi_i f) .$$

Dann ist \tilde{f} eine glatte Ausdehnung von f . \square

Ist (U, ϕ) eine Karte von M und $U' \subset U$ offen, so ist auch $(U', \phi|_{U'})$ eine Karte. Diese Karte ist die Einschränkung von (U, ϕ) auf U' . Sind (U, ϕ_i) , $i = 0, 1$ Karten, so erhalten wir einen Diffeomorphismus $\psi := \phi_1 \circ \phi_0^{-1} : \phi_0(U) \rightarrow \phi_1(U)$ offener Teilmengen von \mathbb{R}^k . Dieser wird auch Kartenwechsel genannt. Ist $f \in C^\infty(M)$, dann gilt sicher

$$\psi^* f_{\phi_1} = f_{\phi_0} .$$

Mit Hilfe dieser Relation kann man glatte Funktionen auch durch ihre Kartendarstellungen beschreiben.

Folgerung 3.12. *Sei für jede Karte (U, ϕ) von M eine Funktion $f_\phi \in C^\infty(\phi(U), Z)$ derart gegeben, daß $f_{\phi|_{U'}} = (f_\phi)|_{\phi(U')}$ für jede Einschränkung $(U', \phi|_{U'})$ von (U, ϕ) und $\psi^* f_{\phi_1} = f_{\phi_0}$ für jeden Kartenwechsel gilt. Dann gibt es genau eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M, Z)$ mit den gegebenen Kartendarstellungen f_ϕ .*

Definition 3.13. *Ein Vektorfeld auf M ist eine glatte Abbildung $X : M \rightarrow TM$ mit der Eigenschaft $\pi \circ X = \text{id}$. Mit $C^\infty(M, TM)$ bezeichnen wir die Menge der Vektorfelder.*

Aufgabe 3.8. 1. *Zeige, daß ein Vektorfeld auch als eine Abbildung $M \rightarrow V$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß $X(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$ gilt, beschrieben werden kann. Insbesondere ist X Einschränkung eines Vektorfeldes $\tilde{X} \in C^\infty(U, V)$ auf M , wobei U eine offene Umgebung von M ist.*

2. *Zeige, daß $C^\infty(M, TM)$ ein $C^\infty(M)$ -Modul ist.*

Definition 3.14. *Für $f \in C^\infty(M)$ und $X \in C^\infty(M, TM)$ definieren wir die Ableitung $Xf \in C^\infty(M)$ durch $Xf = \tilde{X}\tilde{f}|_M$, wobei \tilde{X} und \tilde{f} jeweils entsprechende Ausdehnungen auf eine geeignete Umgebungen von M sind.*

Lemma 3.15. *Die Ableitung Xf ist wohldefiniert.*

Proof. Seien \tilde{X}' und \tilde{f}' andere Ausdehnungen. Dann gilt für $p \in M$, daß $[(\tilde{X}' - \tilde{X})f](p) = d\tilde{f}'(p)(\tilde{X}'(p) - \tilde{X}(p)) = 0$.

Sei o.B.d.A. $p = 0$ und $(T_0 M, V_1, U_0, U_1, g)$ eine lokale Graphendarstellung von M . Dann gilt wegen $f'(v_0, g(v_0)) = f(v_0, g(v_0))$ für alle $v_0 \in U_0$, daß

$$\begin{aligned} \tilde{X}'f'(0) &= df'(0)(\tilde{X}'(0)) \\ &= df'(0)(\tilde{X}(0) + dg(0)(\tilde{X}'(0) - \tilde{X}(0))) \\ &= df(0)(\tilde{X}(0) + dg(0)(\tilde{X}'(0) - \tilde{X}(0))) \\ &= \tilde{X}f(p) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.9. Zeige, daß $C^\infty(M, TM)$ mit der Menge der Derivationen von $C^\infty(M)$ zusammenfällt.

