Aspekte der Mathematik

Ulrich Bunke

February 2, 2007

Contents

Abstract

1 Analysis

1.1 Elliptische Differentialgleichungen

1.1.1 Physikalische und mathematische Beispiele

1.1.1.1 Stationärer Wärmefluß Wir betrachten eine stationäre Temperaturverteilung in einem homogenen räumlich begrenzten Medium. Die Temperatur an den Begrenzugen möge (zum Beipiel durch Kopplung mit Wämereservoirs) vorgegeben sein.

Wir beschreiben die Geometrie unseres Mediums durch eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Die Temperaturverteilung ist dann eine Funktion

$$T : \Omega \to \mathbb{R} \ .$$

Die Temperatur ist bis auf einen Proportionalitätsfaktor (spezifische Wärme) ein Maß für die Wärmeenergiedichte. Temperturdifferenzen zwischen benachbarten Teilgebieten tendieren durch Wärmeaustausch ausgeglichen zu werden. Wir beschreiben den Wärmeenergiefluß durch ein Vektorfeld

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

und die Vorstellung, daß der durch ein orientiertes Flächenstück A dringende Wärmeenergiefluß durch

$$\int_A < F, N >$$

gegeben wird. Hierbei bezeichnet N das Normaleneinheitsvektorfeld. Den Zusammenhang zwischen der Temperaturverteilung und dem Wärmefluß wird durch die plausible Annahme, daß der Wärmefluß proportional zur räumlichen Variation der Temperatur sein sollte, festgelegt. Diese Annahme muß entweder experimentell oder durch eine mikroskopische Theorie der Wärme begründelt werden. Nach Wahl entsprechender Maßeinheiten ist das die Gleichung

$$F = -\mathtt{grad} T \ .$$

Unser Medium soll keine inneren Energiequellen besitzen. Ist $U \subset \Omega$ ein ganz im Inneren liegendes Teilgebiet, dann soll sich also der Zu- und Abfluß von Wämeenergie ausgleichen. Dies ist die Gleichung

$$0 = \int_{\partial U} < N, F > \quad . \tag{1}$$

Wir können das nach dem Gaußschen Satz umschreiben zu

$$0 = \int_U \mathtt{div}(F) \ .$$

Da dies für alle in Ω enthaltenden Gebiete gelten soll, muß also

$$\mathtt{div}(F) = 0$$

im Inneren von Ω gelten. Wir drücken jetzt F durch die Temperaturverteilung T aus und benutzen den Laplaceoperator

$$\Delta := \mathtt{div} \circ \mathtt{grad} \ .$$

Dann sollte T der Gleichung

$$\Delta T = 0$$

im Inneren von Ω genügen. Sei $\theta : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ die vorgegebene Temperaturverteilung am Rand. Dann sollte T weiter

$$T_{|\partial\Omega} = \theta \tag{2}$$

erfüllen. Damit diese Gleichungen mathematisch sinnvoll werden, sollten wir folgende Annahmen machen:

1. Das Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ sollte abgeschlossen und Abschluß seines Inneren Ω° sein. Wir nennen solche Teilmengen Gebiete.

2. Die Funktion T sollte im Inneren des Gebietes zweimal differenzierbar sein.

3. Die Funktion T sollte eine Einschränkung auf den Rand $\partial\Omega$ zulassen. Wir sichern das durch die Annahme der Stetigkeit auf Ω. Damit muß natürlich auch θ stetig sein.

Die Bestimmung der stationären Temperaturverteilung im homogenen Medium mit vorgegebener Randtemperatur haben wir nun auf das folgende mathematische Problem reduziert.

Problem 1.1 *Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und eine Funktion $\theta \in C(\partial\Omega)$. Wir suchen eine Funktion*

$$T \in C^2(\Omega^\circ) \cap C(\Omega) \ ,$$

welche den Gleichungen

$$\Delta T = 0 \ , \quad T_{|\partial\Omega} = \theta$$

genügt.

Dies ist das Dirichlet Problem für die Laplace Gleichung.

1.1.1.2 Elektrisches Potential Wir betrachten das durch eine stationäre Ladungsverteilung hervorgerufene stationäre elektrische Feld in einem räumlichen durch Leiter begrenztem Gebiet.

Wir beschreiben dieses Gebiet wieder durch eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Das elektische Feld in einem Raumpunkt $x \in \Omega^\circ$ wird durch die auf eine in x angebrachte Probeladung ausgeübte Kraftwirkung definiert. Demnach kann es durch ein Vektorfeld $E : \Omega^\circ \to \mathbb{R}^3$ beschrieben werden. Durch quasistatisches Verschieben der Probeladung entlang eines geschlossenen Weges W sollte aus Energieerhaltungsgründen keine Energie gewonnen werden können. In Gleichungen,

$$\int_W < W', E >= 0 \ ,$$

wobei W' den Geschwindigkeitsvektor des Weges bezeichnet. Daraus folgt die Existenz eines Potentials $U : \Omega^\circ \to \mathbb{R}$ derart, daß

$$E = \mathtt{grad} U \ .$$

Wenn Ω° zusammenhängend ist, dann wird U bis auf eine Konstante durch E bestimmt. Die Ladungsverteilung in Ω sei durch eine Funktion $\rho : \Omega^\circ \to \mathbb{R}$ beschrieben. Die experimentellen Untersuchungen der Elektrostatik ergaben nun, daß der Zusammenhang zwischen E und der Ladungsdichte durch

$$\mathtt{div} E = \rho$$

gegeben wird. Dies ist ein Spezialfall der Maxwellschen Gleichungen. Wir drücken E durch U aus und erhalten die Gleichung

$$\Delta U = \rho \ .$$

In unserem Fall möge der Rand des Gebietes durch Leiter vorgegeben sein. Potentialdifferenzen in einem Leiter würden sofort durch Stromflüsse ausgeglichen werden. Wir können deshalb annehmen, daß das Potential auf den Komponenten von $\partial\Omega$ konstant ist. Wir nehmen an, daß das Feld auf den Zusammenhangskomponenten des Randes vorgegeben ist. Diese Vorgabe wird durch eine lokalkonstante Funktion $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ beschrieben. Damit die obige Diskussion mathematischen Sinn erhält, machen wir folgende Annahmen.

1. Ω sollte ein Gebiet sein.
2. Die Funktion U sollte im Inneren des Gebietes zweimal stetig differenzierbar sein. Da impliziert die Stetigkeit von ρ.
3. Die Funktion U sollte auf Ω stetig sein.

Die Bestimmung des durch eine statische Ladungsverteilung hervorgerufenen elektrischen Feldes haben wir damit auf das folgende mathematische Problem zurückgeführt.

Problem 1.2 *Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und eine Funktion $\rho \in C(\Omega^\circ)$. Wir suchen eine Funktion*

$$U \in C^2(\Omega^\circ) \cap C(\Omega) \ ,$$

welche den Gleichungen

$$\Delta U = \rho \ , \quad U_{|\partial\Omega} = \phi$$

genügt.

Dies ist das Poisson-Problem für die Laplace Gleichung.

1.1.1.3 Stationärer Wärmefluß mit chemischen Reaktionen und Kühlung

Wir kommen auf das Beispiel des stationären Wärmeflusses zurück. Wir nehmen jetzt an, daß im Inneren des Mediums chemische Reaktionen ablaufen, welche eine Energiefreisetzung bewirken. Sei $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ die Rate der Energiedichteproduktion.

Die Bilanzgleichung (1) hat nun die Modifikation

$$\int_{\partial U} < N, F >= \int_U \rho \ .$$

Dies impliziert die lokale Beziehung

$$\Delta T = \mathtt{div} F = \rho \ .$$

Wir nehmen weiter an, daß der Rand des Systems gekühlt oder beheizt wird, wobei die Energieabgabe oder Energiezufuhr vorbestimmt ist. Die lokale Kühl- oder Heizleistung wird durch eine Funktion $\kappa : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ beschrieben. Die Randbedingung (**??**) modifiziert sich zu

$$< \mathtt{grad}\, T, N >=< F, N >= \kappa \ .$$

Der Spezialfall, daß unser System isoliert ist, wird durch $\kappa \equiv 0$ beschrieben. Damit die Randbedingung wohldefiniert ist, nehmen wir zunächst an, daß T bis zum Rand stetig differenzierbar ist. Das mathematische Problem der Bestimmung der Temperaturverteilung ist nun das folgende.

Problem 1.3 *Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und Funktionen $\rho \in C(\Omega^\circ)$, $\kappa \in C(\partial\Omega)$. Wir suchen eine Funktion*

$$T \in C^2(\Omega^\circ) \cap C(\Omega) \ ,$$

welche den Gleichungen

$$\Delta U = \rho \ , \quad < \mathtt{grad} U_{|\partial_\Omega}, N >= \kappa$$

genügt.

Der Unterschied zu 1.2 ist die Randbedingung. In 1.2 werden die Werte der gesuchten Funktion vorgegeben (Dirichlet Randbedingungen). Hier wird die Ableitung der gesuchten Funktion in Normalenrichtung vorgegeben (Neumann Randbedingung).

Noch kompliziertere Randbedingungen erhält man, wenn man den Fall modelliert, daß der Wämeabfluß proportial zu der Differenz zu einer Umgebungstemperatur θ ist. Die Randbedingung ist dann

$$< \mathtt{grad}\, U_{|\partial_\Omega}, N >= c(U_{|\partial_\Omega} - \theta) \ .$$

Dies ist eine gemischte Randbedingung, welche die Normalenableitung und die Werte der gesuchten Funktion koppelt.

1.1.1.4 Harmonische Funktionen

Der n-dimensionale Laplaceoperator ist durch

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial_i^2}$$

gegeben. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.

Definition 1.4 *Eine Funktion $\phi : U \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, falls*

1. *$\phi \in C^2(U)$ und*
2. *$\Delta\phi = 0$ in U*

gilt.

Harmonische Funktionen spielen insbesondere in der Funktionentheorie eine wichtige Rolle.

Fact 1.5 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind $\mathtt{Re}(h)$ und $\mathtt{Im}(h)$ harmonisch.*

Problem 1.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\phi \in C(\partial\Omega)$. Finde alle harmonischen Funktionen $f \in C(\Omega)$, welche im Inneren von Ω harmonisch sind und $f_{|\partial\Omega} = \phi$ erfüllen.*

1.1.2 Allgemeine Fragen

1.1.2.1 Eindeutigkeit - Maximumprinzip Problemstellungen für partielle Differentialgleichungen bestehen in der Regel aus zwei Teilen. Der erste Teile ist die Differentialgleichung selbst, also etwa

$$\Delta U = \rho \ .$$

Der zweite Teil sind zusätzliche Bedingungen wie Randbedingungen.

Die Menge der Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$f^{(n)} = R(t, f, \ldots, f^{(n-1)})$$

hängt in der Regel von n Parametern ab. Die Lösung des Anfangswertproblems wird durch die Vorgabe der n Werte

$$f(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$$

eindeutig (natürlich unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen) festgelegt. Man könnte aber auch Werte

$$f(t_1), \ldots, f(t_n)$$

an n verschiedenen Punkten vorschreiben.

Der Raum der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung ist oft ∞-dimensional. Hier ein Beispiel.

Satz 1.7 *Der Raum der Lösungen der Gleichung*

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \Delta(f) = 0$$

ist unendlich-dimensional.

Beweis: Die Funktionen $z \to z^n = (x + iy)^n$ sind holomorph. Damit sind die Funktionen $f_n(x, y) = \mathtt{Re}(x + iy)^n$ harmonisch. Sie spannen einen ∞-dimensionalen Teilraum der Lösungen auf. ■

Bei Randwertproblemen versucht man die Lösungen durch Vorgaben für die Einschränkung auf den Rand des betrachteten Gebietes oder Abfallbedingungen im Unendlichen festzulegen.

Eine wichtige Methode des Nachweises der Eindeutigkeit von Randwertaufgaben für die Laplacegleichung und verwandte Gleichungen ist die Anwendung eines Maximumprinzips.

Zur Herleitung des Maximumprinzips für den Laplaceoperator machen wir einige Vorbetrachtungen.

Die Gruppen $SO(n)$ und $\mathbb{R}^n$ wirken auf $\mathbb{R}^n$ und damit auf den Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$gf(x) = f(g^{-1}x) \ .$$

Lemma 1.8 *Der Laplaceoperator Δ ist $SO(n)$ und $\mathbb{R}^n$-invariant, d.h es gilt*

$$\Delta(gf) = g\Delta(f) \ .$$

Beweis: Nachrechnen.

Eine $SO(n)$-invariante Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ hängt nur von dem Parameter $r := \|x\|$ ab. Die Formel für den Laplaceoperator in Polarkoordianten liefert in diesem Fall

$$\Delta f(r) = r^{2-n}\frac{d}{dr}(r^{n-2}\frac{d}{dr}f(r)) \ .$$

Lemma 1.9 *Eine $SO(n)$-invariante harmonische Funktion f auf dem Ball $B(0,R)$ ist konstant.*

Beweis: Für $r > 0$ gilt

$$r^{2-n}\frac{d}{dr}(r^{n-2}\frac{d}{dr}f(r)) = 0 \ .$$

Also gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$C = r^{n-2}\frac{d}{dr}f(r) \ .$$

Die Funktion $f(r)$ ist auch in $r = 0$ differenzierbar und muß sich mit $f(-r) := f(r)$ zu einer glatten Funktion auf $(-R, R)$ fortsetzen. Dann gilt aber $\frac{d}{dr}f(r)_{|r=0} = 0$. Daraus schließen wir $C = 0$. Also ist $f(r)$ konstant. ■

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C(U)$. Wir definieren den Wert der Funktion

$$\{x \in U | B(x,r) \subset U\} \mapsto M_r(f)(x)$$

als den Mittelwert von f über die Sphäre vom Radius r um $x \in U$:

$$M_r(f)(x) := \frac{1}{\mathtt{vol}(\partial B(x,r))}\int_{\partial B(x,r)} f(b)db = \int_{SO(n)} f(x+gy)dg$$

für einen beliebigen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| = r$, wobei dg das normierte Haarsche Maß auf $SO(n)$ ist.

Satz 1.10 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen) *Ist $f \in C^2(U)$ und harmonisch, dann gilt für alle $x \in U$ und $r \geq 0$ mit $B(x,r) \subseteq U$ die Gleichung*

$$M_r(f)(x) = f(x) \ .$$

Beweis: Wir fixieren $0 < r < R$ derart, daß $B(x,R) \subseteq U$. Auf $B(x,R)$ definieren wir die Funktion

$$\bar{f}(y) := \int_{SO(n)} f(x + g(y-x))dg \ .$$

Wegen Lemma 1.8 ist die Funktion $y \mapsto f(x + g(y-x))$ für festes g, x harmonisch. Da $SO(n)$ kompakt ist, kann man Δ mit dem Integral vertauschen. Damit ist $\bar{f}$ auf $B(x,R)$ harmonisch. Nach Konstruktion ist diese Funktion rotationssymmetrisch. Nach Lemma 1.9 ist $\bar{f}$ konstant. Nach Konstruktion gilt für $z \in B(x,R)$ mit $\|x - z\| = r$, daß

$$f(x) = \bar{f}(x) = \bar{f}(z) = M_r(f)(x) \ .$$

■

Weitere Informationionen findet man z.B. in [GT77, Ch. 2.1].

Satz 1.11 (Maximumprinzip) *Sei Ω ein beschränktes zusammenhängendes Gebiet und $f \in C^2(\Omega^\circ) \cap C(\Omega)$ harmonisch. Dann nimmt f ihr Maxium und Minimum auf dem Rand an:*

$$\mathtt{max}_\Omega f = \mathtt{max}_{\partial\Omega} f \ , \quad \mathtt{min}_\Omega f = \mathtt{min}_{\partial\Omega} f \ .$$

Beweis: Da Ω beschränkt, also kompakt ist, nimmt die stetige Funktion f ihr Maximum und Minimum auf Ω an. Wir diskutieren den Fall des Maximums. Für konstante Funktionen ist die Aussage sicher richtig. Wir nehmen an, daß f nicht konstant ist. Sei $M := \mathtt{max}_\Omega f$ und $x \in \Omega$ mit $f(x) = M$. Wir nehmen an, daß $x \in \Omega^\circ$ und konstruieren einen Widerspruch. Zunächst sehen wir, daß $\Omega_M := \{x \in \Omega^\circ \mid f(x) = M\} \subseteq \Omega^\circ$ abgeschlossen ist2. Wir zeigen nun, daß Ω_M auch offen ist. Sei $y \in \Omega_M$ und $\delta > 0$ derart, daß $B(y,\delta) \subseteq \Omega^\circ$. Nach Lemma 1.10 gilt für alle $0 < \epsilon < \delta$ die Gleichung $f(x) = M_\epsilon(f)(x)$. Das ist aber nur möglich, wenn $B(x,\delta) \subseteq \Omega_M$ ist. Damit gilt $\Omega_M = \Omega^\circ$ und die Funktion f ist konstant. Diesen Fall hatten wir aber per Annahme ausgeschlossen. ■

.Mit Hilfe des Maximumprinzipes können wir zum Beispiel folgende Aussage über das Poisson-Problem 1.2 beweisen.

Satz 1.12 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $\rho \in C(\Omega^\circ)$ und $\phi \in C(\partial\Omega)$. Dann existiert höchstens eine Funktion $f \in C^2(\Omega^\circ) \cap C(\Omega)$ mit*

$$\Delta f = \rho \ auf \ \Omega^\circ \ , \quad f_{|\partial\Omega} = \phi \ .$$

Beweis: Seien f, f' Lösungen und $h = f - f'$. Dann ist h harmonisch auf Ω° und stetig auf Ω. Weiter gilt $h_{\partial\Omega} = 0$. Mit Hilfe des Maximumprinzipes Lemma 1.11 schließen wir, daß $h = 0$ gilt. ■

Weiterführendes findet man in [Joh78, Ch. 4.2], [GT77, Ch. 2.2].

1.1.2.2 Existenz - Greenfunktionen In allen betrachteten Beispielen ergibt sich die Frage nach der Existenz von Lösungen. Einige offensichtliche Obstruktionen gegen die Existenz haben wir schon bei der Formulierung des Problems berücksichtigt. Wenn im Inneren des Gebietes etwa $U \in C^2(\Omega^\circ)$ und die Gleichung $\Delta U = \rho$ gefordert wird, dann muß $\rho \in C(\Omega^\circ)$ gelten.

Weniger offensichtlich und tiefer ist die Obstruktion in 1.3. Sei Ω beschränkt und hinreichend glatt (so daß die Gaußsche Integralformel gilt). Wenn U eine Lösung ist, so gilt nach dem Gaußschen Satz

$$\int_\Omega \rho = \int_\Omega \mathtt{div}\,\mathtt{grad}\,U = \int_{\partial\Omega} < \mathtt{grad}\,U, N >= \int_{\partial\Omega} \kappa \ .$$

Die Vorgaben ρ und κ müssen also in dieser Weise kompatibel sein. Physikalisch ist diese Bedingung klar. Wegen Energierhaltung und Stationarität muß sich der Gesamtabfluß an Energie im System mit der Produktion ausgleichen.

Die Frage nach der Existenz von Lösungen kann man in einigen Fällen durch eine explizite Konstruktion beantorten. Wir erkären hier die Methode der Greenfunktionen (siehe auch [GT77, Ch. 2.4])

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand so daß der Gaußsche Integralsatz gilt. Wir schreiben $\partial_N f :=< N, \mathtt{grad} f >$ für die Normalenableitung von f am Rand. Für $f, h \in C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^\circ)$ gilt die erste Greensche Formel

$$\int_\Omega h\Delta f + \int_\Omega < \mathtt{grad} h, \mathtt{grad} g >= \int_{\partial\Omega} h\partial_N f \ .$$

Antisymmetrisieren in f, h ergibt die zweite Greensche Formel

$$\int_\Omega h\Delta f - \int_\Omega f\Delta h = \int_{\partial\Omega} (h\partial_N f - f\partial_N h) \ .$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$G(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|x| & n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\omega_{n-1}|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases} \ .$$

Man rechnet direkt nach, daß diese Funktion für $x \neq 0$ harmonisch ist. Für $y \in \mathbb{R}^n$ ist $G_y(x) := G(x-y)$ harmonisch für $x \neq y$ (Lemma 1.8). Sei nun $y \in \Omega^\circ$ und $\epsilon > 0$ so klein, daß auch $B(y, \epsilon) \subset \Omega^\circ$ gilt. Wir wenden die zweite Greensche Formel auf das Gebiet $\Omega \setminus B(y, \epsilon)^\circ$ und $h := G(x - y)$ an:

$$\int_{\Omega\setminus B(y,\epsilon)} G_y\Delta f = \int_{\partial\Omega} (G_y\partial_N f - f\partial_N G_y) + \int_{\partial B(y,\epsilon)} (G_y\partial_N f - f\partial_N G_y) \ .$$

Wir betrachten den Fall $n \geq 3$. Der Wert von $|\mathtt{grad} f|$ ist in der Nähe von y durch eine Konstante C beschränkt. Für genügend kleine $\epsilon > 0$

$$|\int_{\partial B(y,\epsilon)} G_y\partial_N f| \leq C\mathtt{vol}(\partial B(y, \epsilon))\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}\epsilon^{n-2}} \leq \frac{C\epsilon}{(n-2)} \ .$$

Folglich gilt

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B(y,\epsilon)} G_y\partial_N f = 0 \ .$$

Diese Aussage ist auch im Fall $n=2$ richtig. Es gilt weiter für $x\neq 0$ und $n\geq 3$, daß

$$< \mathtt{grad}G(x), \frac{x}{|x|} >= \frac{d}{dr}\frac{1}{(2-n)\omega_{n-1}r^{n-2}} = \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \ , r := \|x\| \ .$$

Auch hier ist das Endergebnis für $n=2$ richtig. Wir erhalten

$$\int_{\partial B(y,\epsilon)} f\partial_N G_y = \int_{\partial B(y,\epsilon)} f\frac{1}{\omega_{n-1}\epsilon^{n-1}} = \frac{1}{\mathtt{vol}(\partial B(y,\epsilon))}\int_{\partial B(y,\epsilon)} f \ .$$

Da f stetig ist, gilt

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B(y,\epsilon)} f\partial_N G_y = f(y) \ .$$

Wir erhalten

$$f(y) = \int_\Omega G_y\Delta f + \int_{\partial\Omega}(G_y\partial_N f - f\partial_N G_y) \tag{3}$$

Die zweite Greensche Formel für ein harmonisches h liefert

$$\int_\Omega h\Delta f = \int_{\partial\Omega}(h\partial_N f - f\partial_N h) \ . \tag{4}$$

Sei $(h_y)_{y\in\Omega^\circ}$ eine Familie harmonischer Funktionen. Wir setzen $\tilde{G}_y := G_y + h_y$ und erhalten durch Addition von (3) und (4) die Gleichung

$$f(y) = \int_\Omega \tilde{G}_y\Delta f + \int_{\partial\Omega}\left(\tilde{G}_y\partial_N f - f\partial_N\tilde{G}_y\right) \ .$$

Falls $(\tilde{G}_y)_{|\partial\Omega} = 0$, dann vereinfacht sich diese Gleichug wie folgt.

Korollar 1.13 (Greensche Darstellungsformel)

$$f(y) = \int_\Omega \tilde{G}_y\Delta f + \int_{\partial\Omega}\partial_N\tilde{G}_y f \ . \tag{5}$$

Definition 1.14 *Eine Familie von Funktionen $(\tilde{G}_y)_{y\in\Omega^\circ}$ heißt Greenfunktion von Ω falls sie folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *$\tilde{G}_y$ ist auf $\Omega\setminus\{y\}$ definiert.*
2. *Für jedes $y\in\Omega^\circ$ dehnt sich $\tilde{G}_y - G_y$ zu einer auf Ω definierten harmonischen Funktion aus.*
3. *$(\tilde{G}_y)_{|\partial\Omega} = 0$ für alle $y\in\Omega^\circ$.*

Lemma 1.15 *Die Greenfunktion ist eindeutig.*

Beweis: Seien $\tilde{G}_1$ und $\tilde{G}_2$ zwei Greenfunktionen. Wir betrachten $y \in \Omega^\circ$. Dann dehnt sich $\tilde{G}_{1,y} - \tilde{G}_{2,y}$ zu einer harmonischen Funktion H_y auf Ω aus. Zusätzlich gilt $(H_y)_{|\partial\Omega} = 0$. Nach Satz 1.12 gilt $H_y = 0$ und damit $\tilde{G}_{1,y} = \tilde{G}_{2,y}$. ■

Die Kenntnis der Greenfunktion kann ausgenutzt werden, um die Existenz von Lösungen des folgenden Problems zu zeigen.

Problem 1.16 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit einem genügend (für die Gaußsche Integralformel) regulären Rand. Seien weiter $\rho \in C(\Omega)$ und $\phi \in C(\partial\Omega)$ gegeben. Gesucht ist $f \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega^\circ)$ mit*

$$\Delta f = \rho \ , \quad f_{|\partial\Omega} = \phi \ .$$

Wenn f eine Lösung ist, dann kann f in der Form

$$f(y) = \int_\Omega \tilde{G}_y \rho + \int_{\partial\Omega} \partial_N \tilde{G}_y \phi$$

geschrieben werden. Auf der anderen Seite liefert die rechte Seite immer einen Kandidaten für die Lösung. Daß dieser jedoch wirklich das Problem löst, muß aber noch verifiziert werden. Im folgenden illustrieren wir diese Methode am Beispiel des Problems 1.6 im Fall, daß Ω der Einheitsball $D^n \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ setzen wir $\bar{x} := \frac{x}{\|x\|^2}$ (Inversion am Einheitskreis). Weiter sei $\bar{0} := \infty$. Für $y \in (D^n)^\circ$ ist die Funktion $H_y(x) := G(\|y\|(x - \bar{y}))$ ist harmonisch auf $(D^n)^\circ$. Weiterhin gilt die Symmetrie $H_y(x) = H_x(y)$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
\|y\|^2\|x - \bar{y}\|^2 &= \|y\|^2(\|x\|^2 - 2 < x, \bar{y} > + \|\bar{y}\|^2) \\
&= \|x\|^2\|y\|^2 - 2 < x, y > + 1 \\
&= \|x\|^2(\|y\|^2 - 2 < y, \bar{x} > + \|\bar{x}\|^2) \\
&= \|x\|^2\|y - \bar{x}\|^2 \ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt für $x \in S^{n-1}$, daß

$$H_y(x) = H_x(y) = G_y(x) \ .$$

Wir setzen

$$\tilde{G}_y := G_y - H_y \ .$$

Korollar 1.17 *Die Familie $(\tilde{G}_y)_{y \in (D^n)^\circ}$ ist eine Greenfunktion von D^n.*

Wir berechnen für $x \in S^{n-1}$

$$\partial_N \tilde{G}_y(x) = \frac{1 - \|y\|^2}{n\omega_{n-1}\|x - y\|} \ .$$

Diese Funktion wird oft als Poissonkern bezeichnet.

Wir zeigen nun den folgenden Existenzsatz.

Satz 1.18 *Für jede stetige Funktion $\phi \in C(S^{n-1})$ existiert eine Funktion $f \in C^2((D^n)^\circ) \cap C(S^{n-1})$ welche auf $(D^{n-1})^\circ$ harmonisch ist und deren Einschränkung auf dem Rand mit ϕ übereinstimmt.*

Beweis: Die Lösung ist durch

$$f(x) := \int_{S^{n-1}} \phi \partial_N \tilde{G}_x = \frac{1}{n\omega_n} \int_{S^{n-1}} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - b\|^n} \phi(b) db \ . \tag{6}$$

gegeben. Im folgenden prüfen wir das nach.

Da S^{n-1} kompakt und die x-Ableitungen des Integranden $\frac{1-\|x\|^2}{\|x-b\|^n}\phi(b)$ stetige Funktionen auf $S^{n-1} \times (D^n)^\circ$ sind, kann man beliebig viele Differentiationen unter das Integral ziehen. Folglich ist $f \in C^2((D^n)^\circ)$.

Es gilt $\tilde{G}_x(b) = \tilde{G}_b(x)$ und folglich auch

$$\Delta_x(\partial_N \tilde{G}_x)(b) = \partial_N(\Delta_b \tilde{G}_x)(x) = 0 \ .$$

Damit ist f im Inneren von D^n harmonisch.

Wit studieren nun das Randverhalten von f, also den Genzwert $\lim_{x \to b_0} f(x)$. Wir fixieren $b_0 \in S^{n-1}$ und $\epsilon > 0$. Wir spalten das Integral (6) auf in

$$f(x) = \int_{S^{n-1}} \cdots = \int_{b \in S^{n-1}, \|b-b_0\| < \epsilon} \cdots + \int_{b \in S^{n-1}, \|b - b_0\| \geq \epsilon} \cdots \ .$$

Da

$$\limsup_{x \to b_0} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - b\|^n} \phi(b) = 0$$

gleichmäßig auf $\{b \in S^{n-1}, \|b - b_0\| \geq \epsilon\}$ (der Nenner ist gleichmäßig von unten beschränkt und der Zähler konvergiert gleichmäßig gegen Null) gilt, trägt der zweite Teil nicht zu $\lim_{x \to b_0} f(x)$ bei. Es gilt also

$$\lim_{x \to b_0} f(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{b \in S^{n-1}, \|b-b_0\| < \epsilon} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - b\|^n} \phi(b) db \ .$$

Wir beobachten jetzt, daß die Funktion $\frac{1-\|x\|^2}{\|x-b\|^n}$ nicht negativ ist. Wir wenden die Greensche Darstellungsformel (5) auf die harmonische Funktion $f \equiv 1$ an und erhalten für alle $x \in (D^n)^\circ$

$$1 = \frac{1}{n\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - b\|^n} db \ .$$

Daraus folgt

$$\lim_{x \to b_0} \int_{b \in S^{n-1}, \|b - b_0\| < \epsilon} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - b\|^n} = 1 \ .$$

Weil ϕ stetig ist, gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $\epsilon > 0$ derart, daß $|\phi(b) - \phi(b_0)| < \delta$ für alle $b \in S^{n-1}$ mit $\|b - b_0\| < \epsilon$. Folglich gilt

$$\frac{1}{n\omega_{n-1}} \Big| \int_{b\in S^{n-1}, \|b-b_0\|<\epsilon} \frac{1-\|x\|^2}{\|x-b\|^n}\phi(b)db - \int_{b\in S^{n-1}, \|b-b_0\|<\epsilon} \frac{1-\|x\|^2}{\|x-b\|^n}\phi(b_0)db \Big| < \delta \ .$$

Daraus folgt

$$|\limsup_{x\to b_0} f(x) - \phi(b_0)| < \delta \ \text{ und } \ |\liminf_{x\to b_0} f(x) - \phi(b_0)| \leq \delta \ .$$

Da δ beliebig klein gewählt werden kann, folgt

$$\lim_{x\to b_0} f(x) = \phi(b_0) \ .$$

■

Man kann die Argumentation aber auch umdrehen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet für welches bekannt sei, daß man das Poissonproblem

$$\Delta f_{|\Omega^\circ} = 0 \ , \quad f_{|\partial\Omega} = \phi \ , \quad f \in C^2(\Omega^\circ) \cap C(\Omega)$$

für alle $\phi \in C(\partial\Omega)$ eindeutig lösen kann. In diesem Fall kann man für $y \in \Omega^\circ$ die Greenfunktion $\tilde{G}_y$ als Lösung des Poissonproblems für $\phi := (G_y)_{|\partial\Omega}$ erhalten.

1.1.2.3 Schwache Lösungen - Grundlösungen -Distributionen Die in den Beispielen vorgestellten Probleme in Räumen stetiger oder entsprechend stetig differenzierbarer Funktionen sind Fragen nach klassischen Lösungen. In diesem Kapitel werden wir Lösungen in einem verallgemeinerten Sinne betrachten.

Als einfaches Beispiel betrachten wir das Poissonproblem auf dem ganzen $\mathbb{R}^n$.

Problem 1.19 *Gegeben ist $\rho \in C(\mathbb{R}^n)$ und gesucht wird*

$$f \in C^2(\mathbb{R}^n) \ : \Delta\, f = \rho \ .$$

Die Gleichung $\Delta\, f = \rho$ kann man äquivalent umformulieren:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \phi\Delta f &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi\rho \ : \forall\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ -\int_{\mathbb{R}^n} < \mathtt{grad}\phi, \mathtt{grad} f > &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi\rho \ : \forall\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\phi f &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi\rho \ : \forall\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad (7) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist zum Beispiel sinnvoll unter der Annahme, daß $f, \rho \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, also lokal integrierbar sind. Noch allgemeiner ist der Raum der Distributionen

$$D'(\mathbb{R}^n) := C_c^\infty(\mathbb{R}^n)' \ .$$

Eine Detailierte Ausarbeitung der Theorie der Distributionen findet man zum Beispiel in [Hör03, Ch. II].

Wir erklären zunächst den Konvergenzbegriff auf dem Raum der Testfunktionen $D(\mathbb{R}^n) := C_c^\infty(\mathbb{R}^n)'$. Für eine k-fach stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Normen

$$\|f\|_{C^k(K)} := \mathtt{max}_{0\le j\le k, i\in I_j} \sup_{x\in K} |D^i f(x)| \ ,$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt,

$$I_j := \{i = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid |i| = \sum_{l=1}^n i_l = j\}$$

die Menge der Multiindizes vom Grad l und $D^i = \frac{\partial^j}{\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n}}$ die zu $i \in I^j$ gehörige Ableitung ist. Eine Folge $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $D(\mathbb{R}^n)$ gegen Null, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß

1. $\mathtt{supp}\phi_i \subset K$ für all $i \in \mathbb{N}$
2. $\lim_{i\to\infty} \|\phi_i\|_{C^k(K)} = 0$

gilt.

Definition 1.20 *Der Raum der Distributionen*

$$D'(\mathbb{R}^n)$$

ist der Raum der stetigen Linearformen auf $D(\mathbb{R}^n)$.

Hier sind einige typische Beispiele von Distributionen:

1. Eine stetige Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ definiert die Distribution $D(\mathbb{R}^n) \ni \phi \mapsto f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} f\phi$. Die gleiche Vorschrift läßt sich auf lokal integrierbare Funktionen, also Elemente von $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ verallgemeinern.
2. Ein Borelmaß $\mu \in M(\mathbb{R}^n) := C_0(\mathbb{R}^n)'$ definiert eine Distribution $D(\mathbb{R}^n) \ni \phi \mapsto \mu(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu$.
3. Ein wichtiger Spezialfall ist daß Deltamaß $\delta_x \in M(\mathbb{R}^n)$, welches durch $\delta_x(\phi) := \phi(x)$ wirkt.
4. Ist $i \in D_j$ ein Multiindex und $f \in D(\mathbb{R}^n)'$, dann ist $D(\mathbb{R}^n) \ni \phi \mapsto f(D^i\phi)$ auch eine Distribution. Diese Distribution wird später mit $(-1)^j D^j f$ identifiziert.

Wir haben also ein Netz von Einbettungen

$$\begin{array}{cccc} C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset & C(\mathbb{R}^n) \subset & L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset & D'(\mathbb{R}^n) \\ \cup & \cup & \cup & \cup \\ D(\mathbb{R}^n) \subset & C_c(\mathbb{R}^n) & L^1(\mathbb{R}^n) \subset & M(\mathbb{R}^n) \end{array} .$$

Als nächstes dehnen wir Differentialoperatoren auf Distributionen aus. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$P := \sum_{0 \le j \le k, i \in I^j} a_j D^j$$

ein linearer Differentialoperator mit glatten Koeffizienten $a_j \in C^\infty(U)$.

