Analysis I

Ulrich Bunke[*]

12. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

[*]NWF I - Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg, GERMANY, ulrich.bunke@mathematik.uni-regensburg.de

1 Eingangstest

1. Welcher Typ von Antwort paßt zur Frage.

Fragen

(a) Vereinfachen Sie den Term $(x^2 - 3)(x + 1)(x - 1)^{-1}$.

(b) Ist die Gleichung $(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$ richtig?

(c) Lösen Sie die Gleichung $x^3 - 3x + 2 = 0$ in $\mathbb{R}$.

(d) Hat die Gleichung $x^2 + x + 10$ Lösungen in $\mathbb{R}$?

(e) Zeigen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen $n^2 - 2 + 1 \geq n$ gilt.

(f) Berechnen Sie $5^2 - 2$.

(g) Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl gibt deren Quadrat gleich 2 ist.

(h) Wieviele Teilmengen hat $\emptyset$.

(i) Ist die Zahl 30 ist ein Produkt von Primzahlen?

(j) Finden Sie die Primteiler von 30.

(k) Geben Sie eine echte Teilmenge von $\{a, b, c\} \sqcup \{a, b\}$ an.

(l) Werten Sie aus: Aus $3|30$ folgt, daß die Zahl 30 genau 3 Primteiler hat.

(m) Berechnen Sie das Produkt der Primteiler von 30.

(n) Hat $\emptyset$ eine Teilmenge?

(o) Bilden Sie die Ableitung von $x^2 + x$.

(p) Für welche reellen Zahlen gilt $x^3 \in [3, 4]$?

(q) Sei $A := \{a, b, c\}$ und $B := \{a, c\}$. Bilden Sie $A \setminus B$.

(r) Berechnen Sie $wahr \vee (falsch \Rightarrow wahr)$.

Antworten

(a) Nein

(b) Die Zahl 6 hat den nichttrivialen Teiler 3. Deshalb ist 6 keine Primzahl.

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$

(d) $2x - 1$

(e) *wahr*

(f) $\emptyset$

(g) 3

(h) $\{2, 3, 5, 7\} \subseteq \mathbb{N}$

2. Ordnung Sie korrekt zu:

   (a) Die Menge der Primzahlen
   (b) Die Menge der rationalen Zahlen
   (c) Die Menge der natürlichen Zahlen mit genau vier Teilern.
   (d) Die Menge der Quadratzahlen in $\mathbb{N}$.

   (a) $\{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in \mathbb{N} \mid n = m^2)\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid (\exists a \in \mathbb{Z} \ \exists b \in \mathbb{Z} \mid (b \neq 0) \wedge (x = \frac{a}{b})\}$
   (c) $\Big\{x \in \mathbb{N} \mid \big(\forall n \in \mathbb{N} \mid (n \geq 2) \wedge ((n|x) \Rightarrow (n = x) \vee (n = 1))\big)\Big\}$
   (d) $\{n \in \mathbb{N} \mid (\sharp\{m \in \mathbb{N} \mid m|n\} = 4)\}$

   Ordnung Sie korrekt zu:

   A

3. (a) $\prod_{k=1}^{n} k$
   (b) $\sum_{k=1}^{n} k$
   (c) $(x+1)(x-1)$
   (d) $(x+1)^3$
   (e) $(\frac{1}{1-x})'$

   B

   (a) n^n
   (b) $\frac{1}{(1-x)^2}$
   (c) $\frac{-1}{x}$
   (d) $x^2 - 1$
   (e) $x^3 + 3x - 1$
   (f) $n!$
   (g) $\frac{x(x+1)}{2}$
   (h) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
   (i) $\frac{n(n+1)}{2}$
   (j) $n^2 - 1$

2 Mathematische Sprache

Die Basis für die mathematische Kommunikation ist die Sprache der Mengenlehre und der Logik. Für den Anfang werden wir keine präzise Einführung in die Mengentheorie und Logik geben, sondern ein intuitives Verständnis davon voraussetzen. Wir werden durch Beispiele erklären, wie wir diese Sprache verwenden werden. Hält man sich an einige sehr einfache Regeln, dann wird man Fehler weitestgehend vermeiden. In einem fortgeschrittenen Stadium des Mathematikstudiums ist es durchaus nützlich, sich genauer mir der Mengenlehre und der Logik auseinanderzusetzen.
Ein Beispiel für eine Menge ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\} .$$

Diese Formel ist kein präziser mathematischer Ausdruck, da natürlich nicht genau festgelegt wird, was die Punkte bedeuten. Trotzdem wird durch diese Formel sehr verständlich klargemacht, was mit dem Symbol $\mathbb{N}$ gemeint ist, da wir die natürlichen Zahlen als bekannt voraussetzen können und im Text benannt haben. Insbesondere legen wir visuell schnell erfaßbar die Konvention fest, daß Null eine natürliche Zahl ist. In mathematischen Texten werden wir immer wieder mit dem Problem konfrontiert, einerseits so präzise wie möglich zu formulieren, auf der anderen Seite aber verständlich zu bleiben. Ein passender Kompromiss muß jeweils gefunden werden.
Ein weiteres wichtiges Beispiel für eine Menge ist die leere Menge, die mit $\emptyset$ bezeichnet wird.
Wir benutzen also das Zeichen $:=$, wenn wir einem Symbol eine Bedeutung zuweisen.
Wir verdeutlichen die Verwendung des Symbols $:=$ an weiteren Beispielen

1. $W := \{wahr, falsch\}$ ordnet dem Symbol W die Menge der Wahrheitswerte zu.

2. $x := 3$ ordnet dem Symbol x die Zahl drei zu.

3. Wenn wir $x := y+z$ schreiben, dann sollten vorher die Werte der Symbole y, z schon festgelegt sein und zwar so, daß die Summe sinnvoll erklärt ist. Folgender Text ist also sinnvoll:

   Wir setzen $y := 3$ und $z := y^2$. Weiter führen wir die Bezeichnung $x := y + z$ ein.

   Implizit haben wir damit festgelegt, daß die Symbole x, y, z Zahlen bezeichnen.

4. Andererseits ist folgendes nicht sinnvoll.

   Wir setzen $x := x + 3$.

Im Unterschied zu $:=$ wird das Zeichen $=$ benutzt, um eine Aussage zu bilden. Aussagen sind logische Konstrukte, die Variablen enthalten können, und die einen Wahrheitswert haben, wenn alle Variablen belegt sind.

1. Eine Aussage ohne Variable ist:

   Das Quadrat von 4 ist gleich 16.

   Diese Aussage ist offensichtlich wahr.

2. In Formeln könnten wir diese Aussage auch als

   $$4^2 = 16$$

   schreiben. Wir sehen hier, wie das Gleichheitszeichen verwendet wird.

3. Der Satz

   $$\text{Es gilt } 4^2 = 16.$$

   hat eine andere Bedeutung, die in Kurzform

   $$\mathit{wahr} = (4^2 = 16)$$

   geschrieben werden kann. "Es gilt ..." ist also eine Textform für "$\mathit{wahr} = \ldots$".

4. Wenn man in einem Text das Zeichen $=$ antrifft dann sollte man immer zunächst prüfen, aus welchen Mengen die Terme auf beiden Seiten stammen, und ob diese überhaupt vergleichbar sind.

   In $\mathit{wahr} = (4 = 16)$ werden in der inneren Klammer zwei Zahlen verglichen. Das äußere Zeichen "$=$" vergleicht zwei Aussagen.

   Folgender Text ist nicht sinnvoll:

   Es gibt eine reelle Zahl x für welche $4 = (x = \sqrt{16})$ gilt.