Sei (U, ϕ) eine Karte. Ein Vektorfeld $X \in C^\infty(M, TM)$ induziert durch $f \mapsto (\phi^{-1})^*X(\phi^*f)$ eine Derivation auf $C^\infty(\phi(U))$ und damit ein Vektorfeld $X_\phi \in C^\infty(\phi(U), \mathbb{R}^k)$. Dieses heißt auch Darstellung von X in der Karte (U, ϕ) . Die Koordinatendarstellung von X_ϕ ergibt sich durch

$$X_\phi = \sum_{i=1}^k X_\phi^i \partial_i, \quad \phi^* X_\phi^i = X(x_\phi^i) .$$

Seien nun (U, ϕ_i) , $i = 0, 1$ Karten und $\psi := \phi_1 \circ \phi_0^{-1} : \phi_0(U) \rightarrow \phi_1(U)$ der Kartenwechsel. Wir schreiben $x^i \circ \psi := \psi^i$. Dann gilt $x_{\phi_1}^i = x^i \circ \phi_1 = x^i \circ \psi \circ \phi_0 = \phi_0^* \psi^i$. Wir rechnen

$$\phi_1^* X_{\phi_1}^i = X(x_{\phi_1}^i) = X(\phi_0^* \psi^i) = \phi_0^* \sum_{j=1}^k X_{\phi_0}^j \partial_j \psi^i .$$

Daraus lesen wir die Relation

$$\psi^* X_{\phi_1}^i = \sum_{j=1}^k X_{\phi_0}^j \partial_j \psi^i$$

ab. In Kurzform kann man schreiben : $\psi_* X_{\phi_0} = X_{\phi_1}$ Ähnlich wie bei Funktionen können wir Vektorfelder mit Hilfe dieser Relation durch ihre Kartendarstellungen beschreiben.

Satz 3.16. Sei für jede Karte (U, ϕ) von M ein Vektorfeld $X_\phi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ gegeben, so daß für jede Einschränkung $(U', \phi|_{U'})$ von (U, ϕ)

$$X_{\phi|_{U'}} = (X_\phi)|_{\phi(U')}$$

und für jeden Kartenwechsel

$$\psi^* X_{\phi_1}^i = \sum_{j=1}^k X_{\phi_0}^j \partial_j \psi^i$$

gilt. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $X \in C^\infty(M, TM)$ mit den Kartendarstellungen X_ϕ .

Proof. Wir zeigen, daß die Daten eine Derivation von $C^\infty(M)$ erzeugen. Sei $f \in C^\infty(M)$. Wir definieren $Xf \in C^\infty(M)$ durch $Xf|_U := \phi^* X_\phi((\phi^{-1})^* f)$ für Kartenumgebungen (U, ϕ) . Dies ist mit Einschränkungen verträglich. Wir zeigen die Verträglichkeit mit Kartenübergängen. Sei $f|_U = \phi_i^* f_{\phi_i}$, $i = 0, 1$. Sei $\kappa := \psi^{-1}$ der inverse Kartenübergang. Es gilt $\partial_i(\kappa^* f_{\phi_0}) = \sum_{l=1}^l \partial_i \kappa^l \kappa^*(\partial_l f_{\phi_0})$. Aus $\kappa \circ \psi = \text{id}$ folgt

$$\sum_{i=1}^k \partial_j \psi^i \psi^* \partial_i \kappa^l = \delta_j^l .$$

$$\begin{aligned} \phi_1^* X_{\phi_1}(f_{\phi_1}) &= \sum_{i=1}^k \phi_1^* [X_{\phi_1}^i \partial_i f_{\phi_1}] \\ &= \sum_{i=1}^k \phi_0^* \psi^* [X_{\phi_1}^i \partial_i (\kappa^* f_{\phi_0})] \\ &= \sum_{i=1}^k \phi_0^* \left[\left[\sum_{j=1}^k X_{\phi_0}^j \partial_j \psi^i \right] \psi^* \left[\sum_{l=1}^l \partial_i \kappa^l \kappa^*(\partial_l f_{\phi_0}) \right] \right] \\ &= \sum_{l=1}^k \phi_0^* [X_{\phi_0}^l \partial_l f_{\phi_0}] \\ &= \phi_0^* X_{\phi_0}(f_{\phi_0}) . \end{aligned}$$

Man sieht leicht ein, daß X eine Derivation auf $C^\infty(M)$ ist. □

Definition 3.17. Wir definieren den Kommutator auf $C^\infty(M, TM)$ durch $[X, Y]f := X(Y(f)) - Y(X(f))$.