Definition 1.21 *Ein Differentialoperator $Q = \sum_{0 \le j \le k', i \in I^j} b_j D^j$ mit glatten Koeffizienten heißt formal adjungiert zu P (wir schreiben auch P^t), falls*

$$\int_U (Q\phi)\psi = \int_U \phi P(\psi)$$

für alle $\phi, \psi \in C_c^\infty(U)$ gilt.

Man kann zeigen, daß jedes P einen eindeutig bestimmten formal adjungierten Operator besitzt. In der Tat ist

$$Q = \sum_{0 \le j \le k, i \in I^j} (-1)^{|j|} D^j a_j \ .$$

Durch iteriertes Anwenden der Kettenregel kann man die Differentiale auf die rechte Seite der Koeffizienten bringen. Daraus ergibt sich die Formel für die Koeffizienten b_j. Man rechnet leicht nach, daß $(PQ)^t = Q^t P^t$ gilt.

Definition 1.22 *Sei P ein Differentialoperator auf ganz $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die Forsetzung von P auf $D'(\mathbb{R}^n)$ durch $P^{forts} f(\phi) := \int_{\mathbb{R}}^n f(P^t \phi)$.*

In der Tat, wenn $f \in D(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$(P^{forts} f)(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} (P^{forts} f)\phi = \int_{\mathbb{R}^n} f P^t(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} (Pf) f(\phi) = (Pf)(\phi) \ .$$

Wir haben also das kommutative Diagram

$$\begin{array}{ccc} D(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{P} & D(\mathbb{R}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D'(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{P^{forts}} & D'(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad .$$

Von nun an lassen wir die Kennzeichnung $\ldots^{forts}$ weg.

Die Frage nach schwachen Lösungen des Poissonproblemes ist nun die folgende.

Problem 1.23 *Sei $\rho \in D'(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Finde alle Distributionen $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, welche der Gleichung*

$$\Delta f = \rho$$

genügen.

Die Rechnung 7 und die Beobachtung daß $\Delta^t = \Delta$ zeigen, daß dieses Problem wirklich eine Verallgemeinerung des Poissonproblems auf Distributionen ist.

Distributionen und schwache Lösungen spielen durchaus auch in Anwendungen eine Rolle. Betrachten wir beispielsweise das Feld, welches durch ein im Ursprung positioniertes Elektron hervorgerufen wird. Die Ladunsgdichte ρ hat die Eigenschaft, daß

$$\int_U \rho = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in U \\ 0 & \text{falls } 0 \notin U \end{cases} .$$

Dies kann man nicht durch eine Funktion, aber wohl durch ein Maß beschreiben, nämlich durch das Deltamaß δ_0.

Die Gleichung

$$\Delta U = \delta_0$$

hat die Lösung $G \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$G(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x| & n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\omega_{n-1}|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases} . \tag{8}$$

In der Tat können wir für $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ die Gleichung (5) für das Gebiet $B(0, R)$ anwenden, wobei wir R so groß wählen, daß $\mathtt{supp}(\phi) \subset B(0, r)$ gilt. Wir mit $\Delta^t = \Delta$ daß

$$\phi(0) \stackrel{(5)}{=} \int_\Omega G\Delta\phi = G(\Delta\phi) = (\Delta G)(\phi) .$$

Da dies für alle $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ gilt, besagt diese Gleichung $\Delta G = \delta_0$.

Definition 1.24 *Eine Lösung der Gleichung $\Delta G = \delta_0$ heißt Grundlösung der Laplacegleichung.*

Da man zu einer Grundlösung eine beliebige harmonische Funktion addieren kann und wieder eine Grundlösung erhält, ist diese nicht eindeutig bestimmt. Man kann jedoch leicht mit dem Maximumprinzip zeigen, daß die Grundlösung (8) die einzige ist, welche im Unendlichen verschwindet.

Mit Hilfe der Grundlösungen können wir das Poissonproblem

$$\Delta f = \rho$$

lösen.

Um das Ergebnis effektiv auszuschreiben, führen wir den Faltungsbegriff ein. Zuerst definieren wir die Faltung von Testfunktionen $\phi, \psi \in D(\mathbb{R}^n)$.

$$\phi * \psi(y) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\psi(y - x)dx .$$

Es gilt $\phi * \psi \in D(\mathbb{R}^n)$. Die Faltung ist ein assoziatives Produkt. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} < \kappa, \phi * \psi > &= \int_{\mathbb{R}^n} \kappa(y)\phi * \psi(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \kappa(y)\phi(x)\psi(y-x)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \kappa(y)\phi(y-z)\psi(z)dzdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(-t)\kappa(z-t)\psi(z)dtdz \\ &= < \phi^t * \kappa, \psi > \end{aligned}$$

mit $\phi^t(x) := \phi(-x)$. Die Abbildung $\phi * \dots : D(\mathbb{R}^n) \to D(\mathbb{R}^n)$ ist stetig, so daß wir die Faltung einer Testfunktion mit einer Distribution wird durch

$$(\phi * f)(\psi) := f(\phi^t * \psi)\ , \psi \in D(\mathbb{R}^n)$$

definieren können. Dann kommutiert nämlich

$$\begin{tikzcd} D(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\phi*"] \arrow[d] & D(\mathbb{R}^n) \arrow[d] \\ D'(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\phi*"] & D'(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd} \quad .$$

Wir wollen jetzt sogar Distributionen miteinander falten. Das geht nicht uneingeschränkt. Um die Voraussetzungen formulierenzu können, führen wir den Begriff des Trägers einer Distribution ein.

Definition 1.25 *Sei $f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Wir sagen, daß f im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ verschwindet, falls es eine Umgebung $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß $f(\phi) = 0$ für alle $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathtt{supp}(\phi) \subset U$ gilt. Der Träger $\mathtt{supp}(f) \subset \mathbb{R}^n$ von f ist die Menge der Punkte, in denen f nicht verschwindet.*

Der Träger ist nach Definition abgeschlossen.

1. Es gilt $\mathtt{supp}(\delta_x) = \{x\}$.

2. Für $\phi \in C(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mathtt{supp}(\phi) = \mathtt{supp}(\phi)$ (wobei die linke Seite der Träger im Sinne der Distributionen und die rechte Seite den Träger im Sinnne der Funktionen bezeichnet). Wegen dieser Gleichung kann man überhaupt das gleiche Symbol verwenden, ohne in Notationsschwierigkeiten zu kommen.

Die Fortsetzung der Faltung auf zwei Distributionen beruht auf der folgenden Beobachtung.

Lemma 1.26 *Wenn* $\mathtt{supp}(f)$ *kompakt ist, dann ist* $\phi * f \in D(\mathbb{R}^n)$ *für alle* $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\cdots * f : D(\mathbb{R}^n) \to D(\mathbb{R}^n)$$

stetig.

Schließlich definieren wir die Faltung von zweier Distributionen f, g, wobei $\mathtt{supp}(g)$ kompakt ist, durch

$$g * f(\phi) = f((\phi^t * g)^t) \ ,$$

wobei $g^t(\phi) := g(\phi^t)$.

Die Faltung definiert auf den Distributionen mit kompakten Trager $D'_c(\mathbb{R}^n)$ die Struktur einer kommutativen Algebra und $D(\mathbb{R}^n)$ ist ein Modul unter dieser Algebra.

Die Distribution $\delta_0 \in D'_c(\mathbb{R}^n)$ ist die Einheit:

$$\delta_0 * f = f \ .$$

Ist P ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, dann gilt

$$P(f * g) = Pf * g = f * (Pg) \ .$$

In der Tat gilt

$$P(\psi * \phi) = P\psi * \phi = \psi * P\phi \ , (P\phi)^t = P^t\phi^t \ , \quad \phi, \psi \in D(\mathbb{R}^n)$$

$$P(\psi * g)(\phi) = \psi * g(P^t\phi) = g(\psi^t * P^t\phi) = g(P^t(\psi^t * \phi)) = g((P\psi)^t * \phi) \ , \quad g \in D'(\mathbb{R}^n)$$

also

$$P(\psi * g) = P\psi * g = \psi * Pg \ ,$$

und schließlich

$$P(f * g)(\phi) = f * g(P^t\phi) = f * ((P^t\phi)^t * g)^t) = f((\phi^t * Pg)^t) = f^*(Pg)(\phi) \ .$$

Lemma 1.27 *Ist* $\rho \in D'_c(\mathbb{R}^n)$. *Dann löst* $f := G * \rho$ *die Gleichung* $\Delta f = \rho$.

Beweis: Es gilt

$$\Delta f = \Delta(G * \rho) = \delta_0 * \rho = \rho \ .$$

1.1.2.4 Regularitätstheorie Es gibt verschieden Skalen, mit welchen man die Regularität von Funktionen oder Distributionen messen kann. In der Regel wird die Regularität durch die Zugehörigkeit zu Funktionenräumen ausgedrückt. Hier ist eine Liste von Beispielen.

1. $C^k(\mathbb{R}^n)$ - Raum der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen, $k \in \mathbb{N}_0$.

2. $C^{,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ - Raum der Hölderstetigen Funktionen, $\alpha \in [0,1]$, es gilt $f \in C^{,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\limsup_{y\to x} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \ .$$
3. $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ - Raum der k-fach stetig-differenzierbaren Funktionen, deren k-te Ableitungen in $C^{,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ liegen.
4. $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ - Raum der Distributionen, deren Ableitungen bis zur Ordnung k in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegen, $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1,\infty]$. In der Tat ist $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset D(\mathbb{R}^n)$.
5. Mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir den Raum der schnell-fallenden Funktionen. Es gibt eine dichte Einbettung $D(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Der Raum der temperierten Distributionen $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$ bestht aus solchen Distributionen, welche sich stetig auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ausdehnen lassen. Mit $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir den Raum der temperierten Distributionen $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, deren Fouriertransformierte $\hat{f}$ in $L^p(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^{ps})d\xi)$ liegen. Hier ist $s \in (-\infty,\infty)$ und $p \in [1,\infty]$. Die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird durch
$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx$$
definiert. Es gilt das Plancherel Theorem
$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\phi = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{\phi} \ .$$
Auf temperierte Distributionen kann die Fouriertransformation daher durch die Formel
$$\hat{f}(\phi) := f(\hat{\phi}) \ , \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
fortgesetzt werden. Es ist diese Stelle, wo temperierte Distributionen gebraucht werden. Die Fouriertransformation erhält nämlich $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nicht aber $D(\mathbb{R}^n)$.
6. Die Regularität von Distributionen mißt man mit den dualen Räume dieser Funktionenräume. Die Räume $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ sind besonders geeignet (für $p \neq 1$) wegen
$$(H^{s,p})(\mathbb{R}^n)' = H^{-s,q}(\mathbb{R}^n)$$
mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
7. Eine andere Methode, die Regularität einer Distribution f zu beschreiben, ist eine Darstellung von f in der Form $P\phi$ für $\phi \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathtt{ord}(P)=l$.

Die Räume $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ und $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ sind globale Räume.

Der Übergang von globalen zu lokalen Räumen funktioniert wie folgt. Sei $W(\mathbb{R}^n)$ ein globaler Funktionenraum. Dann definiert man seine lokale Variante durch

$$W_{loc}(\mathbb{R}^n) := \{f \in D'(\mathbb{R}^n) \mid \phi f \in W(\mathbb{R}^n) \ \forall \phi \in D(\mathbb{R}^n)\} \ .$$

Die Räume $C^k(\mathbb{R}^n)$ und $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ sind lokale Räume. Durch die Forderung globaler Schranken erhält man globale Varianten $C^k_b(\mathbb{R}^n)$ und $C^{k,\alpha}_b(\mathbb{R}^n)$ dieser Räume.

Alle diese Funktionen- und Distributionenräume kommen mit natürlichen Topologien und haben Vollständigkeitseigenschaften

1. $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ und $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ und ihre dualen Räume sind Banachräume. Zum Beispiel
$$\|f\|_{H^{s,p}} := [\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^p(1+|\xi|^{ps})d\xi]^{1/p} \ .$$
2. Besonders wichtig ist der Fall $p = 2$, weil $H^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ and $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ Hilberträume und damit geometrischen Methoden zugänglich sind.
3. Die Räume $W^{k,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $H^{s,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ sind Frécheträume. Ihre Topologie ist durch eine Familie von Halbnormen definiert. Im Fall $H^{s,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sind die Halbnormen
$$p_\phi(f) := \|\phi f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \ , \phi \in D(\mathbb{R}^n) \ .$$
4. Die Dualräume der Frécheträume sind duale Frécheträume. Ihre Topologie ist als gleichmäßige Konvergenz auf beschränkten Mengen definiert. Eine Teilmenge in einem Fréchetraum F ist beschränkt, wenn $p_{|B} : B \to [0,\infty)$ für alle Halbnormen p von F beschränkt ist.

Detailierte Darstellungen der Theorie findet man unter anderem in [Ada75], [Tri83].

Eine typische Frage der Regularitätstheorie ist nun die folgende.

Problem 1.28 *Sei bekannt, daß $\rho \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $f \in D(\mathbb{R}^n)$ der Gleichung $\Delta f = \rho$ genügt. Für welche $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$.*

In diesem Beispiel ist die Antwort $m = k+2$, da Δ elliptisch und von zweiter Ordnung ist. Inbesondere, wenn $\rho \in C(\mathbb{R}^n)$ und f eine schwache Lösung von $\Delta f = \rho$ ist (Problem 1.23), dann ist f ein klassische Lösung, also eine Lösung von 1.19.

Der Beweis für die C^k-Räume ist gar nicht so einfach. Viel einfacher dagegen ist der Fall der $H^{s,p}$-Räume.

Satz 1.29 *Ist $\rho \in H^{s,p}$, erfüllt $f \in D(\mathbb{R}^n)$ die Gleichung $\Delta f = \rho$ und gilt $f \in H^{t,p}(\mathbb{R}^n)$ für ein $t \in \mathbb{R}$, dann gilt auch $f \in H^{s+2,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis: Die Voraussetzung $f \in H^{t,p}(\mathbb{R}^n)$ zeigt, daß $\hat{f}$ durch eine lokal-integrierbare Funktion gegeben wird. Die Gleichung

$$\Delta f = \rho$$

ist zu

$$\xi^2 \hat{f}(\xi) = \hat{\rho}(\xi) \tag{9}$$

äquivalent. Wegen der apriori-Annahme $\hat{f} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\|\xi\|\leq 1} |\hat{f}(\xi)|^p (1+|\xi|)^{(s+2)p} d\xi < \infty \ .$$

Mit Hilfe der Gleichung (9) erhält man

$$\begin{aligned}
\int_{\|\xi\|\geq 1} |\hat{f}(\xi)|^p (1+|\xi|)^{(s+2)p} d\xi &= \int_{\|\xi\|\geq 1} |\hat{\rho}(\xi)|^p \|\xi\|^{-2p} (1+|\xi|)^{(s+2)p} d\xi \\
&\leq 2 \int_{\|\xi\|\geq 1} |\hat{\rho}(\xi)|^p (1+|\xi|)^{sp} d\xi \\
&< \infty
\end{aligned}$$

■

Die apriori Annahme, daß $f \in H^{t,p}(\mathbb{R}^n)$ liegen soll, ist notwendig. Zum Beispiel löst $f(x) = x_1$ die Gleichung $\Delta f = 0$, aber es gilt nicht $f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ für irgend ein p oder s. Das Problem ist hier, daß eine globale Räume benutzt werden.

Besonders wichtig ist es, die Relationen zwischen diesen Funktionenräumen zu verstehen.

1. Es gibt triviale Inklusionen wie

   $$C^k(\mathbb{R}^n) \subset C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n) \subset C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$$

   oder

   $$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{k+1,p}(\mathbb{R}^n)$$

   oder

   $$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset H^{t,p}(\mathbb{R}^n)$$

   für $t \leq s$.

2. Interessanter sind die Relationen zwischen den verschieden Skalen. Sätze in dieser Richtung heißen Einbettungssätze. Bekannt ist unter anderem:

   (a) $H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ für $s > k$.

   (b) $W^{s,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$, falls $k < s - \frac{n}{p}$ (Sobolev-Einbettungssatz).

(c)
$$\phi D'(\mathbb{R}^n) \subset \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^{s,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) \tag{10}$$
für alle $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$.

(d)
$$D(\mathbb{R}^n) \subset \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^{s,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{11}$$

In der Regel sind diese Inklusionen stetig.

3. Funktionen kann man multiplizieren.

(a) Zum Beispiel gibt das Produkt eine Abbildung
$$L^p(\mathbb{R}^n) \otimes L^q(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n) \ ,$$
falls $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sind.

(b) Die Algebra $D(\mathbb{R}^n)$ wirkt auf allen diesen Funktionen-und Distributionenräumen.

(c) Die Frage, unter welchen Voraussetzungen and s, t, u und p, q, r das Produkt eine Abbildung
$$H^{r_1,p_1}(\mathbb{R}^n) \otimes H^{r_2,p_2}(\mathbb{R}^n) \to H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$$
liefert, wird vom Modulstruktursatz für Sobolevräume beantwortet.

Satz 1.30 *Sei*
$$d := r - \frac{n}{p} \ , \quad d_1 := r_1 - \frac{n}{p_1} \ , \quad d_2 := r_2 - \frac{n}{p_2} \ .$$
Sei
$$r > 0 \ , \quad \frac{1}{p} \le \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$
und gelte einer der folgenden Bedingungssätze:

i.
$$d < d_1 \ , \quad d < d_2 \ , \quad d \le d_1 + d_2$$
ii.
$$d \le d_1 \ , \quad d \le d_2 \ , \quad d < d_1 + d_2$$
oder sei $r = 0$ und gelte einer der folgenden Bedingungssätze:

i.
$$d < d_1 \ , \quad d < d_2 \ , \quad d \le d_1 + d_2 \ , \quad \frac{1}{p} \le \frac{1}{p1} + \frac{1}{p_2}$$
ii.
$$d \le d_1 \ , \quad 0 < d_2 \ , \quad \frac{1}{p} \le \frac{1}{p_1}$$

iii.

$$0 < d_1 \ , \quad d \leq d_2 \ , \quad \frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_2} \ .$$

Dann ist die Multiplikation eine stetige Abbildung

$$H^{r_1,p_1}_{loc}(\mathbb{R}^n) \otimes H^{r_2,p_2}_{loc}(\mathbb{R}^n) \to H^{r,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) \ .$$

4. Wichtig und interessant ist auch die Frage, wann die in 1. betrachteten Inklusionen dicht sind.

   (a) Der Raum der Testfunktionen $D(\mathbb{R}^n)$ ist in allen lokalen Räumen und $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ sowie $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ dicht.

   (b) $D(\mathbb{R}^n)$ ist nicht dicht im globalen Raum $C^k_b(R^n)$.

Wir können damit zu Beipiel folgenden lokalen Regularitätssatz zeigen.

Satz 1.31 *Sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und erfülle $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ die Gleichung $\Delta f = \rho$. Dann gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis: Wir lokalisieren das Problem. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig gewählt. Wir werden zeigen, daß $\phi_\infty f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $\phi_\infty \in D(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathtt{supp}(\phi_\infty) \subset B(x,1)$ gilt. Wir betrachten die Folge der Bälle

$$B_i := B(x, 1 + \frac{1}{2^{i+1}})$$

und eine Folge $\phi_i \in D(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi_i \equiv 1$ auf B_i und $\mathtt{supp}\phi_i \in B_{i-1}$.

Für $\phi_1 \in D(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\Delta(\phi_1 f) = \phi\Delta(f) + 2 < \mathtt{grad}\phi_1, \mathtt{grad}f > + f\Delta(\phi_1) = \phi_1\rho + 2 < \mathtt{grad}\phi_1, \mathtt{grad}f > + f\Delta(\phi_1) \ .$$

Wir wissen nach (10), daß $\phi_1 f \in H^{t,2}(\mathbb{R}^n)$ für ein $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ist aber $< \mathtt{grad}\phi_1, \mathtt{grad}f > \in H^{t-1,p}(\mathbb{R}^n)$ und $f\Delta(\phi_1) \in H^{t,p}(\mathbb{R}^n)$. Da auch $\phi_1\rho \in D(\mathbb{R}^n)$ ist, gilt

$$\Delta(\phi_1 f) \in H^{t-1,p}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Wir schließen mit 1.29, daß $\phi_1 f \in H^{t+1,p}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Sei nun $\phi_i f \in H^{t+i+1,p}(\mathbb{R}^n)$ für all $i < j$ gezeigt. Dann gilt $\phi_j f = \phi_j\phi_{j-1} f \in H^{t+j,p}(\mathbb{R}^n)$. Mit dem obigen Argument schließen wir induktiv

$$\phi_j f \in H^{t+j+1,p}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Dann gilt $\phi_\infty f = \phi_\infty \phi_j f \in H^{t+j+1,p}(\mathbb{R}^n)$ für alle $j \in \mathbb{N}$, also wegen (11) $\phi_\infty f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
■

Wir betrachten ein Gebiet Ω. Wir setzen

$$D(\Omega) := \{\phi \in D(\mathbb{R}^n) | \mathtt{supp}(\phi) \subset \Omega^\circ\} \ .$$

und
$$D'(\Omega) := D(\Omega)' \ .$$

Die Definition der lokalen Funktionenräume läßt sich leicht für Gebiete verallgemeinern. Wenn $f \in D'(\Omega)$ und $\phi \in D(\Omega)$ ist, dann definieren wir die Fortsezung durch Null $\phi f \in D'(\mathbb{R}^n)$ durch $\phi f(\psi) := f(\phi\psi)$.

Das Prinzip der Definition der lokalen Funktionenräume für Ω demonstrieren wir am Beispiel.
$$H^{s,p}_{loc}(\Omega) := \{ f \in D'(\Omega) | \phi f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \ \forall \phi \in D(\Omega) \ \}$$

Die globalen Räume verhalten sich komplizierter.

1. Die Definition von $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ läßt sich auch für Gebiete formulieren, indem man von den Ableitungen nur fordert, daß sie in $L^p(\Omega)$ liegen.

2. Der Raum $D(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Das ist nicht mehr richtig für Gebiete. Wir definieren
$$W^{k,p}_0(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$$
als den Abschluß von $D(\Omega)$.

3. Die Definition der Räume $H^{s,p}(\Omega)$ ist noch komplizierter und extrinsisch.
$$H^{s,p}(\Omega) := \{ \phi_{|\Omega} | \phi \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \}$$
mit der Norm
$$\|\psi\|_{H^{s,p}(\Omega)} := \inf_{\phi \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n), \phi_{|\Omega} = \psi} \|\phi\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \ .$$
Die Gleichung
$$W^{k,p}(\Omega) = H^{k,p}(\Omega)$$
gilt unter Voraussetzungen an die Glattheit des Randes $\partial\Omega$.

1.1.2.5 Schwache Formulierung von Randwertproblemen Wir betrachten ein Gebiet Ω. Die Gleichung auf Ω°
$$\Delta f = \rho \tag{12}$$
ist äquivalent zu
$$\int_\Omega \rho\phi = \int_\Omega \Delta f \phi = -\int_\Omega < \mathtt{grad} f, \mathtt{grad} \phi > \ , \forall \phi \in D(\Omega) \ .$$
Wir betrachten den Hilbertraum
$$W^{1,2}_0(\Omega) = \overline{D(\Omega)}_{W^{1,2}(\Omega)} \ .$$
Die quadratische Form $Q(f) := -\int_\Omega < \mathtt{grad} f, \mathtt{grad} f >$ ist auf $W^{1,2}_0(\Omega)$ wohldefiniert und nicht-positiv. Sie bestimmt einen selbstadjungierten Operator L durch
$$-\int_\Omega < \mathtt{grad} f, \mathtt{grad} g > = < Lf, g >_{W^{1,2}_0(\Omega)} \ .$$

Wir haben eine weitere quadratische Form

$$f \to < f, f >_{L^2(\Omega)}$$

auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ wird welche durch einen selbstadjungierten Operator J via

$$< f, g >_{L^2(\Omega)} = < Jf, g >_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

repräsentiert wird. Für $f, \rho \in W_0^{1,2}(\Omega)$ kann die Gleichung (12) nun in der Form

$$Lf = J\rho$$

geschrieben werden.

Die Bedingung $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ersetzt die Randbedingung $f_{|\partial\Omega} = 0$.

Problem 1.32 (Schwache Formulierung des Poisson-Problems) *Gegeben sei $\rho \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Gesucht ist $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ welches der Gleichung $Lf = J\rho$ genügt.*

Wir zeigen nun mit Methoden der Hilbertraumtheorie, daß daß die schwache Formulierung des Poisson-Problems eine eindeutige Lösung besitzt.

Satz 1.33 *Wenn Ω beschränkt ist, dann ist der Operator L is invertierbar. Insbesondere ist $f := L^{-1}J(\rho)$ die eindeutige Lösung der Problems 1.32*

Beweis: Der Operator ist selbstadjungiert. Es reicht aus zu zeigen, daß er negativ definit ist. Dazu zeigen wir eine sogenannte

Lemma 1.34 (Poincaréungleichung.) *Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ derart, daß*

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq -C < L\phi, \phi >_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

für alle $\phi \in D(\Omega)$.

Beweis: Sei $R \in \mathbb{R}$ derart, daß $\Omega \subset [-R, R]^n =: B$. Wir setzen $\phi \in D(\Omega)$ durch Null auf B fort. Es gilt

$$\begin{aligned}
\phi^2(x) &= [\int_{-R}^{x_1} \partial_1\phi(\xi_1, x_2, \ldots, x_n) d\xi]^2 \\
&\leq (x_1 + R) \int_{-R}^{x_1} [\partial_1\phi(\xi_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 d\xi \\
&\leq 2R \int_{-R}^{R} [\partial_1\phi(\xi_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 d\xi
\end{aligned}$$

Also

$$\int_{-R}^{R} \phi(\xi_1, x_2, \ldots, x_n)^2 d\xi_1 \leq 4R^2 \int_{-R}^{R} [\partial_1\phi(\xi_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 d\xi \ .$$

Integration bezüglich der restlichen Variablen liefert

$$\begin{aligned}
\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|\phi\|^2_{L^2(B)} \\
&\leq 4R^2\|\partial_1\phi\|^2_{L^2(B)} \\
&= 4R^2\|\partial_1\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq -4R^2 < L\phi, \phi >_{W_0^{1,2}(\Omega)} \ .
\end{aligned}$$

■

Die Poincaréungleichung gibt die untere Abschätzung

$$\begin{aligned}
- < L\phi, \phi >_{W_0^{1,2}(\Omega)} &\geq \frac{1}{2C}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\mathtt{grad}(\phi)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq c\|\phi\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}
\end{aligned}$$

für ein geeignetes $c > 0$. ■

Die Bedingung $\rho \in W_0^{1,2}(\Omega)$ kann abgeschwächt werden. In der Tat dehnt sich J zu einem Isomorphismus (die sogenannte Dualitätsabbildung)

$$J : [W_0^{1,2}(\Omega)]' \to [W_0^{1,2}(\Omega)$$

aus, so daß es reicht, $\rho \in [W_0^{1,2}(\Omega)]'$ anzunehmen.

Die Lösung des klassischen Poissonproblems

$$f \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega^\circ) \ , \Delta f = \rho \ , f_{\partial\Omega} = 0$$

kann nun in zwei Schritten diskutiert werden. Wir nehmen an, daß $\rho \in C(\Omega^\circ) \subset [W_0^{1,2}(\Omega)]'$ liegt. Wir finden dann mit 1.33 eine Lösung

$$f \in W_0^{1,2}(\Omega) \ , \quad Lf = J\rho \ .$$

Insbesondere gilt die Gleichung

$$\Delta f = \rho$$

in $D'(\Omega)$. Die lokale Regularitätstheorie für die C^k-Räume liefert $f \in C^2(\Omega^\circ)$. In einem zweiten Schritt diskutiert man die Grenzwerte $\lim_{x\to b} f(x)$ für $b \in \partial\Omega$. Dies ist übringends ziemlich nicht-trivial.

1.1.3 Allgemeine Definitionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 1.35 *Ein linearer Differentialoperator der Ordnung n auf U wird durch einen Ausdruck*

$$P = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} a_{i_1,\ldots,i_n} \frac{\partial^k}{\partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n}}$$

für Funktionen $a_{i_1,\ldots,i_n} : U \to \mathbb{R}$ gegeben.

Der Laplace operator Δ ist ein Differentialoperator der Ordnung 2.

Definition 1.36 *Sei P ein linearer Differentialoperator der Ordnung n. Die Funktion*

$$\sigma(P) : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \sigma_n(P)(x, \xi) := \sum_{i_1 + \cdots + i_n = k} a_{i_1,\ldots,i_n}(x) \xi_1^{i_1} \ldots \xi^{i_n}$$

heißt das Hauptsymbol von P.

Das Hauptsymbol des Laplaceoperators ist durch

$$\sigma(\Delta)(x, \xi) = \|\xi\|^2$$

gegeben.

Definition 1.37 *Ein Differentialoperator P der Ordnung n heißt elliptisch, wenn*

$$\sigma(P)(x, \xi) = 0 \Rightarrow \xi = 0$$

gilt.

Der Laplace operator ist elliptisch. In der Tat gilt $\sigma(\Delta)(x, \xi) = \|\xi\|^2$.

1.2 Parabolische Differentialgleichungen

1.2.1 Physikalische Modelle

1.2.1.1 Wärmeleitung Wir betrachten wieder die Temperaturverteilung in einem Medium, welches in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ausgebreitet ist (siehe 1.1.1.1). Wir wollen deren zeitliche Entwicklung ausgehend von einer Anfangsverteilung $T_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ studieren.

Im nicht-stationären Fall verändert sich die lokale Bilanzgleichung (1) zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_U T = \int_{\partial U} < N, F > \ .$$

Daraus folgt mit der Argmentation aus 1.1.1.1 die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \Delta T \ .$$

Im Falle einer Energieproduktion (siehe 1.1.1.3) im Inneren von Ω (etwa durch chemische Reaktionen) gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} T - \Delta T = \rho \ ,$$

wobei ρ die lokale Rate der Energieproduktion beschreibt.

Die Verhältnisse am Rand werden durch Randbedingungen bechrieben.

1. Vorgegebene Temperatur $\theta \in C(\partial\Omega)$ am Rand wird durch eine Dirichletbedingung $T_{|\partial\Omega} = \theta$ modelliert.

2. Vorgegebene Heiz- oder Kühlleistung $\kappa \in C(\partial\Omega)$ wird durch eine Neumannbedingung
$$\partial_N T_{|\partial\Omega} = \kappa$$
modelliert.

3. Die Kopplung an ein Wärmebad mit Temperatur $\theta \in C(\partial\Omega$ kann mit der gemischten Bedingung
$$\partial_N T_{|\partial\Omega} = c(T_{|\partial\Omega} - \theta)$$
modelliert werden.

Die Modellierungsaufgabe ist also auf die Lösung des der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} T - \Delta T = \rho \text{ , Randbedingung } , T(0) = T_0$$

zurückgeführt.

1.2.1.2 Diffusion Wir betrachten die Diffusion eines Stoffes in einem Medium Ω. Wir interessieren uns für die zeitliche Entwicklung der räumlichen Konzentration ρ ausgehend von einer Anfangsverteilung ρ_0. Ähnlich wie bei der Wärme führt die Annahme, daß der effektive lokale Fluß proportional zum Konznetrationsgefälle ist, zu einem experimentell gut bewährten Modell. Alternativ kann man auch Begründungen über die mikroskopische Theorie der Diffusion (Brownsche Bewegung) finden. Weiterhin könnten im Medium chemische Reaktionen ablaufen, welche den Stoff mit einer lokal veränderlichen Rate produzieren oder verbrauchen. Am Rand könnte man die Konzentrationen, den Abfluß oder eine Kopplung an ein Reservoir vorgegeben. Die sich ergebenden mathematischen Modelle sind die gleichen wie bei der Wärmeleitung.

1.2.2 Die Exponentialfunktion des Laplaceoperators

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten die Hilbertraum $L^2(\Omega)$. Der Operator $\Delta : D(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist dicht definiert. Er ist weiter symmetrisch und nicht-positiv definit. In der Tat gilt für $\phi, \psi \in D(\Omega)$

$$< \Delta\phi, \psi >_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega < \mathtt{grad}\phi, \mathtt{grad}\psi > = < \phi, \Delta\psi > \quad .$$

Wir erhalten somit eine auf $D(\mathbb{R}^n)$ nicht negativ definite Quadratische Form

$$Q(\phi) := - < \Delta\phi, \phi > \quad .$$

Diese Form besitzt einen Abschluß $\bar{Q} : \mathtt{dom}(\bar{Q}) \to \mathbb{R}$. Wir erhalten den unbeschränkten selbstadjungierten Operator $\bar{\Delta} : \mathtt{dom}(\bar{\Delta}) \to L^2(\Omega)$, die Friedrichserweiterung von Δ. Es gilt $\mathtt{dom}(\bar{Q}) = \mathtt{dom}(\sqrt{-\bar{\Delta}})$ und

$$\bar{Q}(\phi) = - < \bar{\Delta}\phi, \phi >$$

für $\phi \in \mathtt{dom}(\bar{\Delta})$ und

$$\bar{Q}(\phi) = - < \sqrt{-\bar{\Delta}}\phi, \sqrt{-\bar{\Delta}}\phi >$$

für $\phi \in \mathtt{dom}(\bar{Q})$. Wir verstehen $\bar{\Delta}\phi \in L^2(\Omega) \subset D'(\Omega)$. Dann gilt für alle $\phi \in D(\Omega)$

$$\bar{\Delta}(\phi)(\psi) =< \bar{\Delta}\phi, \psi >=< \phi, \bar{\Delta}\psi >=< \phi, \Delta\psi >= \phi(\Delta\psi) = \Delta\phi(\psi) \ .$$

Folglich ist $\bar{\Delta}\phi$ die Distributionenableitung von ϕ.