   In der Tat ist die linke Seite eine Zahl und die rechte Seite ein Wahrheitswert.

5. Wir schreiben manchmal etwas wie

   $$\text{Es gilt } (2+5)^2 = 7^2 = 49.$$

   Dies ist eine verkürzte Form von

   $$\text{Es gelten } (2+5)^2 = 7^2 \text{ und } 7^2 = 49.$$

Aussagen können Variablen enthalten. Hier ist ein Beispiel einer Aussage über die natürliche Zahl n:

$$P(n) := (n \text{ ist durch 3 teilbar.}).$$

Im Vorsatz wird beschrieben, mit welchen Elementen wir die Variable belegen möchten. Solange aber n nicht belegt ist, hat $P(n)$ keinen Wahrheitswert. Eine Aussage mit einer freien Variablen nennt man auch Aussageform. Belegungen können auf verschieden Arten erreicht werden. Die folgenden 4 Aussagen sind auf den ersten Blick verschieden, haben aber den gleichen Inhalt.

1. Die Aussage $P(7)$ ist falsch.

2. Für alle natürlichen Zahlen n gilt: Wenn $n = 7$ gilt, dann ist $P(n)$ falsch.

3. Wir setzen $n := 7$. Dann ist $P(n)$ falsch.

4. Die Aussage $(P(7) = \mathit{wahr})$ ist falsch.

Will man eigentlich nur eine Aussage über die Teilbarkeit der einen natürlichen Zahl 7 machen, dann braucht man die Variable nicht wirklich und würde eigentlich einfacher schreiben:

Die Zahl 7 ist nicht durch 3 teilbar.

Aussagen mit Variablen werden wichtig wenn man Aussagen der folgenden Art machen möchte.

Für alle natürlichen Zahlen n gilt $P(n^3 + 3n^2 + 2n)$.

In dem Text "Für alle natürlichen Zahlen $n \dots$" wird die Variable n belegt und muß deshalb benannt werden. So kann man nicht formulieren:

Für alle natürlichen Zahlen gilt $P(n^3 + 3n^2 + 2n)$.

In Formeln liest sich diese Aussage so:

$$(\forall n \in \mathbb{N} \mid P(n^3 + 3n^2 + 2n)).$$

Diese Aussage ist übrigends wahr, da $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$ gilt und für jede natürliche Zahl n einer der drei Faktoren n,$n+1$ oder $n+2$ durch 3 teilbar ist.
Wir wollen hier erklären, wie man Rechenaufgaben korrekt interpretiert und deren Lösung formuliert. Stellen wir uns vor, wir erhalten die Aufgabenstellung:

Löse die Gleichung $x^2 + 6x - 5 = 0$.

Um diese Aufgabe präzise zu verstehen, muß man diese Aufgabe in einem Kontext sehen. Wir nehmen an, daß wir gerade über reelle Zahlen reden und wir deshalb relle Zahlen suchen, welche dieser Gleichung genügen und nicht etwa ganze. Eine genauere Formulierung der Frage wäre also:

Finde alle reellen Zahlen x welche der Gleichung $x^2 + 6x - 5 = 0$ genügen.

Auch hier ist es wieder wichtig, die Variable x im Vorsatz zu benennen. Eine durchaus korrekte Antwort wäre:

Die Lösung der Aufgabe ist die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 6x - 5 = 0\}$.

Es ist wieder der Kontext der Aufgabenstellung, aus welchem wir aufgefordert werden, eine möglichst explizite Beschreibung der Lösungsmenge anzugeben. Eine explizitere Antwort wäre:

Die Menge der reellen Zahlen x, welche der Gleichung $x^2 + 6x - 5 = 0$ genügen, ist durch $\{-3 + \sqrt{14}, -3 - \sqrt{14}\}$ gegeben.

Schlechte Formulierungen wären etwa:

Die Lösung der Aufgabe ist $L = -3 \pm \sqrt{14}$.

Die Lösung ist $x = -3 \pm \sqrt{14}$.

Diese Formulierungen beschreiben keine Mengen. In der ersten kommt noch ein unmotiviertes Symbol L vor.
Oft wird die Aufgabe noch präziser gestellt.

Finde alle reellen Zahlen x welche der Gleichung $x^2 + 6x - 5 = 0$ genügen und begünde die Antwort.

Eine mögliche Antwort könnte so aussehen:

Durch Anwendung der Lösungformel für quadratische Gleichungen sehen wir, daß die Menge der reellen Zahlen x, welche der Gleichung $x^2 + 6x - 5 = 0$ genügen, durch $\{-3 + \sqrt{14}, -3 - \sqrt{14}\}$ gegeben ist.

Die Menge der reellen Zahlen x, welche der Gleichung $x^2 + 3x - 5 = 0$ genügen, ist durch $\{-3 + \sqrt{14}, -3 - \sqrt{14}\}$ gegeben. Da die Gleichung quadratisch ist, hat sie höchstens zwei verschiedene Lösungen. Es gilt

$$(-3 \pm \sqrt{14})^2 + 6(-3 \pm \sqrt{14}) - 5 = 9 \mp 6\sqrt{14} + 14 - 18 \pm 6\sqrt{14} - 5 = 0$$

Schlecht ist:

Wie man leicht sieht, sind die Lösungen $x = \frac{-3\pm\sqrt{14}}{5}$.

In einem anderen Kontext könnte aber selbst die Angabe der Lösungsmenge noch nicht reichen und etwa eine Begründung der Lösungformel oder ein Nährungsverfahren zur Berechnung der Dezimalentwicklung der Lösungen verlangt sein. Bei jeder Aufgabenstellung muß man sich den Kontext der Aufgabe klar machen und erkennen, welche Art von Lösung gefragt ist.

2.1 Übungen

1. Wir führen die Bezeichnungen $x := 3$ und $y := 5$ ein. Sei weiter $z := (x+2-y = 0)$.

   Welche der folgenden mathematischen Textpassagen sind sinnvoll (Begründe die Antwort).

   (a) Es gilt nicht $y := 3$.

   (b) Es gilt $z = 7$.

   (c) Es gilt z.

   (d) Wenn $x = y + 2$ gilt, dann auch z.

2. Definieren Aussageformen über natürliche Zahlen, welche genau für alle Kubikzahlen bzw. alle Zahlen mit mindestens 6 Primteilern wahr sind.

3. Löse folgende Aufgabe:

   Finde alle ganzen Zahlen x, welche der Ungleichung

   $$|x^3 + 3| \leq 30$$

   genügen. Begünde die Antwort.

3 Operationen mit Mengen

In diesem Kapitel beschreiben wir die grundlegenden Operationen der Mengensprache. Für zwei Objekte a, A der Mengentheorie soll die Aussage

$$a \in A$$

definiert sind. Sie ist wahr, wenn a ein Element von A ist und falsch andernfalls. Wir setzen

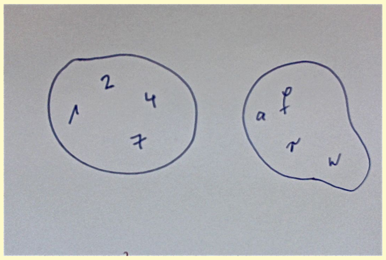
$$a \notin A := \neg(a \in A) \ .$$

Das Zeichen $\neg$ ist das Symbol für die logische Operation der Negation. Das heißt, es gilt $a \notin A$ genau dann wenn a kein Element von A ist.
Im Augenblick können wir nicht genauer erklären, was Objekte der Mengentheorie sind und appellieren an die Intuition.