Aufgabe 3.10. Zeige, daß die Kartendarstellungen der Relation $[X, Y]_\phi = [X_\phi, Y_\phi]$ genügen.

3.1.3 Formen

Sei $M \subset V$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei $p \in M$. Dann haben wir eine Einbettung $i_p : T_p M \rightarrow V$. Dual dazu ist die Projektion $q_p : V^* \rightarrow T_p^* M$, wobei $T_p^* M := (T_p M)^*$ bezeichnet. Diese induziert für $k \in \mathbb{N}$ eine Projektion $q_p^k : \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^k T_p^* M$.

Definition 3.18. Eine k -Form auf M ist eine Abbildung $\omega : M \rightarrow \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k T_p^* M$ derart, daß $\omega(p) \in \Lambda^k T_p^* M$ für alle $p \in M$ gilt und eine k -Form $\tilde{\omega} \in C^\infty(U, \Lambda^k V^*)$ auf einer

Umgebung U von M existiert, so daß $q_p^k(\tilde{\omega}(p)) = \omega(p)$ für alle $p \in M$. Mit $C^\infty(M, \Lambda^p T^* M)$ bezeichnen wir die Menge der p -Formen. Sei $C^\infty(M, \Lambda T^* M) := \bigoplus_{p \geq 0} C^\infty(M, \Lambda^p T^* M)$

Die Ausdehnung $\tilde{\omega}$ bestimmt ω vollständig, dies gilt aber nicht umgekehrt.

Aufgabe 3.11. Zeige, daß $C^\infty(M, \Lambda^p T^* M)$ ist ein Modul über der Algebra $C^\infty(M)$.

Aufgabe 3.12. Zeige, daß das \wedge -Produkt auf $C^\infty(M, \Lambda T^* M)$ die Struktur einer graduiert-kommutativen \mathbb{N}_0 -graduierten Algebra erzeugt.

Wir kommen nun zu den Kartendarstellungen. Sei (U, ϕ) eine Karte von M und $\omega \in C^\infty(M, \Lambda^p T^* M)$.

Aufgabe 3.13. Zeige : Die p -Form $\omega_\phi := (\phi^{-1})^* \tilde{\omega}$ auf $\phi(U)$ hängt nur von ω ab. Für jeden Kartenwechsel $\psi := \phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ gilt $\omega_{\phi_0} = \psi^* \omega_{\phi_1}$.

Mit Hilfe dieser Relation kann man Formen auch durch ihre Kartendarstellungen beschreiben.

Lemma 3.19. Sei für jede Karte (U, ϕ) eine p -Form $\omega_\phi \in C^\infty(\phi(U), (\mathbb{R}^k)^*)$ gegeben, so daß für jede Einschränkung $(U', \phi|_{U'})$

$$\omega_{\phi|_{U'}} = (\omega_\phi)|_{\phi(U')}$$

und für jeden Kartenwechsel $\psi = \phi_1 \circ \phi_0^{-1}$

$$\omega_{\phi_0} = \psi^* \omega_{\phi_1}$$

gilt. Dann gibt es genau eine p -Form ω auf M mit den gegebenen Kartendarstellungen.