Da $\bar{\Delta} \le 0$ gilt, erhalten wir mit dem Funktionenkalkül für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren für $t \ge 0$ einen Operator

$$e^{t\bar{\Delta}} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \ .$$

Aus $\sup_{x \le 0} e^{tx} = 1$ für folgt

$$\|e^{-t\bar{\Delta}}\| \le 1 \ .$$

Die Familie $(e^{t\Delta})_{t \ge 0}$ von Operatoren erfüllt die Halbgruppeneigenschaft

$$e^{(t+s)\bar{\Delta}} = e^{t\bar{\Delta}} e^{s\bar{\Delta}}$$

und

$$\lim_{t \to 0} e^{t\bar{\Delta}} f = f \ , \quad f \in L^2(\Omega) \ .$$

Es gilt (Taylorformel mit Restglied) für festes $s > 0$

$$\sup_{x \ge 0} | \frac{e^{-(t+s)x} - e^{-sx} + txe^{-sx}}{t} | = o(t) \ .$$

Dies zeigt

$$\| \frac{e^{(t+s)\bar{\Delta}} - e^{s\bar{\Delta}} - t\bar{\Delta}e^{s\bar{\Delta}}}{t} (\phi) \| = o(t) \ .$$

Die Funktion

$$(0, \infty) \ni s \to e^{s\bar{\Delta}}\phi \in L^2(\Omega)$$

ist also differenzierbar und erfüllt

$$\frac{d}{ds} e^{s\bar{\Delta}}\phi = \bar{\Delta} e^{s\bar{\Delta}}\phi \ .$$

Die Familie von $f(t) := e^{t\bar{\Delta}}\phi$ löst das Problem

$$\frac{\partial}{\partial t} f - \bar{\Delta} f = 0 \ , f(0) = \phi \ .$$

Da für $t > 0$ und für alle $k \ge 0$ die Funktionen $x \to x^k e^{-tx}$ auf $x \in [0, \infty)$ beschränkt sind, gilt

$$\bar{\Delta}^k e^{t\bar{\Delta}}\phi = \bar{\Delta}^k f(t) \in L^2(\Omega) \ .$$

Mittels Regularitätstheorie kann man zeigen, daß $f \in C^\infty((0,\infty)\times\Omega^\circ)$ gilt. Die Funktion $f(t)$ löst also das klassische Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} f - \Delta f = 0\ , \quad \lim_{t\to 0} f(t) = \phi\ ,$$

wobei die Ableitungen im klassischen Sinn und der Grenzwert im Sinne von $L^2(\Omega)$ verstanden werden muß. Letzterer existiert ist auch gleichmäßig, wenn etwa $\phi \in C_c(\Omega)$ gilt.

1.2.3 Eindeutigkeit - Maximumprinzip

Eindeutigkeitsaussagen für die Wärmeleitungsgleichung können oft aus einem Maximumprinzip abgeleitet werden. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für $T > 0$ betrachten wir den Zylinder $Z := [0,T]\times\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Wir setzen $\partial' Z := [0,T]\times\partial\Omega \cup \{0\} \cup \Omega$.

Satz 1.38 (Maximumprinzip) *Sei $f \in C(Z)$ derart, daß $\partial_t f$ und $\partial_i\partial_j f$, $i,j = 1,\ldots,n$, auf Z° existieren und stetig sind. Wenn $\partial_t f - \Delta f \le 0$ gilt, so auch*

$$\mathtt{max}_Z f = \mathtt{max}_{\partial' Z} f\ .$$

Beweis: Wir nehmen zuerst $\partial_t f - \Delta f < 0$ and. Für $\epsilon > 0$ sei $Z_\epsilon = [0, T-\epsilon]\times\Omega$. Da Z_ϵ kompakt ist, existiert ein Punkt $(t_0,x_0) \in Z_\epsilon$ mit $f(t_0,x_0) = \mathtt{max}_{Z_\epsilon} f$. Wenn $(t_0,x_0) \in Z_\epsilon^\circ$, so würde in diesem Punkt $\partial_t f(t_0,x_0) = 0$ und $\Delta f(t_0,x_0) \le 0$ gelten. Dies widerspricht $\partial_t f - \Delta f < 0$. Also ist $(t_0,x_0) \in \partial Z_\epsilon$.

Wäre $t_0 = T-\epsilon$, so würde in diesem Punkt $\Delta f(t_0,x_0) \le 0$ und $\partial_t f(t_0,x_0) \ge 0$ gelten. Dies ist auch unmöglich. Folglich gilt $(t_0,x_0) \in \partial Z_\epsilon \cap \partial' Z$. Damit gilt

$$\mathtt{max}_{Z_\epsilon} f = \mathtt{max}_{\partial Z_\epsilon \cap \partial' Z} f \le \mathtt{max}_{\partial' Z} f\ .$$

Wir lassen jetzt ϵ gegen Null streben. Da f auf Z stetig ist, erhalten wir im Grenzwert

$$\mathtt{max}_Z f = \mathtt{max}_{\partial' Z} f\ .$$

Sei nun $\partial_t f - \Delta f \le 0$. Fpr $k > 0$ setzen wir $g(t,x) := f(t,x) - tk$. Dann gilt $\partial_t g - \Delta g < 0$ und deshalb $\mathtt{max}_Z g = \mathtt{max}_{\partial' Z} g$. Nun ist aber

$$\mathtt{max}_Z f = \mathtt{max}_Z (g + tk) \le \mathtt{max}_Z g + kT = \mathtt{max}_{\partial' Z} g + Tk \le \mathtt{max}_{\partial' Z} f + Tk$$

Für $k \to 0$ erhalten wir wie gewünscht

$$\mathtt{max}_Z f \le \mathtt{max}_{\partial' Z} f\ .$$

Die andere Ungleichung

$$\mathtt{max}_Z f \ge \mathtt{max}_{\partial' Z} f$$

ist trivialerweise erfüllt. ■

Mit Hilfe des Maximumprinzipes können wir die Eindeutigkeit für Wärmeleitungsgleichungen zeigen. Sei $Z = [0,T]\times\Omega$ für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Die Daten auf dem Rand $\partial' Z$ kodieren Anfangsbedingungen und Randwerte in einem.

Problem 1.39 *Gegeben seien $\rho \in C(Z^\circ)$ und $\phi \in C(\partial' Z)$. Wir suchen Funktionen $f \in C(Z)$ derart, daß $\partial_t f$ und $\partial_i \partial_j f$, $i, j = 1, \dots, n$, auf Z° existieren und stetig sind, und welche den Gleichungen*

$$\partial_t f - \Delta f = \rho \ , \quad f_{|\partial' Z} = \phi$$

genügen.

Lemma 1.40 *Es gibt höchstens eine Lösung des Problems 1.39.*

Beweis: Wir wenden das Maximumprinzip auf die Differenz zweier Lösungen an. ■

Die folgende Beobachtung ist wichtig, wenn man Diffusionsprozesse mit der Wärmeleitungsgleichung beschreibt. Einerseits sollten nämlich Konzentrationen immer nicht-negativ sein. Andererseits, wenn man keinen Ab- oder Zufluß erlaubt (Neumann-Bedingung $\partial_N f = 0$ auf $[0, T] \times \partial\Omega$ und $\partial_t f = \Delta f$), dann sollte

$$\int_\Omega f(t, x) dx = \int_\Omega f(0, x)$$

gelten. Diese Gleichung folgt für hinreichend reguläre Gebiete aus

$$\begin{aligned} \partial_t \int_\Omega f(t, x) dx &= \int_\Omega \partial_t f(t, x) dx \\ &= \int_\Omega \Delta f(t, x) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_N f(t, x) dx \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Für die Positivitätsfrage betrachten wir den Fall, daß der Rand den Stoff absorbiert. Dies wird durch eine Dirichletbedingung $f_{[0,T] \times \Omega}$ modelliert. Desweiteren sei die Anfangskonzentration ϕ auf $\{0\} \times \Omega$ nicht-negativ. Das Maximumprinzip (für $-f$) besagt in diesem Fall

$$\mathtt{min}_Z f = \mathtt{min}_\Omega \phi \geq 0 \ .$$

1.2.4 Die Grundlösung

Sei $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ mit den Koordinaten (t, x). Im folgenden wollen wir Lösungen $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ der Gleichung

$$(\partial_t - \Delta) G = \delta_0 \ .$$

bestimmen. Sei $\rho \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\rho(t, x) = 0$ für $t < 0$. Ein Anfangswertproblem

$$(\partial_t - \Delta) f = \rho \ , f_{\{0\} \times \mathbb{R}^n} = \phi \tag{13}$$

übersetzen wir in

$$(\partial_t - \Delta)f = \rho + \delta_0(t)\phi$$

und der Forderung $f(t) = 0$ für $t < 0$. Wir suchen G mit $G_{|(-\infty,0)\times\mathbb{R}^n} = 0$. Dann löst

$$f := G * (\rho + \delta_0(t)\phi)$$

unser Anfangswertproblem (13).

Seien (τ, ξ) die zu (t, x) dualen Koordinaten. Nach Fouriertransformation erhalten wir

$$(i\tau + \|\xi\|^2)\hat{\hat{G}}(\tau, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \ .$$

Wir führen zuerst die Rücktransformation in der τ-Variablen aus und erhalten mit Hilfe des Residuensatzes

$$\begin{aligned} \hat{G}(t,\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+2}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau t} \frac{1}{i\tau + \|\xi\|^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\ \theta(t) e^{-\|\xi\| t} \ . \end{aligned}$$

Wir führen jetzt die Rücktransformation in der ξ-Variablen durch:

$$\begin{aligned} G(t,x) &= \theta(t)\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} e^{-\|\xi\| t} d\xi \\ &= \theta(t)\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\|x\|^2}{4t}} \end{aligned}$$

Diese lokal-integrierbare Funktion heißt Gundlösung der Wärmeleitungsgleichung. In der Tat gilt für geeignete ϕ, ρ

$$G * (\rho + \delta_0(t)\phi)(t,x) = \theta(t) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{\frac{\|x-y\|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \phi(y) dy + \theta(t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \rho(s,y) dy ds \ .$$

Diese Funktion löst tatsächlich (13).

1.3 Hyperbolische Differentialgleichungen

1.3.1 Physikalische Beispiele

1.3.1.1 Schwingende Saite Wir betrachten eine an ihren Enden eingespannte Saite, welche in der Vertikalen schwingen kann. In Ruhe möge die Seite durch das Intervall $[0, L]$ beschrieben werden. Die zeitliche Entwicklung der Auslenkung der Saite wird durch eine Funktion $h : \mathbb{R} \times [0, L] \to \mathbb{R}$ beschrieben, wobei die erste Koordinate die Zeit ist. Die im Punkt x der Seite angreifende Kraft $F(x)$ ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht der in beiden Richtungen wirkenden Zugkräfte. Wir betrachten den Fall kleiner Auslenkung.

Ist die Saite nicht gekrümmt, heben sich diese Käfte genau auf. In erster Näherung sollte die Kraft daher zur Krümmung proportional sein. Da wir kleine Auslenkungen annehmen, dann ist die Kraft in erster Näherung vertikal ausgerichtet. Wir erhalten (bis auf Proportionalitätskonstanten)

$$F(x) \sim \partial_x^2 h(x) \ .$$

Diese Kraft wirkt beschleunigend auf den Massepunkt x der Saite. Wir erhalten

$$c\partial_t^2 h = \partial_c^2 h \ .$$

In die Konstante c geht die die Saite spannende Zugkraft und die Massendichte (pro Länge) der Saite ein.

Die Saite ist an den Enden eingespannt. Das ergibt die Randbedingungen

$$h(t,0) = h(t,L) = 0 \ , t \in \mathbb{R} \ .$$

Zur vollständigen Beschreibung gehört noch die Anfangsbedingung. Zum Beispiel kann man die Saite in einer ausgelenkten Lage h_0 loslassen. Dies würde durch

$$h(0,x) = h_0(x) \ , \quad \partial_t h(0,x) = 0 \ , \quad \forall x \in [0,L]$$

beschrieben werden. Oder man stößte die Saite an. Dieser Anfang würde durch

$$\partial_t h(0,x) = p_0(x) \ , \quad h(0,t) = 0 \ , \quad \forall x \in [0,L]$$

modelliert werden.

1.3.1.2 Trommel In ähnlicher Weise kann man eine schwingende Membran, zum Beispiel ein Trommelfell, beschreiben. Die Membran in Ruhe wird durch ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ modelliert. Deren horizontale Auslenkung wird durch eine Funktion $h : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ beschrieben, welche einer Differentialgleichung

$$c\partial_t^2 h = \Delta h$$

genügt. Die Ränder sind wieder eingespannt, woraus die Randbedingung

$$h_{\mathbb{R}\times\partial\Omega} = 0$$

folgt. Die Anfangsbedingungen sind wie bei der Saite

$$h(0,x) = h_0(x) \ , \quad \partial_t h(0,x) = p_0(x) \ , \quad \forall x \in \Omega$$

für Funktionen $h_0, p_0 \in C(\Omega)$.

Wir können auch zusätzlich annehmen, daß weitere Kräfte auf die Membran wirken, zum Beispiel durch Anpusten mit einem Luftstrom. Diese Kräfte beschreiben wir durch eine Funktion

$$\rho : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R} \ .$$

Die Differentialgleichung modifiziert sich zu

$$c\partial_t^2 h - \Delta h = \rho \ .$$

Der Operator (wir setzen $c = 1$)

$$\Box := \partial_t^2 - \Delta$$

wird oft Wellenoperator genannt.

1.3.1.3 Elektromagnetisches Feld

Die Differentialgleichung

$$\Box U = 0$$

für ein zeitlich veränderliches elektisches Feld im Vakuum ist eine Konsequenz der Maxwellgleichungen.

1.3.2 Lösungsmethoden und mehr

1.3.2.1 Fouriermethode

Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und studieren die Wellengleichung

$$\Box h = 0$$

auf $\mathbb{R} \times \Omega$ unter den Randbedingungen

$$h_{|\mathbb{R}\times\partial\Omega} = 0 \ .$$

In diesem Fall können wir folgende Hilbertraummethode anwenden. Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$\partial_t^2 h = \bar{\Delta} h$$

für eine Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathtt{dom}(\bar{\Delta})$$

wobei $\bar{\Delta}$ die Friedrichserweiterung von Δ auf $\mathtt{dom}(\Delta) = D(\Omega)$ ist. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung kann spektraltheoretisch in der Form

$$h(t) = \cos(t\sqrt{-\bar{\Delta}})h_0 + \sin(t\sqrt{-\bar{\Delta}})\sqrt{-\bar{\Delta}}^{-1} p_0$$

geschrieben werden, wobei $h_0 \in \mathtt{dom}(\bar{\Delta})$ und $p_0 \in \mathtt{dom}([-\bar{\Delta}]^{1/2})$ liegen sollten. Dann ist nämlich

$$h(t) \in C^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}, \mathtt{dom}(\bar{\Delta}))$$

(mit der Graphennorm $\|.\|_\Gamma$). Es gilt

$$h(0) = h_0 \ , \quad \partial_t h(0) = p_0 \ .$$

Wir nehmen nun an, daß Ω beschränkt ist. Aus der Regularitätstheorie für Δ auf Ω folgt die Äquivalenz der Normen

$$\|\phi\|_\Gamma^2 := \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)}^2$$

und der $\|\phi\|_{W^{2,2}(\Omega)}$ auf $D(\Omega)$. Damit gilt

$$\mathtt{dom}(\bar{\Delta}) = W_0^{2,2}(\Omega) \ .$$

Aus dem Rellich Lemma folgt, daß $W_0^{2,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt ist. Damit ist $R_{\bar{\Delta}}(i)$ kompakt. Folglich hat $\bar{\Delta}$ reines Punktspektrum mit nicht-positiven Eigenwerten endlicher Multiplizität, welche sich in $-\infty$ häufen.

Sei

$$0 > \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \dots$$

die Eigenwerte von $\bar{\Delta}$ (mit Multiplizität wiederholt) und ϕ_i eine Basis zugehöriger Eigenvektoren. Wir betrachten die Anfangsbedingung $h_0 \in \mathtt{dom}(\bar{\Delta})$ und $p_0 = 0$. Dann haben wir eine Basisdarstellung

$$h_0 = \sum_i < \phi_i, h_0 > \phi_i$$

und können

$$h(t) = \sum_i \cos(t\sqrt{-\lambda_i}) < \phi_i, h_0 > \phi_i \ .$$

Diese Summe konvergiert in $\|.\|_\Gamma$, also in $W^{2,2}(\Omega)$. Die Summe der Ableitungen konvergiert immer noch in $L^2(\Omega)$. Damit ist $h \in C^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}, \mathtt{dom}(\bar{\Delta}))$ und erfüllt die gewünschte Differentialgleichung.

Wir führen nun die harmonische Analyse der Lösung $h(t)(x)$ durch, d.h. wir betrachten die Fouriertranformierte $\hat{h}(\xi)(x)$ bezüglich der Zeitvariablen. Wir erhalten

$$\hat{h}(\xi)(x) = \sum_n \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \left[\delta_{\sqrt{-\lambda_n}}(\xi) + \delta_{\sqrt{-\lambda_n}}(\xi)\right] < \phi_n, h_0 > \phi_n(x) \ .$$

Der Träger dieses Maßes besteht aus den Zahlen $\sqrt{-\lambda_n}$, welche auch Eigenfrequenzen des Gebietes Ω genannt werden.

Betrachten wir zum Beispiel das Model für eine E-Gitarrensaite, deren Tonabnehmer im Punkt x angebracht ist. Wir sehen also alle Eigenfrequenzen, deren zugehörige Eigenfunktion im Punkt x nicht verschwinden.

Der zwei-dimensionale Fall führte zum dem berühmten Problem *"Can you hear the shape of the drum"*. Dabei geht es um das Problem, ob das Gebiet Ω aus seinen Eigenfrequenzen rekonstruiert werden kann. Diese Frage und deren Verallgemeinerungen wird in der Spektralgeometrie studiert. Die konkrete Antwort ist im generischen Fall ja, aber es gibt spezielle Beispiele von nicht-isometrischen Gebieten, welche jedoch die gleichen Eigenfrequenzen (mit Multiplizität haben).

1.3.2.2 Energiefunktional und endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit Wir betrachten $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit den Koordinaten (t, x). Für $f \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ und ein beschränktes Gebiet $W \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir das Energiefunktional

$$E_W(f)(t) := \int_W \partial_t f(t)^2 + \sum_{i=1}^n \partial_i f^2 \ .$$

Wir nehmen nun an, daß $f \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ gilt, und daß f die Wellengleichung

$$\partial_t^2 f = \Delta f \ .$$

erfüllt. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \partial_t E_W(f)(t) &= \int_W 2\partial_t \partial_t^2 f + \int_W \sum_{i=1}^n \partial_t \partial_i f \partial_i f \\ &= \int_W 2\partial_t \Delta f - \int_W 2\partial_t f \Delta f + \int_{\partial W} 2\partial_n f \partial_t f \\ &= 2\int_{\partial W} \partial_n f \partial_t f \ . \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt ein zeitabhängiges Gebiet, welches sich mich Einheitsgeschwindigkeit in Normalenrichtung zusammenzieht, also etwa $W(t) := B(x_0, r-t)$. Dann gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\partial_t E_{W(t)}(f(t)) = \int_{\partial W(t)} 2\partial_n f \partial_t f - \partial_t f(t)^2 - \sum_{i=1}^n \partial_i f^2 \leq 0 \ .$$

Insbesondere können wir daraus folgenden Satz schließen.

Satz 1.41 (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit) *Wenn $B(x_0, r) \cap \mathtt{supp} f(0) = \emptyset$ gilt, so für $0 \leq t < r$ auch $B(x_0, r-t) \cap \mathtt{supp} f(t) = \emptyset$.*

Beweis: In der Tat ist $t \to E_{B(x_0,r-t)}(f(t))$ monoton fallend und $E_{B(x_0,r-0)}(f(0)) = 0$. Daraus folgt $E_{B(x_0,r-t)}(f(t)) \equiv 0$ und $\partial_s f(s)(x) = 0$ für alle $x \in B(x_0, r-t)$, $s \in [0,t]$. Wegen $f(0)(x) = 0$ gilt dann auch $f(t)(x) = 0$. ∎

Der Lichtkegel eines Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$K_\Omega := \{(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists x \in \Omega \text{ mit } \|x-y\| \leq |t|\}$$

Korollar 1.42 *Ist $f \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ eine Lösung der Wellengleichung, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$\mathtt{supp} f \subset K_{\mathtt{supp}(f(0))} \ .$$

Für $(s,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei der Rückwärtslichtkegel durch

$$R(s,y) := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \leq s \ , \quad \|x-y\| \leq (s-t)\}$$

gegeben.

Korollar 1.43 (Eindeutigkeitssatz) *Sei $f \in C^2$ eine Lösung der Wellengleichung auf einer Umgebung von $R(s,y) \cap \{(t,x) | t \geq 0\}$. Dann ist $f(s,y)$ eindeutig durch die Cauchydaten $f(0,x)$ und $\partial_t f(0,x)$ für $x \in B(y,s)$ bestimmt.*

Beweis: Sei f eine Lösung mit trivialen Cauchydaten in $B(y,s)$. Dann ist $E_{B(y,s-t)}(f(t))$ monoton fallend und $E_{B(y,s)}(f(0)) = 0$. Es folgt $E_{B(y,s)}(f(t)) \equiv 0$. Daraus folgt für $t \in [0,s)$ $\partial_t f(t,y) = 0$. Wegen $f(0,y) = 0$ folgt $f(s,y) = 0$. ∎

1.3.2.3 Lösungsformeln - Huygenssches Prinzip

Wir erinnern an den sphärischen Mittelwert $M(t) \in C(\mathbb{R}^3)' \subset D'(\mathbb{R}^3)$

$$M(t)f := \frac{1}{4\pi} \int_{S(0,t)} f$$

Satz 1.44 *Wenn $h_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $p_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ist, dann ist*

$$f(t) = tM(t) * p_0 + \partial_t[t(M(t) * h_0]$$

die Lösung der Wellengleichung mit den Cauchydaten

$$f(0,x) = h_0(x) \ , \quad \partial_t f(0,x) = p_0(x) \ .$$

Man kann das mehr oder weniger trickreich nachrrechnen. ■

Insbesondere beschreibt die Distribution $\partial_t(tM(t))$ die Ausbreitung einer Anregung δ_0 zur Zeit Null. Der Träger dieser Distribution ist der Rand von $R(t,0) \cap \{s = 0\} = B(0,t)$.. Man sagt in diesem Fall, daß das Huygenssche Prinzip gilt.

Man kann die Wellengleichung in zwei Dimensionen als Wellengleichung in drei Dimensionen für Funktionen, welche von der letzten Koordinate nicht abhängen, interpretieren. Wir erhalten deshalb aus Satz 1.44 unmittelbar eine Lösungsformel für den zweidimensionalen Fall durch Mittelung. Sei

$$\bar{M}(t)f := \int_{B(0,t)} \frac{f(x)}{\sqrt{t - \|x\|^2}} \ .$$

Satz 1.45 *Wenn $h_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $p_0 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ist, dann ist*

$$f(t) = t\bar{M}(t) * p_0 + \partial_t[t(\bar{M}(t) * h_0]$$

die Lösung der Wellengleichung mit den Cauchydaten

$$f(0,x) = h_0(x) \ , \quad \partial_t f(0,x) = p_0(x) \ .$$

Es gilt

$$\mathtt{supp}\bar{M}(t) = B(0,t) \ .$$

Das Huygenssche Prinzip gilt nicht.

Ähnliche explizite Formeln gibt es für alle Dimensionen. Das Huygenssche Prinzip für die Wellengleichung im $\mathbb{R}^{n+1}$ gilt genau dann, wenn n ungerade ist.

1.4 Spektraltheorie

Dies ist eine Zusammenfassung des entsprechenden Inhaltes meines Skriptes.

1.4.1 Beschränkte Operatoren

Sei H ein komplexer Hilbertraum und $L(H)$ der Raum der stetigen linearen Operatoren auf H. Sei $A \in L(H)$.

Definition 1.46 *Die Resolventenmenge $\rho(A) \subseteq \mathbb{C}$ ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ für die $R_A(\lambda) := (\lambda - A)^{-1} \in L(H)$ existiert.*

Da die Teilmenge $GL(L(H)) \subset L(H)$ der invertierbaren Operatoren offen ist, ist auch $\rho(A) \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Definition 1.47 *Das Spektrum von A ist das Komplement $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ der Resolventenmenge.*

Das Spektrum $\sigma(A)$ von A ist abgeschlossen. Es gilt

$$\sigma(A) \subseteq B(0, \|A\|) \ .$$

In der Tat ist für $|\lambda| > \|A\|$

$$R_A(\lambda) = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$$

konvergent.

Besonders wichtig ist der Fall selbstadjungierter Operatoren.

Definition 1.48 *$A \in L(H)$ ist selbstadjungiert, wenn $A^* = A$ gilt.*

1. Für selbstadjungierte Operatoren gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. In der Tat gilt für $\|x\| = 1$, daß

$$\|(\lambda - A)x\|^2 \geq | < \lambda - A)x, x > |^2 = | < (\mathtt{Re}(\lambda) - A)x, x > -\mathtt{Im}(\lambda)|^2 \geq \mathtt{Im}(\lambda)^2 \ .$$

   Sei $\mathtt{Im}(\lambda) \neq 0$. Dann ist $(\lambda - A)$ injektiv. Wegen $\overline{\mathtt{Im}(\lambda - A)} = \ker(\bar{\lambda} - A) = 0$ ist $R_A(\lambda)$ dicht definiert und durch $\frac{1}{|\mathtt{Im}(\lambda)|}$ beschränkt. Folglich existiert $R_A(\lambda) \in L(H)$.

2. Für (nicht-notwendig selbstadjungierte) $A \in L(H)$ haben wir einen holomorphen Funktionenkalkül. Sei $\mathcal{O}_{\sigma(A)}$ der Raum der Keime holomorpher Funktionen auf $\sigma(A)$. Ist $f \in \mathcal{O}_{\sigma(A)}$ auf einer Umgebung U von $\sigma(A)$ definiert, dann betrachten wir einen Weg γ in U, welcher σ einfach umläuft und definieren

$$f(A) := \int_\gamma f(z) R_A(z) dz \ .$$

   Es gilt

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) \ , \quad g(f(A)) = (g \circ f)(A) \ ,$$

3. Sei jetzt $A = A^*$. Für $P \in \mathbb{C}[x]$ gilt $\|P(A)\| \le \sup_{x \in \sigma(A)} |P(x)|$. Dies ist eine Konsequenz des holomorphen Funktionenkalküls. In der Tat, wenn $|\lambda| > \sup_{x\in\sigma(A)} |P(x)|$, dann ist $\frac{1}{\lambda - P} \in \mathcal{O}_{\sigma(A)}$ und deshalb $\lambda \in \rho(P(A))$. Da $\mathbb{C}[x]_{|\sigma(A)} \subseteq C(\sigma(A))$ dicht ist ($\sigma(A)$ ist beschränkt), kann man für $f \in C(\sigma(A))$ die Funktion $f(A) := \lim_{n\to\infty} P_n(A)$ für einen Folge von Polynomen $P_n \in \mathbb{C}[x]$ definieren, welche f auf $\sigma(A)$ gleichmäßig approximieren. Wir erhalten den stetigen Funktionenkalkül. Es gilt wieder

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) \ , \quad f(A)^* = \hat{f}(A) \ , \quad g(f(A)) = (g \circ f)(A) \ ,$$

Der stetige Funktionenkalkül setzt den holomorphen Funktionenkalkül fort.

4. Wir betrachten wieder einen selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$. Seien $\phi, \psi \in H$. Das Funktional

$$C(\sigma(A)) \ni f \mapsto \mu_A^{\phi,\psi}(f) :=< \phi, f(A)\psi >$$

ist ein komplexes Borelmaß auf $\sigma(A)$. Es gibt ein eindeutig bestimmtes Projektorwertiges Maß $E_A : \mathcal{B}(\sigma(A)) \to \mathtt{Proj}(H)$ derart, daß

$$\mu^{\phi,\psi}(f) = \int_\sigma (A) f(x) < \psi, dE_A(x), \phi >$$

gilt. Hierbei ist $\mathcal{B}(\sigma(A))$ die Borelsche σ-Algebra auf $\sigma(A)$ und $\mathtt{Proj}(H)$ die Menge der orthogonalen Projektoren auf H, also $\mathtt{Proj}(H) := \{P \in L(H) \mid P^* = P^2 = P\}$. Ein projektorwertiges Maß ist eine Abbildung $\mathcal{B}(\sigma(A)) \to \mathtt{Proj}(H)$ mit

   (a) $E(\emptyset) = 0 \quad E(\sigma(A)) = 1$,

   (b) Für $U, V \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ gilt $E(U)E(V) = E(V)E(U) = E(V \cap U)$ und $E(U \cup V) = E(U) + E(V) - E(U \cap V)$

   (c) Für eine paarweise disjunkte Familie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt die σ-Additivität in starken Sinn, d.h. für jedes $\phi \in H$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N E(U_n)\phi = E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n)\phi \ .$$

In der Tat ist dann $\mathcal{B}(\sigma(A)) \ni U \mapsto < \phi, E(U)\psi >$ ein Maß.

5. Das Projektorwertige Maß bestimmt eine Maßklasse $[E]$. Ist $f \in L^\infty(\sigma(A), \mathcal{B}(\sigma(A)), [E])$, so kann man

$$f(A) := \int_{\sigma(A)} f(x) dE(x)$$

definieren (Konvergenz im schwachen Sinne). Dieser meßbare Funktionenkalkül setzt den stetigen und holomorphen Kalkül fort.

Das typische Beispiel ist das eines Multiplikationsoperators. Sei (X, R, μ) ein Maßraum und $H := L^2(X, R, \mu)$. Sei weiter $a \in L^\infty(X, R, [\mu])$ und $A \in L(H)$ der durch a bestimmte Multiplikationsoperator. Dann ist $\sigma(A) = \mathtt{supp}(a_*\mu)$. Das Spektralmaß ordnet der Menge $U \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ den durch die charakteristischen Funktion $\chi_{a^{-1}(U)}$ datgestellten Projektor $E_A(U)$ zu. Ist $f \in L^\infty(\sigma(A), \mathcal{B}(\sigma(A)), [E])$, dann ist $f \circ a \in L^\infty(X, R, [\mu])$ und $f(A)$ der durch diese Funktion dargestellte Multiplikationsoperator.

1.4.2 Unbeschränkte Operatoren

Unbeschränkte Operatoren sind partiell definierte lineare Abbildungen. Dazu führen wir die folgenden Begriffe ein.

Definition 1.49 *1. Ein Operator $(A, \mathtt{dom}A)$ ist eine lineare Abbildung $A : \mathtt{dom}A \to V$, wobei $\mathtt{dom}A$ ein linearer Unterraum von V ist.*

2. Die Gleichung $(A, \mathtt{dom}A) = (B, \mathtt{dom}B)$ bsagt, daß $\mathtt{dom}A = \mathtt{dom}B$ und $A = B$ gilt.

3. $(B, \mathtt{dom}B)$ heißt Erweiterung von $(A, \mathtt{dom}A)$, falls $\mathtt{dom}A \subseteq \mathtt{dom}B$ und $B_{|\mathtt{dom}\ A} = A$.

4. Der Graph von $(A, \mathtt{dom}A)$ ist die Menge

$$\Gamma(A, \mathtt{dom}A) := \{(x, Ax) \mid x \in \mathtt{dom}A\} \subset H \oplus H.$$

5. $(A, \mathtt{dom}A)$ heißt abgeschlossen, falls $\Gamma(A, \mathtt{dom}A)$ abgeschlossen in $H \oplus H$ ist.

Mit der folgenden Definition legen wir Rechenregeln für Operatoren fest.

Definition 1.50 *1. $(A, \mathtt{dom}A) + (B, \mathtt{dom}B) := (A + B, \mathtt{dom}A \cap \mathtt{dom}B)$*

2. $(A, \mathtt{dom}A) \circ (B, \mathtt{dom}B) := (AB, \{x \in \mathtt{dom}B \mid Bx \in \mathtt{dom}A\})$

3. $\lambda(A, \mathtt{dom}A) := (\lambda A, \mathtt{dom}A)$, für $\lambda \neq 0$

4. $0 \cdot (A, \mathtt{dom}A) := (0, V)$

5. $(A, \mathtt{dom}\ A)^{-1} := (A^{-1}, A(\mathtt{dom}A))$, falls A injektiv ist.

Ab jetzt bedeutet A immer $(A, \mathtt{dom}A)$, und eine Erweiterung B von A wird mit $A \subseteq B$ bezeichnet.

Lemma 1.51 *Für Operatoren A, B, C gelten folgende Rechenregeln:*

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$

2. $(AB)C = A(BC)$

3. $AB + AC \subset A(B + C)$.

4. $(A^{-1})^{-1} = A$

Lemma 1.52 *Ist A ein abgeschlossener invertierbarer Operator, dann ist auch A^{-1} abgeschlossen.*

Satz 1.53 (Theorem vom abgeschlossenen Graphen) *Ein Operator A ist genau dann in $L(H)$, wenn er abgeschlossen ist und $\text{dom } A = V$ gilt.*

Definition 1.54 *Sei A ein Operator.*

1. *Die Resolventenmenge von A ist*
$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid R_A(\lambda) := (\lambda - A)^{-1} \text{ existiert, ist beschränkt und } \mathtt{dom} R_A(\lambda) = V\}.$$

2. *Das Spektrum von A ist*
$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Lemma 1.55 *Für einen Operator A gilt:*

1. *$\rho(A)$ ist offen in $\mathbb{C}$.*
2. *Die Abbildung $\rho(A) \to L(H),\ \lambda \mapsto R(\lambda)$ ist holomorph.*

Definition 1.56 *Ein Operator A heißt dicht definiert, falls $\mathtt{dom}A \subset H$ dicht ist.*

Definition 1.57 *Sei A dicht definiert. Dann ist der adjungierte Operator A^* definiert auf*
$$\mathtt{dom}\ A^* := \{x \in H : y \mapsto \langle x, Ay\rangle \text{ ist stetige Linearform auf } \mathtt{dom}A\}$$
durch
$$\langle x, Ay\rangle = \langle A^*x, y\rangle \quad \forall x \in \mathtt{dom}A^*,\ y \in \mathtt{dom}A$$

Lemma 1.58 *Sei A dicht definiert. Dann gilt:*

1. *A^* ist abgeschlossen.*
2. *$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, wenn A^{-1} existiert.*
3. *$(A+B)^* = A^* + B^*$, $(BA)^* = A^*B^*$, wenn B beschränkt ist.*
4. *$A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$.*

Definition 1.59 *1. Ein Operator A heißt symmetrisch, falls*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x, y \in \mathtt{dom}\, A\ .$$

2. Ein dicht definierter Operator A heißt selbstadjungiert, falls $A = A^*$.

Lemma 1.60 *1. Wenn A selbstadjungiert ist, so ist A abgeschlossen.*

2. Ist A symmetrisch und dicht definiert, dann ist A^* eine abgeschlossene Erweiterung von A.

Definition 1.61 *Ein Operator A heißt abschließbar, falls A eine abgeschlossene Erweiterung hat. Nach Zornschen Lemma gibt es dann eine kleinste abgeschlossene Erweiterung $\overline{A}$.*

Lemma 1.62 *Ein dicht definierter Operator A ist genau dann abschließbar, wenn $\mathtt{dom}A^*$ dicht in H ist. Dann gilt $\overline{A} = A^{**}$ und $\overline{A}^* = A^*$.*

Definition 1.63 *Ein symmetrischer, dicht definierter Operator A heißt wesentlich selbstadjungiert, falls $\overline{A}$ selbstadjungiert ist.*

Lemma 1.64 *Der Operator A sei wesentlich selbstadjungiert. Dann hat A genau eine selbstadjungierte Erweiterung $\overline{A}$.*

Satz 1.65 *Sei $A : \mathtt{dom}A \to V$ ein symmetrischer Operator. Dann sind die unter (i) bzw. (ii) stehenden Aussagen zueinander äquivalent:*

(i) *(a) A ist wesentlich selbstadjungiert.*
   (b) $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$
   (c) $\mathtt{Im}(A \mp i) \subset V$ *ist dicht.*

(ii) *(a) A ist selbstadjungiert.*
   (b) A ist abgeschlossen, $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$.
   (c) $\mathtt{Im}(A \mp i) = V$

Dabei gelten die Aussagen jeweils für $+$ und $-$ gleichzeitig.