1. Sei $A := \{a, b\}$. Dann gilt $a \in A$.
2. Sei $A := \{0, 1\}$. Dann gilt $a \notin A$.

Die einfachste Möglichkeit eine Menge zu beschreiben ist es, ihre Elemente aufzulisten.

1. $\{1, 2, 4, 7\}$
2. $\{a, f, r, w\}$



Unendliche Mengen kann man natürlich nicht auflisten. Eine Möglichkeit ist, sie in natürlicher Sprache zu beschreiben. Wichtig ist die Kombination aus Formel und textlicher Beschreibung.

1. Sei A die Menge aller natürlichen Zahlen, die man durch man durch Multiplikation mit 3 erhalten kann, also

   $$A := \{0, 3, 6, \ldots, 3n, \ldots\} .$$

   Hier wird auf den ersten Blick klar, was gemeint ist. Dies ist eine günstige Form für die informelle mathematische Kommunikation.

   Die Definition

   Sei $A := \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in \mathbb{N} \mid n = 3m)\}$.

   beschreibt die gleiche Menge in formal korrekter Weise, ist aber schwerer zu dekodieren.

2. Die Symbole $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bezeichnen standardmäßig die Mengen der ganzen, rationalen, reellen oder komplexen Zahlen.

Definition 3.1 *Seien A, B Mengen. Die Menge B ist eine Teilmenge der Menge A, wenn für alle (Objekte x der Mengentheorie) aus der Aussage $x \in B$ die Aussage $x \in A$ folgt.*

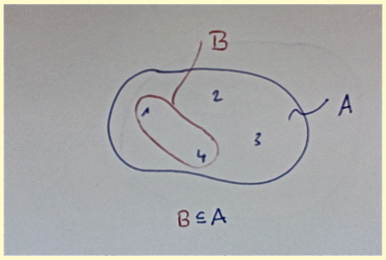
In dieser Definition wird also eine Aussage "B ist eine Teilmenge von A"über Paare von Mengen A, B definiert. Wir notieren diese Aussage in der Form

$$B \subseteq A \ .$$

In Formeln liest sich diese Definition also wie folgt:

$$(B \subseteq A) := (\forall x | (x \in B) \Rightarrow (x \in A)) \ .$$

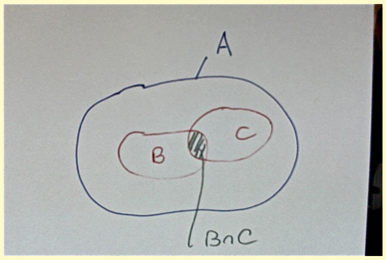
Man kann also den die Textpassage "... ist Teilmenge von ..."bzw. das Zeichen $\dots \subseteq \dots$ als Abkürzungen eines längeren logischen Ausdruckes ansehen.
Es gilt $B = A$ genau dann, wenn die Aussagen $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ beide gelten.

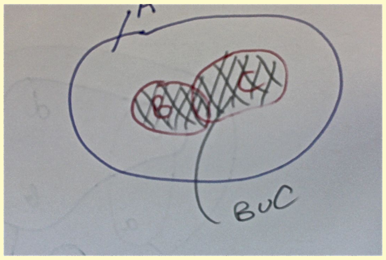


Seien A eine Menge und B, C Teilmengen von A. Dann können wir die Teilmengen $B \cup C$ (die Vereinigung von B und C) und $B \cap C$ (den Durchschnitt von B und C bilden):

$$\begin{aligned} B \cup C &:= \{a \in A \mid (a \in B) \vee (a \in C)\} \\ B \cap C &:= \{a \in A \mid (a \in B) \wedge (a \in C)\} \end{aligned}$$

Siehe auch 5.1.





Seien B, C wieder Mengen. Dann können wir die disjunkte Vereinigung

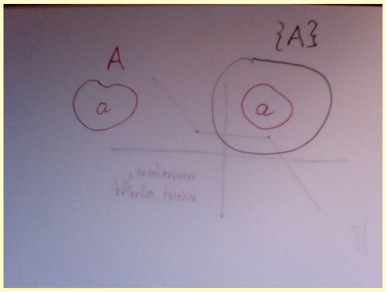
$$B \sqcup C$$

bilden. Dabei werden alle Elemente von B als von den Elementen von C verschieden betrachtet. Die Elemente bekommen sozusagen ein Etikett, auf welchem B oder C steht. Es gilt für $B := \{0, 1, 2\}$ und $C := \{0, 2, 3\}$ daß

$$B \sqcup C = \{0_B, 1_B, 2_B, 0_C, 2_C, 3_C\} ,$$

wobei zum Beispiel $0_C \neq 0_B$ ist.

Ist A eine Menge, dann können wir die Menge $\{A\}$ bilden, welche die Menge A als einziges Element hat. Beachte, daß A keine Teilmenge von $\{A\}$ ist.



Beispiele sind die Mengen $\{\emptyset\}$ oder $\{\mathbb{N}\}$, oder komplexer, $B := \{\mathbb{N}, 1, \{1\}, \emptyset\}$. Diese enthält $\mathbb{N}$ als ein Element aber nicht als Teilmenge. Es gilt $1 \in B$, aber $2 \notin B$.

Sei A wieder eine Menge.

Definition 3.2 *Die Potenzmenge von A ist die Menge aller Teilmengen von A und wird mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet.*

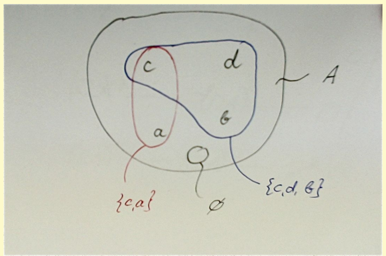
Als Beispiel, sei $A := \{a, b\}$. Dann ist

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} .$$

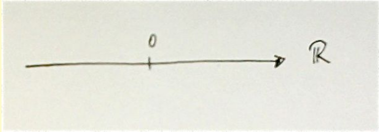
Weiter ist $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Es gilt immer

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A) , \quad A \in \mathcal{P}(A) .$$

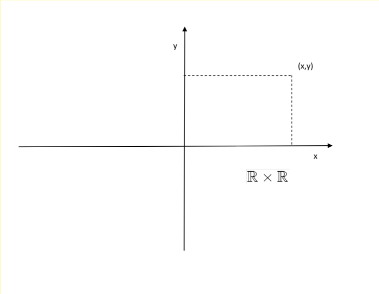
Hier ist ein weiteres Beispiel für eine Menge und Elemente ihrer Potenzmenge



Wir stellen uns die Menge $\mathbb{R}$ als Zahlengerade vor.



Punkte in der Ebene können wir dann durch die Angabe von zwei Koordinaten beschreiben.



Wir notieren diese Koordinaten in der Form (x, y). Die Punkte $(1, 3)$ und $(3, 1)$ sind verschieden. Es kommt hier also auf die Reihenfolge an. Wir nennen $(1, 3)$ ein geordnetes Paar reeller Zahlen und notieren die Menge aller solchen Paare als $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$.
Die Bildung der Menge der geordneten Paare ist eine allgemeine mengentheoretische Operation. Seien A und B zwei Mengen. Ein geordnetes Paar von einem Element a aus A und einem Element b aus B wird in der Form (a, b) notiert.