Proof. Wir wählen wir eine Überdeckung von M durch Karten (U_i, ϕ_i) . Wir wählen weitere offene Teilmengen $\tilde{U}_i \subset V$ derart, daß $U_i = M \cap \tilde{U}_i$ und glatte Abbildungen $\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^k$, welche die ϕ_i ausdehnen. Wir können annehmen, daß (\tilde{U}_i) lokal endlich ist. Wir wählen eine glatte Zerlegung der Eins, welche der Überdeckung (\tilde{U}_i) von $U := \bigcup_i \tilde{U}_i$ untergeordnet ist. Wir definieren

$$\tilde{\omega} := \sum_i \tilde{\phi}_i^* (\omega_{\phi_i} (\phi_i^{-1})^* (\chi_i)) .$$

Man rechnet leicht nach, daß $\tilde{\omega}$ eine p -Form ω mit den vorgegeben Kartendarstellungen definiert. \square

Aufgabe 3.14. Zeige, daß $C^\infty(M, \Lambda^p T^* M)$ mit dem Raum der alternierenden p -fach $C^\infty(M)$ -multiplinen Abbildungen

$$\underbrace{C^\infty(M, TM) \times \cdots \times C^\infty(M, TM)}_{p \times} \rightarrow C^\infty(M)$$

zusammenfällt.

Definition 3.20. Wir definieren das Differential $d : C^\infty(M, \Lambda^p T^* M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{p+1} T^* M)$ derart, daß wenn ω durch die Kartendarstellungen ω_ϕ gegeben ist, $d\omega$ die Kartendarstellungen $d\omega_\phi$ hat.

Lemma 3.21. Das Differential d ist wohldefiniert. Wenn ω die Ausdehnung $\tilde{\omega}$ hat, so ist $d\tilde{\omega}$ eine Ausdehnung von $d\omega$.

Proof. In der Tat ist für jede Einschränkung

$$d\omega_{\phi|_{U'}} = (d\omega_\phi)|_{\phi(U')}$$

und für jeden Kartenwechsel $\psi = \phi_1 \circ \psi_0^{-1}$ gilt

$$d\omega_{\phi_0} = d\psi^* \omega_{\phi_1} = \psi^* d\omega_{\phi_1} .$$

Damit ist d wohldefiniert. Die zweite Aussage folgt aus

$$(\phi^{-1})^* d\tilde{\omega} = d((\phi^{-1})^* \tilde{\omega}) = d\omega_\phi .$$

□

Definition 3.22. Für ein Vektorfeld $X \in C^\infty(M, TM)$ und eine Form ω definieren wir die innere Multiplikation so, daß $i_X \omega$ die Kartendarstellungen $i_{X_\phi} \omega_\phi$ hat.

Lemma 3.23. Die innere Multiplikation ist wohldefiniert. Wenn $\omega = [U, \tilde{\omega}]$ und $\tilde{X} \in C^\infty(U, V)$ eine Ausdehnung von X ist, so gilt $i_X \omega = [U, i_{\tilde{X}} \tilde{\omega}]$.

Proof. In der Tat ist für jede Einschränkung

$$i_{X_{\phi|_{U'}}} \omega_{\phi|_{U'}} = (i_{X_\phi} \omega_\phi)|_{\phi(U')}$$

und für jeden Kartenwechsel $\psi = \phi_1 \circ \psi_0^{-1}$ gilt

$$\begin{aligned} i_{X_{\phi_0}} \omega_{\phi_0} &= i_{X_{\phi_0}} \psi^* \omega_{\phi_1} \\ &= \psi^* i_{\psi_* X_{\phi_0}} \omega_{\phi_1} \\ &= \psi^* i_{X_{\phi_0}} \omega_{\phi_1} . \end{aligned}$$

Damit ist die innere Multiplikation wohldefiniert.

Aufgabe 3.15. *Zeige die zweite Behauptung.*

□

Aufgabe 3.16. *Zeige, daß i_X ein Differential vom Grad -1 auf $C^\infty(M, \Lambda T^*M)$ ist.*

Wir setzen ferner $\mathcal{L}_X := d \circ i_X + i_X \circ d$.