Lemma 1.66 *Sei A selbstadjungiert. Dann gilt:*

1. $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

2. $R_A(i)^* = R_A(-i)$ und $R_A(i) = (i - A)^{-1}$ ist normal.

1.4.3 Illustration

In diesem Abschnitt wollen wir die mit unbeschränkten Operatoren zusammenhängenden Begriffe illustrieren. Wir nehmen

$$H := L^2([0,1])$$

und setzen

$$A := (i\frac{d}{dt}, C_c^\infty((0,1))) \ .$$

Da $\mathtt{dom}A = C_c^\infty((0,1)) \subset L^2([0,1]) = H$ dicht ist, ist A dicht definiert. Durch partielle Integration für $\phi, \psi \in \mathtt{dom}A$ sehen wir

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \int_0^1 \bar{\phi}(x) i \frac{d}{dx}\psi(x)dx = \int_0^1 \overline{i\frac{d}{dx}\phi(x)}\psi(x)dx = \langle A\phi, \psi \rangle \ .$$

Der Operator A ist also symmetrisch. Die Gleichung $(i\frac{d}{dx} \mp i)\phi = 0$ hat die Lösungen $c\phi_\pm(x) = ce^{\pm x}$, $c \in \mathbb{C}$. Da

$$\psi \to \langle A\psi, \phi_\pm \rangle = \int_0^1 \overline{i\frac{d}{dx}\psi(x)} e^{\pm x}dx = \pm i \int_0^1 \psi(x)e^{\pm x}dx = \pm i\langle \psi, \phi_\pm \rangle$$

ein stetiges Funktional auf H definiert, gilt $\phi_\pm \in \mathtt{dom}A^*$. Damit ist A nicht wesentlich selbstadjungiert.

Wir wollen die Definitionsbereich vergrößern. Die Auswertung $f \mapsto (f(0), f(1))$ definiert eine Abbildung $R : C^\infty([0,1]) \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Sei $L \subset \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ ein eindimensionaler Unterraum. Wir stzen

$$\mathtt{dom}(A_L) := \{\phi \in C^\infty([0,1]) | R(\phi) \in L\}$$

und definieren $A_L : \mathtt{dom}A_L \to H$ wieder durch $A_L\phi = i\frac{d}{dx}\phi$. Dann gilt $A \subseteq A_L$. Wir testen A_L auf Symmetrie. Seien $\phi, \psi \in \mathtt{dom}(A_L)$. Dann gilt

$$\int_0^1 \overline{i\frac{d}{dx}\phi(x)}\psi(x) = \int_0^1 \phi(x) i\frac{d}{dx}\psi(x) - i\bar{\phi}(1)\psi(1) + i\bar{\phi}(0)\psi(0) \ .$$

Wir führen auf $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ die hermitsche Form $\omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = i\bar{x}_1 x_2 - i\bar{y}_1 y_2$ ein. Dann gilt

$$\langle A\phi, \psi \rangle - \langle \phi, A\psi \rangle = \omega(R(\phi), R(\psi)) \ .$$

Der Unterraum $L \subset \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ heißt Lagrangesch, falls $\omega(L, L) = \{0\}$ gilt. Wir sehen, daß A_L genau dann symmetrisch ist, wenn L Lagrangesch ist. Für $\alpha \in U(1)$ setzen wir

$$L_\alpha := \mathbb{C}(1, \alpha) \subset \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \ .$$

Damit werden alle Lagrangeschen Unterräume durch $U(1)$ parametrisiert. Der Operator A_{L_α} ist also symmetrisch. Wir zeigen jetzt, daß er wesentlich selbstadjungiert ist. Dazu müssen wir nur einsehen, daß die Lösung $\phi_\pm(x) = e^\pm x$ von $(i\frac{d}{dx} \mp i)\phi = 0$ nicht zu $\mathtt{dom}(A^*_{L_\alpha})$ gehören. In der Tat gilt

$$< A\psi, \phi_\pm >= \pm i < \psi, \phi_\pm > +\omega(\psi, \phi_\pm) \ .$$

Nun ist

$$\omega(\psi, \phi_\pm) = -i\bar{\phi}(1)e^{\pm 1} + i\bar{\phi}(0) = i\bar{\phi}(0)(1 - \bar{\alpha}e^{\pm 1}) \ .$$

Da $(1 - \bar{\alpha}e^{\pm 1}) \neq 0$ und $\phi \to \bar{\phi}(0)$ sicherlich nicht stetig in der L^2-Norm auf $\mathtt{dom}(A_{L_\alpha})$ ist, gilt $\phi_\pm \notin \mathtt{dom}(A^*_{L_\alpha})$.

Wir sehen, daß A_{L_α} wesentlich selbstadjungiert ist. Sei Abschluß $\bar{A}_{L_\alpha}$ ist selbstadjungiert.

Um zu sehen, wie A_{L_α} von $\alpha \in U(1)$ abhängt, bestimmen wir das Spektrum von A_{L_α}.

Auf $\mathtt{dom}A_{L_\alpha}$ definieren wie die Graphennorm

$$\|\phi\|^2_\Gamma := \|\phi\|^2_H + \|A_{L_\alpha}\phi\|^2_H \ .$$

Dann gilt

$$\mathtt{dom}\bar{A}_{L_\alpha} = \overline{\mathtt{dom}A_{L_\alpha}}^{\|\cdot\|_\Gamma} \ .$$

Wenn $\phi \in \mathtt{dom}\bar{A}_{L_\alpha}$ gilt, dann ist $\frac{d}{dx}\phi \in L^2[0,1]$. Für $[a,b] \subset [0,1]$ schließen wir

$$\|\frac{d}{dx}\phi\|^2_{L^1([a,b])} \leq (b-a)\int_a^b |\frac{d}{dx}\phi(x)|^2 dx \leq (b-a)\|\phi\|^2_\Gamma \ .$$

Daraus folgt $\phi \in C([0,1])$ und

$$|\phi(a) - \phi(b)| \leq \sqrt{b-a}\|\phi\|_\Gamma \ .$$

Sei $B := \{\phi \in \mathtt{dom}\bar{A}_{L_\alpha} | \|\phi\| \leq 1\}$. Dann ist $B \subset L^2([0,1])$ kompakt. In der Tat ist B eine gleichgradig stetige Menge in $C([0,1])$ und damit schon kompakt in $C([0,1])$ nach dem Satz von Arzela-Ascoli.

Da $\bar{A}_{L_\alpha}$ selbstadjungiert ist, existiert $R_{\bar{A}_{L_\alpha}}(i) : H \to \mathtt{dom}\bar{A}_{L_\alpha} \to H$. Die Faktorisierung über die kompakte Einbettung $\bar{A}_{L_\alpha} \to H$ zeigt, daß $R_{\bar{A}_{L_\alpha}}(i)$ kompakt ist. Ein kompakter Operator hat aber diskrete Spektrum endlicher Multiplizität mit Häufungspunkt 0. Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Eigenwerte von $R_{\bar{A}_{L_\alpha}}(i)$. Daraus folgt, daß das Spektrum von $\bar{A}_{L_\alpha}$ diskret ist. Weiter sind $\lambda_n := i - \frac{1}{\mu_n}$ die Eigenwerte von $\bar{A}_{L_\alpha}$, die sich offensichtlich in $\pm\infty$ häufen.

Eine Lösung der Gleichung

$$\bar{A}_{L_\alpha}\phi = \lambda\phi \ , \quad \phi \in \mathtt{dom}\bar{A}_{L_\alpha}$$

ist offensichtlich insbesondere eine Lösung der Differentialgleichung $i\frac{d}{dx}\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$. Also gilt $\phi_\lambda(x) = ce^{-i\lambda}x$. Diese Funktion ist glatt. Damit gehören die Eigenfunktionen von $\bar{A}_{L_\alpha}$ sogar zu $\mathtt{dom}A_{L_\alpha}$. Die Bedingung $R(\phi_\lambda) \in L_\alpha$ besagt, daß $\alpha\phi_\lambda(0) = \phi_\lambda(1)$, also

$$\alpha = e^{-i\lambda}$$

gelten muß. Diese Bedingung ist für $\lambda_n := -\arg(\alpha) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Wir sehen, daß

$$\sigma(\bar{A}_{L_\alpha}) = -\arg(\alpha) + 2\pi\mathbb{Z}$$

gilt und alle Eigenwerte haben einfache Multiplizität.

.

1.4.4 Der Spektralsatz für unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren

Satz 1.67 *Sei A ein selbstadjungierter unbeschränkter Operator auf H. Dann existiert ein projektorwertiges Maß E_A auf $\mathbb{R}$ mit:*

1. $\sigma(A) = \mathtt{supp} E_A \subseteq \mathbb{R}$,
2. $\mathtt{dom} A = \{x \in H \mid \int\limits_{\sigma(A)} \lambda^2 \langle x, dE_A(\lambda)x\rangle < \infty\}$,
3. $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\int\limits_{-n}^{n} \lambda dE_A(\lambda) \right) x$ *für* $x \in \mathtt{dom} A$.

Sei A ein selbstadjungierter Operator auf H, E_A das zugehörige projektorwertige Maß, die Spektralschar von A.

In Kapitel 1.4.1 haben wir einen isometrischen Homomorphismus

$$L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}, [E_A]) \to L(H)\ , \quad f \mapsto f(A) := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda)$$

konstruiert. Diese Abbildung soll auf unbeschränkte meßbare Funktionen erweitert werden.

Definition 1.68 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine meßbare Funktion gelte $E_A(f^{-1}\{\infty\}) = 0$ Mit*

$$f_n(\lambda) := \begin{cases} f(\lambda) & |f(\lambda)| \le n \\ 0 & |f(\lambda)| > n \end{cases}$$

wird der Operator $f(A)$ durch folgende Vorschrift definiert:

$$\mathtt{dom} f(A) := \{x \in A \mid f_n(A)x \text{ konvergiert für } n \to \infty\}$$

$$f(A)x := \lim_{n\to\infty} f_n(A)x \qquad \text{für } x \in \mathtt{dom} f(A)\ .$$

Sei $I : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Inklusion. Dann gilt $I(A) = A$.

Satz 1.69 *Sei A ein selbstadjungierter Operator auf H mit der Spektralschar E_A und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $E_A(f^{-1}\{\infty\}) = 0$. Dann gilt:*

1. *$f(A)$ ist dicht definiert und abgeschlossen.*

2. $\mathtt{dom} f(A) = \{x \in V | \int \ |f(\lambda)|^2 \langle x, dE_A(\lambda)x\rangle < \infty\}$

3. $\langle x, f(A)y\rangle = \int f(\lambda)\langle x, dE_A(\lambda)y\rangle$ *für* $y \in \mathtt{dom} f(A)$

4. $\|f(A)x\|^2 = \int |f(\lambda)|^2\langle x, dE_A(\lambda)x\rangle$ *für* $x \in \mathtt{dom} f(A)$

5. $f(A)^* = \overline{f}(A)$

6. $R_A(\mu) = (\mu - A)^{-1} = \int \frac{1}{\mu-\lambda} dE_A(\lambda)$ *für* $\mu \in \rho(A)$.

1.4.5 Qudratische Formen und Friedrichserweiterung

Sei A ein symmetrischer dicht-definierter Operator auf H.

Definition 1.70 *A heißt von unten halbbeschränkt durch eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, wenn $\langle A\phi, \phi\rangle \geq c\|\phi\|^2$ für alle $\phi \in \mathtt{dom}(A)$.*

Als Beispiel betrachten wir ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, den Hilbertraum $H := L^2(\Omega)$, eine von unten beschränkte Funktion $V \in C(\Omega)$ und den Operator $A := -\Delta + V$ auf $C_c^\infty(\Omega)$. Sei $c := \inf_{x\in\Omega} V(x) \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\langle A\phi, \phi\rangle = \|\mathtt{grad}(\phi)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega V(x)|\phi(x)|^2 dx \geq c\|\phi\|^2 .$$

Sei A von unten durch $c \in \mathbb{R}$ halbbeschränkt. Wir definieren die Norm

$$\|\phi\|^2_{A-c} := < (A - c)\phi, \phi >_H + \|\phi\|^2_H$$

auf $\mathtt{dom}(A)$.

Wir haben den folgenden Satz von Krein über die Friedrichsche Erweiterung [AG81, VIII, Satz 2]

Satz 1.71 *Der Operator A besitzt genau eine selbstadjungierte Erweiterung $A \subseteq \tilde{A}$ mit*

$$\mathtt{dom}(\tilde{A}) \subseteq \overline{\mathtt{dom}(A)}^{\|.\|_{A-c}} .$$

Diese Erweiterung ist die Friedrichserweiterung und es gilt $\mathtt{dom}(\tilde{A}^{1/2}) = \overline{\mathtt{dom}(A)}^{\|.\|_{A-c}}$.

Wir betrachten jetzt den Fall des puren Laplaceoperators $A = -\Delta$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ of $\mathtt{dom}(A) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dieser Operator ist von unten durch Null beschränkt.

Die Gleichung $(A^* \pm i)\phi = 0$ hat keine Lösungen in $L^2(\mathbb{R}^n)$. In der Tat würde die Fouriertransformierte einer solchen Lösung $(\|\xi\|^2 \pm i)\hat{\phi}(\xi) = 0$ erfüllen und es gilt $|(\|\xi\|^2 \pm i)| \geq 1$. Damit ist A sogar wesentlich selbstadjungiert. Die Friedrichserweiterung $\tilde{A}$ stimmt also mit dem Abschluß $\bar{A}$ überein.

Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}(\phi)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>}\phi(x)dx$$

liefert eine Darstellung von A also Multiplikationsoperator. Es gilt

$$\mathcal{F} \circ A \circ \mathcal{F}(\phi)(\xi) = \|\xi\|^2\phi(\xi) .$$

2 Topologie

2.1 Klassifikation von Hauptfaserbündeln

2.1.1 Definitionen

2.1.1.1 Lokal-triviale Faserbündel und G-Hauptfaserbündel Sei X ein topologischer Raum.

Definition 2.1 *Ein topologischer Raum Y über X ist eine stetige Abbildung $Y \to X$. Ein Morphismus $(Y \to X) \to (Z \to X)$ von topologischen Räumen über X ist eine stetige Abbildung $Y \to Z$ so daß*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Mit $\mathtt{Top}$ und $\mathtt{Top}/X$ bezeichnen wir die Kategorien der topologischen Räume und topologischen Räume über X. Eine stetige Abbildung $f : U \to X$ induziert einen Funktor $f^* : \mathtt{Top}/X \to \mathtt{Top}(U)$, welche durch

$$f^*(Y \to X) := (U \times_X Y \to U)$$

definiert ist.

Wir betrachten topologische Räume F, X.

Definition 2.2 *Das Objekt $(X \times F \to X) \in \mathtt{Top}/X$ heißt triviales Faserbündel über X mit Faser F.*

Definition 2.3 *Sei X ein topologischer Raum. Eine Übderdeckung $(U_i)_{i\in I}$ heißt numerierbar, falls sie eine lokal-endliche untergeordnete Zerlegung der Eins zuläßt.*

Für einen parakompakten topologischen Raum ist jede Überdeckung numerierbar.

Definition 2.4 *Das Objekt $(Y \to X) \in \mathtt{Top}/X$ ist ein lokal-triviales Faserbündel mit Faser F, wenn es eine numerierbare Überdeckung $(p_i : U_i \to X)_{i\in I}$ von X durch offene Teilmengen gibt, so daß $p_i^*(Y \to X)$ in $\mathtt{Top}/U_i$ isomorph zu einem trivialen Faserbündel mit Faser F ist.*

Wir betrachten eine topologische Gruppe G und einen topologische Raum X (mit trivialer G-Wirkung).

Definition 2.5 *Unter einem G-Raum über X verstehen wir ein Objekt $(Y \to X) \in \mathtt{Top}/X$, mit einem rechten G-Raum Y für welches die Abbildung $Y \to X$ äquivariant für die triviale Wirkung von G auf X ist.*

Das typische Beispiel eines G-Raumes über X ist $X \times G \to X$. Mit $\mathtt{Top}^G$ und $\mathtt{Top}^G/X$ bezeichnen wir die Kategorien der G-Räume und G-Räume über X. Für $f : U \to X$ haben wir einen Funktor $f^* : \mathtt{Top}^G/X \to \mathtt{Top}^G/U$.

Definition 2.6 *Ein G-Hauptfaserbündel über X ist ein Objekt $(E \to X) \in \mathtt{Top}^G/X$, zu welchem es eine numerierbare Überdeckung $(p_i : U_i \to X)_{i\in I}$ von X durch offene Teilmengen gibt, so daß $p_i^*(Y \to X)$ in $\mathtt{Top}^G/U_i$ isomorph zu $(U_i \times G \to U_i)$ ist.*

.

2.1.1.2 Beispiele

1. Das Tangentialbündel $TM \to M$ einer glatten Mannigfaltigkeit ist ein lokal-triviales Faserbündel mit Faser $\mathbb{R}^n$. Es hat zusätzlich noch die Struktur eines Vektorbündels.

2. Sei $E \to X$ ein n-dimensionales reelles Vektorbündel, zum Beispiel das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit. Dann können wir das das Rahmenbündel $\mathtt{Gl}(E) \to X$ definieren. Ein Punkt $\phi \in \mathtt{Gl}(E)$ über $x \in X$ ist eine lineare Isomorphie $\phi : \mathbb{R}^n \to E_x$, wobei E_x die Faser von E über x bezeichnet. Die Gruppe $\mathtt{Gl}(n, \mathbb{R})$ wirkt natürlich von rechts auf $\mathtt{Gl}(E)$ (durch Vorschalten). Mit Hilfe der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$ verstehen wir
$$\mathtt{Gl}(E) \subset \underbrace{E \times_X \cdots \times_X E}_{n\ Faktoren}, \quad \phi \mapsto (\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$$
und erhalten in dieser Weise eine Topologie als Unterraum. Damit wird $\mathtt{Gl}(E) \to X$ ein $\mathtt{Gl}(n, \mathbb{R})$-Hauptfaserbündel auf X.

3. Ist $M \to N$ eine eigentliche Submersion zwischen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten. Dann ist $M \to N$ ein lokal-triviales Faserbündel mit Faser $f^{-1}(n) \subset M$ für einen beliebigen Punkt $n \in N$.

4. Wir betrachten $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ und die Projektion $\pi : S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^n$, welche jedem Punkt der Sphäre die durch diesen Punkt laufende Gerade zuordnet. Dies ist eine eigentliche Submersion von Mannigfaltigkeiten und damit ein lokal-triviales Faserbündel. Die Gruppe $U(1)$ wirkt einfach transitiv auf den Fasern. In der Tat ist $S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^n$ ein $U(1)$-Hauptfaserbündel. Das Bündel $S^3 \to \mathbb{CP}^1$ heißt Hopfbündel und spielt eine besonders wichtige Rolle.

5. Sei G eine kompakte Liegruppe, welche frei von rechts auf einer Manngifaltigkeit M wirkt. Dann ist $N := M/G$ eine Mannigfaltigkeit und $M \to N$ ein G-Hauptfaserbündel. In der Tat ist $M \to N$ eine eigentliche Submersion und damit eine lokal-triviales Faserbündel.

6. Sei X ein topologischer Raum, auf welchem eine diskrete Gruppe G eigentlich und frei wirkt. Dann ist $X \to X/G$ ein G-Hauptfaserbündel.

7. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$. Mit $P_{x_0}X \subset \mathtt{Map}([0,1],X)$ bezeichnen wir den Raum der Wege in X mit Anfang x_0. Dabei betrachten wir Räume von Abbildungen immer mit der kompakt-offenen Topologie. Die Auswertung im Endpunkt liefert eine Projektion $e : P_{x_0}X \to X$. Auf $P_{x_0}X$ für wir die Äquivalenzrelation $\sim$ der Homotopie relativ zu den Entpunkten ein. Zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 \in P_{x_0}X$ sind also äquivalent, wenn sie Endpunkte einer Familie $[0,1] \ni t \mapsto \gamma_t \in P_{x_0}X$ mit $\gamma_t(1) = \gamma_0(1)$ sind. Sei $\tilde{X} := P_{x_0}X/\sim$. Die Endpunktauswertung faktorisiert über $p : \tilde{X} \to X$. Diesen Raum über X nennt man die universelle Überlagerung von X. In der Tat hat $p^{-1}(x_0)$ die Struktur einer Gruppe unter der Komposition von Wegen. Diese Gruppe heißt Fundamentalgruppe von X und wird mit $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnet. Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ wirkt auf $\tilde{X}$ durch Vorschalten. Auf diese Art erhalten wir ein $\pi_1(X, x_0)$-Hauptfaserbündel $\tilde{X} \to X$.

2.1.1.3 Klassifikationsfragen Die typische Frage der Theorie ist die folgende. Seien die Faser F oder eine topologische Gruppe G und ein Raum X gegeben.

1. Beschreibe die Menge der Isomorphieklassen von lokal-trivialen Faserbündeln mit Faser F.

2. Beschreibe die Menge der Isomorphieklassen von G-Hauptfaserbündeln über X.

2.1.1.4 Pull-back und der Stack der G-Hauptfaserbündel Sei $(E \to X) \in \mathtt{Top}^G/X$ ein G-Hauptfaserbündel und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f^*(E \to X) = (Y \times_X E \to X) \in \mathtt{Top}^G/Y$ auch ein G-Hauptfaserbündel. Möge $P_G(X) \subset \mathtt{Top}/X$ die Kategorie der G-Hauptfaserbündel über X bezeichnen. Dann haben wir also einen Funktor

$$P_G(f) := f^* : P_G(X) \to P_G(Y) .$$

Sei weiter $g : Z \to Y$. Die Assoziativität $\Phi_{g,f} : (Z \times_Y (Y \times_X E)) \xrightarrow{\sim} (Z \times_X E)$ liefert eine natürliche Isomorphie $P_G(g) \circ P_G(f) \cong P_G(f \circ g)$. Wir haben also einen (laxen, da $\Phi_{g,f}$ nicht die Identität ist) Funktor

$$P_G : \mathtt{Top} \to \mathtt{Cat} .$$

Dieser Funktor heißt Stack der G-Hauptfaserbündel.

Sei $\bar{P}_G(X)$ die Menge der Isomorphieklassen von G-Hauptfaserbündeln über X. Dann induziert $f : Y \to X$ eine Abbildung

$$\bar{P}_G(f) : \bar{P}_G(X) \to \bar{P}_G(Y) .$$

Wir können auf diese Weise

$$X \mapsto \bar{P}_G(X) , \quad f \mapsto \bar{P}_G(f)$$

als Funktor

$$\bar{P}_G : \mathtt{Top}^{op} \to \mathtt{Sets}$$

verstehen. Wir werden oft einfach f^* für $\bar{P}_G(f)$ schreiben.

Die Klassifikationsfrage ist nun die nach einer Beschreibung des Funktor $\bar{P}_G$.

2.1.1.5 Die Homotopiekategorie

Definition 2.7 *Zwei Abbildungen $f_0, f_1 : Y \to X$ heißen zueinander homotop genau dann, wenn sie Endpunkte einer Familie von Abbildungen $[0,1] \ni t \to f_t \in \mathtt{Map}(Y,X)$ sind*

Ein anderer Weg, die Existenz dieser Familie auszudrücken ist, daß eine Abbildung $f : [0,1] \times Y \to X$ existieren soll, welche sich auf $\{i\} \times X$ zu f_i einschränkt, $i = 0, 1$.

Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathtt{Top}(Y,X) = \mathtt{Map}(Y,X)$. Homotopie ist mit der Komposition verträglich. Wenn $f_0 \sim f_1$ und $g_0 \sim g_1$, dann auch $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$. In der Tat kann man die Homotopien komponieren $g_t \circ f_t$.

Wir bilden nun die Homotopiekategorie $h\mathtt{Top}$ von $\mathtt{Top}$. Sie hat die selben Objekten wie $\mathtt{Top}$ und die Morphismen

$$[Y,X] := h\mathtt{Top}(Y,X) := \mathtt{Top}(Y,X)/Homotopie \ .$$

Wir haben einen Quotientenfunktor

$$\mathtt{Top} \to h\mathtt{Top} \ .$$

Definition 2.8 *Zwei Räume, welche in $h\mathtt{Top}$ isomorph sind, heißen Homotopieäquivalent.*

Zum Beispiel sind D^n und pt Homotopieäquivalent. In der Tat sei $f : pt \to D^n$ die Einbettung des Mittelpunktes und $g : D^n \to pt$. Dann ist $g \circ f = \mathtt{id}_{pt}$ und $f \circ g \sim \mathtt{id}_{D^n}$. Als Homotopie können wir heispielsweise $h : [0,1] \times D^n \to D^n$, $h(t,x) = tx$ nehmen. Dann gilt $h_0 = f \circ g$ und $h_1 = \mathtt{id}_{D^n}$.

Definition 2.9 *Ein Funktor $F : \mathtt{Top}^{op} \to \mathtt{Sets}$ ist homotopieinvariant, wenn er eine Faktorsierung*

$$\begin{tikzcd} \mathtt{Top}^{op} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & & \mathtt{Sets} \\ & h\mathtt{Top}^{op} \arrow[ur, "hF"'] & \end{tikzcd}$$

zuläßt.

Um die Homotopieinvarianz von F zu prüfen, müssen wir nur $F(f_0) = F(f_1)$ für homotope f_0, f_1 zeigen.

2.1.2 Homotpietheoretische Berechnungen

2.1.2.1 Homotopieinvarianz von $\bar{P}_G$. Wir gehen wie in [Hus94] vor.

Satz 2.10 *Der Funktor $\bar{P}_G$ is Homotopieinvariant.*

Lemma 2.11 *Sei $\xi : E \to B \times I$ ein G-Hauptfaserbündel. Dann existiert eine numerierbare Übderdeckung $(U_i)_{i \in S}$ von B derart, daß $E_{|U_i \times I}$ für jedes $i \in S$ trivial ist*

Beweis:

1. Wähle Zerlegung der Eins $(v_j)_{j \in J}$ derart, daß $E_{|\{v_j > 0\}}$ trivial ist.
2. Für $r \in \mathbb{N}$ und $k = (k(1), \dots, k(r)) \in J^r$ defineren wir
$$v_k(x) := \prod_{1 \le q \le r} \mathtt{min}\{v_{k(q)}(x,t) \mid t \in [\frac{(q-1)}{r}, \frac{q}{r}]\} \ .$$
3. Wir beobachten, daß $E_{|\{v_k > 0\} \times I}$ trivial ist. Dazu Verkleben wir die nach Voraussetzung existierenden Trivialiserungen von E auf den Intervallen $\{v_k > 0\} \times [\frac{(q-1)}{r}, \frac{q}{r}]$.
4. Wir zeigen nun, daß die Mengen $\{v_k > 0\}$, $r \in \mathbb{N}$, $k \in J^r$ den Raum B überdecken. In jedem Punkt (x,t) verschwinden höchstens endlich viele v_i nicht. Da $[0,1]$ kompakt ist, existiert eine Umgebung $x \in N \subset B$ und $r > 0$ mit
   (a) Für alle $q = 1, \dots, r$ existiert $k(q) \in J$ mit $N \times [\frac{(q-1)}{r}, \frac{q}{r}] \subset \{v_{k(q)} > 0\}$.
   (b) Auf $N \times I$ verschwinden höchstens endlich viele v_i nicht.

   Aus (a) folgt, daß die Mengen überdecken. Aus (b), daß die Familie $\{v_k\}_{k \in J^r}$ für jedes r lokal-endlich ist.
5. Wir verkleinern die Funktionen v_k zu einer Zerlegung der Eins.
   (a) Setze $w_r(x) := \sum_{s<r} \sum_{k \in J^s} v_k(x)$.
   (b) Setze $u_k(x) := \mathtt{max}(0, v_k(x) - r w_r(x))$.
   (c) Die Familie $\{u_k > 0\}$ für $r \in \mathbb{N}$ und $k \in J^r$ überdeckt B. In der Tat sei $x \in B$. Dann gibt es ein minimales $r \in \mathbb{N}$ für welches ein $k \in J^r$ mit $v_k(x) > 0$ existiert. Für dieses gilt $u_k(x) = v_k(x)$.
   (d) Wir zeigen, daß $\{u_k > 0\}_{r \in \mathbb{N}, k \in J^r}$ lokal endlich ist. Sei $x \in B$ und r und k wie in (c) gewählt. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m > r$ und $v_k(x) > \frac{1}{m}$. Dann ist $m w_m(x) > 1$, und folglich auch $m w_m(y) > 1$ für y in einer Umgebung x. Für diese y gilt $s \ge m$ gilt $u_m(y) = 0$.
   (e) Die Zerlegung der Eins entsteht durch Normierung von $\{u_k > 0\}_{r \in \mathbb{N}, k \in J^r}$.

■

Sei $r : B \times I \to B \times I$ die Abbildung $r(b,t) := (b,1)$.

Lemma 2.12 *Sei $\xi : E \to B \times I$ ein G-Hauptfaserbündel. Dann existiert ein Isomorphismus $\xi \cong r^*\xi$.*

Beweis: Wir müssen also ein Diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\xi"] & E \arrow[d, "\xi"] \\ B \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

mit einer G-äquivarianten Abbildung g konstruieren.

1. Wähle numerierbare lokal-endliche Überdeckung $(U_i)_{i\in S}$ von B, so daß $E_{|U_i\times I}$ trivial ist. Wähle Trivialisierungen $h_i : U_i \times I \times G \to E_{|U_i\times I}$.

2. Wähle Familie $(u_i)_{i\in S}$ stetiger Funktionen mit $\{u_i > 0\} \subseteq U_i$ und $\mathtt{max}_{i\in S} u_i(b) = 1$ für alle $b \in B$.

3. Wir definieren g_i und r_i für $i \in S$ wie angegeben und durch Forsetzung durch die Identität außerhalb von $U_i \times I$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rrr, "g_i"] & & & E \\ E_{|U_i\times I} \arrow[u] \arrow[r, "h_i^{-1}"] \arrow[d, "\xi"] & U_i \times I \times G \arrow[r, "{(b,t,s)\mapsto h_i(b,u_i(b)\vee t,s)}"] \arrow[d] & U_i \times I \times G \arrow[r] \arrow[d] & E_{|U_i\times I} \arrow[u] \arrow[d] \\ U_i \times I \arrow[r, equal] \arrow[d] & U_i \times I \arrow[r, "{(b,t)\mapsto(b,u_i(b)\vee t)}"] & U_i \times I \arrow[r, equal] & U_i \times I \arrow[d] \\ B \times I \arrow[rrr, "r_i"] & & & B \times I \end{tikzcd}$$

4. Wähle Ordnung von S. Für $b \in B$ existiert $U(b)$ derart, daß $U_b \cap U_i \neq \emptyset$ für nur für endlich viele $i(1) < i(2) < \cdots < i(n)$ in S. Wir definieren $r := r_{i(n)} \circ \cdots \circ r_{i(1)}$ auf $U(b) \times I$ und $g = g_{i(n)} \circ \cdots \circ g_{i(1)}$ auf $E_{|U(b)\times I}$. Da auf dieser Menge alle anderen r_i (bzw g_i) die Indentität sind, kann man $g : E \to E$ als unendliche Komposition über alle $i \in S$ definieren. Die Komposition der r_i gibt r.

■

Wir beenden jetzt den Beweis des Satzes 2.10. Seien $f_0, f_1 : Y \to X$ homotop. Sei $f : Y \times I \to X$ eine Homotopie. Seien $i_0, i_1 : Y \to I \times Y$ die Einbettungen und $r : Y \times I \to Y \times I$ durch $r(y,t) = (y,1)$ gegeben. Dann ist für $\xi \in \bar{P}_G(X)$ wegen $r \circ i_0 = i_1$

$$f_0^*\xi \cong i_0^* f^* \xi \cong i_0^* r^* f^* \xi \cong i_1^* f^* \xi \cong f_1^* \xi \ .$$

■

2.1.2.2 Erste Berechnungen Da $D^n \cong pt$ in $h\mathtt{Top}$ gilt, ist $\bar{P}_G(D^n) \cong \bar{P}_G(pt)$. Folglich gibt es auf D^n nur die Äquivalenzklasse des trivialen G-Hauptfaserbündels.

Sei $\pi_0(G)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten. In der Tat ist die Zusammenhangskomponente $G_0 \subseteq G$ der 1 ein Normalteiler und $\pi_0(G) \cong G/G_0$ eine Gruppe. Die Gruppe $\pi_0(G)$ wirkt auf $[X, G]$ durch Rechtsmultiplikation (in der offensichtlichen Weise).

Satz 2.13 *Für $n \geq 2$ gibt eine Bijektion*

$$\bar{U} : [S^{n-1}, G]/\pi_0(G) \xrightarrow{\sim} \bar{P}_G(S^n) \ .$$

Für $n = 1$ gibt es eine Bijektion

$$G/conj \cong \bar{P}_G(S^1) \ .$$

Beweis: Wir betrachten nun die Zerlegung der Sphäre $S^n \cong S^n_+ \cup_{S^{n-1}} S^n_-$ in die obere und untere Halbsphäre. Seien $i_\pm : S^n_\pm \to S^n$ die Einbettungen. Sei $(\xi : E \to S^n) \in P_G(S^n)$. Da $S^n_\pm \cong D^n$ in $h\mathtt{Top}$ gilt, können wir Trivialisierungen von $i^*_\pm \xi$ wählen. Wir erhalten damit eine Abbildung

$$\begin{tikzcd} S^n_+ \times G & S^{n-1} \times G \arrow[l, "\supset"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[rr, bend left, "\phi"] & E_{|S^{n-1}} \arrow[r, "\cong"] & S^{n-1} \times G \arrow[r, "\subset"] & S^{n-1}_- \times G \end{tikzcd} \ .$$

Da diese Abbildung G-äquivariant und Fasererhaltend ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\Phi : S^{n-1} \to G$ derart, daß $\phi(x, g) = (x, \Phi(x)g)$ gilt. Umgekehrt, wenn wir Φ vorgeben, dann kann man durch Verkleben mittels ϕ ein G-Gauptfaserbündel $\xi_\Phi : E_\Phi \to S^n$ konstruieren. Wir definieren die Abbildung $\hat{U} : \mathtt{Top}(S^{n-1}, G) \to P_G(S^n)$ durch $\Phi \mapsto \xi_\phi$. Die obige Diskussion zeigt schon, daß die Komposition $\mathtt{Top}(S^{n-1}, G) \to P_G(S^n) \to \bar{P}_G(S^n)$ surjektiv ist.

Eine analoge Konstruktion produziert für jedes G-Hauptfaserbündel auf $I \times S^n$ mit Wahl von Trivialisierungen der Einschränkungen auf $I \times S^n_\pm$ (diese Räume sind auch homotopieäquivalent zu pt) eine Abbildung $\Psi : I \times S^{n-1} \to G$ und umgekehrt für jedes solche Ψ ein Hauptfaserbündel $E_\Psi \to I \times S^n$. Sei Ψ eine Homotopie von Φ_0 nach Φ_1. Dann gilt $(E_\Psi)_{\{i\} \times S^n} \cong E_{\Phi_i}$, $i = 0, 1$ und deshalb $E_{\Phi_0} \cong E_{\Phi_1}$. Deshalb faktorisiert $\hat{U}$ über die Homotopiekategorie

$$U : h\mathtt{Top}(S^{n-1}, G) \to \bar{P}_G(S^n) \ .$$

Der Rest des Beweises sei Übungsaufgabe. ■

2.1.2.3 Isomorphismen, Cartesische Diagramme Seien $E \to X$ und $F \to Y$ beides G-Hauptfaserbündel und

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\bar{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagram derart, daß die Abbildung f auch G-Äquivariant ist.