Definition 3.3 *Das Produkt $A \times B$ ist die Menge der geordneten Paare (a, b) aus Elementen a aus A und b aus B.*

Dabei ist a der erste Eintrag des Paares und b der zweite. Als Beispiel sei $A := \{a, b\}$ und $B := \{0, 1, 2\}$. Dann ist

$$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\} \ .$$

Es gilt zu Beispiel

$$\emptyset = \emptyset \times A \ .$$

Sei M die Menge der männlichen und F die Menge der weiblichen Studenten in diesem Raum. Dann ist $P := M \times F$ die Menge der möglichen (heterosexuellen) Pärchen.

3.1 Aufgaben

1. Sei $A := \{a, b, c, d, e\}$. Geben Sie alle Elemente der Potenzmenge an, die die Menge $\{a, b, c\}$ als Teilmenge haben.

2. Seien A eine Menge und B, C Teilmengen. Zeigen Sie, daß dann $B \cap C \subseteq B \cup C$ gilt. Skizzieren Sie diese Situation schematisch.

3. Zeigen Sie, daß für je drei Mengen A, B, C die Relationen $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ gelten. Skizzieren Sie diese Situation schematisch.

4. Seien A, B Mengen und X, Y Teilmengen von A und Z, U Teilmengen von B. Zeigen Sie, daß
$$(X \times Z) \cap (Y \times U) = (X \cap Y) \times (Z \cap U)$$
gilt. Zeigen Sie weiter, daß eine analoge Formel nicht gilt, wenn man $\cap$ durch $\cup$ ersetzt. Skizziere diese Situationen im Fall, daß $A = B = \mathbb{R}$ und X, Y, Z, U Intervalle sind.

4 Aussagen und Teilmengen

Eine Aussageform über Elemente einer Menge ordnet jedem ihrer Elemente einen Wert aus der Menge $\{wahr, falsch\}$ zu. Die folgende Vorschrift beschreibt eine Aussageform $P(n)$ über natürliche Zahlen n:

$$P(n) := \left\{ \begin{array}{cc} wahr & 3 \text{ ist Teiler von } n \\ falsch & \text{andernfalls} \end{array} \right\} .$$

Ist eine solche Aussageform $P(n)$ gegeben, dann können wir die Teilmenge

$$\{a \in A \mid P(a)\} \subseteq A$$

aller Elemente von $a \in A$ bilden, für welche die Aussage $P(a)$ wahr ist.

1. In unserem Beipiel ist
$$\{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$$
die Teilmenge der durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen.

2. Hier ein anderes Beispiel. Sei S die Menge der Schwäne und
$$Farbe : S \to \{weiss, schwarz\}$$
die Abbildung, welche jedem Schwan seine Farbe zuordnet. Dann ist
$$\{s \in S \mid F(s) = schwarz\}$$
die Teilmenge der schwarzen Schwäne.

3. Wir betrachten die Aussage über natürliche Zahlen n:

   $P(n) :=$ (Wenn eine natürliche Zahl x die Zahl n teilt, dann gilt $x = n$ oder $x = 1$).

   Für alle natürlichen Zahlen n gilt
$$P(n) = (\forall x \in \mathbb{N} \mid (x|n) \Rightarrow (x = 1) \vee (x = n)) .$$

Beachte hier den Unterschied. Oben haben wir := gebraucht, um das Symbol $P(n)$ zu erklären. Unten haben wir = benutzt. Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Aussage, welche die Variable n enthält. Die Variable n ist frei, während x gebunden ist.

Die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \wedge (n \geq 2)\}$ ist die Menge der Primzahlen.

Wir haben gesehen, daß eine Aussage über die Elemente einer Menge benutzt werden kann, um eine Teilmenge dieser Menge zu definieren. Das kann man auch umdrehen. Wir betrachten eine Teilmenge U einer Menge A. Dann können wir die Aussageform $(a \in U)$ über die Elemente a von A bilden. Es gilt dann

$$U = \{a \in A \mid (a \in U)\} \ .$$

Lemma 4.1 *Wir erhalten damit eine eins-zu-eins Entsprechung zwischen Aussagen über die Elemente von A und den Teilmengen von A.*

Wir können dieses Lemma hier nicht im formalen Sinn beweisen, da die Bedeutung von "eins-zu-eins Entsprechung" noch nicht geklärt ist.

Remark 4.2 *In der Mengentheorie verlangen wir für je zwei zwei Objekte a, b daß die Aussage $a \in b$ definiert ist. Wir können deshalb nicht die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen als Objekt der Mengentheorie betrachten. Dann könnte man nämlich die Teilmenge $\mathcal{M}' := \{A \in \mathcal{M} \mid A \notin A\}$ bilden. Wären $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ Objekte der Mengentheorie, dann muß $(\mathcal{M}' \in \mathcal{M}') \in \{wahr, falsch\}$ definert sein. Das geht aber nicht. In der Tat würde aus $\mathcal{M}' \in \mathcal{M}'$ folgen daß $\mathcal{M}' \notin \mathcal{M}'$ gilt. Andererseits würde aber aus $\mathcal{M}' \notin \mathcal{M}'$ auch $\mathcal{M}' \in \mathcal{M}'$ folgen.*

4.1 Aufgaben

1. Bilden Sie eine Aussageform $P(n)$ über ganze Zahlen n derart daß

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid P(n)\} = \{-16, -8, -4, -2, -1\}$$

gilt.

2. Geben Sie die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N} \mid (n = k(k-1))) \wedge (n \leq 50)\}$$

explizit an.

5 Operationen mit Aussagen

In diesem Kapitel wiederholen wir die Grundlagen der Aussagenlogik. Wir arbeiten mit folgenden logische Operationen:

1. Das Symbol für die Negation ist $\neg$. Sei P eine Aussage. Die Negation von P ist $\neg P$.

P	$wahr$	$falsch$
$\neg P$	$falsch$	$wahr$

   .

   Wenn $P = falsch$ ist, dann ist folgende Aussage richtig: Es gilt $\neg P$.

2. Das Symbol $\wedge$ steht für die "und"-Verknüpfung:

$\wedge$	$wahr$	$falsch$
$wahr$	$wahr$	$falsch$
$falsch$	$falsch$	$falsch$

   .

   Sei P eine Aussage. Dann gilt $P \wedge \neg P = fasch$.

3. Das Symbol $\vee$ steht für die "oder"-Verknüpfung:

$\vee$	$wahr$	$falsch$
$wahr$	$wahr$	$wahr$
$falsch$	$wahr$	$falsch$

   .

   Sei P eine Aussage. Dann gilt $P \vee \neg P = fasch$.

4. Das Symbol für die "wenn dann"-Verknüpfung ist $\Rightarrow$:

   $P \Rightarrow Q$

$P \backslash Q$	$wahr$	$falsch$
$wahr$	$wahr$	$falsch$
$falsch$	$wahr$	$wahr$

   .

5. Das Symbol für die "genau-dann-wenn'-Verknüpfung ist $\Leftrightarrow$:

$\Leftrightarrow$	$wahr$	$falsch$
$wahr$	$wahr$	$falsch$
$falsch$	$falsch$	$wahr$

   .

Diese Wahrheitswertetabellen sind als Definitionen der Operationen zu betrachten.
Die logischen Symbole sind kein Ersatz für Wörter und sollten nur in Formeln verwendet werden.

1. Die Zahl 16 ist gerade und eine Quadratzahl.

2. Die Zahl 16 ist gerade $\wedge$ eine Quadratzahl.

3. Die reelle Zahl x erfüllt die Gleichung $3x = 6$ genau dann wenn sie die Gleichung $6x = 12$ erfüllt.

4. Es gilt $3x - 6 \Leftrightarrow 6x - 12$

Zwei logische Terme in der gleichen Menge von Variablen sind äquivalent, wenn sie für alle möglichen Belegungen der Variablen die gleichen Wahrheitswerte haben.