Aufgabe 3.17. *Beweise die Relationen :*

1. \mathcal{L}_X ist eine Derivation vom Grad 0 auf $C^\infty(M, \Lambda T^*M)$.
2. $\mathcal{L}_X = [d, i_X] = d \circ i_X + i_X \circ d$
3. $\mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$.
4. $\mathcal{L}_X \circ f = f \circ \mathcal{L}_X + X(f)$
5. $\mathcal{L}_{fX} = f \circ \mathcal{L}_X + df \wedge \circ i_X$

3.2 Integration von Formen über Untermannigfaltigkeiten

Sei $M \subset V$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Definition 3.24. *Eine Orientierung [or] von M wird durch eine p -Form $\text{or} \in C^\infty(M, \Lambda^k T^*M)$ repräsentiert, welche nirgends verschwindet. Zwei solche p -Formen or, or' repräsentieren dieselbe Orientierung, wenn $\text{or}' = f \text{or}$ für eine positive Funktion $f \in C^\infty(M)$ gilt.*

Wenn M eine Orientierung [or] besitzt, dann hat M genau zwei Orientierungen, nämlich [or] und die umgekehrte Orientierung [-or].

Lemma 3.25. *Wenn M eine globale definierende Funktion zuläßt, dann besitzt M eine Orientierung.*

Proof. Sei $U \subset V$ eine Umgebung von M und $f : U \rightarrow W$ eine definierende Funktion. Sei (w_i) eine Basis von W und (v_j) eine Basis von V . Wir wählen ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf v . Wir definieren Vektorfelder X_i derart, daß $f^*d^i(A) = \langle X_i, A \rangle$ für alle $A \in V$. Wir setzen

$$\text{or} := i_{X_1} \dots i_{X_m} (d^1 \wedge \dots \wedge d^n)|_M .$$

Dies ist sicherlich eine glatte p -Form auf M . Sie verschwindet nirgends. Wäre $\text{or}(p) = 0$, dann wählen wir eine Basis (U_k) von T_pM . Da

$$\text{or}(p)(U_1, \dots, U_k) = (v^1 \wedge \dots \wedge v^n)(X_1(p), \dots, X_m(p), U_1, \dots, U_k) = 0$$

gilt, ist $(X_1, \dots, X_m(p), U_1, \dots, U_k)$ linear abhängig. Da jedoch $\langle X_i(p), U_l \rangle = w^i(df(p)(X_l(p))) = 0$ gilt, sind $(X_1(p), \dots, X_k(p))$ linear abhängig. Sei $\sum_l c_l X_l(p) = 0$. Dann gilt

$$\Lambda^p(df(p)^*) \sum_l c_l d^i(f(p)) = 0 .$$

Da f in p regulär ist, gilt $\sum_l c_l d^i(f(p)) = 0$. Das geht aber nicht, da (d^i) in jedem Punkt linear unabhängig ist. □

Definition 3.26. *Eine orientierte Untermannigfaltigkeit $(M, [\text{or}])$ ist eine Untermannigfaltigkeit mit einer ausgezeichneten Orientierung.*

Sei $(M, [\text{or}])$ eine orientierte Mannigfaltigkeit.

Definition 3.27. *Eine Karte (U, ϕ) heißt orientiert, wenn $\text{or}_\phi = f d^1 \wedge \dots \wedge d^k$ für eine positive Funktion $f \in C^\infty(\phi(U))$ gilt.*

In der Tat gilt immer $\text{or}_\phi = f d^1 \wedge \dots \wedge d^k$ für eine nirgends verschwindende Funktion. Sei U zusammenhängend. Dann ist die Karte entweder orientiert oder f ist negativ. Im letzteren Fall ist $\phi' := F \circ \phi$ eine orientierte Karte, wobei $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ durch $T(x^1, x^2, \dots, x^k) := (-x^1, x^2, \dots, x^k)$ gegeben ist.

Wir sehen, daß wir eine orientierte Untermannigfaltigkeit immer mit orientierten Karten überdecken können.

Wir nehmen jetzt zusätzlich an, daß M kompakt ist. Dann können wir eine endliche Überdeckung durch orientierte Karten (U_i, ϕ_i) wählen. Sei (χ_i) eine assoziierte glatte Zerlegung der Eins.

Definition 3.28. Wir definieren $\int_{(M, [\text{or}]}) : C^\infty(M, \Lambda^k T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\int_{(M, [\text{or}])} \omega := \sum_i \int_{\mathbb{R}^k} (\omega \chi_i)_{\phi_i}(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds .$$

Lemma 3.29. Die Abbildung $\int_{(M, [\text{or}])} : C^\infty(M, \Lambda^k T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$ ist wohldefiniert.