Lemma 2.14 *Das Diagram ist cartesisch. Insbesondere ist $E \cong X \times_Y F$.*

Beweis: Wir zeigen, daß für jeden Raum $T \in \mathtt{Top}$

$$\begin{tikzcd} \mathtt{Top}(T,E) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathtt{Top}(T,F) \arrow[d] \\ \mathtt{Top}(T,X) \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathtt{Top}(T,Y) \end{tikzcd}$$

ein cartesisches Diagram in $\mathtt{Sets}$ ist. Sei $(\phi,\psi) \in \mathtt{Top}(T,X) \times \mathtt{Top}(T,F)$ derart, daß ihre Bilder in $\mathtt{Top}(T,Y)$ übereinstimmen. Sei $U \subset Y$ derart, daß $r_U : F_{|U} \cong U \times G$ und $h_U : E_{|\bar{f}^{-1}(U)} \cong \bar{f}^{-1}(U) \times G$ existieren. Sei $v_U : \bar{f}^{-1}(U) \to G$ durch

$$r_U \circ f \circ h_U^{-1}(w,g) = (\bar{f}(w), v_U(w)g)\ .$$

Wir definieren (und haben nur diese Wahl) $\kappa_U : \phi^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) \to E$ durch

$$\kappa_U(t) = h_U^{-1}(\phi(t), v_U^{-1}(\phi(t)) \circ \mathtt{pr}_G \circ r_U \circ \psi(t))\ .$$

Wir überzeugen uns, daß diese Definition nicht von der Wahl der Trivialisierungen abhängt und eine global-definierte Abbildung $\kappa : T \to E$ definiert. ■

Korollar 2.15 *Jeder Morphismus von G-Hauptfaserbündeln über X ist ein Isomorphismus.*

2.1.2.4 Darstellbare Funktoren

Wir betrachten eine Kategorie $\mathcal{C}$. Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ induziert einen Funktor

$$\underline{X} : \mathcal{C}^{op} \to \mathtt{Sets}$$

durch

$$\underline{X}(Y) = \mathcal{C}(Y,X)\ , \quad \underline{X}(f : Z \to Y) = f^* : \underline{X}(Y) \to \underline{X}(Z)\ .$$

Definition 2.16 *Der Funktor $\underline{X}$ ist der durch X dargestellte Funktor.*

Ist $g \in \mathcal{C}(X,Y)$, dann haben wir eine natürliche Transformation $g_* : \underline{X} \to \underline{Y}$, welche durch $g_*(f) = g \circ f \in \underline{Y}(Z)$ für $(f : Z \to X) \in \underline{X}(Z)$ gegeben wird. Durch

$$X \mapsto \underline{X}\ , g \mapsto g_*$$

erhalten wir einen Funktor

$$Y : \mathcal{C} \to \mathtt{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}$$

(der Buchstabe Y steht für Yoneda).

Lemma 2.17 *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in \mathcal{C}$. Dann ist $Y : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathtt{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}(\underline{X}, \underline{Y})$ eine Bijektion.*

Beweis: Seien $f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$ derart, daß $Y(f) = Y(g)$. Dann gilt $g = Y(g)(\mathtt{id}_X) = Y(f)(\mathtt{id}_X) = f$. Damit ist Y injektiv.

Sei nun $\phi : \underline{X} \to \underline{Y}$ gegeben. Wir setzen $f := \phi(\mathtt{id}_X) \in \underline{Y}(X) = \mathcal{C}(X,Y)$ und behaupten, daß $\phi = Y(f)$ gilt. In der Tat ist für $g \in \underline{X}(Z)$

$$\phi(g) = \phi(g^*(\mathtt{id}_X)) = g^*\phi(\mathtt{id}_X) = g^*(f) = f \circ g = f_*(g) \ .$$

■

Definition 2.18 *Ein Funktor $S : \mathcal{C}^{op} \to \mathtt{Sets}$ heißt darstellbar, wenn es ein Paar (die Darstellung von S) (X, ϕ) aus einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ und einem Isomorphism $\phi : X \to S$ von Funktoren gibt.*

Sei $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathtt{Sets}$ ein Funktor und $x \in F(X)$ ein Element. Dieses induziert eine natürliche Transformation $\phi_x : \underline{X} \to F$ durch

$$\underline{X}(Y) \ni f \mapsto F(f)(x) \in F(Y) \ .$$

Seien (X, ϕ) und (Y, ψ) zwei Darstellungen von S. Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $f : X \to Y$ derart, daß $\psi \circ f_* = \phi$.

Wir betrachten $B \in \mathtt{Top}$. Dieser Raum induziert einen homotopieinvarianten Funktor

$$\underline{B} : h\mathtt{Top}^{op} \to \mathtt{Sets} \ ,$$

welcher durch $\underline{B}(Y) := h\mathtt{Top}(Y, X)$ und $\underline{B}(f : Z \to Y) := f^*$ gegeben wird. Hierbei ist $f^*(g) = g \circ f \in h\mathtt{Top}(Y, X)$ für $g \in h\mathtt{Top}(Y, X)$. Es ist nun klar, daß B bis auf Homotopieäquivalenz durch den Funktor $\underline{B}$ bestimmt wird.

Eine Möglichkeit, die Frage nach der Klassifikation von G-Hauptfaserbündeln zu beantworten, ist eine Darstellung (BG, ϕ) des Funktors $\bar{P}_G : h\mathtt{Top}^{op} \to \mathtt{Sets}$ anzugeben.

2.1.3 Das universelle G-Hauptfaserbündel

Mehr Details zu diesem Thema findet man in [tD87].

2.1.3.1 Joins Sei I eine Menge und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Räumen. Wir betrachten die Teilmenge $P \subseteq \prod_{i \in I} I \times X_i$ derjenigen Tupel $(t_i, x_i)_{i \in I}$, für welche höchstens endlich viele t_i von Null verschieden sind. Auf der Menge P führen wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ ein, in welcher $(t_i, x_i) \sim (s_i, y_i)$ genau dann gilt, wenn $t_i = s_i$ für alle $i \in I$ und $x_i = y_i$ für alle $i \in I$ mit $t_i = s_i \neq 0$ gilt. Die unterliegende Menge des Joins ist

$$*_{i \in I} X_i := P/\sim \ .$$

Die Funktionen

$$t_i : *_{i\in I} X_i \to I$$

und

$$p_i : t_i^{-1}(0,1] \to X_i$$

sind wohldefiniert. Die Topologie auf $*_{i\in I} X_i$ wird als die gröbste Topologie definiert, bezüglich welcher diese Abbildungen stetig sind.

Sei G eine topologische Gruppe welche auf den Räumen X_i wirkt (mit der Wirkung μ_i) Dann ist $\mu : *_{i\in I} X_i \times G \to *_{i\in I} X_i$ stetig. In der Tat sind $t_i \circ \mu$ Konstant und $p_i \circ \mu = \mu_i \circ p_i$ stetig.

Die Familie der Funktionen (t_i) definiert eine punktweise endliche Zerlegung der Eins. Man kann durch Verkleinern dieser Funktionen eine lokal-endliche Zerlegung der Eins konstruieren.

2.1.3.2 Ein Argument von tom Dieck Sei X ein G-Raum und $E := *_{i\in\mathbb{N}} X$. Seien $d, e : E \to E$ die Abbildung, welche $(t_1x_1, t_2x_2, t_3x_3, \dots)$ auf $(t_1x_1, 0, t_2x_2, 0, t_3x_3, \dots)$ bzw. auf $(0, t_1x_1, 0, t_2x_2, 0, t_3x_3, \dots)$. abbilden.

Lemma 2.19 *Es gibt G-Homotopien* $\mathtt{id} \sim e \sim d$.

Beweis: Wir betrachten $\mathtt{id} \sim d$. Durch

$$(t_1x_1, t_2x_2, t_3x_3, \dots) \mapsto (tt_1x_1, tt_2x_2, (1-t)t_2x_2, tt_3x_3, (1-t)t_3x_3, \dots)$$

wird eine Homotopie von d nach

$$(t_1x_1, t_2x_2, t_3x_3, \dots) \mapsto (t_1, x_1, t_2x_2, 0, t_3x_3, 0, \dots)$$

gegeben. Komponiert mit der Homotopie

$$(t_1x_1, t_2x_2, t_3x_3, \dots) \mapsto (t_1x_1, t_2x_2, tt_3x_3, (1-t)tt_3x_3, tt_4x_4, \dots)$$

erhalten wir eine Homotopie von d zu

$$(t_1x_1, t_2x_2, t_3x_3, \dots) \mapsto (t_1x_1, t_2x_2, t_3x_3, 0, t_4x_4, 0, \dots)\ .$$

Wir setzen diese Konstruktion fort und erhalten schließlich eine Homotopie von d nach $\mathtt{id}$.

Die Homotopie von e nach $\mathtt{id}$ konstruiert man analog. ■

2.1.3.3 $EG \to BG$ Wir definieren

$$EG := *_{i\in\mathbb{N}} G$$

mit der von der rechtwirkung von G auf sich selbst induzierten G-Wirkung.

Wir setzen weiter

$$BG := EG/G \ .$$

Definition 2.20 *EG heißt der universelle G-Raum. Der Raum BG heißt klassifizierender Raum von G.*

Lemma 2.21 *Die Abbildung $\pi : EG \to BG$ ist ein G-Hauptfaserbündel.*

Beweis: Die Funktionen $t_i : EG \to I$ sind G-äquivariant und induzieren Funktionen $t_i : BG \to I$. Wir definieren auf $\{t_i > 0\}$ eine Trivialisierung

$$(\pi, p_i) : EG_{\{t_i>0\}} \to BG_{\{t_i>0\}} \times G \ .$$

Die Überdeckung von BG durch die Mengen $\{t_i > 0\}$ ist numerierbar. ■

Lemma 2.22 *Sei X ein G-Raum. Zwei G-Abbildung $f, h : X \to EG$ sind homotop.*

Beweis: Es gilt $f \sim d \circ f$ und $h \sim e \circ h$. In Koordinaten

$$d \circ f = (t_1 f_1, 0, t_2, f_2, 0, t_3 f_3, \dots)$$

und

$$e \circ h = (0, u_1 h_1, 0, u_2 h_2, 0, \dots) \ .$$

Durch

$$(tt_1 f_1, (1-t)u_1 h_1, tt_2 f_2, (1-t)u_2 h_2, \dots)$$

wird eine Homotopie von $d \circ f \sim e \circ h$ gegeben. ■

Lemma 2.23 *Ist $E \to X$ ein G-Hauptfaserbündel, dann existiert eine G-Abbildung $f : E \to EG$.*

Beweis: Wir wählen eine Zerlegung der Eins $(\chi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ auf B und Trivialisierungen

$$(p_i, h_i) : E_{|\{\chi_i>0\}} \to \{\chi_i > 0\} \times G \ .$$

Dann definieren wir $f : E \to EG$ durch

$$f(e) := (\chi_1(p(e))h_1(e), \chi_2(p(e))h_2(e), \dots)$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert (da $\chi_i(p(e)) = 0$ gilt, wenn h_i nicht definiert ist, in diesem Fall setzen wir $0 := \chi_i(p(e))h(e)$) und G-äquivariant.

Das Element $(\pi : EG \to BG) \in \bar{P}_G(BG)$ induziert eine natürliche Transformation

$$\phi_\pi : \underline{BG} \to \bar{P}_G$$

von Funktoren $h\mathtt{Top}^{op} \to \mathtt{Sets}$.

Theorem 2.24 *$\phi_\pi : \underline{BG} \to \bar{P}_G$ ist eine Darstellung des Funktors $\bar{P}_G$.*

Beweis: Wir müssen zeigen, daß ϕ_π für jeden Raum $X \in h\mathtt{Top}$ injektiv und surjektiv ist. Sei $(P \to X) \in \bar{P}_G(X)$. Dann gibt es eine G-Abbildung $P \to EG$. Wir erhalten ein automatisch cartesisches Diagram

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d] & EG \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "\bar{f}"] & BG \end{tikzcd}$$

und damit $(P \to X) = \bar{f}^*(\pi) = \phi_\pi(\bar{f})$. Dies ist die Surjektivität.

Wenn $\bar{h} : X \to BG$ eine weitere Abbildung ist, so daß $\phi_\pi(\bar{h})(\pi) \cong (P \to X)$. Dann erhalten wir ein Diagram

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[d] & EG \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "\bar{h}"] & BG \end{tikzcd} .$$

Nun sind f und h homotop als G-äquivariante Abbildungen. Folglich sind $\bar{f}$ und $\bar{h}$ homotop. ■

2.1.3.4 Charakterisierung von $EG \to BG$

Die Konstruktion von $EG \to BG$ durch einen undenlichen Join ist recht kompliziert für explizite Betrachtungen. Deshalb ist eine abstrakte Charakterisierung von $EG \to BG$ interessant.

Definition 2.25 *Wir nennen ein G-Hauptfaserbündel $\xi : E \to X$ universell, wenn $\xi \in \bar{P}_G(X)$ eine Darstellung des Funktors $\bar{P}_G$ induziert.*

In diesem Sinne ist $EG \to BG$ universell.

Lemma 2.26 *Ein G-Hauptfaserbündel $E \to X$ ist genau dann universell, wenn E homotopieäquivalent zu pt ist.*

Beweis: Siehe [tD91] Satz 4.9. Die Existenzaussagen für Schnitte benutzen [Dol63].

1. Da $EG \to BG$ klassifizieren ist, haben wir ein cartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d] & EG \arrow[d] \\ X \arrow[r] & BG \end{tikzcd} .$$

2. Wir betrachten das Bündel $EG \times_G E \to BG$ mit Faser E. Als Bündel mit zusammenziehbarer Faser hat es einen Schnitt. Wir interpretieren diesen Schnitt als G-äquivariante Abbildung $EG \to E$.

3. Wir haben also auch ein cartesisches Diagramm
$$\begin{tikzcd} EG \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ BG \arrow[r] & E \end{tikzcd} .$$

4. Da wir schon wissen, daß $EG \to BG$ universell ist, ist die Komposition $f \circ g : EG \to EG$ is G-äquivariant homotop zur Identität.

5. Das Bündel $\partial I \times E \times_G E \to \partial I \times X$ hat einen Schnitt, welcher durch $(\mathtt{id}_E, g \circ f)$ über $\{0\} \times X$ und $(\mathtt{id}_E, \mathtt{id}_E)$ über $\{1\} \times X$ gegeben ist. Dieser Schnitt läßt sich auf $I \times X$ erweitern. Er kann also G-äquivariante Homotopie von $g \circ f$ nach $\mathtt{id}_E$ interpretiert werden.

■

2.1.3.5 Beispiele

1. Die Gruppe $\mathbb{Z}$ wirkt frei auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ ist ein $\mathbb{Z}$-Hauptfaserbündel. Folglich gilt
$$B\mathbb{Z} \cong S^1 .$$

2. Wir betrachten die Einbettungen $S^n \subset S^{n+1}$ als Äquator. Bezüglich dieser Einbettungen können wir
$$S^\infty := \lim_{n \in \mathbb{N}} S^n$$
bilden. Dieser Raum ist zusammenziehbar. Eine Reihe von Gruppe wirken in natürlicher Weise frei auf S^∞.

3. Die symmetrische Gruppe Σ_n wirkt durch Permutation der ersten n-Koodinaten auf S^∞. Folglich ist $S^\infty/\Sigma_n \cong B\Sigma_n$.

4. Wir können $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ und $S^\infty = \lim_{n\to\infty} S^{2n-1}$ betrachten. Dann wirkt $U(1)$ und alle Untergruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ frei auf S^∞. Es gilt
$$BU(1) \cong S^\infty/U(1) \ , B\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong S^\infty/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} .$$
Nun ist $S^{2n+1}/U(1) \cong \mathbb{CP}^n$ und damit
$$BU(1) \cong \lim_{n\to\infty} \mathbb{CP}^n =: \mathbb{CP}^\infty .$$
Das Bündel
$$H^n_k := S^{2n+1}/\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to \mathbb{C}P^n$$
ist das unitäre Rahmenbündel der k-fachen Potenz $L^{n,\otimes k} \to \mathbb{C}P^n$ des tautologischen Linienbündels $L^n \to \mathbb{CP}^n$.
$$B\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \cong \lim_{n\to\infty} H^n_k .$$

5. Ist H ein separabler komplexer unendlich-dimensionaler Hilbertraum, dann ist die unitäre Gruppe $U := U(H)$ zusammenziehbar (Satz von Kuiper [Kui65]). Ist G irgend eine kompakte Gruppe und $G \to U(n)$ eine treue unitäre Darstellung, dann ist $G \to U(n) \to U$ ($U(n)$ wirkt auf die ersten n Koordinaten einer Orthonormalbasis von H) eine Einbettung und $U \to U/G$ ein universelles G-Hauptfaserbündel.

2.2 Gruppenstrukturen auf $[X, Y]$

2.2.1 Homotopiegruppen und mehr

2.2.1.1 H- und co-H-Räume Um für Räume X, Y die Mengen $[X, Y]$ zu beschreiben, ist es nützlich, auf dieser Menge zusätzlich Strukturen zu betrachten. In der Topologie sind das meist Gruppenstrukturen.

In der Regel betrachtet man diese Strukturen für punktierte Räume, um das Einselement der Gruppen zu kodieren.

Definition 2.27 *Ein punktierter Raum ist ein Paar (X, x) aus einem topologischen Raum X und $x \in X$. Ein Morphismus von punktierten Räumen $f : (X, x) \to (Y, y)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x) = y$. Mit $\mathtt{Top}_*$ bezeichnen wir die Kategorie der punktierten Räume.*

In anderen Worten, $\mathtt{Top}_* = */\mathtt{Top}$, wobei $*/\mathtt{Top}$ die Kategorie der Räume unter $*$, also der Abbildungen $* \to X$ bezeichnet. Wir haben auch eine entsprechende Homotopiekategorie $h\mathtt{Top}_*$.

Für $X \in \mathtt{Top}$ sei $X_+ := X \sqcup + \in \mathtt{Top}_*$ die Vereinigung aus X und einem disjukten Basispunkt. Es gilt für $Y \in \mathtt{Top}_*$ die Adjunktion

$$\mathtt{Top}_*(X_+, Y) \cong \mathtt{Top}(X, Y) \ ,$$

wobei auf der rechten Seite der Basispunkt von Y vergessen wurde.

Auf analoge Weise bildet man $\mathtt{Sets}_* := */\mathtt{Sets}$ die Kategorie der punktierten Mengen. Ein Raum $(X, x) \in h\mathtt{Top}_*$ stellt einen Funktor $\underline{X} \in \mathtt{Sets}_*^{h\mathtt{Top}_*}$ dar. Dabei ist der ausgezeichnete Punkt in $\underline{X}(Z, z)$ die Klasse der konstanten Abbildung $Z \to X$ mit dem Wert x.

Das kategorielle Produkt zweiter punktierter Räume (X, x) und (Y, y) ist der Raum $X \times Y$ mit dem Basispunkt (x, y). Etwas komplizierter ist das kategorielle Koprodukt $X \vee Y$, welches aus $X \sqcup Y$ durch Identifikation der Basispunkte x und y zu einem neuen Basispunkt entsteht

Ein Gruppe ist ein Objekt $G \in \mathtt{Sets}_*$ mit einer Multiplikation $\mu : G \times G \to G$. Wir betrachten G als punktierte Menge mit dem Basispunkt $1 \in G$.

Definition 2.28 *Ein H-Raum ist ein punktierter Raum (H, e) mit einer Abbildung $\mu : H \times H \to H$ mit $\mu(e, h) = \mu(h, e) = h$.*

Das Produkt induziert für $X \in h\mathtt{Top}_*$ auf $[X, H]$ die Struktur eines (nicht notwendig assoziativen) Monoides.

Definition 2.29 *Eine H-Gruppe ist ein H-Raum, für welchen $[X,H]$ für jedes $X \in \mathtt{Top}_*$ eine Gruppe ist.*

In anderen Worten, (H,μ) stellt ein Gruppenobjekt $(\underline{H},\mu_*) \in \mathtt{Groups}^{h\mathtt{Top}_*^{op}}$ dar. Wenn H eine H-Gruppe ist, dann ist μ bis auf Homotopie assoziativ und es gibt ein Inverses $I : H \to H$ bis auf Homotpie. Diese Strukturen erhält man aus der Betrachtung der Gruppe $\underline{H}(H)$.

Definition 2.30 *Ein co-H-Raum ist ein punktierter Raum (C,e) mit einem Koprodukt $\alpha : C \to C \vee C$.*

Es gilt

$$[X \vee Y, Z] = [X,Z] \times [Y,Z] \ .$$

Das Koprodukt induziert also auf $[C,X]$ die Struktur eines (nicht notwendig assoziativen) Monoides durch $\alpha^* : [C,X] \times [C,X] \to [C,X]$.

Definition 2.31 *Eine co-H-Gruppe ist ein co-H-Raum, für welchen $[H,X]$ für jedes $X \in \mathtt{Top}_*$ eine Gruppe ist.*

Wir nennen den ko-H-Raum kommutativ, wenn diese Gruppen kommutativ sind. In anderen Worten, (H,μ) stellt ein Gruppenobjekt $(\underline{H},\mu^*) \in \mathtt{Groups}^{h\mathtt{Top}}$ ko-dar. Wenn H eine ko-H-Gruppe ist, dann ist μ bis auf Homotopie ko-assoziativ und es gibt ein ko-Inverses $I : H \to H$ bis auf Homotpie. Diese Strukturen erhält man aus der Betrachtung der Gruppe $\underline{H}(H)$.

2.2.1.2 S^n als Ko-H-Raum Die Kategorie $\mathtt{Top}_*$ hat auch eine Tensorstruktur

$$\wedge : \mathtt{Top}_* \times \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Top}_* \ , (X,Y) \mapsto X \wedge Y := X \times Y / \{x\} \times Y \cup X \times \{y\} \ .$$

Es gilt

$$(X \vee Y) \wedge Z \cong (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$$

und das Exponentialgesetz (wenn man kompakt-erzeugte Topologien benutzt)

$$\mathtt{Top}_*(X \wedge Y, Z) = \mathtt{Top}_*(X, Y^Z) \ .$$

Hierbei ist Y^Z der Raum der Basispunkterhaltenden Abbildungen $Z \to Y$ mit dem Basispunkt der konstanten Abbildung in den Basispunkt von Y. Für uns wichtig ist die induktive Definition der Spären

$$S^n := S^1 \wedge S^{n-1} \ .$$

Lemma 2.32 *S^1 ist ein ko-H-Gruppe.*

Beweis: Wir schreiben $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Seien S^1_+ und S^1_- die beiden Summanden in $S^1 \vee S^1$. $\alpha : S^1 \to S^1 \vee S^1$ durch

$$\alpha(t) := \begin{cases} 2t \in S^1_+ & t \in [0, 1/2] \\ 2t - 1 \in S^1_- & t \in [0, 1] \end{cases}$$

Man rechnent Assoziativität nach. Wenn man $S^1 \cong U(1)$ indentifiziert, so wird das Inverse durch $u \mapsto \bar{u}$ induziert. ∎

Lemma 2.33 *Durch*

$$S^n \cong S^1 \wedge S^{n-1} \stackrel{\alpha \wedge \mathtt{id}_{S^{n-1}}}{\longrightarrow} (S^1 \vee S^1) \wedge S^{n-1} \cong (S^1 \wedge S^{n-1}) \vee (S^1 \wedge S^{n-1}) \cong S^n \vee S^n$$

wird auf S^n eine kommutative ko-H-Gruppenstruktur definiert.

Beweis: Wir müssen den Kommutativität einsehen. Dazu beachten wir, daß die Zerlegung $S^n \cong S^{n-1} \wedge S^1$ eine weitere ko-H-Raumstruktur auf S^n definiert. Auf $[X, S^n]$ ist die Verknüpfung der ersten Gruppenstruktur ein Homomorphismus für zweite Gruppenstruktur, und umgekehrt. Daraus folgt schon rein algebraisch, daß beide Gruppenstrukturen übereinstimmen müssen und abelsch sind. ∎

Definition 2.34 *Die Gruppen $\pi_i(X, x)$, $i = 1, 2, \ldots$ heißen Homotopiegruppen des Raumes X.*

Die im allgemeinen nicht abelsche Gruppe $\pi_1(X, x)$ wird auch Fundamentalgruppe genannt. Die Gruppen $\pi_i(X, x)$, $i \geq 2$, sind abelsch. Wenn der Basispunkt klar ist, schreibt man of auch kurz $\pi_i(X) := \pi_i(X, x)$.

Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus in $h\mathtt{Top}_*$, dann gibt es eine Abbildung

$$f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(Y) \ ,$$

welche durch Nachschalten definiert wird.

1. Für $i < n$ gilt $\pi_i(S^n) = 0$. In der Tat ist eine Abbildung $f : S^i \to S^n$ homotop zu einer glatten Abbildung. Nach dem Satz von Sard hat sie einen regulären Punkt, was bedeutet, daß dieser Punkt nicht im Bild ist. Damit faktorisiert f über $\mathbb{R}^n$ und ist damit homotop zu einer konstanten Abbildung.

2. Es gilt $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Einen Isomorphismus $\deg : \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$ erhält man wie folgt. Sei $[f] \in \pi_n(S^n)$ glatt und $x \in S^n$ regulärer Wert. Dann ist

   $$\deg_x(f) := \sum_{y \in f^{-1}(x)} \mathtt{sign} \det(df(y))$$

   unabhängig von der Wahl von x und wir setzen $\deg(f) := \deg_x(f)$ für einen regulären Weg. Die Definition des Vorzeichens von $\det(df(y))$ benutzt die Orientierung von S^n.

3. Das Hopfbündel $h : S^3 \to \mathbb{CP}^1 \cong S^2$ ist ein Generator von $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Im allgemeinen sind die Homotopiegruppen $\pi_i(S^n)$ nur für im Vergleich zu n kleine i bekannt.

2.2.1.3 Faserungen und lange exakte Sequenz Ungeachtet der zusätzlichen Gruppenstruktur ist $\pi_i(X, x)$ sind die Homotopiegruppen immer noch sehr kompliziert. Wir werden später durch Stabilisieren weitere Vereinfachungen errreichen. Eine Methode ist die lange exakte Sequenz einer Faserung.

Sei $\pi : E \to B$ ein lokal triviales Faserbündel mit Faser F. Wir identifizieren F mit $\pi^{-1}(b)$, wobei $b \in B$ der Basispunkt ist. Der Basispunkt von E ein Basispunkt dieser Faser. Dann gibt es eine lange exakte Squenz

$$\begin{aligned} \cdots \to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \dots \\ \cdots \to \pi_1(B) \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(B) \end{aligned}$$

wobei das Ende dieser Sequenz als exakt in punktierten Mengen verstanden wird.

Im folgenden wenden wir diese Sequenz auf einige Berechnungen an.

1. Das Bündel $EG \to BG$ und die Kontrahierbarkeit von EG liefert $\pi_i(G) \cong \pi_{i+1}(BG)$. Insbesondere ist $\pi_1(G)$ für jede Gruppe abelsch.

2. Die einzige nicht-verschwindende Homotopiegruppe von S^1 ist $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Damit ist $\pi_2(BS^1)$ die einzige nicht-verschwindende Homotopiegruppe von BS^1.

3. Wir benutzen nun das Modell $BS^1 \cong U/S^1 \cong PU$. Da $S^1 \subset U$ zentral ist, ist PU wieder eine topologische Gruppe. Die einzige nicht-verschwindende Homotopiegruppe von BPU ist $\pi_3(BPU) \cong \mathbb{Z}$.

4. In der Tat gibt es für abelsche Gruppen G eine Konstruktion von BG mit einer wiederum abelschen Gruppenstruktur. Wir können damit die Konstruktion des klassifizierenden Raumes iterieren und beispielsweise einen Raum

$$B^n G \cong \underbrace{B \circ \cdots \circ B}_{n\text{-mal}} G$$

definieren, dessen einizige nicht-triviale Homotopiegruppe $\pi_n(B^n G) \cong G$ ist.

Die lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen gibt es allgemeiner für Faserungen. Eine Abbildung $E \to B$ basierter Räume heißt Faserung, falls sie die Homotopieliftungseigenschaft hat:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X \wedge I_+ \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd},$$

wobei die Abbildung $X \cong X \wedge \{0\}_+ \to X \wedge I_+$ durch die Einbettung des Nullpunktes in I gegeben wird.

Für eine beliebige Abbildung $\pi : E \to B$ betrachten wir das cartesische Diagram

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, dotted, "r"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\mathtt{id}_E"] \arrow[dr, bend right=60, "d"'] & P \arrow[r, "s"] \arrow[d] \arrow[dl, "f"] & E \arrow[d] \\
B & B^{I_+} \arrow[l, "\mathtt{ev}_1"] \arrow[r, "\mathtt{ev}_0"] & B
\end{tikzcd} \tag{14}$$

wobei die Abbildung $d : E \to B^{I_+}$ dem Punkt e die Konstante Abbildung $c(\pi(e)) : I \to B$ mit dem Wert $\pi(e)$ zuordnet.

Lemma 2.35 *1. $P \to B$ is eine Faserung.*

2. $r : E \to P$ ist eine Homotopieäquivalenz.

Beweis: Sei ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & P \arrow[d] \\
X \wedge I_+ \arrow[r, "\sigma"] \arrow[ur, dotted, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

gegeben. Wir interpretieren σ und p als Abbildungen $X \to B^{I_+}$ und $X \to P^{I_+}$ (Adjunktion). Für jedes $x \in X$ haben wir ein Paar $i(x) = (\gamma_x, e_x) \in P \subset B^{I_+} \times E$ und $\sigma_x \in B^{I_+}$ mit $\gamma_x(0) = \pi(e)$ und $\gamma_x(1) = \sigma(0)$ gegeben. Wir definieren den Weg $p_x := (\theta_x, e_x) \in P^{I_+}$ durch

$$\theta_x^s(u) = \left\{ \begin{array}{cc} \gamma_x((1+s)u) & (1+s)u \le 1 \\ \sigma_x((1+s)u - 1) & u(1+s) \ge 1 \end{array} \right. .$$

Dann gilt $f(p_x(s)) = \sigma_x(s)$ und $p_x(0) = (\gamma_x, e_x)$. Die Abbildung $x \mapsto p_x \in P^{I_+}$ ist also (nach Adjunktion) der gesuchte Lift.

Es gilt $s \circ r = \mathtt{id}_E$. Es reicht zu zeigen, daß $r \circ s \sim \mathtt{id}_P$. Sei $(\gamma, e) \in P$, $e \in E$ und $\gamma \in B^{I_+}$ mit $\gamma(0) = \pi(e)$. Dann ist $r \circ s(\gamma, e) = (c(\pi(e)), e)$. Die gesuchte Homotpie wird durch (γ_h, e) gegeben, wobei $\gamma_h(u) = \gamma(uh)$, $u, h \in I$. ■

Jede Abbildung $f : E \to B$ ist also homotopieäquivalent zu einer Faserung.

Definition 2.36 *Sei $f : E \to B$ gegeben und $P \to B$ wie oben definiert. Durch das cartesische Diagram*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "i"] \arrow[d] & P \arrow[d, "p"] \\
* \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

wird die Homotopiefaser von f definiert.

Ein Punkt in F ist also ein Paar (e, γ) mit $\gamma(0) = \pi(e)$ und $\gamma(1) = b$ (der Basispunkt von B).

Lemma 2.37 *Für eine Faserung $E \to B$ mit Faser F gibt es eine lange (funktorielle) exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} \dots \to \pi_i(F) \to \pi_i(E) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \dots \\ \dots \to \pi_1(B) \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(B) \end{aligned}$$

von Homotopiegruppen.

Beweis: Wir können $E \to B$ durch $p : P \to B$ ersetzen. Wir konstruieren den Randoperator $\delta : \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F)$. Sei $[f] \in [S^i, B] = \pi_i(B)$. Wir benutzen $S^i = S^1 \wedge S^{i-1}$ und interpretieren

$$f : S^{i-1} \to B^{S^1} \to B^{I_+} \ .$$

Diese Abbildung zusammen mit der konstanten Abbildung $S^{i-1} \to E$ in den Basispunkt kann als eine Abbildung $S^{i-1} \to F$ interpretiert werden. Diese Abbildung repräsentiert $\delta[f] \in \pi_{i-1}(F)$. Für einen Beweis der Exaktkeit verweisen wir auf das Buch [Swi75], Kap. 4 oder [tD91], Kap. 13.

2.2.1.4 Beispiele für H-Räume

Eine Gruppe G ist in natürlicher Weise ein H-Raum. Wenn $\alpha : X \to X \vee X$ eine co-H-Raum(Gruppen)struktur auf $X \in \mathtt{Top}_*$ ist, dann ist für jedes $Y \in \mathtt{Top}_*$ die Abbildung $\alpha^* : Y^X \times Y^X \cong Y^{X \vee X}$ eine H-Raum(Gruppen)struktur auf Y^X. Insbesondere ist also $\Omega^n X := X^{S^n}$ ein H-Raum, welcher für $n \geq 2$ sogar kommutativ ist.

Für eine H-Gruppe X hat $\pi_i(X)$ zwei Gruppenstrukturen mit dem gleichen 1-Element. Diese Strukturen stimmen notwendigerweise überein.

2.2.1.5 Eilenberg-MacLane Räume und Kohomologie

Für eine diskrete Gruppe G gilt

$$\pi_i(BG) \cong \begin{cases} 0 & i \neq 1 \\ G & i = 1 \end{cases}$$

Wir schreiben auch

$$K(G, 1) := BG \ .$$

Definition 2.38 *Sei G eine abelsche Gruppe. Der Homotopietyp $K(G, n)$ des Eilenberg-Mac-Laneraumes wird für $n \geq 0$ durch einen Raum mit*

$$\pi_i(K(G, n) \cong \begin{cases} 0 & i \neq n \\ G & i = n \end{cases}$$

repräsentiert.

Sind X, Y zwei Repräsentanten des Homotopietypes $K(G,n)$ und ein Isomorphismus $\phi : \pi_n(X) \stackrel{\sim}{\to} \pi_n(Y)$ fixiert. Dann gibt es genau eine Homotopieklasse von Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f_* = \phi$.

Mit Hilfe der iterierten Konstruktion von klassifizierenden Räumen kann man die Existenz von Eilenberg-MacLane Räumen zeigen. Diese Konstruktion liefert gleich noch eine H-Raumstruktur auf $K(G,n)$ mit.

Definition 2.39 *Die Gruppen $H^n(X,G) := [X, K(G,n)]$ heißen Kohomologiegruppen von X mit Koeffizienten in G.*

Wir betrachten I mit dem Basispunkt $0 \in I$ und betrachten für einen basierten Raum X die Auswertung der Wege in $1 \in I$

$$X^I \to X \ .$$

Diese Abbildung ist eine Faserung mit Faser ΩX. Mit I ist auch X^I kontrahierbar. Damit gilt nach der exakten Homotopiesequenz

$$\pi_i(\Omega X) \cong \pi_{i+1}(X) \ .$$

Daraus schließen wir, daß

$$\Omega K(G,n) \cong K(G,n-1)$$

gilt, also

$$K(G,n) \cong \Omega^m K(G,n+m) \ .$$

Definition 2.40 *Ein Raum $X \in \mathtt{Top}_*$ ist ein unendlicher Schleifenraum, wenn es für jedes $n \geq 0$ einen Raum $Y \in \mathtt{Top}_*$ und eine Homotopieäquivalenz $\Omega^n Y_n \cong X$ gibt. Eine unendliche Schleifenraumstruktur besteht aus der Folge der Räume Y_n und diesen Äquivalenzen.*

Der Raum $K(G,n)$ ist also ein unendlicher Schleifenraum.