1. Die Terme $\neg(Q \vee P)$ und $\neg Q \wedge \neg P$ sind äquivalent. Wir notieren die Ausage über die Äquivalenz logischer Terme in der Form

$$\neg(Q \vee P) \leftrightarrow \neg Q \wedge \neg P \ .$$

Das Zeichen $\leftrightarrow$ ist nicht mit dem Zeichen $\Leftrightarrow$ zu verwechseln. Die Formel

$$\neg(Q \vee P) \Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg P$$

ist wieder ein logischer Term, keine Aussage. Er erhält eine Wahrheitswert, wenn wir die Variablen Q, P belegen. Andererseits ist

$$\neg(Q \vee P) \leftrightarrow \neg Q \wedge \neg P$$

eine (in diesem Fall wahre) Aussage. Sie ist äquivalent zu

Für jede Belegung der Variablen Q, P gilt $\neg(Q \vee P) \Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg P$.

Wir prüfen die Behauptung nach, indem wir alle möglichen Belegungen durchgehen.

$$\neg(Q \vee P) \ : \quad \begin{array}{|c|c|c|} Q\backslash P & wahr & falsch \\ \hline wahr & falsch & falsch \\ \hline falsch & falsch & wahr \end{array} \ .$$

$$\neg Q \wedge \neg P \ : \quad \begin{array}{|c|c|c|} Q\backslash P & wahr & falsch \\ \hline wahr & falsch & falsch \\ \hline falsch & falsch & wahr \end{array} \ .$$

2. Eine Variable muß in einem logischen Term nicht explizit auftreten. Zum Beispiel sind $falsch$ und $P \wedge \neg P$ zwei logische Terme in der Variablen P, welche äquivalent sind.

3. Analog sieht man folgende Regeln ein:

   (a) $\neg(Q \wedge P) \leftrightarrow (\neg Q \vee \neg P)$

   (b) $Q \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow Q)$

   (c) $(Q \Rightarrow P) \leftrightarrow \neg P \Rightarrow \neg Q$

   (d) $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(e) $Q \Rightarrow P \leftrightarrow \neg Q \vee P$

(f) $P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(g) Kompliziertere Ausdrücke kann man durch mehrfache Anwendung dieser Regeln in einfachere Umfomen: Die folgenden Terme sind alle äquivalent.

$$\begin{aligned} (Q \Rightarrow P) \wedge \neg(Q \wedge P) \\ (\neg Q \vee P) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \\ \neg Q \vee (P \wedge \neg P) \\ \neg Q \vee falsch \\ \neg Q \end{aligned}$$

(h) Oft ist es sinnvoll, mathematische Textpassagen mit Hilfe des logischen Formalismusses zu analysieren.

i. Wir betrachten die Aussage über eine natürliche Zahl n:

$P(n)$:=(Die Zahl n ist eine gerade Primzahl.)

Wir wollen das Gegenteil $\neg P(n)$ bilden.

Falsch wäre etwa:

Die Zahl n ist eine ungerade Primzahl.

Richtig ist:

Die Zahl n ist ungerade oder nicht prim.

Um das einzusehen, schreiben wir $P(n)$ in der Form:

(Die Zahl n ist ungerade.)$\wedge$ (Die Zahl n ist prim.)

Mit Regel (a) ist die Negation dieser Aussage:

(Die Zahl n ist gerade.)$\vee$ (Die Zahl n ist nicht prim.)

ii. Wir betrachten die Aussage

Es regnet nicht oder die Straße ist naß.

Deren Bedeutung ist nicht einfach zu erfassen. Wendet man aber Regel (e) an, dann sieht man, das sie zur Aussage

Wenn es regnet, dann ist die Straße naß.

äquivalent ist.

Wir diskutieren jetzt den Zusammenhang zwischen den logischen und mengentheoretischen Operationen. Vorübergehend führen wir die folgende Notation ein. Sei A eine Menge. Wenn P eine Aussage über Elemente dieser Menge ist, dann schreiben wir

$$A_P := \{x \in A \mid P(x)\}$$

für die Teilmenge derjenigen Elementen von A, für welche die Aussage P gilt.

Lemma 5.1 *Es gelten die folgenden Relationen:*

$$A_Q \cap A_R = A_{Q \wedge R} \ , \quad A_Q \cup A_R = A_{Q \vee R} \ .$$

Wir prüfen dieses Lemma zunächst in einem Beispiel nach.
Sei $A := \{a, b, c, d, e\}$. Wir betrachten die Aussagen Q, R über die Elemente von A, welche durch folgende Tabellen gegeben sind:

$$Q := \begin{array}{c|c|c|c|c} a & b & c & d & e \\ \hline w & f & w & w & f \end{array} \ , \quad R := \begin{array}{c|c|c|c|c} a & b & c & d & e \\ \hline f & w & w & f & f \end{array} \ .$$

Es gilt

$$A_Q = \{a, c, d\}, \quad A_R = \{b, c\} \ .$$

Wir berechnen nun

$$A_{Q \wedge R} = \{x \in A \mid Q(x) \wedge R(x)\} = \{c\} = A_Q \cap A_R$$

und

$$A_{Q \vee R} = \{x \in A \mid Q \vee R\} = \{a, b, c, d\} = A_Q \cup A_R \ .$$

Diese Ergebnis erhält man, indem man nacheinander für alle Elemente von A den Wert der Aussagen $Q \wedge R$ und $Q \vee R$ nachprüft.

Falsch wäre:

$A_Q \cup A_R = \{a, c, d, b, c\}$.

Proof. (Lemma 5.1) Das Argument für die erste Relation geht so. Wir zeigen die Gleichheit der beiden Seiten indem wir nachweisen, daß $A_{Q \wedge R} \subseteq A_Q \cap A_R$ und $A_Q \cap A_R \subseteq A_{Q \wedge R}$ gelten. Um diese beiden Inklusionen zu zeigen, überzeugen wir uns, daß die Aussageformen

$$(a \in A_{Q \wedge R}) \Rightarrow (a \in A_Q \cap A_R) \tag{1}$$

und

$$(a \in A_Q \cap A_R) \Rightarrow (a \in A_{Q \wedge R}) \tag{2}$$

für alle Elemente a aus A wahr sind.
Wir betrachten (1). Sei $a \in A$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Es gilt $(a \in A_{Q \wedge R}) = falsch$. Dann ist (1) wahr.

2. Es gilt $(a \in A_{Q\wedge R}) = wahr$. Dann gelten $Q(a) \wedge R(a)$ und damit insbesondere $Q(a)$ und $R(a)$ separat. Also gelten $a \in A_Q$ und $a \in A_R$. Folglich gilt $a \in A_Q \cap A_R$. Also ist $(a \in A_Q \cap A_R) = wahr$ und damit (1) wahr.

In der Regel kürzt man das Argument ab und sagt nichts über den Fall 1.
Für (2) argumentiert man genauso.

□

Ist P eine Aussage, welche für alle Elemente von A den Wert $falsch$ liefert, dann ist

$$\emptyset = \{a \in A \mid P(a)\} .$$

5.1 Aufgaben

1. Sind $(\neg Q \vee P) \wedge (Q \vee R)$ und $(R \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ äquivalent. Begründe die Antwort.

2. Zeigen Sie, daß jeder logische Term, welcher die Operationen $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ enthält, äquivalent zu einem Term ist, der nur die Operationen $\neg$ und $\vee$ enthält.