Proof. Sei (W_j, ψ_j) eine weitere Familie von orientierten Karten, welche M überdecken und (κ_i) eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Sei $\psi_{i,j} : \phi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(W_j \cap U_i) \rightarrow \phi_i(W_j \cap U_i)$. Beachte, daß für jeden Diffeomorphismus $f : A \rightarrow B$ zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^k und k -Form $\beta \in C_c^\infty(B, \Lambda^k(\mathbb{R}^k)^*)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^k} \beta(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds = \int_{\mathbb{R}^k} f^* \beta(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds .$$

Aufgabe 3.18. Verifiziere diese Formel.

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\mathbb{R}^k} (\omega \chi_i)_{\phi_i}(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^k} \sum_j (\omega \chi_i \kappa_j)_{\phi_i}(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds \\ &= \sum_j \sum_i \int_{\mathbb{R}^k} (\omega \chi_i \kappa_j)_{\phi_i}(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds \\ &= \sum_j \sum_i \int_{\mathbb{R}^k} \psi_{i,j}^* (\omega \chi_i \kappa_j)_{\phi_i}(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds \\ &= \sum_j \int_{\mathbb{R}^k} \sum_i (\omega \chi_i \kappa_j)_{\psi_j}(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds \\ &= \sum_j \int_{\mathbb{R}^k} (\omega \kappa_j)_{\psi_j}(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds \end{aligned}$$

Dies zeigt die Unabhängigkeit der Definition von der Wahl der Kartenüberdeckung und der Zerlegung der Eins. □

3.3 Berandete Untermannigfaltigkeiten, Satz von Stokes

Sei $M \subset V$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Definition 3.30. *Ein glattes berandetes Gebiet in M ist eine abgeschlossene Teilmenge Ω derart, daß es eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ gibt mit $\Omega = \{f \geq 0\}$ und $df(x) \neq 0$ für alle $x \in \{f = 0\}$.*

Die Funktion f heißt definierende Funktion von $\Omega \subset M$. Sei $\partial\Omega := \{f = 0\}$ der Rand von Ω .

Lemma 3.31. *$\partial\Omega$ ist eine $k - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.*

Proof. Sei $p \in \partial\Omega$. Sei $h : U \rightarrow W$ eine lokale definierende Funktion von M in p . Sei $\tilde{f} \in C^\infty(U)$ eine Ausdehnung von f . Wir betrachten $F : U \rightarrow W \oplus \mathbb{R}$, $F(q) := (h(q), \tilde{f}(q))$. Dann gilt mit der Aufspaltung $V = T_p M \oplus V_1$

$$dF(p) := \begin{pmatrix} 0 & d_1 h(p) \\ df(p) & d_1 \tilde{f}(p) \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $dF(p)$ surjektiv. Die Funktion F definiert $\partial\Omega$ im Punkt p . □

Wir betrachten den oberen Halbraum $\mathbb{R}_+^k := \{(x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k \mid x^k \geq 0\}$.

Definition 3.32. *Eine Randkarte von Ω ist eine Karte (U, ϕ) von M derart daß $\phi(U \cap \Omega) = \phi(U) \cap \mathbb{R}_+^k$ gilt. Insbesondere ist dann $\phi(\partial\Omega \cap U) = \{x^k = 0\} \cap \phi(U)$.*