2.2.2 Kohomologieberechnungen

2.2.2.1 Lange exakte Sequenz In diesem Abschnitt arbeiten wir mit punktierten Räumen. Die Kohomologiegruppen sind entsprechend reduziert. For eine diskrete abelsche Gruppe hatten wir gesehen, daß $BG \cong K(G,1)$. Weiter hatten wir gesehen, daß $BS^1 \cong K(\mathbb{Z},2)$ und $BPU \cong K(\mathbb{Z},3)$. Folglich gilt

$$\bar{P}_G(X) \cong H^1(X_+, G) \ , \bar{P}_{S^1}(X) \cong H^2(X,\mathbb{Z}) \ , \bar{P}_{PU}(X) \cong H^3(X,\mathbb{Z}) \ .$$

Im Unterschied zu allgemeinen Mengen $[X,Y]$ lassen sich die Kohomologiegruppen $H^*(X,G)$, oder allgemeiner die Abbildungen $[X,E]$ in einen unendlichen Schleifenraum E leichter berechnen.

Sei $(E^n, \Omega E^n \cong E^{n-1})$ eine unendliche Scheifenraumstruktur (auf E_0 und damit auf allen E^n). Sei $X \in \mathtt{Top}_*$. Wir setzen $E^n(X) := [X, E^n]$. Es gilt

$$E^n(\Sigma X) \cong [\Sigma X, E^n] \cong [X, \Omega E^n] \cong [X, E^{n-1}] \cong E^{n-1}(X) \ .$$

Sei $f : A \subseteq X$ ein Unterraum. Dann können wir die sogenante Kofaserequenz (wie wir unten sehen werden bilden Abbildungen aus einer Kofaserseqeunz heraus eine Fasersequenz)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathtt{cyl}(f) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathtt{cone}(f) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \Sigma A \\
A \arrow[r] & X \arrow[u, bend left] \arrow[r] & X/A &
\end{tikzcd}$$

betrachten. Die zweite vertikale Abbildung ist eine Homotopieäquivalenz, wenn die Einbettung von A in X gutartig ist (man sagt Kofaserung). Wir erhalten eine Sequenz

$$\begin{tikzcd}
{[A, E^n]} \arrow[d, equal] & {[\mathtt{cyl}(f), E^n]} \arrow[l] \arrow[d, "\cong"] & {[\mathtt{cone}(f), E^n]} \arrow[l] \arrow[d, "\cong"] & {[\Sigma A, E^n]} \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
E^n(A) & E^n(X) \arrow[l] & E^n(X/A) \arrow[l] & E^{n-1}(A) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Satz 2.41 *Diese Sequenz ist exakt.*

Beweis: Wir betrachten die Abbildung $f^* : \mathtt{Map}(X, E^n) \to \mathtt{Map}(A, E^n)$ welche im Diagram

$$\begin{tikzcd}
& \mathtt{Map}(\mathtt{cone}(f), E^n) \arrow[r] \arrow[dl] & \mathtt{Map}(\mathtt{cyl}(f), E^n) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] & \mathtt{Map}(X, E^n) \arrow[d] \\
* \arrow[r] & \mathtt{Map}(A, E^n) & \mathtt{Map}(A, E^n)^{I_+} \arrow[l] \arrow[r] & \mathtt{Map}(A, E^n)
\end{tikzcd}$$

in eine Faserung verwandelt wird (vergl. (14)). Wir sehen, daß

$$\mathtt{Map}(\mathtt{cone}(f), E^n) \to \mathtt{Map}(\mathtt{cyl}(f), E^n) \to \mathtt{Map}(A, E^n)$$

eine Fasersequenz ist. Die lange exakte Sequenz entsteht nun durch Anwenden von π_0. ∎

Mit diesem Satz können wir schon einige Berechnungen manchen.

1. Es gilt

$$H^i(S^n; G) \cong \begin{cases} G & i = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Wir schreiben $S^n \cong \Sigma^n S^0$ und damit

$$H^i(S^n, G) \cong H^{i-n}(S^0; G)$$

   woraus das Resultat unmittelbar folgt.

2. Wir können $H^*(\mathbb{CP}^n;G)$ induktiv berechnen. Wir haben eine natürliche Einbettung
$$f:\mathbb{CP}^n\subset\mathbb{CP}^{n+1}\ .$$
und es gilt
$$\mathbb{CP}^{n+1}/\mathbb{CP}^n\cong S^{2n+2}$$
(das Komplement $\mathbb{CP}^{n+1}\setminus\mathbb{CP}^n$ ist $\mathbb{C}^{n+1}$, und die Sphäre entsteht durch Einpunktkompaktifizierung) Eine Analyse der langen exakten Sequenz und Induktion nach n liefert
$$H^i(\mathbb{CP}^n;G)\cong\left\{\begin{array}{cc} G & i=2,\dots,2n-2,2n\\ 0 & \text{sonst}\end{array}\right.$$

2.2.2.2 Der Kettenkomplex In diesem Kapitel wollen wir die Kohomologie von CW-Komplexen berechnen.

Definition 2.42 *Ein CW-Komplex ist ein Raum X mit einer Filtration $*=X^0\subseteq X^1\subseteq X^2\cdots\subseteq X$ derart, daß X^i aus X^{i-1} durch ein push-out Diagramm*
$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{\alpha\in I_i}S^{i-1} \arrow[r]\arrow[d] & X^{i-1}\arrow[d]\\ \bigsqcup_{\alpha\in I_i}D^i\arrow[r] & X^i\end{tikzcd}$$
entsteht und $X=\mathtt{colim_i X^i}$ gilt.

Wir betrachten die langen exakten Sequenzen der Paare
$$X^i\subseteq X^{i+1}$$
und erhalten folgendes Diagramm (wir vereinfachen die Notation und lassen $\dots,G$ in der Notation der Kohomologiegruppen weg)
$$\begin{tikzcd} 0\arrow[r] & H^{i-2}(X^{i-2})\arrow[r] & H^{i-2}(X^{i-1})\arrow[r] & C^{i-1}(X,G)\arrow[r]\arrow[d, "d_{i-1}"] & H^{i-1}(X^{i-1})\arrow[r]\arrow[dll, dotted] & 0\\ 0\arrow[r] & H^{i-1}(X^i)\arrow[r] & H^{i-1}(X^{i-1})\arrow[r] & C^i(X,G)\arrow[r]\arrow[d, "d_i"] & H^i(X^i)\arrow[r]\arrow[dll, dotted] & 0\\ 0\arrow[r] & H^i(X^{i+1})\arrow[r] & H^i(X^i)\arrow[r] & C^{i+1}(X,G)\arrow[r] & H^{i+1}(X^{i+1})\arrow[r] & 0\end{tikzcd}$$
wobei
$$C^i(X;H):=H^i(\bigsqcup_{\alpha\in I_i}D^i/\bigsqcup_{\alpha\in I_i}S^{i-1})\cong\prod_{\alpha\in I}H^i(S^i;G)\cong\prod_{\alpha\in I}G$$
ist. Wir schließen induktiv, daß $H^n(X^i;G)\cong 0$ für $n\geq i+1$, und daß $H^n(X^i;G)\cong H^n(X^{i+1};G)$ für $n\leq i-1$. Durch eine Diagrammjagt sehen wir ein, daß
$$H^i(X;G)\cong\ker(d_i)/\mathtt{Im}(d_{i-1})\ .$$

Für Berechnungen brauchen wir eine Beschreibung des Differentials $d_i : C^i(X;G) \to C^{i+1}(X;G)$. Sei $\alpha \in I_i$ und $G_\alpha \subseteq C^i(X;G)$ der zu α gehörige Summand. Wir müssen die Komponente $d_{\beta,\alpha} : G_\alpha \to G_\beta$ in von $d_i : C^i(X;G) \to C^{i+1}(X;G)$ für $\beta \in I_{i+1}$ ausrechnen. Dazu betrachten wir

$$\begin{tikzcd}
 & S^i_\beta \arrow[r, "j"] \arrow[d, "s"] & D^{i+1}_\beta \arrow[r] \arrow[d] & S^{i+1}_\beta \arrow[d] \\
 & X^i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "r"] & X^{i+1} \arrow[r] & X^{i+1}/X^i \\
* \arrow[r] & X^i/X^i \setminus \mathtt{int} D^i \arrow[r, "\cong"] & S^i_\alpha & \\
S^{i-1}_\alpha \arrow[r] \arrow[u] & D^i_\alpha \arrow[r] \arrow[u] & S^i_\alpha \arrow[u, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Wir sehen, daß $d_{\beta,\alpha} = s^* \circ r^* : G \to G$ ist, wobei

$$H^i(S^i_\beta;G) \overset{\delta}{\cong} H^{i+1}(D^{i+1}_\beta/S^i_\beta, G) \cong G_\beta \ , \quad G_\alpha \cong H^i(D^i_\alpha/S^{i-1}_\alpha;G) \cong H^i(S^i_\alpha;G)$$

benutzt wurde.

Für $G \cong \mathbb{Z}$ ist $d_{\beta,\alpha} = \deg(r \circ s)$.

2.2.2.3 Weitere Berechnungen

1. Wir betrachten den twei-dimensionalen Torus $T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Eine Zellzerlegung ist durch das Einheitsquadrat gegeben. Wir haben eine Nullzelle α^0, zwei Einszellen α^1, β^1 und eine Zweizelle γ^2. Wir sehen ein, daß alle Randoperatoren verschwinden. Folglich gilt
$$H^i(T^2;G) \cong \left\{ \begin{array}{cc} 0 & i=0, \quad i \geq 3 \\ G \oplus G & i=1 \\ G & i=2 \end{array} \right. .$$

2. Wir betrachten den reellen projektiven Raum. Wir haben $\mathbb{RP}^0 \subset \mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2 \dots$, und die Komplemente $\mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^{n-1} \cong \mathbb{R}^n$ sind jeweils das Innere einer n-Zelle. Um das Differential $d_i : G \to G$ zu studieren, konstruieren wir zunächste eine Zellzerlegung von S^n mit zwei Zellen in jeder Dimension ≥ 1 und einer Null-Zelle. Die Zellen von S^n ergeben sich aus den Zellen von $S^{n-1} \subset S^n$ (Äquator) und den Halbsphären $S^n_\pm$. Als Modell für die Zellen mögen immer die oberen Halbsphären dienen. Die unteren Halbsphären werden dann über die antipodale Involution parametrisiert. Die antipodale Involution flipt die Orientierung geradedimensionaler Sphären. Ist α^+ eine obere $2n$-Zelle und β^+ die zugehörige obere $2n+1$-Zelle. Dann ist $d_{\beta^+,\alpha^+} = 1 = d_{\beta^-,\alpha^-}$. Weiter ist $d_{\beta^+,\alpha^-} = -1 = d_{\beta^-,\alpha^+}$. Wir

haben weiter für eine $2n+2$-Zelle $d_{\gamma^+,\beta^+} = d_{\gamma^-,\beta^+} = d_{\gamma^+,\beta^-} = d_{\gamma^-,\beta^+} = 1$. Wir sehen, daß

$$d^2_{\gamma^+,\alpha^+} = d_{\gamma^+,\beta^-} \circ d_{\beta^-,\alpha^+} + d_{\gamma^+,\beta^+} \circ d_{\beta^+,\alpha^+} = -1+1 = 0 \ .$$

Faktorisierung nach der antipodalen Involution liefert gerade die obige Zellzerlegung von $\mathbb{RP}^n$.

Betrachten wir zunächst $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann spielen Orientierungen keine Rolle und alle Differentiale verschwinden. Wir sehen, daß

$$H^i(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0 & i=0, \quad i \geq n+1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & i = 1,\dots,n \end{cases} .$$

Mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten sieht die Berechnung etwas anders aus. Nun ist für eine $2n$-Zelle $d\alpha = d_{\beta^+,\alpha^+} + d_{\beta^-,\alpha^+} = 0$ und für eine $2n+1$-Zelle $d\beta = d_{\gamma^+,\beta^+} + d_{\gamma^-,\beta^+} = 2$. Der Komplex ist jetzt

$$0 \to \mathbb{Z} \stackrel{2}{\to} \mathbb{Z} \stackrel{0}{\to} \mathbb{Z} \stackrel{2}{\to} \mathbb{Z} \stackrel{0}{\to} \dots \ .$$

Wir sehen, daß

$$H^i(\mathbb{RP}^{2n};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0 & i = \text{ungerade}, \quad i \geq n+1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & i = 2,4,\dots,2n \end{cases} .$$

$$H^i(\mathbb{RP}^{2n+1};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0 & i = \text{ungerade}, \quad i \geq n+1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & i = 2,4,\dots,2n \\ \mathbb{Z} & i = 2n+1 \end{cases} .$$

2.3 Chernklassen

2.3.1 Vorbereitungen

2.3.1.1 Charakteristische Klassen Da $BU(1) \cong K(\mathbb{Z},2)$ gilt, haben wir eine Klassifikation von $U(1)$-Hauptfaserbündeln auf einem Raum X durch $H^2(X;\mathbb{Z})$. Wir fixieren das Modell $BU(1) \cong \mathbb{CP}^\infty$ mit dem universellen Bündel $\eta : S^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$. Indem wir das Modell $K(\mathbb{Z},2) := \mathbb{CP}^\infty$ wählen, legen wir ferner einen Isomorphismus $H^2(X,\mathbb{Z}) := [X,\mathbb{CP}^\infty]$ fest.

Definition 2.43 *Die Chernklasse $c_1(P \to X) \in H^2(X;\mathbb{Z})$ eines $U(1)$-Hauptfaserbündels über X ist die das negative Kohomologieklasse, welche durch die klassifizierende Abbildung $f : X \to \mathbb{CP}^\infty$ mit $f^*(S^\infty \to \mathbb{CP}^\infty) \cong (P \to X)$ gegeben wird.*

Durch die obigen Wahlen wird das Vorzeichen der Klasse c_1 festgelegt. Die Wahl ist so getroffen, daß die Auswertung von $c_1(H)$ auf der kanonischen (d.h. durch die komplexes Struktur festgelegte) Orientierung $[\mathbb{CP}^1]$ den Wert -1 ergibt, wobei $H \to \mathbb{CP}^1$ das tautologische Geradenbündel ist.

Wegen $H^2(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt es auf $\mathbb{RP}^n$ zwei Isomorphieklassen von $U(1)$-Hauptfaserbündeln, nämlich die des trivialen und des nicht-trivialen.

Die $U(1)$-Hauptfaserbündel über T^2 werden durch $\mathbb{Z}$ klassifiziert.

Für eine allgemeine topologische Gruppe H ist BH kein Eilenberg-MacLane Raum. Deshalb ist $\bar{P}_H(X)$ nicht einfach eine Kohomologiegruppe. Trotzdem kann man Kohomologie verwenden, um $\bar{P}_H(X)$ zu beschreiben.

Wir fixieren eine abelsche Gruppe G und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $X \to H^n(X;G)$ ein Funktor

$$H^n(\dots;G) : \mathtt{Top}_*^{op} \to \mathtt{Sets}_* \ .$$

Definition 2.44 *Eine Charakteristische Klasse für H-Hauptfaserbündel ist eine natürliche Transformation von Funktoren*

$$c : \bar{P}_H \to H^n(\dots;G) \ .$$

Die erste Chernklasse $c_1 : \bar{P}_{U(1)} \to H^2(\dots;\mathbb{Z})$ ist also ein Beispiel einer charakteristischen Klasse.

Da $\bar{P}_H$ durch ein universelles Bündel $EH \to BH$ dargestellt wird, stehen die charakteristische Klassen in Bijektion mit den Elementen von $H^n(BH,G)$. In der Tat, sei $h \in H^n(BH;G)$ eine Kohomologieklasse. Die dazugehörige charakteristische Klasse $c_h : \bar{P}_G \to H^n(\dots;G)$ ist durch $c_h(f^*EH \to X) := f^*h$ für $f : X \to BG$ gegeben. Wir nennen h die universelle Klasse zu c_h.

Ein typische Anwendung charakteristischer Klassen ist der Schluß

$$c(P \to X) \neq 0 \Rightarrow P \to X \text{ ist nicht trivial} \ .$$

Für Anwendungen müssen wir die Kohomologie von BH oder zumindest interessante Klassen darin und deren geometrische Bedeutung kennen.

2.3.1.2 Künnethformel

Sei

$$* = X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots = X$$

ein CW-Komplex und R ein Ring. Wir hatten gesehen, daß $H^*(X)$ als Kohomologie eines Kettenkomplexes $C^*(X,R)$ berechnet werden kann.

Ist

$$* = Y^0 \subseteq Y^1 \subseteq \dots = Y$$

ein weiterer CW-Komplex, dann ergibt sich eine natürliche Darstellung von $Z := X \wedge Y$ als CW-Komplex. Es gilt

$$Z^i = \cup_{p+q=i} X^p \wedge Y^q$$

In der Tat ist e_α eine p-Zelle von X und f_β eine q-Zelle von Y, dann ist $e_\alpha \wedge f_\beta$ eine $p+q$-Zelle von Z. Wir nehmen an, daß X (oder Y) in jedem Grad höchstens endlich viele Zellen hat. Wir erhalten dann

$$C(Z,R) \cong C(X,R) \otimes_R C(Y,R)$$

mit der Graduierung

$$C^i(Z;R) \cong \oplus_{p+q=i} C^p(X;R) \otimes_R C^q(X,R) \ .$$

und es gilt

$$d(e \otimes f) = de \otimes f + (-1)^{\deg(e)} e \otimes f \ .$$

Der Zusammenhang zwischen der Kohomologie von $C(Z;R)$ und den Kohomologien der Faktoren $C(X;R)$ und $C(Y;R)$ wird durch die Künnethformel beschrieben.

Insbesondere haben wir eine offensichtliche Abbildung

$$\times : H^*(X;R) \otimes_R H^*(Y;R) \to H^*(Z;R) \ ,$$

welche aber im allgemeinen kein Isomorphismus ist. Es gilt jedoch:

Lemma 2.45 *Wenn $H^*(X;R)$ ein projektiver R-Modul ist, dann ist $\times : H^*(X;R) \otimes_R H^*(Y;R) \to H^*(Z;R)$ ein Isomprphismus.*

1. Es gilt $H^*(S^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\epsilon]$ mit $\epsilon^2 = 0$ und $\deg(\epsilon) = 1$. Dieser $\mathbb{Z}$-Modul ist frei. Folglich gilt (Induktion)
$$H^*(T^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\epsilon_1, \dots, \epsilon_n] \cong \Lambda^*(\mathbb{Z}^n) \ .$$

2. Es gilt
$$H^i(S^p \times S^q;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = p, q, p+q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3. Nun ist $H^2(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dieser $\mathbb{Z}$-Modul ist nicht frei. Folglich ist $\times$ kein Isomorphismus.

   Lemma 2.46 *Die Künnethformel für den Ring $\mathbb{Z}$ besagt*

   $$0 \to \oplus_{i+j=n} H^i(X;\mathbb{Z}) \times H^j(Y;\mathbb{Z}) \to H^n(Z;\mathbb{Z}) \to \oplus_{i+j=n-1} H^i(X;\mathbb{Z}) * H^j(Y,\mathbb{Z}) \to 0 \ .$$

   Wegen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ erhalten wir

   $$H^i(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0 & i = 0,1,2 \quad , i \geq 5 \\ \mathbb{Z}/2 & i = 3,4 \end{cases}$$

2.3.1.3 Ringstruktur auf der Kohomologie Das externe Produkt hängt nur von X und Y ab, nicht aber von deren Filtration oder CW-Darstellung.

Sei $\Delta : X \to X \wedge X$ die Diagonale. Durch

$$\cup : \Delta^* \circ \times : H^*(X,R) \otimes_R H^*(X;R) \to H^*(X;R)$$

wird $H^*(X;R)$ ein graduiert-kommutativer Ring.

1. $$H^*(\mathbb{CP}^n,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[z]/(z^{n+1}) \ , \deg(z) = 2 \ .$$

2. $H^*(T^n;\mathbb{Z}) \cong \Lambda^*(\mathbb{Z}^n)$.

3. $H^*(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[[u]] \ , \deg(u) = 1$.

2.3.1.4 Die Kohomologie von $\mathbb{CP}^n$-Bündeln

Sei $V \to X$ ein lokal-triviales $n+1$-dimensionales $\mathbb{C}$-Vektorbündel und $E := V/\mathbb{C}^* \to X$ das assoziierte projektive Bündel. Wir identifizieren X mit dem Nullschnitt von V. Dann ist $H : (V \setminus X) \to E$ ein C^*-Hauptfaserbündel. Mit $c(H) \in H^2(E;\mathbb{Z})$ bezeichnen wir die erste Chernklasse von H. Die Einschränkungen der Klassen $1, c(H), c(H)^2, \ldots, c(H)^n$ auf die Fasern von E liefern additive Basen.

Mit dieser Iormation können wir die Kohomologie $H^*(E;\mathbb{Z})$ bestimmen.

Satz 2.47 (Leray-Hirsch) *Sei $E \to X$ ein Faserbündel über einer kompakten Basis und $u_1, \ldots, u_r \in H^*(E,\mathbb{Z})$ Klassen, welche für jede Faser eine additive Basis der Kohomologie induzieren. Dann ist $H^*(E;\mathbb{Z})$ eine freier $H^*(X;\mathbb{Z})$-Module mit den Erzeugenden $u_1, \ldots u_r$.*

Beweis: Wir haben eine Abbildung

$$\Phi : u_1 H^*(X;\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus u_r H^*(X;\mathbb{Z}) \to H^*(E;\mathbb{Z}) \ ,$$

$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = u_1 \cup \alpha_1 + \cdots + u_r \alpha_r$. Wir müssen zeigen, daß Φ eine Isomorphismus ist. Wenn $E \to X$ trivial ist, dann ist das klar nach der Künnethformel.

Wir wählen eine endliche Überdeckung (U_i) von X, so daß $E_{|U_i}$ trivial ist und setzen $V_i := \cup_{j \le i} U_i$. Wir nehmen induktiv an, daß $\Phi_{|V_i}$ ein Isomorphismus ist. Dann betrachten wir die Mayer-Vietoris Sequenz

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^*(E_{|V_{i+1}};\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^*(E_{|V_i};\mathbb{Z}) \oplus H^*(E_{|U_i};\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^*(E_{|V_i \cap U_i};\mathbb{Z}) \arrow[r] & \cdots \ . \\
\cdots \arrow[r] & \oplus_{i=1}^r H^*(V_{i+1};\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_{|V_{i+1}}"] & \oplus_{i=1}^r H^*(V_i;\mathbb{Z}) \oplus \oplus_{i=1}^r H^*(U_i;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_{|V_i} \oplus \Phi_{|U_i}"] & \oplus_{i=1}^r H^*(V_i \cap U_i;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi_{|V_i \cap U_i}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wir überzeugen und, daß wegen $\delta(u_i \cup \alpha) = u \cup \delta_\alpha$ (weil $\delta u = 0$, da u von einer globalen Klasse kommt) das Diagram kommutiert. Nach Induktionsvoraussetzung (bzw weil das Bündel trivial ist), sind $\Phi_{|V_i} \oplus \Phi_{|U_i}$ und $\Phi_{|V_i \cap U_i}$ Isomorphismen, und somit auch $\Phi_{|V_i}$. ■

Wenden wir diesen Satz auf das $\mathbb{CP}^n$-Bündel $E \to X$ an, dann erhalten wir

$$H^*(E;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=0}^n c(H)^i H^*(X;\mathbb{Z}) \ .$$

Insbesondere gilt also

$$0 = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j c_j(V) c(H)^{n+1-j}$$

für wohldefierte Klassen $c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$.

Definition 2.48 *Die Klassen $c_i(V) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$ heißen Chernklassen des Vektorbündels $E \to X$.*

Wir nutzen nun den Zusammenhang zwischen $\mathbb{C}^{n+1}$-Bündeln $V \to X$ und $U(n+1)$-Hauptfaserbündeln $P \to X$ aus, welcher durch $V = P \times_{U(n+1)} \mathbb{C}^{n+1}$ bzw. durch die Wahl einer Metrik und der Bildung des Rahmenbündels festgelegt wird. Stehen E und P in dieser Beziehung, so können wir auch $c_i(P) := c_i(V)$ schreiben und von den Chernklassen eines $U(n+1)$-Hauptfaserbündels sprechen.

Lemma 2.49 *Die Zuordnung*

$$\bar{P}_{U(n+1)}(X) \ni (P \to X) \mapsto c_i(P) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$$

ist eine charakteristische Klasse für $U(n+1)$.

Beweis: Wir betrachten ein pull-back Diagramm von $U(n+1)$-Hauptfaserbündel

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} .$$

Dieses führt (durch Anwendung von $\dots/U(1)\times U(n)$ auf die Totalräume) zu einem cartesischen Diagramm

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

von $\mathbb{CP}^n$-Bündeln. Seien $L \to F$ und $H \to E$ die kanonischen Bündel. Dann gilt $\hat{f}^*H = L$ und damit $\hat{f}^*c(H) = c(L)$. Wir wenden $\hat{f}^*$ auf $0 = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^j c_j(P)c(H)^{n+1-j}$ an und erhalten

$$0 = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^j f^*c_j(P)c(L)^{n+1-j} .$$

Dies zeigt die Natürlichkeit $f^*c_i(P) = c_i(Q)$ der i-ten Chernklasse. ∎

Mit $c_i \in H^{2i}(BU(n);\mathbb{Z})$ bezeichnen wir die universelle Chernklasse.

2.3.1.5 Die Kohomologie von $BU(n)$ Wir haben Klassen $c_i \in H^{2i}(BU(n);\mathbb{Z})$, $i = 2,\dots,n$, definiert. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß diese Klassen in der Tat nicht-trivial sind und die Kohomologie von $BU(n)$ als Ring aufspannen.

Satz 2.50 *Es gilt* $H^*(BU(n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[d_1,\dots,d_n]$ *mit* $|d_i| = 2i$.

Beweis: Wir argumentieren induktiv unter Verwendung der Faserungen

$$S^{2n-1} \to BU(n-1) \to BU(n) .$$

Lemma 2.51 *Sei $\pi : E \to X$ ein lokal-triviales Faserbündel mit Faser S^{n-1}. Dann gibt es eine lange exakte Gysin-Sequenz*

$$\dots \xrightarrow{\chi\cup\dots} H^k(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^k(E;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_!} H^{k-n+1}(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\chi\cup\dots} H^{k+n}(X;\mathbb{Z}) \dots$$

für eine Klasse $\chi \in H^n(X;\mathbb{Z})$, welche Euler-Klasse des Sphärenbündels genannt wird.

Da $H^*(BU(n-1);\mathbb{Z})$ in geraden Graden lebt, gilt (damit wird d_n definiert)

$$\dots \to H^{2k-1-2n}(BU(n);\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_n\cup} H^{2k-1}(BU(n);\mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} 0 \ .$$

Wir haben also eine Folge von Surjektionen

$$H^{2k-1}(BU(n);\mathbb{Z}) \leftarrow H^{2k-1-2n}(BU(n);\mathbb{Z}) \leftarrow H^{2k-1-4n}(BU(n);\mathbb{Z}) \leftarrow \dots \ .$$

Daraus folgt $H^{2k-1}(BU(n);\mathbb{Z}) = 0$. Damit ist auch $H^*(BU(n);\mathbb{Z})$ in geraden Graden konzentriert. Dort gilt

$$0 \xrightarrow{f_!} H^{2k-2n}(BU(n);\mathbb{Z}) \xrightarrow{d_n\cup\dots} H^{2k}(BU(n);\mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} H^{2k}(BU(n-1);\mathbb{Z}) \to 0 \ .$$

Wir sehen also, daß $\ker(f^*)$ von d_n erzeugt wird. Weiter gilt

$$H^{2k}(BU(n);\mathbb{Z}) \cong H^{2k}(BU(n-1);\mathbb{Z}) \oplus d_n H^{2k-2n}(BU(n);\mathbb{Z}) \ .$$

Daraus schließt man

$$H^*(BU(n);\mathbb{Z}) \cong H^*(BU(n-1)) \otimes \mathbb{Z}[d_n]$$

als Ring. Es bleibt jetzt nur zu zeigen, daß die Klassen $c_i \in H^{2i}(BU(n);\mathbb{Z})$ die weiter oben definierten Chernklassen sind.

Dazu betrachten wir die universellen Vektorbündel $V_n \to BU(n)$. Es gibt eine natürliche Aufspaltung $f^*V_n \cong V_{n-1} \oplus \mathbb{C}$. Die induziert einen Schnitt der Einschränkung des projektiven Bündels $s : BU(n-1) \to f^*E_n$. Sei $H_n \to E_n$ das kanonische Bündel und $i : E_{n-1} \to f^*E_n$ und $F : f^*E_n \to E_n$ die kanonischen Abbildungen. Dann gilt $i^*F^*H_n = H_{n+1}$. Weiter ist $s^*F^*H_n$ trivial und deshalb $s^*F^*c(H) = 0$. Wir wenden s^*F^* auf

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i(V_n) c(H)^{n-i} \tag{15}$$

an und erhalten

$$0 = s^*F^*c_n(V_n) = f^*c_n(V_n) = 0 \ .$$

Wir schließen weiter, daß

$$i^*F^*c(H_n)^{n-1}(-1) = (-1)^n c_{n-1}(V_{n-1}) + (-1)^{n-1} c_{n-2}(V_{n-1}) c(H_{n-1}) + \dots + c_1(V_{n-1}) c(H_{n-1})^{n-2} \ .$$

Multiplication mit $c(H_{n-1})$ und Vergleich mit i^*F^* von (15) liefert

$$f^*c_i(V_n) = c_i(V_{n-1}) \ , i = 1, \dots n-1 \ .$$

Wir müssen uns hierbei davon überzeugen, daß $c(H_{n-1})$ kein Nullteiler ist.

Tatsächlich folgt aus $c(H_{n-1})a = 0$ für $a \in H^*(E_{n-1};\mathbb{Z})$ mit $a = x_0 + x_1 c(H_{n-1}) + \cdots + x_{n-2}c(H_{n-1})^{n-2}$ daß

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 c(H_{n-1}) + x_1 c(H_{n-1})^2 + \cdots + x_{n-3}c(H_{n-1})^{n-2} \\ &\quad + x_{n-2}[(-1)^n c_{n-1}(V_{n-1}) + (-1)^{n-1}c_{n-2}(V_{n-1})c(H_{n-1}) + \cdots + c_1(V_{n-1})c(H_{n-1})^{n-2}] \end{aligned}$$

und deshalb die Kette von Gleichungen

$$x_{n-2}c_{n-1}(V_{n-1}) = 0 \ , x_{n-2}(-1)^{n-1}c_{n-2}(V_{n-1}) = x_0 \ , \ldots , x_{n-2}c_1(V_{n-1}) = x_{n-2} \ .$$

Wir werden noch einsehen, daß $c_{n-1}(V_{n-1}) \neq 0$ gilt. Da $H^*(BU(n-1);\mathbb{Z})$ als Polynomring nullteilerfrei ist, gilt $x_{n-2} = 0$ und damit $x_i = 0$ füe alle i, also $a = 0$.

Sei jetzt $V = W \oplus L$ für ein Linienbündel $L \to X$. Dann haben wir immer noch einen Schnitt $s : X \to E$ und es gilt $s^*H = L$. Wenden wir s^* auf die Gleichung

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i(V) c(H)^{n-i}$$

and, so ergibt sich

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i(V) c(L)^{n-i} \ .$$

Sei nun $V = \oplus_{i=1}^n L_i$. Dann gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i(V) c(L_i)^{n-i} = 0$$

für alle i. In einem Polynomring $\mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_k]$ mit $k \geq n$ (zum Beispiel $H^*(BU(1)^k;\mathbb{Z})$) hat das System der Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i z_k^{n-i} = 0 \ , k = 1, \ldots$$

genau die elementarsymmetrischen Polynome $a_i = \sigma_i(z_1, \ldots, z_k)$ also Lösungen. Diese sind durch

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + tz_i) = \sum_{i=0}^{n} t^i \sigma_i(z_1, \ldots, z_n)$$

bestimmt. Daß die elementarsymmetrischen Polynome wirklich Lösungen sind, kann man wie folgt einsehen. Es gilt

$$0 = \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{z_i}{z_j}) = z^{-n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i z_j^{n-i} \sigma_i(z_1, \ldots, z_n) \ .$$

Auf der anderen Seite hat das Polynom $\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x^i$ genau die Nullstellen $-z_1, \ldots, -z_n$. Damit muß

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x^i = \prod_{i=1}^{n}(x + z_i)$$

gelten, also $a_{n-i} = \sigma_{n-i}(z_1, \ldots, z_n)$.

Daraus schließen wir, daß

$$c_n(V) = \sigma_n(c(L_1), \ldots, c(L_n))$$

gilt. Insbesondere ist

$$c_n(V) = \prod_{i=1}^{n} c(L_i) \ .$$

2.3.1.6 Das Splitting Prinzip Wir wollen nun die Kohomologie der Flaggenmannigfaltigkeit

$$F_n := U(n)/U(1)^n$$

ausrechnen, wobei $U(1)^n \to U(n)$ durch Diagonalmatrizen eingebettet ist. Sei $F_{n,k} := U(n)/U^k \times U(n-k)$ der Raum der Flaggen der Länge k. Die aufsteigende Folge von Untergruppen

$$U(1)^n \subset U(1)^{n-2} \times U(2) \subset U(1)^{n-3} \times U(3) \subset \cdots \subset U(1) \times U(n-1)$$

liefert eine Folge von Faserungen

$$F_n \to F_{n,n-2} \to F_{n,n-3} \to \cdots \to F_{n,1} = \mathbb{CP}^n \ .$$

Die Faser $F_{n,l+1} \to \mathbb{F}_{n,l}$ ist isomorph zu

$$U(1)^l \times U(n-l)/U(1)^{l+1} \times U(n-l-1) \cong U(n-l)/U(1) \times U(n-l-1) \cong \mathbb{CP}^{n-l} \ .$$

Wir sehen induktiv ein, daß $H^*(F_{n,l}; \mathbb{Z})$ ein freier Module über $H^*(F_{n,l-1}; \mathbb{Z})$ in den Erzeugenden $1, c(H_l), \ldots c(H_l)^{n-l}$ sind. Damit ist $H^*(F_n; \mathbb{Z})$ frei erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul von den Monomen $c(H_1)^{k_1}c(H_2)^{k_2} \ldots c(H_{n-1})^{k_{n-1}}$, $0 \le k_i \le n-i$.

Tatsächlich haben wir $U(1)$-Hauptfaserbündel $H_l := U(n)/U(1)^{n-1} \to F_n$ (l-ter Faktor ausgelassen), und die Klassen $c(H_l)$ sind die ersten Chernklassen dieser Bündel.