6 Quantoren

Wir betrachten die Aussageform über natürliche Zahlen

$$P(n) := (\text{Wenn } n \text{ prim und größer als 2 ist, dann ist } n \text{ ungerade}) .$$

Diese Aussageform wird zu einer Aussage wenn wir die Zahl n festlegen. So ist etwa $P(8)$ wahr. In der Tat wissen wir aber, daß die Aussage $P(n)$ für jede natürliche Zahl n wahr ist. Diese Erkenntnis können wir so ausdrücken: Es gilt:

$$\text{Für alle natürlichen Zahlen } n \text{ gilt } P(n) .$$

Um diese Aussage in Formeln zu schreiben, benutzen wir den Quantor $\forall$:

$$(\forall n \in \mathbb{N} \mid P(n))$$

Diese Aussage ist wahr.
Sei $Q(n)$ die Aussageform über natürliche Zahlen:

$$Q(n) := (n \text{ ist eine Kubikzahl.}) .$$

In Formeln kann man diese Aussageform auch so schreiben:

$$(\exists m \in \mathbb{N} \mid n = m^3).$$

Die Aussage $\neg Q(n)$, d.h.

$$(n \text{ ist keine Kubikzahl})$$

kann in Formeln so formuliert werden:

$$(\forall m \in \mathbb{N} \mid \neg(n = m^3))$$

Das ist ein Spezialfall der folgenden Regeln. Sei A eine Menge und P eine Aussage über die Elemente dieser Menge. Dann gilt

$$\neg(\forall a \in A \mid P(a)) = (\exists a \in A \mid \neg P(a)) \ ,$$
$$\neg(\exists a \in A \mid P(a)) = (\forall a \in A \mid \neg P(a)) \ .$$

Das folgende Beispiel illustriert diese Regeln in der Textform: Wir betrachten die Aussage:

Alle Schwäne sind weiss.

Wir versuchen nun das Gegenteil zu bilden.

1. Einfach ist

   Nicht alle Schwäne sind weiss.

2. Gut ist auch

   Es gibt einen Schwan, der nicht weiss ist.

3. Falsch sind

   Alle Schwäne sind nicht weiss

   Alle Schwäne sind schwarz

In vielen Aussagen kommen mehrere Quantoren vor.
Die umgangsprachlich formulierte Aussage, daß es beliebig große Primzahlen gibt, würde man präzise so formulieren:

Für jede natürliche Zahl n gibt es eine Primzahl p mit $p \geq n$.

Unsinnig ist etwa:

Es gibt eine Primzahl die beliebig groß ist!

Sei $P \subseteq \mathbb{N}$ die Teilmenge der Primzahlen. Dann ist die obige Aussage in Formeln ausgedrückt:

$$(\forall n \in \mathbb{N} \, \exists p \in P \mid p \geq n) \ .$$

Die Reihenfolge ist hier wichtig. Bei Unklarheiten sollte man Klammern setzen:

$$(\forall n \in \mathbb{N} \mid (\exists p \in P \mid p \geq n)) \ .$$

Dadurch kann man erreichen, daß auf jedem Niveau immer nur ein Quantor steht.

Die Aussage mit vertauschter Reihenfolge

$$(\exists p \in P \; \forall n \in \mathbb{N} \mid p \geq n)$$

ist falsch, deren Negation

$$(\forall p \in P \; \exists n \in \mathbb{N} \mid p < n) \; .$$

also wahr. In Worten lautet diese nämlich:

Für jede Primzahl gibt es eine größere natürliche Zahl.

Man kann ja einfach den Nachfolger der Primzahl nehmen.
Die Symbole $\exists$ und $\forall$ ersetzen keine Wörter und sollten nur in Formeln verwendet werden.
Eine schlechte Formulierung ist:

$\exists$ eine natürliche Zahl n, so daß $\forall$ Teiler von n gilt $2|n$.

Besser ist

Es gibt eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß alle Teiler von n gerade sind.

Seien A und B Mengen und sei für jedes $b \in B$ eine Teilmenge $A_b \subseteq A$ gegeben. In anderen Worten, $b \mapsto A_b$ ist eine Abbildung $B \to \mathcal{P}(A)$. So etwas nennen wir auch eine durch B indizierte Familie von Teilmengen von A und notieren diese in der Form $(A_b)_{b \in B}$. Dann können wir die Vereinigung und den Durchschnitt dieser Familie bilden:

$$\begin{aligned} \bigcup_{b \in B} A_b &:= \{a \in A \mid (\exists b \in B \mid a \in A_b)\} \\ \bigcap_{b \in B} A_b &:= \{a \in A \mid (\forall b \in B \mid a \in A_b)\} \end{aligned}$$

6.1 Aufgaben

1. Formulieren Sie die Aussage, daß es beliebig kleine positive rationale Zahlen gibt, mathematisch korrekt.

2. Bilden Sie die Negation der folgenden Aussagen:

   (a) Der Nachfolger jeder Primzahl ist gerade.

   (b) Jede durch 30 und 27 teilbare natürliche Zahl ist durch 15 teilbar.

   (c) Für jede natürliche Zahl n existiert eine natürliche Zahl k derart, daß für alle Teiler d von n die Ungleichung $d \leq k - n$ gilt.

3. Überprüfen Sie die Gültigkeit der in 2. betrachteten Aussagen und der gefundenen Negationen direkt.

4. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sie $A_n := \{m \in \mathbb{N} \mid n | m\}$. Beschreiben Sie die Mengen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ möglichst explizit.

5. Sei A eine Menge und $a \in A$ ein Element von A. Zeigen Sie, daß $\bigcap_{\{B\in\mathcal{P}(A)\,|\,a\in B\}} B = \{a\}$ gilt.

7 Induktionsbeweise und indirekte Beweise

Das Induktionsprinzip ist eine Methode, Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu beweisen oder durch natürliche Zahlen indizierte Objekte zu definieren. Im Hintergrund des Induktionsprinzips steht folgende, hier als Axiom zu verstehende Aussage

Axiom 7.1 *Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ und erfülle die folgenden Bedingungen:*

1. $0 \in A$

2. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: $(k \in A) \Rightarrow (k+1 \in A)$.

Dann gilt $A = \mathbb{N}$.

Als erste Anwendung geben wir eine rekursive Definition des Summenzeichens. Sei $f(n)$ ein Term, der von einer natürlichen Zahl n abhängt. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{k} f(n)$$

eine Abkürzung für die Summe

$$f(0) + f(1) + \cdots + f(k) \; .$$

Wir geben nun eine sprachlich präzise Definition. Wir setzen

$$\sum_{n=0}^{0} f(n) := f(0) \; .$$

Wenn $k \in \mathbb{N}$ ist und wir $\sum_{n=0}^{k} f(n)$ schon definiert haben, dann definieren wir

$$\sum_{n=0}^{k+1} f(n) := \sum_{n=0}^{k} f(n) + f(k+1) \; .$$

Sei

$$A := \{k \in \mathbb{N} \mid \textstyle\sum_{n=0}^{k} f(n) \text{ ist definiert}\} \; .$$

Dann ist $A = \mathbb{N}$ nach dem Induktionsprinzip. In der Tat gilt $0 \in A$ und mit $k \in A$ ist auch $k+1 \in A$.

Wir kommen nun zu Induktionsbeweisen. Sei $P(n)$ eine Aussageform über natürliche Zahlen. Das Ziel des Induktionsbeweises ist es, die Aussage

$$(\forall n \in \mathbb{N} \mid P(n))$$

beweisen. Mit der Notation

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$$

ist diese Aussage äquivalent zu

$$A = \mathbb{N} \ .$$

In einem Induktionsbeweis verifizieren wir die in Axiom 7.1 formulierten Bedingungen.