Lemma 3.33. *Für jeden Punkt $p \in \partial\Omega$ gibt es eine Randkarte.*

Proof. Sei $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ eine beliebige Karte um p . Wir können annehmen, daß $T_p \partial\Omega = \{x^k = 0\}$. Sei $\phi' : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ die Projektion von $\tilde{\psi}$ auf die ersten $k - 1$ Koordinaten. Wir definieren $\phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ durch $\phi(q) = (\phi'(q), f(q))$. Dann ist sicherlich $\phi(\Omega \cap \tilde{U}) = \phi(\tilde{U}) \cap \mathbb{R}_+^k$. Wir berechnen $d\phi(p) = (d\phi'(p), df(p))$. Nun stellt $d\phi'(p)$ eine Isomorphismus von $T_p \partial\Omega$ mit \mathbb{R}^{k-1} her. Da $df(p)$ einerseits nicht verschwindet und andererseits auf $T_p \partial\Omega$ Null ist, ist $d\phi(p)$ surjektiv und damit bijektiv. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist die Einschränkung von ϕ auf eine geeignete Umgebung $U \subset \tilde{U}$ von p ein Diffeomorphismus. □

Definition 3.34. Ein Vektorfeld $X \in C^\infty(M, TM)$ heiße positiv transversal zu $\partial\Omega$, wenn die Funktion $X(f)$ auf $\partial\Omega$ negativ definit ist.

Lemma 3.35. Diese Bedingung hängt nicht von der definierenden Funktion f ab.

Proof. Zuerst sieht man, daß die Bedingung $X(f)(p) = 0$ quivalent zu $X(p) \in T_p\partial\Omega$ ist. Also ist $X(f) \neq 0$ unabhängig von f .

Sei nun \tilde{f} eine weitere Ω definierenden Funktion und $X(\tilde{f})(p) > 0$. Dann gilt für ein $t > 0$, daß $\tilde{f}(\Phi_t^X(p)) > 0$ und $f(\Phi_t^X(p)) < 0$. Dies bedeutet $\Phi_t^X(p) \in \Omega$ und $\Phi_t^X(p) \notin \Omega$, was unmöglich ist. \square

Lemma 3.36. Es gibt Vektorfelder, welche positiv transversal zu $\partial\Omega$ sind.

Proof. Gilt für Vektorfelder X_i , daß $X_i(f) \leq 0$ und für jeden Punkt $p \in \partial\Omega$, daß $X_i(f) < 0$ für mindestens ein i , dann ist $X := \sum_i X_i$ positiv transversal zu $\partial\Omega$. Ist (U, ϕ) eine Randkarte, so definieren wir $X^\phi \in C^\infty(U, TM)$ durch die Kartendarstellung $X^\phi = -\partial_k$. Dann ist X^ϕ positiv transversal zu $\partial\Omega$. Wir wählen nun eine lokal-endliche Überdeckung von $\partial\Omega$ durch Randkarten (U_i, ϕ_i) . Sei (χ_i) eine Familie von nicht-negativen Funktionen derart, daß $\text{supp}(\chi_i) \subset U_i$ und $\sum_i (\chi_i)|_{\partial\Omega} = 1$. Wir setzen $X := \sum_i X^{\phi_i} \chi_i$. Dann ist X positiv transversal zu $\partial\Omega$. \square

Sei [or] eine Orientierung von M und X ein zu $\partial\Omega$ transversales Vektorfeld.

Lemma 3.37. Durch $i_{X \text{ or}}|_{\partial\Omega} =: \partial_{X \text{ or}}$ wird eine Orientierung $\partial[\text{or}]$ auf $\partial\Omega$ induziert, welche nicht von der Wahl von X abhängt.

Proof.

Aufgabe 3.19. Beweise diese Aussage.

\square

Wir können nun den Satz von Stokes formulieren.

Satz 3.38. Sei $\omega \in C^\infty(M, \Lambda^{k-1}T^*M)$. Dann gilt

$$\int_{(\Omega, [\text{or}])} d\omega = \int_{(\partial\Omega, \partial[\text{or}])} \omega .$$

Proof. Sei (U_i, ϕ_i) eine Überdeckung von Ω mit orientierten Karten und Randkarten. Sei (χ_i) eine assoziierte Zerlegung der Eins. Dann ist

$$\int_{(\Omega, [\text{or}])} d\omega = \sum_i \int_{\mathbb{R}^k} d(\omega\chi_i)_{\phi_i}(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds .$$