Wir betrachten nun ein $U(n)$-Hauptfaserbündel $P \to X$ und das assoziierte Bündel $p : F := P/U(1)^n \to X$ von Flaggenmannigfaltigkeiten. Auf F haben wir die Bündel $H_l = P/U(1)^{n-1} \to X$ ($l$ter Faktor weggelassen). Die Klassen $c(H_1)^{k_1}c(H_2)^{k_2} \ldots c(H_{n-1})^{k_{n-1}}$, $0 \le k_i \le n-i$, bilden eine additive Basis der Kohomology der Fasern von F womit der Satz von Leray-Hirsch anwendbar ist. Insbesondere ist $p^* : H^*(X; \mathbb{Z}) \to H^*(F; \mathbb{Z})$ injektiv. Da das assoziierte Vektorbündel $V := P \times_{U(n)} \mathbb{C}^n$ über F spaltet, also $p^*V = \oplus_{i=1}^n H_i$ gilt, gilt

$$p^*c_j(V) = \sigma_j(c(H_1), \ldots, c(H_n)) \ .$$

Dies ist das Splitting Pinziple.

2.3.2 Chernklassen

2.3.2.1 Rechnen mit Chernklassen Viele Rechentricks und mehr über das Splitting Prinzip findet man in dem Buch [HBJ92]. Wir definieren die totale Chernklasse

$$c_t(V) := 1 + tc_1(V) + \cdots + t^n c_n(V) + \dots \ .$$

Wenn $V = \sum_j H_j$, dann ist

$$c_t(V) = \prod_j (1 + tc(H_j)) \tag{16}$$

Lemma 2.52 *Es gilt $c_t(V \oplus W) = c_t(V) \cup c_t(W)$.*

Wenn V und W aufspalten, dann ist diese Gleichung wegen (16) klar. Im allgemeinen Fall verwenden wird das Splitting prinziple. Die Gleichung gilt nämlich nach Hochziehen auf die Flaggenmannigfaltigkeit.

Für $V = \oplus_j H_j$ und $W = \oplus_i L_i$ gilt $V \otimes W = \oplus_{i,j} H_j \otimes L_i$. Es gilt $c_1(H_j \otimes L_i) = c(H_j) + c(L_i)$. Damit ist

$$c_t(V \otimes W) = \prod_{i,j} (1 + tc(H_j) + c(L_j)) \ .$$

Es gilt $c_1(L_i^*) = -c_1(L_i)$. Damit gilt $c_t(W^*) = c_{-t}(W)$.

2.3.2.2 Beispiele $\mathbb{CP}^n$ und $\mathbb{HP}^n$ Wir haben eine natürliche Projektion $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$. Sei $A \in \mathbb{C}^{n+1}$, $v \in H^*$ und $l \in \mathbb{CP}^n$. Sei $A_x \in T_x\mathbb{C}^{n+1}$ der durch A gegebene Tagentialvektor. Dann ist $d\pi_*(l(x)A_x) \in T_l\mathbb{CP}^n$ nicht von $x \in l \setminus \{0\}$ abhängig. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\mathbb{C}^{n+1} \otimes H^* \to T\mathbb{CP}^n$$

welche sich as surjektiv erweist. Der Kern dieser Abbildung ist offensichtlich $H \otimes H^*$ und damit trivial. Folglich gilt

$$0 \to \mathbb{C} \to (H^*)^{n+1} \to T\mathbb{CP}^n \to 0 \ .$$

Daraus folgt

$$T\mathbb{CP}^n \oplus \mathbb{C} \cong (H^*)^{n+1} \ .$$

$$c_t(T\mathbb{CP}^n) = c_t(H^*)^{n+1} = (1 + c(H^*))^{n+1} = 1 + (n+1)c(H^*) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} c(H^*)^2 + \dots \ .$$

Insbesondere ist das Tangentialbündel von $\mathbb{CP}^n$ nicht trivial. Da $c_n(T\mathbb{CP}^n) = (n+1)c(H^*)^n \neq 0$ gilt, besitzt $T\mathbb{CP}^n$ nicht einmal einen nirgends verschwindenden Schnitt.

Für ein reelles Vektorbündel V_0 definieren $c_t(V_0) := c_t(V)$, wobei $V := V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Da jedes Vektorbündle eine hermitesche Metrik zuläßt, gilt immer $\bar{V} \cong V^*$. Für ein relles Bündel gilt noch zusätzlich $\bar{V} \cong V$. Damit ist $V \cong V^*$ und $c_t(V) = c_{-t}(V)$. Damit verschwinden $c_i(V)$ für ungerade i.

Definition 2.53 *Die Klassen*

$$p_i(V_0) := (-1)^i c_{2i}(V)$$

heißen Pontrjaginklassen von V_0. Wir definieren die totale Pontrjaginklasse $p_t(V_0) = 1 + tp_1(V_0) + t^2 p_2(V_0) + \dots$.

Sei $L \to X$ ein komplexes Linienbündel. Dann können wir das unterliegende reelle Bündel $L_{|\mathbb{R}} \to X$ betrachten. Es gilt $L_{|\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong L \oplus L^*$. Folglich gilt $1 - p_1(L) = (1 + c_1(L))(1 - c_1(L)) = 1 - c_1(L)^2$.

Wir können $T\mathbb{CP}^n$ als relles Vektorbündel V_0 auffassen. Dann gilt $V \cong T\mathbb{CP}^n \oplus \overline{T\mathbb{CP}^n}$. Es folgt

$$c_t(T\mathbb{CP}^n)c_{-t}(T\mathbb{CP}^n) = [(1 + tz)(1 - tz)^{n+1}] = (1 - t^2z^2)^{n+1} .$$

Also

$$p_t(T\mathbb{CP}^n) = (1 + tz^2)^{n+1} .$$

Wir betrachten nun den quarternionisch-projektiven Raum $\mathbb{HP}^n$. Dieser hat eine Zellenzerlegung mit Zellen in den Dimensionen $4i$, $i \le n$. Damit gilt

$$H^*(\mathbb{HP}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u]/(u^{n+1})$$

mit $|u| = 4$.

Mit der komplexen Struktur I gibt es einen Isomorphismus $\mathbb{H}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{2n+2}$. Wir haben eine Projektion $f : \mathbb{CP}^{2n+1} \to \mathbb{HP}^n$ mit Faser $\mathbb{CP}^1$. Insbesondere ist $f^* : H^{4r}(\mathbb{HP}^n; \mathbb{Z}) \to H^{4r}(\mathbb{CP}^{2n+1}; \mathbb{Z})$ ein Isomorphismus. Wir fixieren das Vorzeichen von u derart, daß $f^*u = z^2$, wobei $H^*(\mathbb{CP}^{2n+1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[z]/(z^{2n+2})$. Es gilt

$$T\mathbb{CP}^{2n+1} \cong f^*Q \oplus T\mathbb{HP}^n ,$$

wobei Q das vertikale Bündel ist. Daraus folgt

$$(1 + z^2)^{2n+2} = p_t(Q)p_t(T\mathbb{HP}^n) .$$

Nun ist die Einschränkung von Q auf eine Faser $\mathbb{CP}^1$ von f genau das Tangentialbündel. Es gilt $p_t(Q_{|\mathbb{CP}^1}) = (1 + tz)^2$, insbesondere $c_1(Q) = 2z$. Daraus folgt $p_t(Q) \cong 1 + 4tz^2$. Wir haben

$$p_t(T\mathbb{HP}^n) \cong (1 + tu)^{2n+2}(1 + 4tu)^{-1} .$$

Nun ist $\mathbb{HP}^1 = S^4$. In diesem Fall $p_t(S^4) = 1 + 4tu - 4tu = 1$ wie erwartet.

2.3.2.3 Weitere Fragen

Definition 2.54 *Eine orientierte n-Mannigfaltigkeit M ist ein Rand, wenn es eine orientierte $n+1$-Mannigfaltigkeit W mit $\partial W \cong M$ gibt.*

Zum Beispiel ist S^n ein Rand, nämlich von D^n. Jede orientierte Fläche ist ein Rand (in $\mathbb{R}^3$ Einbetten und Inneres nehmen).

Nicht jede Mannigfaltigkeit ist Rand, z.B. $\mathbb{CP}^{2n}$, $n \geq 1$ und $\mathbb{HP}^n$, $n \geq 2$. Mit Hilfe der Pontrjaginklassen kann man Obstruktionen gegen Randsein konstruieren. Sei $Q(x_1, x_2, \dots)$ ein homogenes Polynom vom Grad n, wobei $|x_i| = 4i$ ist. Die Orientierung von M gibt eine Auswertung $H^n(M;\mathbb{Z}) \ni \alpha \mapsto \alpha[M] \in \mathbb{Z}$.

Lemma 2.55 *Wenn M Rand ist, dann gilt*

$$Q(p_1(TM), p_2(TM), \dots)[M] = 0 \ .$$

Beweis: Sei $M = \partial M$. Wir betrachten das Paar $M \subset W$. Sei $\delta : H_{n+1}(W, M;\mathbb{Z}) \to H_n(M;\mathbb{Z})$ der Randoperator in der Homologie. Dann gilt die Beziehung der Fundamentalklassen $\delta[W, M] = [M]$. Folglich $\alpha[M] = \partial\alpha[W, M]$, wobei $\partial : H^n(M;\mathbb{Z}) \to H^{n+1}(W;M)$ der kohomologische Randoperator ist. Nun ist $TW_{|M} \cong TM \oplus \mathbb{R}$ und damit $p_t(TW)_{|M} = p_t(TM)$. Es gilt also $Q(p_1(TM), p_2(TM), \dots) = Q(p_1(TW), p_2(TW), \dots)_{|M}$. Nun ist nach der langen exakten Sequenz $\partial\beta_{|M} = 0$ für jede Klasse $\beta \in H^*(W;\mathbb{Z})$. Damit gilt

$$Q(p_1(TM), p_2(TM), \dots)[M] = \partial Q(p_1(TW), p_2(TW), \dots)_{|M}[W, M] = 0 \ .$$

■

Für $\mathbb{CP}^{2n}$ nehmen wir $Q(x_1, x_2, \dots) = x_n$. Dann ist

$$Q(p_1(T\mathbb{CP}^n), p_2(T\mathbb{CP}^n), \dots) = p_n(T\mathbb{CP}^n)[\mathbb{CP}^n] = \binom{2n+1}{n} \neq 0 \ .$$

Für $\mathbb{HP}^n$ wählen wir $Q(x_1, x_2, \dots) = x_1^n$. Der Koeffizient von u der Reihe

$$(1+u)^{2n+2}(1+4u)^{-1}$$

ist $(2n+2) - 4 = 2n - 4$ Damit ist $p_1(T\mathbb{HP}^n) = (2n-4)u$. Es folgt

$$p_1(T\mathbb{HP}^n)^n[\mathbb{HP}^n] = (2n-4)^n \neq 0 \ .$$

Eine andere Gruppe von Fragen rankt sich um Teilbarkeitsaussagen für Chern und Pontrjaginklassen. Eine typische Aussage ist:

Lemma 2.56 *Für ein komplexes Vektorbündel $E \to S^{2n}$ ist $c_n(E)$ durch $(n-1)!$ teilbar.*

Für weitere Informationen siehe z.B. [Hus94, III, 18.9.8].

3 Geometrie

3.1 Geometrie auf Hauptfaserbündeln

3.1.1 Reduktion der Strukturgruppe

Sei $\chi : H \to G$ ein Homomorphismus von Liegruppen und $P \to X$ ein (glattes) G-Hauptfaserbündel.

Definition 3.1 *Eine H-Reduktion von $P \to X$ ist ein Diagram*

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

wobei $Q \to X$ ein glattes H-Hauptfaserbündel und ϕ äquivariant im Sinne

$$\phi(qh) = \phi(q)\chi(h) \ . \quad q \in Q \ , h \in H$$

ist

1. Eine Reduktion auf $\{1\} \to G$ ist eine Trivialisierung.

2. Sei $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und $P \to X$ ein G-Hauptfaserbündel. Wir betrachten das Faserbündel $\pi : F := P/H \to X$. Dann besitzt $\pi^*P \to F$ eine kanonische H-Reduktion. Sei $q : P \to X$ die Projektion. Dann ist q^*P kanonisch trivial:
$$P \times G \to q^*P \to P = P \times_X P \ , \quad (p, g) \mapsto (p, pg)$$
Wir betrachten die H-equivariante Abbildung $\tilde{Q} := P \times H \to P \times G$, welche durch $H \to G$ induziert wird. Die Gruppe H wirkt hier durch
$$(p, h)l := (pl, l^{-1}h) \ , \quad (p, g)l = (pl, l^{-1}g \ .$$
Dann ist $Q := \tilde{Q}/H \to P \times_H G$ eine H-Reduktion von $P \times_H G$. Weiterhin ist $P \times_H G \to \pi^*P$, $[p, g] \mapsto ([p], pg)$ ein Isomorphismus von H-Hauptfaserbündeln.

3. Sei weiter $H \subseteq G$. Ein Schnitt $s : X \to P/H \to X$ bestimmt eine H-Reduktion $Q := \{p \in P \mid p \in s(\pi(p))\}$. Umgekehrt liefert die Einbettung $Q \subseteq P$ einer H-Reduktion einen Schnitt von $P/H \to X$.

4. Wir betrachten $U(1)^n \subset U(n)$ und ein $U(n)$-Hauptfaserbündel $P \to X$. Dann ist $\pi : F := P/U(1)^n \to X$ ein Bündel von Flaggenmannigfaltigkeiten und $\pi^*P \to F$ hat eine $U(1)^n$-Reduktion. Dies war die Grundlage des Splitting Prinzips.

Im folgenden benennen wir einige wichtige Reduktionen des Rahmenbündels einer n-dimensionalen Mannigfaltihkeit X.

1. Sei $\pi : \mathtt{Fr}(TX) \to X$ das Rahmenbündel, ein $Gl(n, \mathbb{R})$-Hauptfasrbündel. Ein Element $\phi \in \pi^{-1}(x)$ ist ein Isomorphismus $\phi : \mathbb{R}^n \to T_xX$.

2. Sei eine Metrik auf TX gegeben. Dann betrachten wir die $O(n)$-Reduktion $\mathtt{Fr}_O(TX) \to \mathtt{Fr}(TX)$, welche durch
$$\mathtt{Fr}_O(TX) := \{\phi \in \mathtt{Fr}(TX) \mid \phi \text{ ist isometrisch}\} \ .$$
Dies ist eine $O(n)$-Reduktion.

3. Sei weite reine Orientierung von X fixiert. Dann definieren wir die $SO(n)$-Reduktion von $\mathtt{Fr}_O(TX)$ durch
$$\mathtt{Fr}_{SO}(TX) := \{\phi \in \mathtt{Fr}(TX) \mid \phi \text{ ist orientierungserhaltend}\} \ .$$

4. Sei $n \geq 3$. Dann ist $\pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Die Universalüberlagerung der Gruppe $SO(n)$ ist die Spingruppe $Spin(n)$. Sie liegt in der Sequenz
$$1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to Spin(n) \to SO(n) \to 1 \ .$$
Eine $Spin(n)$-Reduktion von $\mathtt{Fr}_{SO}(TX)$ wird als Spinstruktur bezeichnet.

5. Wir betrachten $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Dann ist $U(n) \subset SO(2n)$ die Untergruppe
$$U(n) = \{A \in SO(n) \mid A \circ i = i \circ A\} \ ,$$
wobei $i \in \mathtt{Aut}(\mathbb{R}^{2n})$ die Multiplikation mit i ist.

   Eine $U(n)$-Reduktion $\mathtt{Fr}_U(TX)$ von $\mathtt{Fr}_{SO}(TX)$ wird als fast-Kählerstruktur bezeichnet. Äquivalent kann man eine solche Struktur durch einen Schnitt $I \in \Gamma(\mathtt{End}(TX))$ mit $I^2 = -1$ und $I^* = -I$ angeben (das benutzt die Metrik). Es gilt dann
$$\mathtt{Fr}_U(TX) = \{\phi \in \mathtt{Fr}_{SO}(TX) \mid \phi \circ i = I \circ \phi\} \ .$$
Ein fast-Kählerstruktur liefert eine 2-Form $\omega(X, Y) :=< X, IY >$. Wenn die Gleichung $d\omega = 0$ gilt, dann spricht man von einer Kählerstruktur.

3.1.2 Erweiterung der Strukturgruppe

Sei $\chi : H \to G$ ein Homomorphismus von Liegruppen. Sei $P \to X$ ein H-Hauptfaserbündel.

Definition 3.2 *Die Erweiterung der Strukturgruppe von $P \to X$ zu G entlang χ ist das G-Hauptfaserbündel $\mathtt{Ind}_H^G(P) := Q := P \times_H G \to X$.*

Das Diagramm
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p \mapsto {[p,1]}"] \arrow[d] & Q \arrow[d] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$
ist eine H-Reduktion von Q.

3.1.3 Hauptfaserbündel und Vektorbündel

Sei $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ und V ein $\mathbb{F}$-Vektorraum. Wir betrachten ein G-Hauptfaserbündel $P \to X$. Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung.

Definition 3.3 *Das zu P uund ρ assoziierte $\mathbb{F}$-Vektorbündel $\rho(P) \to X$ wird durch $\rho(P) := (P \times V)/G$ definiert, wobei die G-Wirkung durch $(p, f)g = (pg, \rho(g)^{-1}f)$ gegeben wird.*

Mit $[p, v] \in \rho(P)$ bezeichen wir die Klasse des Paares (p, v).

Sei $E = \rho(P)$ für ein G-Hauptfaserbündel $\pi : P \to X$ und eine Darstellung $\rho : G \to GL(V)$. Wir können den Raum der Schnitte $\Gamma(\rho(P))$ durch Funktionen auf P beschreiben. Die Gruppe G wirkt auf $C^\infty(P, V)$ durch

$$(gf)(p) := \rho(g)f(pg) \ .$$

Sei $C^\infty(P, V)^G \subseteq C^\infty(P, V)$ der Raum der invarianten Funktionen. Wir haben folgende Bijektion

$$\Gamma(\rho(P)) \stackrel{\sim}{\to} C^\infty(P, V) \ , \phi \mapsto f_\phi \ ,$$

wobei f_ϕ und ϕ durch folgende Gleichung zusammenhängen:

$$[p, f_\phi(p)] = \phi(\pi(p)) \ , p \in P$$

Geometrische Strukturen auf V (Metriken, Produkte etc) liefern entsprechende Strukturen auf $\rho(P)$.

1. Sei $< ., >$ eine Bilinearform auf V, welche ρ-Invariant ist, welche also

   $$< \rho(g)v, \rho(g)w >=< v, w >$$

   für all $v, w \in V$ und $g \in G$ erfüllt. Dann defineren wir ein Skalarprodukt auf $\rho(P)$ durch $< [p, v], [p, w] >=< v, w >$. man sieht leicht die Wohldefiniertheit ein. Beachte, daß in dieser Formel die Klassen durch Paare mit dem gleichen ersten Eintrag repräsentiert ssein müssen.

2. Sei $[., .] : V \otimes V \to V$ eine G-invariante Lieklammer, also $[\rho(g)v, \rho(g)w] = \rho(g)[v, w]$. Dann definiert $[[p, v], [p, w]] := [p, [v, w]]$ eine Lieklammer $[., .] : \rho(P) \otimes \rho(P \to \rho(P)$.

Es folgende einige Beispiele.

1. Mit $\mathtt{Ad}$ bezeichnen wir die adjungierte Darstellung $G \to GL(\mathfrak{g})$ auf der Liealgebra von G. Das Vektorbündel $\mathtt{Ad}(P)$ heißt adjungiertes Bündel zu P. Die adjungierte Wirkung erhält den Kommutator. Damit wird $\mathtt{Ad}(P)$ ein Bündel von Liealgebren, d.h. es gibt einen Kommutator

   $$[., .]\mathtt{Ad}(P) \otimes \mathtt{Ad}(P) \to \mathtt{Ad}(P) \ .$$

2. Jedes $\mathbb{F}$-Vektorbündel $E \to X$ kann als ein zu seinem Rahmenbündel assoziiertes Vektorbündel geschrieben werden. Sei $\mathtt{Fr}(E) \to X$ das Rahmenbündel mit Gruppe $GL(n, \mathbb{F})$. Dann gibt es einen kanonischen isomorphismus $\mathtt{id}(\mathtt{Fr}(E)) \stackrel{\sim}{\to} E$, welcher durch $(\phi, v) \mapsto \phi(v)$ gegeben wird, wobei $(\phi : \mathbb{F}^n \to E) \in \mathtt{Fr}(E)$ und $v \in \mathbb{F}^n$ ist.

3.1.4 Die Atiyahsequenz und Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln

Ist G eine Liegruppe, können wir die unter Rechtstranslationen invarianten Vektorfelder mit der Liealgebra $\mathfrak{g}$ identifizieren.

Sei $\pi : P \to X$ ein G-Hauptfaserbündel und $x \in X$. Die Faser $P_x := \pi^{-1}$ ist ein transitiver G-Raum. Mit $A(P_x)$ bezeichnen wir den Vektorraum der G-invarianten Schnitte von $TP_{|P_x}$. Es gilt $\dim(A(P_x)) = \dim(P)$, da ein solcher Schnitt eindeutig durch den Wert in einem gewählten Punkt von P_x bestimmt ist.

Lemma 3.4 *1. Die Vereinigung $A(P) := \sqcup_{x\in X} A(P_x)$ hat auf natürliche Weise die Struktur eines glatten Vektorbündels über X so daß $\Gamma(A(P)) = C^\infty(P, TP)^G$ gilt.*

2. Die Ableitung der Projektion $d\pi : A(P) \to TX$ ist surjektiv.

3. Es gilt $\ker(d\pi) \cong \mathtt{Ad}(P)$.

Beweis: Wir geben die isomorphismus in 3. an. Dazu identifizieren wir $\mathfrak{g} \cong \Gamma(TG)^G$ (rechts-invariante Vektorfelder). Sei $X \in \mathfrak{g}$. Der Generator der Gruppe von Transformationen $\exp(tX) : P \to P$ ist ein Vektorfeld $X^\sharp \in \Gamma(TX)$ mit $d\pi X^\sharp(p) = 0$ für alle $p \in P$. Weiter gilt

$$(dR_g X^\sharp)(pg) = (\mathtt{Ad}(g^{-1})X)^\sharp \ .$$

Sei $V = [p, X] \in \mathtt{Ad}(P)_x$. Diesem Vektor entspricht das invariante Feld

$$P_x \ni pg \mapsto dR_g X^\sharp(p) \ .$$

Die Wohldefiniertheit folgt aus

$$dR_{hg}(\mathtt{Ad}(h)X)^\sharp(ph^{-1})(ph^{-1}) = dR_g dR_h(\mathtt{Ad}(h)X)^\sharp(ph^{-1}) = dR_g X^\sharp(p) \ .$$

■

Wir haben also eine Sequenz

$$0 \to \mathtt{Ad}(G) \to A(P) \to TX \to 0$$

von Vektorbündeln.

Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit bilden eine Liealgebra unter dem Kommutator $[.,.]$. Wir haben eine Einbettung $\Gamma(A(P)) \subset \Gamma(TP)$.

Lemma 3.5 *1. $\Gamma(A(P)) \subset \Gamma(TP)$ ist eine Lie-Unteralgebra.*

2. $d\pi : \Gamma(A(P)) \to \Gamma(TX)$ ist ein Liealgebrenhomomorphismus.

3. Die Einbettung $\Gamma(\mathtt{Ad}(P)) \to \Gamma(A(P))$ ist ein Liealgebrenhomomorphismus.

Definition 3.6 *Ein Zusammenhang auf einem Hauptfaserbündel P ist ein Split $\nabla : TX \to A(P)$ der Atiyahsequenz*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathtt{Ad}(P) \arrow[r] & A(P) \arrow[r, "d\pi"] & TP \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\nabla"'] & 0 \end{tikzcd}$$

(derart, daß $d\pi \circ \nabla = \mathtt{id}_{TX}$ gilt).

Eine Surjektion von Vektorbündeln $s : E \to F$ besitzt immer ein Rechtsinverses. In der Tat kann man auf E eine Metrik wählen und $E \cong \ker(s) \oplus \ker(s)^\perp$ orthogonal aufspalten. Dann ist $s_{|\ker(s)^\perp} : \ker(s)^\perp \to F$ ein Isomorphismus und $(s_{|\ker(s)^{-1}})^{-1} : F \to \ker(s)^\perp \to E$ das gewünschte Rechtsinverse. Folglich gibt es immer Zusammenhänge.

Ist $< .,. >$ eine G-Invariante Metrik auf TP. Diese induziert eine Metrik auf $A(P)$ und damit einen Zusammenhang.

Zwei Zusammenhänge ∇, ∇' unterscheiden sich um eine Abbildung $TP \to \mathtt{Ad}(P)$, also um ein Element aus $\Gamma(T^*X \otimes \mathtt{Ad}(P))$.

3.1.5 Zusammenhänge auf Vektorbündeln

Sei $E \to X$ ein Vektorbündel.

Definition 3.7 *Ein Zusammenhang auf E ist eine stetige lineare Abbildung*

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*X \otimes E) \ ,$$

welche folgende Eigenschaften hat (wir schreiben $\nabla_X\phi := \nabla(\phi)(X)$).

1. *(Leibnizregel) $\nabla_X(f\phi) = X(f)\phi + f\nabla_X\phi$*
2. *$\nabla_{fX}(\phi) = f\nabla_X\phi$.*

Sei $P \to X$ ein G-Hauptfaserbündel und $\chi : G \to GL(V)$ eine Darstellung, und $E := \chi(P)$. Sei

$$C^\infty(P,V)^G := \{f \in C^\infty(P,V) \mid \chi(g)f(pg) = f(p)\} \ .$$

Dann haben wir eine Identifikation

$$\Gamma(\chi(P)) \cong C^\infty(P,V)^G \ .$$

Dabei gilt

$$\phi(\pi(p)) = [p, f_\phi(p)] \ .$$

Sei ∇ ein Zusammenhang auf P. Dann definieren wir den Zusammenhang $\chi(\nabla)$ auf $\chi(P)$ durch

$$\chi(\nabla)_X(\phi) = [p, (\nabla(X)f)(p)]$$

(hierbei fassen wir $\nabla(X)$ als ein Element von $\Gamma(TP)$ auf).

Lemma 3.8 *Der Zusammenhang $\rho(\nabla)$ ist wohl-definiert.*

Jedes Vektorbündel besitzt also Zusammenhänge.

3.1.6 Krümmung

Die Abbildung $d\pi : \Gamma(A(P)) \to \Gamma(TX)$ ist ein Liealgebrenhomomorphismus. Ist ∇ ein Zusammenhang, so ist $\nabla : \Gamma(TX) \to \Gamma(A(P))$ im allgemeinen kein Liealgebrenhomomorphismus. Wir definieren die Abweichung

$$\Omega^\nabla(X,Y) := [\nabla(X), \nabla(Y)] - \nabla([X,Y]) \ .$$

Lemma 3.9 *Die Abbildung Ω^Δ ist wird durch einen Schnitt $\Omega^\nabla \in \Lambda^2 T^*X \otimes \mathtt{Ad}(P)$ gegeben.*

Beweis: Man rechnen zuerst nach, daß $\Omega^\nabla(fX,Y) = f\Omega(X,Y)$ ist. Daraus folgt $\Omega^\nabla \in \Lambda^2\Gamma(T^*X \otimes A(P))$. Weiter sieht man $d\pi\Omega^\nabla = 0$ ein. Deshalb hat Ω^∇ Werte in $\mathtt{Ad}(P)$. ■

Sei ∇ ein Zusammenhang mit Krümmung Ω^∇. Ein weiterer Zusammenhang sei durch $\nabla + \alpha$ für $\alpha \in \Gamma(T^*X \otimes \mathtt{Ad}(P))$ gegeben. Dann gilt

$$\Omega^{\nabla+\alpha} = \Omega^\nabla + \nabla\alpha + [\alpha,\alpha] \ ,$$

wobei $\nabla\alpha \in \Gamma(\Lambda^2 T^*X \otimes \mathtt{Ad}(P))$ durch

$$\nabla\alpha(X,Y) := [\nabla(X), \alpha(Y)] - [\nabla(Y), \alpha(X)] - \alpha([X,Y]) \ , \quad [\alpha,\alpha](X,Y) := [\alpha(X), \alpha(Y)]$$

gegeben wird.

Definition 3.10 *Wenn $\Omega^\nabla = 0$ ist, dann heißt ∇ flach.*

Für eine Form $\beta = \sum_i \omega_i \otimes \phi_i \in \Gamma(\Lambda^n T^*X \otimes \mathtt{Ad}(P))$ definieren wir

$$\nabla\beta = \sum_i d\omega_i \otimes \phi_i + \sum_i (-1)^{\deg(\omega_i)} \omega_i \wedge \nabla\phi_i \in \Gamma(\Lambda^{n+1} T^*X \otimes \mathtt{Ad}(P))$$

(Wohldefiniertheit prüft man leicht nach, beachte daß $\omega \otimes f\phi = f\omega \otimes \phi$ für $f \in C^\infty(X)$ gilt.)

Lemma 3.11 *Die Krümmung erfüllt die Bianchi-Identität*

$$\nabla\Omega^\nabla = 0 \ .$$

Beweis: Es gilt für kommutierende $X, Y, Z \in \Gamma(TX)$

$$\begin{aligned}
\nabla\Omega^\nabla(X,Y,Z) &= \nabla_X\Omega^\nabla(Y,Z) - \nabla_Y\Omega^\nabla(X,Z) + \nabla_Z\Omega^\nabla(X,Y) \\
&= \nabla_X([\nabla(Y), \nabla(Z)]) - \nabla_Y([\nabla(X), \nabla(Z)]) + \nabla_Z([\nabla(X), \nabla(Y)]) \\
&= [\nabla(X), [\nabla(Y), \nabla(Z)]] - [\nabla(Y), [\nabla(X), \nabla(Z)]] + [\nabla(Z), [\nabla(X), \nabla(Y)]] \\
&= 0
\end{aligned}$$

nach der Jacobi-Identität.

3.1.7 Die Krümmung symmetrischer Räume

1. Sei $K \subseteq G$ eine abgeschlossenen Untergruppe. Wir nehmen an, daß es eine Aufspaltung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ mit
$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} \ , [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$$
gibt. In diesem Fall spricht man von einem symmetrischen Paar.

2. Sei $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ ein symmetrisches Paar. Dann können wir eine Involution $\sigma \in \mathtt{Aut}(\mathfrak{g})$ durch $I_{|\mathfrak{k}} =$ und $I_{|\mathfrak{p}} = -1$ definieren. Umgekehrt bestimmt eine Involution $\sigma \in \mathtt{Aut}(\mathfrak{g})$ in dieser Weise ein symmetrisches Paar. Wenn es ein Element $I \in \mathtt{Aut}(G)$ gibt mit $dI = \sigma$ und $K = G^I$ so ist $K \subseteq G$ ein symmetrisches Paar von Gruppen und $X = G/K$ ist ein symmetrischer Raum.

3. Sei $\rho := (\mathtt{Ad}_{|K})_{|\mathfrak{p}} : K \to Gl(\mathfrak{p})$. Beachte, daß $G \to G/K = X$ ein K-Hauptfaserbündel ist.

   Im folgenden identifizieren wir $\mathfrak{g} \cong T_eG$. Wir definieren die Aufspaltung $T_gG = g\mathfrak{k} \oplus g\mathfrak{p}$. Es gilt $g\mathfrak{k} = \ker(\pi)$. Für $X \in \mathfrak{p}$ wird durch $[g, X] \in G \times_K X$ ein Tangentialvektor $d\pi_g(gX) \in T_{gK}G$ bestimmt. Es gilt also $T(G/K) := \rho(G \to G/K)$ mit der Darstellung $\rho = \mathtt{Ad}_{|K} : K \to Gl(\mathfrak{p})$.

4. Die Aufspaltung $T_gG = g\mathfrak{k} \oplus g\mathfrak{p}$, $g \in G$, definiert einen Zusammenhang auf $G \to G/K$. Sei $X \in \mathfrak{p}$ und $X^\sharp \in \Gamma(TG/K)$ das durch die G-Linkswirkung induzierte Vektorfeld $X^\sharp(gK) = XgK$. Wir schreiben
$$X^\sharp(gK) = XgK = gX^{g^{-1}}K = g\mathtt{pr}_{\mathfrak{k}}(X^{g^{-1}})K \oplus g\mathtt{pr}_{\mathfrak{p}}(X^{g^{-1}})K = g\mathtt{pr}_{\mathfrak{p}}(X^{g^{-1}})K \ .$$
   Es gilt $\nabla(X^\sharp(gK))(g) = g\mathtt{pr}_{\mathfrak{p}}(X^{g^{-1}})$.

5. Durch Einsetzen von $Ye = \nabla(Y^\sharp(eK))(e)$, $Y \in \mathfrak{p}$ für g (und Abziehen der Terme nach Vertauschen der Rollen von X, Y) erhalten wir (unter Verwendung der Leibnitzregel und $[X^\sharp, Y^\sharp] = [X, Y]^\sharp$)
$$\Omega^\nabla(eK)(Y, X) = YX + \mathtt{pr}_{\mathfrak{p}}[X, Y] - XY - \mathtt{pr}_{\mathfrak{p}}[Y, X] - \mathtt{pr}_{\mathfrak{p}}[X, Y] = [Y, X] - \mathtt{pr}_{\mathfrak{p}}[Y, X] = [Y, X] \ .$$

Wir berechnen nun die Krümmung einiger symmetrischer Räume.

1. Wir berachten die Gruppe $SO(n)$. Sei $I = \mathtt{diag}(1, \ldots, 1, -1)$. Dann ist $SO(n)^I \cong SO(n-1)$ die Untergruppe, welche den letzten Basisvektor festhält. Es gilt $S^{n-1} \cong SO(n)/SO(n-1)$. Diese Darstellung von S^{n-1} als symmetrischen Raum liefert einen Zusammenhang. Wir spalten die Elemente von $so(n)$ in der Form
$$\begin{pmatrix} b & v \\ -v^t & 0 \end{pmatrix}$$
   mit $b \in so(n-1)$ und $v \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann gilt $\mathfrak{p} = \mathbb{R}^{n-1}$. Es gilt
$$\left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ -v^t & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w^t & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -v \circ w^t + w \circ v^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Wir betrachten die Gruppe $U(n)$ und die Involution $I = \mathtt{diag}(1, \ldots, 1, -1)$. Dann ist $U(n)^I = U(n-1) \times U(1)$ und $U(n)/U(n-1) \times U(1) = \mathbb{CP}^{n-1}$. Wir schreiben die Elemente von $u(n)$ in der Form

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & ia \end{pmatrix}$$

mit $u \in u(n-1)$, $v \in \mathbb{C}^{n-1}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathfrak{p} \cong \mathbb{C}^{n-1} \oplus \mathbb{R}$. Es gilt

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ -v^* & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w^* & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -v \circ w^* + w \circ v^* & 0 \\ 0 & -v^* w + w^* v \end{pmatrix}$$

3.1.8 Krümmung von Zusammenhängen auf Vektorbündeln

Sei ∇ ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel $E \to X$. Wir betrachten

$$R^\nabla(X,Y)(\phi) := \nabla_X \nabla_Y \phi - \nabla_Y \nabla_X \phi - \nabla_{[X,Y]} \phi \ .$$

Es gilt

$$R^\nabla \in \Lambda^2 T^* X \otimes \mathtt{End}(E) \ .$$

Definition 3.12 *Der Schnitt R^∇ heißt Krümmung von ∇.*

Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen Krümmungen von Zusammenhängen auf Hauptfaserbündeln und der assoziierten Vektorbündel her.