- Den Nachweis, daß $0 \in A$ (also $P(0)$) gilt, nennt man den Induktionsanfang.
- Der Nachweis, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ aus $k \in A$ auch $k+1 \in A$ folgt (also die Aussage $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ gilt) heißt Induktionsschritt.

Wir erklären das Vorgehen an einem Beispiel.

Lemma 7.2 *Für alle natürlichen Zahlen $k \geq 0$ gilt*

$$\sum_{n=0}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2} \ . \tag{3}$$

Proof. Wir verwenden einen Induktionsbeweis.

Induktionsanfang: $k = 0$

Es gelten $\sum_{n=0}^{0} n = 0$ und $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ und damit (3).

Induktionsschritt: Sei $k \in \mathbb{N}$ und wir nehmen an, daß die Formel $\sum_{n=0}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$ schon bewiesen ist.

Wir zeigen diese Formel jetzt für $k+1$. Es gilt nach der rekursiven Definition des Summenzeichens

$$\sum_{n=0}^{k+1} n = \sum_{n=0}^{k} n + (k+1) \ .$$

Für den ersten Summanden können wir die Annahme einsetzen und erhalten

$$\sum_{n=0}^{k+1} n = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \ .$$

Nun gilt

$$\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \ .$$

Also gilt

$$\sum_{n=0}^{k+1} n = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \ .$$

□

Wir werden Induktionsargumente meist verkürzt oder leicht modifiziert wie im folgenden Beispiel aufschreiben.

Lemma 7.3 *Es gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$ *daß* $n^2 \leq 2^n + 1$.

Proof. Wir zeigen die Behauptung induktiv. Zunächst sehen wir die Fälle $n \in \{0,1,2,3\}$ durch explizite Rechnung ein:

- $2^0 + 1 = 2 \geq 0 = 0^2$
- $2^1 + 1 = 3 \geq 1 = 1^2$
- $2^2 + 1 = 5 \geq 4 = 2^2$
- $2^3 + 1 = 9 \geq 9 = 3^2$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und $2^n + 1 \geq n^2$ schon gezeigt. Wir zeigen zunächst, daß aus $n \geq 3$ die Ungleichung

$$(n+1)^2 \leq 2n^2 - 1 \tag{4}$$

folgt. In der Tat ist

$$2 \leq n - 1$$

und damit

$$4 \leq (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$$

und durch Umstellen

$$2n + 3 \leq n^2 \ .$$

Nun ist

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 2n + 3 - 2 \leq n^2 + n^2 - 2 = 2n^2 - 2 \leq 2n^2 - 1 \ .$$

Wir multiplizieren

$$n^2 \leq 2^n + 1$$

mit 2 und ziehen 1 ab und erhalten

$$2n^2 - 1 \leq 22^n + 1 = 2^{n+1} + 1 \ .$$

Mit (4) erhalten wir schließlich wie gewünscht die Gültigkeit von

$$(n+1)^2 \leq 2^{n+1} + 1 \ .$$

$\square$

Wir kommen nun zum Prinzip des indirekten Beweises. Wir beschreiben die Struktur des indirekten Beweises zunächst abstrakt. Ziel ist es, die Aussage Q beweisen. In einem indirekten Beweis zeigen wir dazu daß

$$\neg Q \Rightarrow falsch$$

gilt. In der Tat ist das nur möglich, wenn $Q = wahr$ gilt.
Wir illustrieren das Prinzip wieder mit einem Beispiel. Wir benutzen den Fakt, daß jede natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegbar ist.

Lemma 7.4 *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Proof. Wir argumentieren indirekt. Wir müssen die Aussage

$$(\text{Es gibt endlich viele Primzahlen}) \Rightarrow falsch$$

zeigen. Sei P die Menge der Primzahlen. Wir machen den Annahme, daß P endlich ist. Seien $p_1, \ldots, p_n$ die endlich vielen Primzahlen der Größe nach aufgezählt (Wir werden später sehen, daß das geht.). Dann bilden wir die natürliche Zahl

$$m := \prod_{k=1}^{n} p_k + 1 \ .$$

Diese Zahl läßt bei der Division durch jede Primzahl den Rest 1. Da m in Primfaktoren zerlegbar ist, muß $m \in P$ gelten. Nun gilt aber sicher $p_k < m$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ und damit $m \notin P$ Wir haben also die Aussage $(m \in P) \wedge (m \notin P)$, also $falsch$ gefolgert.

$\square$

7.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie induktiv, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung
$$\sum_{n=0}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \tag{5}$$
gilt.

2. Zeigen Sie durch einen indirekten Beweis, daß der Nachfolger eine geraden Zahl nicht gerade ist.

8 Relationen und Abbildungen

Seien A, B Mengen.

Definition 8.1 *Eine Relation zwischen (den Elementen von) A und B ist eine Teilmenge des Produktes $A \times B$.*

Relationen entsprechen Aussagen über Paare von Elementen $a \in A$ und $b \in B$. Sei R eine Relation zwischen A und B und a und b Elemente von A und B. Die übliche Notation für die dazugehörige Aussage ist $a \sim_R b$. Es gilt also $a \sim_R b$ genau dann, wenn $(a, b) \in R$ ist. Umgekehrt haben wir die Gleichheit von Mengen

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid a \sim_R b\} \ .$$

Hier sind einige Beispiele von Relationen.

1. Die Relation $\mathtt{id}_A := \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$ heißt die Identität von A. Es gilt $x \sim_{\mathtt{id}_A} y$ genau dann, wenn $x = y$.

2. Für die Relation $A \times A$ gilt $x \sim_{A \times A} y$ für alle Paare $x, y \in A$.

3. Für die Relation $R := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 3|(m - n)\}$ gilt $n \sim_R m$ genau dann wenn $n \equiv m \mod (3)$ ist.

4. Auf der Menge der natürlichen Zahlen haben wir die Nachfolgerrelation

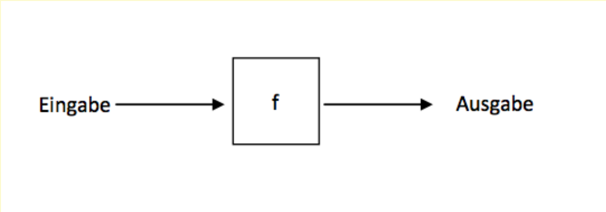
   $$Nachf := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n + 1\} \ .$$

   Es gilt $m \sim_{Nachf} n$ genau dann wenn m der Nachfolger von n ist.

5. Auf der Menge der Studenten in diesem Raum haben wir die Relation

   $$s \sim t := s \text{ kennt } t \ .$$

Wir kommen nun zum Begriff einer Abbildung f von A nach B. In den meisten Fällen ist es günstig, sich die Abbildung f als eine Maschine vorzustellen, welche jedem Element a von A ein wohlbestimmtes Element $f(a)$ von B zuordnet.



Eine Abbildung f von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ kann zum Beipiel durch einen Term beschrieben werden.

$$f(n) := n^2 + n + 1 \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Der Anfang der Wertetabelle dieser Abbildung ist

0	1	2	3	4	5	...
1	3	7	13	21	31	...

Andere Schreibweisen für die Erklärung der Abbildung f sind

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ , \quad f : n \mapsto n^2 + n + 1$$

oder

$$\mathbb{N} \ni n \overset{f}{\mapsto} n^2 + n + 1 \in \mathbb{N} \ .$$

In beiden Formeln wird sowohl deutlich gemacht, daß f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ ist als auch die Beschreibung durch einen Term gegeben.
Nicht gut ist

Die Abbildung $f(n)$ ist $n^2 + n + 1$!