Wir schreiben das Differential aus:

$$d(\omega\chi_i)_{\phi_i}(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) = \sum_{i=1}^k (-1)^i \partial_i((\omega\chi_i)_{\phi_i}(\partial_1, \dots, \hat{\partial}_i, \dots, \partial_k))(s) .$$

Daraus sehen wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, daß

$$\int_{\mathbb{R}^k} d(\omega\chi_i)_{\phi_i}(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds = 0$$

für innere Karten gilt. Wir betrachten nun eine Randkarte. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^k} d(\omega\chi_i)_{\phi_i}(\partial_1, \dots, \partial_k)(s) ds = -(-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} (\omega\chi_i)_{\phi_i}(\partial_1, \dots, \partial_{k-1})(s') ds' .$$

Wenn man nun beachtet, daß $-i_{\partial_k} d^1 \wedge \dots \wedge d^k = -(-1)^k d^1 \wedge \dots \wedge d^{k-1}$ gilt, dann können wir schließen, daß die Summe dieser Integrale über die Randkarten gerade $\int_{(\partial\Omega, \partial[\text{or}])} \omega$ ergibt. \square

3.4 Sätze der Vektoranalysis

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V . Sei $U \subset V$ offen und $f \in C^\infty(U)$.

Definition 3.39. Wir definieren den Gradienten $\text{grad}(f) \in C^\infty(U, V)$ durch die Bedingung

$$\langle \text{grad}(f)(u), A \rangle = df(u)(A) \quad \forall A \in V .$$

Beachte, daß $\text{grad}(f)$ von der Wahl des Skalarproduktes abhängt. Wir leiten nun eine Darstellung von $\text{grad}(f)$ in einer Orthonormalbasis (v_i) von V her.

Lemma 3.40. Es gilt $\text{grad}(f) = \sum_i \partial_i(f) \partial_i$.

Proof. In der Tat

$$\begin{aligned}
 df(u)(A) &= \sum \partial_i f(u) d^i(A) \\
 &= \sum_i \partial_i f(u) \langle \text{partial}_i, A \rangle \\
 &= \langle \sum_i \partial_i f(u) \partial_i, A \rangle
 \end{aligned}$$

□

Die Wahl Basis (v_i) legt eine Orientierung von V durch $\text{vol}_V = d^1 \wedge \dots \wedge d^n$ fest. Sei jetzt Ω ein glattes berandetes Gebiet in V . Wir definieren eine Volumenform $\text{vol}_{\partial\Omega}$ wie folgt:

Sei $p \in \partial\Omega$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Ω definierende Funktion bei p . Sei $\text{grad}^0(f)$ das zugehörige Einheitsvektorfeld (welches wir o.B.d.A auf U als definiert annehmen können). Dann definieren wir $\tilde{\omega} := -i_{\text{grad}^0(f)} \text{vol}_V$. Sei $i : \partial\Omega \rightarrow V$.

Lemma 3.41. *Die Einschränkung $i_{|U \cap \partial\Omega}^* \tilde{\omega} \in C^\infty(U \cap \partial\Omega, \Lambda^{n-1} T^* \partial\Omega)$ ist unabhängig von der Wahl von f . Folglich gibt es eine Form $\text{vol}_{\partial\Omega} \in C^\infty(\partial\Omega, \Lambda^{n-1} T^* \partial\Omega)$ derart, daß $(\text{vol}_{\partial\Omega})_{|U \cap \partial\Omega} = i_{|U \cap \partial\Omega}^* \tilde{\omega}$.*

Proof. Sei \tilde{f} eine weitere definierende Funktion. Da $T_p \partial\Omega = \ker(df(p)) = \ker(d\tilde{f}(p))$ gilt, muß $df(p) = \lambda d\tilde{f}(p)$ für $\lambda \neq 0$ gelten. Weiter ist klar, daß sogar $\lambda > 0$ gilt. Folglich gilt $\text{grad}^0(f)(p) = \text{grad}^0(\tilde{f})(p)$. Folglich stimmt die mit f definierte Form $\tilde{\omega}$ mit der mit \tilde{f} definierten überein. □