Sei $E = \chi(P)$ und ∇ ein Zusammenhang auf $\pi : P \to X$, dann gilt

$$R^{\chi(\nabla)} = \chi(\Omega^\nabla) \ ,$$

wobei

$$\chi(\Omega^\nabla)(X,Y)(\phi)(\pi(x)) = [p, \Omega^\nabla(X,Y)(f_\phi)(p)]$$

(beachte, daß $\Omega^\nabla(X,Y)(p) \in T_p P$ gilt).

3.1.9 Die Krümmung von komplexen Linienbündeln

Wir betrachten ein $U(1)$-Hauptfaserbündel $P \to X$. Dann ist $\mathtt{Ad}(P) \cong X \times \mathbb{R}$ trivial.

Sei ∇ ein Zusammenhang auf P. Dann können wir

$$\Omega^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2 T^* X \otimes \mathtt{Ad}(P)) \cong \Gamma(\Lambda^2 T^* X) \ .$$

betrachten.

Die Bianchi-Identität besagt, daß $d\Omega^\nabla = 0$ ist. Es gilt für $\alpha \in \Gamma(T^* X \otimes \mathtt{Ad}(P)) \cong \Gamma(T^* X)$ die Gleichung $\nabla \alpha = d\alpha$ und deshalb

$$\Omega^{\nabla + \alpha} = \Omega^\nabla + d\alpha \ .$$

Wir sehen, daß die Kohomologieklasse $[\Omega^\nabla] \in H^2_{dR}(X)$ nur vom Hauptfaserbündel abhängt.

Diese Klasse repräsentiert (bis auf einen Faktor $2\pi i$) das Bild der ersten Chernklasse von P in der de Rhamkohomologie.

Als Beispiel betrachten wir $\mathbb{CP}^{n-1} \cong U(n)/U(m-1) \times U(1)$ mit dem vom symmetrischen Raum kommenden Zusammenhang. Sei $\rho : U(n-1) \times U(1) \to U(1)$ die Projektion. Dann ist $H = \rho(U(n))$ das tautologische Bündel und $P \to \mathbb{CP}^{n-1}$ das orthonormale Rahmenbündel, also die Einheitsspäre in $\rho(U(n))$.

Die Krümmungsform ergibt sich aus den Rechnungen in 3.1.7. Sei $X, Y \in \mathbb{C}^{n-1} \cong \mathfrak{p}$, interpretiert als Vektoren in $T_{[u]}\mathbb{CP}^n$ für $u \in U(n)$. Dann gilt

$$\Omega^\nabla(X,Y) = < Y, X > - < X, Y > = -2\mathtt{Im}(< X, Y >) \ .$$

Wir betrachten den Fall $n = 2$. Wir wollen diese Form mit der Standardvolumenform mit $\mathtt{vol}(\mathbb{CP}^1)$ vergleichen. Zuerst ist $S^3 \cong U(2)/U(1)$ der Orbit des Vektors $(1,0)^t$. Für $X \in \mathfrak{p} \cong \mathbb{C}$ gilt $\|X(1,0)^t\|^2 = \|X\|^2$. Nun gilt $U(2)/U(1) \times U(1) \cong S^3/U(1) \cong \mathbb{CP}^1$. Die durch diese Darstellung induzierte Metrik auf $\mathbb{CP}^1$ ist kommt also von der Standardmetrik auf $\mathbb{C}$. Die entsprechende Volumenform ist $\mathtt{vol}_{\mathbb{C}}(X,Y) = \mathtt{Im} < X, Y >$. Es gilt $\mathtt{vol}(S^3) = 2\pi^2$. Das Volumen der $U(1)$-Orbits beträgt 2π. Es folgt $\mathtt{vol}(\mathbb{CP}^1) = \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi$. Daraus folgt

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \Omega^\nabla = -2\pi \ .$$

Im Fall $n = 2$ ist dies die -2-fache Standardvolumenform mit $\mathtt{vol}(\mathbb{CP}^1) = 4\pi$. Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \Omega^\nabla = -2\pi \ .$$

Wir sehen insbesondere, daß $P \to \mathbb{CP}^n$ keinen flachen Zusammenhang zuläßt.

Die Konstruktion von geschlossenen Formen aus der Krümmungsform kann auf allgemeine Gruppen G ausgedehnt werden. Sei $p \in S^n(\mathfrak{g})$ ein homogenes symmetrisches $\mathtt{Ad}(G)$-invariantes Polynom vom Grad n. Ein Beispiel ist $u(n) \ni A \mapsto \mathtt{Tr}A^n \in \mathbb{C}$. Wir erhalten eine Abbildung $\hat{p} : \Lambda^2 T^*X \otimes \mathtt{Ad}(P) \to \Gamma(\Lambda^{2n}T^*X)$ durch $\hat{p}(\omega \otimes \phi) = \omega^n p(\phi)$. Die Form $\hat{p}(\Omega^\nabla)$ ist geschlossen und die Klasse $p(P \to X) := [\hat{p}(\Omega^\nabla)] \in H^{2n}_{dR}(X)$ hängt nur vom Hauptfaserbündel $P \to X$ ab. Auf diese Weise erhalten wir charakteristische de Rahmkohomologieklassen.

3.1.10 Zurückziehung von Zusammenhängen

Wir betrachten ein Cartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "F"] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \ .$$

Dazu gibt es ein Diagram

$$\begin{tikzcd} \mathtt{Ad}(Q) \arrow[r, "dF"] \arrow[d] & \mathtt{Ad}(P) \arrow[d] \\ A(Q) \arrow[r, "dF"] \arrow[d] & A(P) \arrow[d] \\ TY \arrow[r, "df"] & TX \end{tikzcd} .$$

Das untere Quadrat ist cartesisch. Ist $\nabla : TX \to A(P)$ ein Zusammenhang auf P, so definiert

$$f^*\nabla : TY \to A(Q) \ , \quad f^*\nabla(U) = (U, \nabla(df(U)))$$

einen Zusammenhang auf Q.

Man rechnet leicht nach, daß die folgende Relation der Krümmungen besteht:

$$dF \circ \Omega^{f^*\nabla} = f^*\Omega^{\nabla} \ .$$

3.1.11 Paralleltransport in Hauptfaserbündeln

Wir betrachten ein G-Hauptfaserbündel $\pi : P \to X$ mit einem Zusammenhang ∇. Sei $\gamma : [0,1] \to X$ eine Kurve. Wir schreiben $\gamma'(t) := d\gamma(t)(\partial_t)$.

Definition 3.13 *Eine Kurve $\tilde{\gamma} : [0,1] \to P$ heißt horizontaler Lift von γ mit Anfang $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, falls $\tilde{\gamma}(0) = p$, $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ und und $\tilde{\gamma}' = \nabla(\gamma')$.*

Lemma 3.14 *Sei G kompakt. Das existiert genau ein horizontaler Lift von γ mit Anfang p.*

Beweis: Wir betrachten das Diagram

$$\begin{tikzcd} \gamma^*P \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ {[0,1]} \arrow[r, "\gamma"] & X \end{tikzcd} .$$

Auf γ^*P betrachten wir das Vektorfeld U welches durch

$$U([t,p]) = \nabla(\gamma'(t))(p)$$

gegeben wird. Die Kurve $\tilde{\gamma}$ ist eine Integralkurve von U mit Anfang $(0,p)$. Eindeutigkeit und Existenz folg aus den entsprechenden Sätzen für gewöhnliche Differentialgleichungen. ■

Wir definieren den Paralleltransport von p entlang γ als

$$\mathcal{PT}_{\gamma}(p) := \tilde{\gamma}(1) \ .$$

3.1.12 Höherdimensionaler Paralleltransport

Wir betrachten $\gamma : [0,1]^n \to X$.

Definition 3.15 *Eine Abbildung $\tilde{\gamma} : [0,1]^n \to P$ heißt horizontaler Lift von γ mit Anfang p wenn $\tilde{\gamma}(0,\ldots,0) = 0$, $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ und $d\tilde{\gamma}'(t)(\partial) = \nabla(\gamma'(t)(\partial))$ für alle $\partial \in T_t[0,1]^n$ gilt.*

Wenn ein solcher Lift existiert, dann gilt für Koordinatenvektorfelder ∂_1, ∂_2 sicher

$$0 = \tilde{\gamma}'([\partial_1,\partial_2]) = [\tilde{\gamma}'(\partial_1), \tilde{\gamma}'(\partial_2)] = [\nabla(\gamma'(\partial_1)), \nabla(\gamma'(\partial_2))] = \Omega^\nabla(\gamma'(\partial_1), \gamma'(\partial_2)) \ .$$

In anderen Worten,

$$\gamma^*\Omega^\nabla = 0 \ .$$

Lemma 3.16 *Die Bedingung $\gamma^*\Omega^\nabla = 0$ ist hinreichend und Notwendig für die Existenz horizontaler Lifts.*

Beweis: Der Beweis ist ähnlich wie im eindimensionalen Fall, wobei der Satz von Frobenius benutzt wird. ■

3.1.13 Holonomie und Reduktion der Strukturgruppe

Sei $\pi : P \to X$ ein G-Hauptfaserbündel mit Zusammenhang ∇. Wir betrachten $p \in P$. Für einen geschlossenen Weg $\gamma : S^1 \to X$ mit $\gamma = x$ definieren wir $\mathtt{Hol}_\gamma(p) \in G$ für $p \in \pi^{-1}(x)$ durch

$$p\mathtt{Hol}_\gamma(p) := \mathcal{PT}_\gamma(p) \ .$$

Man kann den Paralelletransport auch für stückweise glatte Wege definieren. Zwei Wege γ_1, γ_2 kann man hintereinanderausführen: $\gamma_1 \sharp \gamma_2$. Es gilt

$$\mathcal{PT}_{\gamma_1}(\mathcal{PT}_{\gamma_2}(p)) = \mathcal{PT}_{\gamma_1\sharp\gamma_2}(p)$$

und entsprechend

$$\mathtt{Hol}_{\gamma_1}(p)\mathtt{Hol}_{\gamma_2}(p) = \mathtt{Hol}_{\gamma_1\sharp\gamma_2} \ .$$

Es gilt auch

$$\mathtt{Hol}_\gamma(p)^{-1} = \mathtt{Hol}_{-\gamma}(p) \ ,$$

wobei $-\gamma$ den in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg bezeichnet.

Definition 3.17 *Die Gruppe $\mathtt{Hol}(p) := \{\mathtt{Hol}_\gamma(p) | \gamma : S^1 \to X \ , \gamma(0) = \pi(p)\}$ heißt Holonomiegruppe von (P, ∇). Mit $\mathtt{Hol}(p)^0 \subseteq \mathtt{Hol}(p)$ bezeichnet man die Untergruppe der von zusammenziehbaren Wegen gegebenen Holonomien.*

Satz 3.18 *Sei X kompakt. Die Gruppe $\mathtt{Hol}(p)^0 \subset G$ ist eine zusammenhängende Lieuntergruppe mit Liealgebra*

$$\mathtt{Im}(\Omega^\nabla(p) : \Lambda^2 TX \to \mathfrak{g}) \ .$$

Der Quotient $\mathtt{Hol}(p)/\mathtt{Hol}(p)^0$ ist abzählbar.

Beweis: Zusammenhängend ist klar, da die Holonomie stetig von Weg abhängt und jeder Weg in den konstanten deformiert werden kann. Um einzusehen, daß $\mathtt{Hol}(p)^0 \subset G$ eine zusammenhängende Lieuntergruppe ist, benutzen wir den Satz von Freudenthal (Eine Untergruppe $H \subset G$, in welcher jedes Element durch einen stückweise differenzierbaren Weg mit e verbunden werden kann, ist eine Lieuntergruppe), siehe [KN96, II.4.2].

Die Liealgebra ergibt sich aus der Berechnung der Holonomie entlang infinitesimaler Rechtecke. ■

Sei $\pi : P \to X$ ein G-Hauptfaserbündel mit einem Zusammenhang ∇. Wir fixieren $p \in P$. und betrachten die Teilmenge $Q_p \subseteq P$ aller Punkte, welche man durch horizontale Wege aus p erreichen kann.

Satz 3.19

1. *$Q_p \subseteq P$ ist eine $\mathtt{Hol}(p)$-Reduktion von P.*
2. *Der Zusammenhang hat eine Faktorisierung $\nabla : TX \stackrel{\nabla'}{\to} A(Q_p) \to A(P)$ über einen Zusammenhang ∇' auf Q_p.*
3. *Es gilt $\mathtt{ind}^G_{\mathtt{Hol}(p)} Q_p \cong P$ und $\mathtt{ind}^G_{\mathtt{Hol}(p)}(\nabla') = \nabla$.*

3.2 Riemannsche Geometrie

3.2.1 Metrische Zusammenhänge

Wir betrachten eine Mannigfaltigkeit X der Dimension n. Die Angabe einer Metrik g auf TX ist äquivalent zur Angabe einer $O(n)$-Reduktion $\mathtt{Fr}_O(TX)$ des Rahmenbündels.

Definition 3.20 *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein Paar (X, g).*

Sei $\rho : O(n) \to Gl(\mathbb{R}^n)$ die Standarddarstellung. Dann gilt $TX \cong \rho(\mathtt{Fr}_O(TX))$.

Wir wollen diejenigen Zusammenhänge auf TX, welche von $\mathtt{Fr}_O(TX)$ kommen, als metrische Zusammenhänge charakterisieren.

Definition 3.21 *Ein Zusammenhang ∇ auf TX heißt metrisch, wenn*

$$dg(X, Y) = g(\nabla X, Y) + g(X, \nabla Y)$$

für alle $X, Y \in \Gamma(TX)$ gilt.

Lemma 3.22 *Ist ∇ ein Zusammenhang auf $\mathtt{Fr}_O(TX)$, dann ist $\rho(\nabla)$ metrisch.*

Beweis: Seien $X, Y, Z \in \Gamma(TX)$. Dann gilt für $p \in P$ $(X, Y)(\pi(p)) =< f_X, f_Y > (p)$ und deshalb

$$\begin{aligned} dg(X,Y)(Z)(\pi(p)) &= d < f_X, f_Y > (\nabla(Z))(p) \\ &= < df_X(\nabla(Z)), f_Y > (p) + < f_X, df_Y(\nabla(Z)) > (p) \\ &= < f_{\nabla_Z X}, f_y > (p) + < f_X, f_{\nabla_Z Y} > (p) \\ &= g(\rho(\nabla)_Z X, Y) + g(X, \rho(\nabla)_Z Y) \ . \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Sei umgekehrt Δ ein metrischer Zusammenhang auf TX.

Lemma 3.23 *Es gibt einen eindeutig bestimmten Zusammenhang auf* $\mathtt{Fr}_O(TX)$ *mit* $\rho(\nabla) = \Delta$.

Beweis: Sei $X \in T_xX$. Die Gleichungen $\nabla(X)f_\phi(p) = f_{\Delta_X\phi}(p)$ für alle $\phi \in \Gamma(TX)$ bestimmen einen Vektor $\nabla(X) \in T_pP$. Damit wird $\nabla : TX \to A(P)$ definiert ($O(n)$-Invarianz nachrechnen) und es gilt $\Delta = \rho(\nabla)$. $\blacksquare$

Speziell für Zusammenhänge ∇ auf TX kann man den Torsionstensor betrachten.

Definition 3.24 *Wir definieren den Torsionstensor* $T^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2T^*X \otimes TX)$ *durch*

$$T^\nabla(X,Y) = \nabla_XY - \nabla_YX - [X,Y] \ .$$

(Wohldefiniertheit nachrechnen!) Eine der grundlegenden Beobachtungen der Riemannschen Geometrie ist die folgende.

Satz 3.25 (Levi-Civita Zusammenhang) *Sei* (X,g) *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau einen metrischen Zusammenhang (der Levi-Civita Zusammenhang) auf* ∇ *auf* TX *mit* $T^\nabla = 0$.

Beweis: Für $X,Y,Z \in \Gamma(TX)$ definieren wir

$$\begin{aligned} &2 < \nabla_XY, Z > \\ &\quad = \ X < Y,Z > + Y < Z,X > - Z < X,Y > \\ &\qquad + < [X,Y],Z > - < [Y,Z],X > + < [Z,X],Y > \ . \end{aligned}$$

Man rechnet nach, daß ∇ ein torsionsfreier metrischer Zusammenhang auf TX ist.

Sei $\nabla + \alpha$ ein weitere torsionsfreier metrischer Zusammenhang. Dann ist $\alpha(X)^* = -\alpha(X)$ und $\alpha(X)Y - \alpha(Y)X = 0$. Aus diesen Identitäten schließt man algebraisch, daß $\alpha = 0$ gelten muß. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} 0 &= < \alpha(X)Y, Z > + < Y, \alpha(X)Z > \\ 0 &= < \alpha(Y)X, Z > + < X, \alpha(Y)Z > \\ &= < \alpha(X)Y, Z > + < X, \alpha(Y)Z > \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} -2 < \alpha(X)Y, Z > &= < Y, \alpha(X)Z > + < X, \alpha(Y)Z > \\ &= < Y, \alpha(Z)X > + < X, \alpha(Z)Y > \\ &= < \alpha(Z)X, Y > + < X, \alpha(Z)Y > \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

3.2.2 Krümmungsbegriffe

Der Krümmungstensor $R = R^\nabla$ des Levi-Civita Zusammenhanges ∇ einer Riemannschen mannigfaltigkeit hat einige besondere Eigenschaften. Entsprechend der allgemeinen Theorie gilt

$$R \in \Gamma(\Lambda^2 T^*X \otimes \mathtt{End}(TX)) \ .$$

Lemma 3.26 *Für einen metrischen Zusammenhang ∇ auf einem Vektorbündel $E \to X$ gilt $R^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2 T^*X \otimes \mathtt{End}(E)^a)$, wobei $\mathtt{End}(E)^a \subset \mathtt{End}(E)$ das Unterbündel der bezüglich der Metrik antisymmetrischen Endomorphismen bezeichnet.*

Lemma 3.27 *Die Krümmung R des Levi-Civita Zusammenhanges erfüllt die algebraische Bianchi-Identität:*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

Beweis: Wir betrachten kommutierenden Vektorfelder (z.B.Koordinatenfelder). Wir schreiben die Definition der Krümmung aus und benutzen drei mal die Torsionsfreiheit.

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z \\
&\quad +\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X \\
&\quad +\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_Z X \\
&\quad +\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X \\
&\quad +\nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_X\nabla_Y Z \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Sei $(V, <.,.>)$ ein euklidischer Vektorraum.

Lemma 3.28 *Durch*

$$\omega_\phi(X,Y) = <\phi(X), Y>$$

wird eine linearer Isomorphismus

$$\mathtt{End}(E)^a \xrightarrow{\sim} \Lambda^2 V^*, \phi \mapsto \omega_\phi$$

induziert.

Wir können also $R \in \Gamma(\Lambda^2 T^*X \otimes \Lambda^2 T^*X)$ betrachten. In der Tat gilt

Lemma 3.29 $R \in \Gamma(S^2(\Lambda^2 T^*X))$.

Beweis: Wir wenden die Antisymmetrie von $R(X,Y)$ und die algebraische Bianchi-Identität an.

$$\begin{aligned} < R(X,Y)Z,U > &= - < R(Y,Z)X,U > - < R(Z,X)Y,U > \\ &= + < X, R(Y,Z)U > + < Y, R(Z,X)U > \\ &= - < X, R(Z,U)Y > - < X, R(U,Y)Z > \\ &\quad - < Y, R(X,U)Z > - < Y, R(U,Z)X > \\ &= 2 < R(Z,U)X,Y > + < Z, R(U,Y)X > + < Z, R(X,U)Y > \\ &= +2 < R(Z,U)X,Y > - < Z, R(Y,X)U > \\ &= 2 < R(Z,U)X,Y > - < R(X,Y)Z,U > \quad . \end{aligned}$$

Die gesuchte Gleichung folgt. ■

Oft werden folgende abgeleitete Krünnungsgrößen betrachtet.

Definition 3.30 *Die Riccikrümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* (X,g) *ist der Schnitt* $Ric \in \Gamma(\mathtt{End}(TX)^s)$ *(symmetrische Tensoren)*

$$Ric(X,Y) := \sum_{i=1}^{\dim(X)} < R(E_i,X)Y, E_i >$$

(wobei (E_i) *ein lokaler orthonormaler Rahmen ist, man muß Wohldefiniertheit zeigen).*

Die Skalarkrümmung ist die Funktion $s \in C^\infty(X)$*, welche durch* $s = \mathtt{Tr}Ric$ *gegeben ist.*

Die Schnittekrümmung mißt die Krümmung in Richtung zweidimensionaler Unterräume in TX. Sei $V \subset T_xX$ ein Unterraum mit Orthonormalbasis (E,F).

1. **Definition 3.31** *Die Schnittkrümmung in Richtung* V *ist durch*

$$K(V) := < R(E,F)F, E >$$

gegeben.

Hier sind einige Frage der globalen Riemannschen Geometrie, welche aktuell auch in Göttingen studiert werden.

1. Sei X eine gegebene kompakte Mannifaltigkeit. Besitzt X eine Riemannsche Metrik, für welche die Skalarkrümmung s ein bestimmtes Vorzeichen hat? Der Fall $s > 0$ is besonders interessant.

2. Sei X eine kompakte Mannifaltigkeit. Besitzt X eine Riemannsche Metrik, für welche Ric positiv oder negativ definit ist. Der Fall $Ric > 0$ ist besonders interessant und hängt Vermutungsweise mit $s > 0$ auf dem Schleifenraum $C^\infty(S^1,X)$ zusammen, der in der Stringtheorie eine wichtige Rolle spielt.

3. Eine Einsteinmetrik ist eine Riemannsche Metrik, für welche $Ric = \lambda g$ (Einsteingleichung) für ein $\lambda \in C^\infty(X)$ gilt. Man zeigt leicht, daß λ konstant sein muß. In einem Punkt, in welchem die Basisfelder parallel sind (Normalkoordianten), gilt nach Spurnehmen

$$\begin{aligned} n\partial_l\lambda &= \partial_l R_{ijji} \\ &\overset{Bianchi}{=} -\partial_i R_{jjli} - \partial_j R_{jlii} \\ &\overset{Antisymmetrie}{=} 0 \end{aligned}$$

Die Frage ist, ob eine gegebene Mannigfaltigkeit X Einsteinmetriken besitzt, und wie der Raum aller dieser Metriken beschrieben werden kann.

3.2.3 Krümmung symmetrischer Räume

Sei G eine halbeinfache Liegruppe mit einer Involution $I \in \mathtt{Aut}(G)$ derart, daß $K := G^I \subseteq G$ eine kompakte Untergruppe ist. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ die entsprechende Aufspaltung der Liegalgebra. Sei $< .,. >_\mathfrak{p}$ eine K-invariante Metrik auf $\mathfrak{p}$. Diese induziert eine Riemannsche Metrik g auf G/K, indem wir $TG/K \cong G \times_{K,\mathtt{Ad}} \mathfrak{p}$ indentifizieren. Seien $X, Y \in \mathfrak{p}$. Dann sind $gXK, gYK \in T_{gK}G/K$ und es gilt $g(X,Y) =< X, Y >_\mathfrak{p}$.

Das Hauptfaserbündel $G \to G/K$ hat einen kanonischen Zusammenhang, welcher durch $\nabla(X^\sharp(gK))(g) = g\mathtt{pr}_\mathfrak{p}(X^{g^{-1}})$ gegeben wird. Wir haben folglich einen induzierten Zusammenhang $\mathtt{Ad}(\nabla)$ auf $\mathtt{Ad}(G \to G/P) = TG/K$.

Lemma 3.32 $\mathtt{Ad}(\nabla)$ *ist der Levi-Civita Zusammenhang auf G/K mit der Metrk g.*

Beweis: Da die Darstellung $\mathtt{Ad} : K \to GL(\mathfrak{p})$ über $O(\mathfrak{p}, < .,. >_\mathfrak{p})$ faktorisiert, ist $\mathtt{Ad}(\nabla)$ metrisch. Wir müssen zeigen, daß der Torsionstensor verschwindet. In der Tat gilt im Ursprung $K \in G/K$

$$\begin{aligned} \mathtt{Ad}(\nabla)_{X^\sharp} Y^\sharp - \mathtt{Ad}(\nabla)_{Y^\sharp} X^\sharp &= XYK - \mathtt{pr}_\mathfrak{p}[X,Y]K - YXK + \mathtt{pr}_\mathfrak{p}[Y,X]K \\ &= [X,Y]K \\ &= 0 \\ &= [X^\sharp, Y^\sharp] \end{aligned}$$

■

Wir können nun den Riemannschen Krümmungstensor bestimmen.

Lemma 3.33 *Es gilt für $X, Y, Z \in \mathfrak{p} \cong TeK$*

$$R(X,Y)Z = -[[X,Y],Z] \ .$$

Beweis: Die Krümmung von $G \to G/K$ war durch G-Invarianz und $\Omega(X,Y) = [X,Y] \in \mathfrak{k}$ (eine 2-Form mit Werten in den rechts-K-invarianten vertikalen Vektorfeldern) im Ursprung gekennzeichnet. Sei $f_Z : eK \to \mathfrak{p}$ die Z-repräsentierende K-invariante Funktion. Es gilt $kf_Z(k)K = ZK$, also $f_Z(k) = Z^{k^{-1}}$. Daraus folgt im Ursprung $\Omega(X,Y)f_Z = -[[X,Y],Z]$. ■

Wir betrachten den Fall $G = SO(n)$, $K = SO(n-1)$. Wir hatten $\mathfrak{p} = \mathbb{R}^{n-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left[\left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ -v^t & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w^t & 0 \end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^t & 0 \end{pmatrix}\right] &= \left[\begin{pmatrix} -v \circ w^t + w \circ v^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^t & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -v < w,u > +w < v,u > \\ (\dots)^t & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$R(v,w)u = v < w,u > -w < v,u >$$

Wir bestimmen zunächst die Schnittkrümmung. Seien v, w orthonormal. Dann gilt

$$K(v \wedge w) =< R(v,w), w, v >= 1 \ .$$

Die Sphäre $S^{n-1} = SO(n)/SO(n-1)$ hat also konstante Schnittkrümmung 1 (in dieser Normierung).

Wir bestimmen jetzt den Riccitensor. Es gilt

$$Ric(w,u) = n < w,u > - < w,u >= (n-1) < w,u > \quad .$$

Folglich ist $S^{n-1} = SO(n)/SO(n-1)$ eine Einsteinmannigfaltigkeit.

Wir betrachten jetzt $G = U(n)$ und $K = U(n-1) \times U(1)$. Wir hatten $\mathfrak{p} = \mathbb{C}^{n-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left[\left[\begin{pmatrix} 0 & v \\ -v^* & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w^* & 0 \end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^* & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} -v \circ w^* + w \circ v^* & 0 \\ 0 & -v^*w + w^*v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^* & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -v < w,u > +w < v,u > +2iu\mathtt{Im}(< v,w >) \\ (\dots)^t & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also

$$R(v,w)u = v < w,u > -w < v,u > -2iu\mathtt{Im}(< v,w >) \ .$$

Wir berechnen wieder die Schnittkrümmung. Es gilt für orthonormale v, w (d.h. $\mathtt{Re}(< v,w >) = 0$)

$$\mathtt{Re} < R(v,w)w, v >= 1 - 3 < v,w >^2 \quad .$$

Nun ist $< v,w >\in i[0,1]$. Damit liegt

$$K(v \wedge w) \in [1,4] \ .$$

Schließlich bestimmen wir auch hier den Riccitensor. Es gilt

$$Ric(w,w) = (2n-4)\|w\|^2 \ .$$

Also ist auch $U(n)/U(n-1) \times U(1)$ eine Einsteinmannigfaltigkeit.

3.3 Metrik und Geodäten

3.3.1 Bogenlänge und Abstandsfunktion

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ist $\gamma : [0,T] \to M$ eine (glatte) Kurve, dann definieren wir die Länge von γ durch

$$L(\gamma) := \int_0^T \|\gamma'(t)\|_g dt \ .$$

Die Energie von γ ist

$$E(\gamma) := \frac{1}{2}\int_0^T \|\gamma(t)\|_g^2 dt \ .$$

Lemma 3.34 *$L(\gamma)$ hängt nicht von der Parametrisierung ab, d.h. es gilt $L(\gamma) = L(\gamma \circ \phi)$ für jeden Diffeomorphismus $\phi : [0,T] \to [0,T']$.*

Beweis: Nachrechnen! ■

Definition 3.35 *Wir definieren $d : M \times M \to [0,\infty)$ durch*

$$d(x,y) = \inf L(\gamma) \ ,$$

wobei das Infimum über alle Kurven von x nach y genommen wird.

Lemma 3.36 *Die Funktion d ist eine Metrik, welche die Topologie von M definiert.*

Eine Kurve $\gamma : [0,T] \to M$ ist durch die Bogenlänge parametrisiert, wenn $L(\gamma_{[0,T']}) = T'$ für alle $T' \in (0,T]$ gilt. Dies ist zu $\|\gamma'\| \equiv 1$ äquivalent.

3.3.2 Die Variation des Längenfunktionals

Eine Kurve $\gamma : [0,T]$ heißt ist stationär für das Energiefunktional, falls für jede glatte Variation $\tilde{\gamma} : [0,T] \times [-\epsilon,\epsilon] \to M$ mit $\tilde{\gamma}(t,0) = \gamma(t)$ und $\tilde{\gamma}(0,s) = \gamma(0)$, $\tilde{\gamma}(T,s) = \gamma(t)$ gilt

$$E(\tilde{\gamma})^{\bullet}(0) = 0$$

($\bullet$ ist die Ableitung nach der Variationsvariable).

Lemma 3.37 *γ ist genau dann stationär, wenn γ die Geodätengleichung $\nabla_{\partial_t}^{\gamma^*TM}\gamma' = 0$ erfüllt. ($\gamma' \in \Gamma(\gamma^*TM)$).*

Beweis: Sei $\tilde{\gamma}$ eine Variation und s die Variationsvariable. Dann gilt

$$\begin{aligned}
E(\tilde{\gamma})^\bullet &= \frac{1}{2}\left(\int_0^T < \tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t) > dt\right)^\bullet \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T < \tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t) >^\bullet dt \\
&\overset{\nabla \text{ ist metrisch}}{=} \int_0^T < \nabla_{\partial_s}\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t) > dt \\
&\overset{\nabla \text{ ist torsionsfrei}}{=} \int_0^T < \nabla_{\partial_t}\tilde{\gamma}^\bullet(t), \tilde{\gamma}'(t) > dt \\
&= \int_0^T < \tilde{\gamma}^\bullet(t), \tilde{\gamma}'(t) >' dt \\
&\quad - \int_0^T < \tilde{\gamma}^\bullet(t), \nabla_{\partial_t}\tilde{\gamma}'(t) > dt \\
&= - \int_0^T < \tilde{\gamma}^\bullet(t), \nabla_{\partial_t}\tilde{\gamma}'(t) > dt
\end{aligned}$$

Aus $E(\tilde{\gamma})^\bullet(0) = 0$ für alle Variationen folgt nun leicht, daß $\nabla_{\partial_t}\tilde{\gamma}'$ gelten muß. Dies ist die gewünschte Gleichung. ■

Definition 3.38 *Eine Kurve ist eine Geodätische, wenn sie die Geodätengleichung erfüllt.*

Lemma 3.39 *Sei $\gamma : [0,T] \to M$ eine durch Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Dann realisiert γ lokal den Abstand, d.h. für $t \in [0,T)$ gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, daß für $0 < d < \epsilon$ gilt $d = d(\gamma(t), \gamma(t+d))$.*

Sei $x \in M$ und $X \in T_xM$ gegeben.

Lemma 3.40 *Es gibt ein $\epsilon > 0$ derart, daß genau eine Geodätische $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = X$ existiert.*

Beweis: Die Geodätengleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung. Das Lemma wird auf den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt. ■

3.3.3 Die Geodätschen in einem symmetrischen Raum

Sei $K \subset G$ wie in 3.2.3. Wir betrachten den Ursprung $eK \in G/K$ und $X \in \mathfrak{p} \cong T_{eK}G$.

Definition 3.41 *Die Kurve $\gamma(t) = e^{tX}K$ ist eine Geodätische mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = X$.*

Beweis: Die Aussagen über die Anfangswerte sind klar. Wir müssen zeigen, daß γ die Geodätengleichung erfüllt. Es gilt

$$\gamma'(t) = X^\sharp(\gamma(t)) \ .$$

Nun ist wegen $X^{e^{-tX}} = X$

$$\nabla(\gamma'(t))(e^{tX}) = e^{tX}\mathtt{pr}_{\mathfrak{p}}(X^{e^{-tX}}) = Xe^{tX} \ .$$

Auf der anderen Seite ist

$$f_{\gamma'(t)}(e^{tX}) = \mathtt{pr}_{\mathfrak{p}}(X^{e^{-tX}}) = X$$

konstant entlang der Kurve e^{tX}. Damit gilt die Geodätengleichung.

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0 \ .$$

Wir sehen uns wieder den Fall $G/K = SO(n)/SO(n-1)$ and. Sei $v \in \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathfrak{p}$, $v = (1, 0, \ldots, 0)$. Dann gilt

$$e^{tv} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n-2} \end{pmatrix} \ .$$

Der Orbit des Punktes $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ ist ein Großkreis in S^{n-1}.

Index

References

[Ada75] Robert A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. 1.1.2.4

[AG81] N. I. Achieser and I. M. Glasmann. *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum.* Verlag Harri Deutsch, Thun, eighth edition, 1981. Translated from the Russian by Hellmuth Baumgärtel, With a foreword by G. Köthe. 1.4.5

[Dol63] Albrecht Dold. Partitions of unity in the theory of fibrations. *Ann. of Math. (2)*, 78:223–255, 1963. 2.1.3.4

[GT77] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 224. 1.1.2.1, 1.1.2.1, 1.1.2.2

[HBJ92] Friedrich Hirzebruch, Thomas Berger, and Rainer Jung. *Manifolds and modular forms.* Aspects of Mathematics, E20. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992. With appendices by Nils-Peter Skoruppa and by Paul Baum. 2.3.2.1

[Hör03] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin; MR1065993 (91m:35001a)]. 1.1.2.3

[Hus94] Dale Husemoller. *Fibre bundles*, volume 20 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third edition, 1994. 2.1.2.1, 2.3.2.3

[Joh78] Fritz John. *Partial differential equations*, volume 1 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, third edition, 1978. 1.1.2.1

[KN96] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication. 3.1.13

[Kui65] Nicolaas H. Kuiper. The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. *Topology*, 3:19–30, 1965. 5

[Swi75] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology.* Springer-Verlag, New York, 1975. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 212. 2.2.1.3

[tD87] Tammo tom Dieck. *Transformation groups*, volume 8 of *de Gruyter Studies in Mathematics.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1987. 2.1.3

[tD91] Tammo tom Dieck. *Topologie.* de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1991. 2.1.3.4, 2.2.1.3

[Tri83] Hans Triebel. *Theory of function spaces*, volume 78 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983. 1.1.2.4