Der Name der Abbildung ist f, während $f(n)$ eine Zahl bezeichnet, die festgelegt ist, sobald die Symbole f und n erklärt sind.
Da es undendlich viele natürlichen Zahlen gibt, läßt sich eine solche Abbildung nicht vollständig durch die Angabe einer Wertetabelle beschreiben. Für Abbildungen aus einer endlichen Menge heraus geht das aber schon. Zum Beipiel bestimmt die Tabelle

a	b	c	d
1	2	4	8

eine Abbildung f von $\{a, b, c, d\}$ nach $\mathbb{N}$ vollständig.
Für theoretische Zwecke ist es wichtig, den Begriff einer Abbildung genauer zu verstehen. Der oben verwendete Begriff einer Maschine ist kein mathematischer, sondern soll nur die richtige Vorstellung produzieren. Wir werden sehr oft die Menge aller Abbildungen zwischen zwei Mengen studieren. Dazu müssen wir den Abbildungsbegriff präziser fassen. Wir werden Abbildungen mit speziellen Relationen identifizieren.

Definition 8.2 *Eine Relation R zwischen den Mengen B und A heißt funktional, wenn für jedes Element a von A genau ein Element b von B mit der Eigenschaft $(b, a) \in R$ existiert. Eine Abbildung f von A nach B ist eine funktionale Relation zwischen B und A.*

In Formeln kann die Aussage, daß $R \subseteq B \times A$ funktional ist, so geschrieben werden:

$$(\forall a \in A \ \exists b \in B \ \forall b' \in B \mid \ ((b, a) \in R) \wedge (((b', a) \in R) \Rightarrow (b = b'))) \ .$$

Eine Abbildung f von A nach B verstehen wir dabei als die Relation der Form

$$\{(b, a) \in B \times A \mid b = f(a)\} \ ,$$

also die Teilmenge der Paare $(f(a), a)$ aus der Wertetabelle von f. Der Wert der Abbildung auf dem Element $a \in A$ ist das eindeutig bestimmte $b \in B$ mit $(b, a) \in f$ und wir notieren wie üblich $f(a) := b$. Wenn man sich die Abbildung f eher als ein dynamisches Objekt vorstellt, welches Elemente aus A auf Elemente aus B abbildet, dann bezeichnet man die Relation oft auch als den Graphen $\mathtt{Graph}(f)$ von f.
Die Menge aller Abbildungen von A nach B ist damit durch

$$\{R \in \mathcal{P}(B \times A) \mid R \text{ ist funktional}\}$$

beschrieben und wird durch B^A notiert.
Wir notieren hier den Wertebereich eine Abbildung als erste und den Definitionsbereich als zweite Komponente. In der Literatur wird of die umgekehrte Konvention verwendet. Unsere hat den Vorteil, daß später die Komposition von Relationen und Abbildungen ohne Vertauschungen auskommt.
Im folgenden diskutieren wir einige weitere Beipiele. Sei $A := \{x, y, z\}$ und $B := \{u, v\}$. Die Relation

$$R_1 := \{(u, x), (u, y), (v, z)\}$$

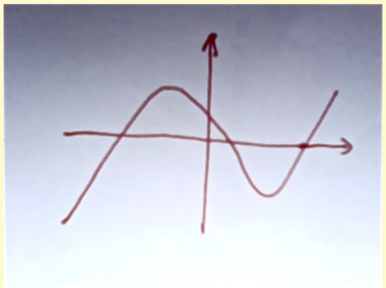
ist funktional, während die Relationen

$$R_2 := \{(u, x), (v, y)\}$$

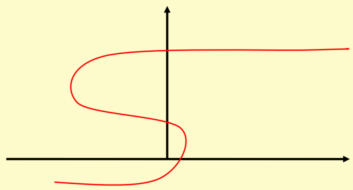
und

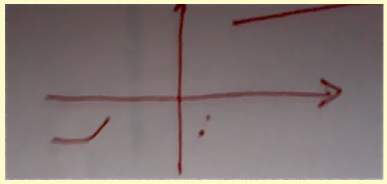
$$R_3 := \{(u, x), (v, x)\}$$

nicht funktional sind. Dies prüft man durch Inspektion nach. Im ersten Fall überprüft man anhand der Wertetabelle, daß es für jedes Element a aus A genau ein Element b aus B gibt, so daß $a \sim_{R_1} b$ gilt. Für R_2 sieht man, daß es kein Element in R_2 mit dem zweiten Eintrag z gibt. Bei R_3 stellt man fest, daß es zwei verschiedene Elemente in R_3 mit dem zweiten Eintrag x gibt.
Wir haben eine geometrische Vorstellung von der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Ebene. Deshalb können wir uns den Graphen einer Abbildung als Teilmenge dieser Ebene vorstellen. In diesen Zeichnungen ist die horizontale Koordinate die zweite und die vertikale Koordinate die erste Komponente. Dieses Bild ist ein Graph einer solchen Abbildung:



Diese beiden Bilder sind keine Graphen von Abbildungen





Hier sind weitere Beispiele funktionaler Relationen.

1. Die Identität $\mathtt{id}_A$ von A nach A ist eine funktionale Relation. Es gilt $\mathtt{id}_A(a) = a$ für alle $a \in A$.

2. Sei b ein Element von B. Dann ist betrachten wir die konstante Abbildung $\mathtt{const}_b$ von A nach B mit dem Wert b, d.h. die funktionale Relation

$$\mathtt{const}_b := \{(y, x) \in B \times A \mid y = b\} \ .$$

3. Eine Folge (a_n) von Elementen einer Menge A ist per definitionem eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach A. Wir notieren einfach den Wert dieser Abbildung in der natürlichen Zahl n als a_n

4. Oft beschreiben wir Abbildungen durch Wertetabellen oder Funktionenterm. Wir betrachten

$$f := \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

Diese kann man durch einen Funktionenterm beschreiben. Im Beipiel würde das dann so aussehen:

$$f : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N} \ , \quad f(n) := 2^n \ .$$

Beachte, daß f nur auf $\{0, 1, 2, 3\}$ definiert ist, obwohl der Funktionenterm für alle natürlichen Zahlen sinnvoll ist. Die Angabe des Definitionsbereichs ist unbedingt notwendig, um f zu beschreiben.

5. Abbildungen f aus der Menge der natürlichen Zahlen heraus nach irgendeiner Menge A werden of rekursiv beschrieben. Man erklärt zunächst die Werte $f(i)$ für alle natürlichen Zahlen i mit $0 \leq i \leq i_0$. Danach beschreibt man für alle natürlichen

Zahlen n mit $i_0 < n$ wie man $f(n+1)$ unter der Annahme, daß die Werte $f(m)$ für alle natürlichen Zahlen m mit $m \leq n$ schon definiert sind, bekommt.

Ein typisches Beipiel ist die Fibonaccifolge (f_n). Wir setzen $f_0 := 1$ und $f_1 := 1$. Sei nun $2 \leq n$ und die Werte f_m für alle natürlichen Zahlen m mit $m \leq n$ erklärt. Dann setzen wir $f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$. Wir erhalten

$$f_0 = 0 \ , \quad f_1 = 1 \ , \quad f_2 = 1 \ , \quad f_3 = 2 \ , \quad f_4 = 3 \ , \quad f_5 = 5 \ , \quad f_6 = 8, \ldots \ .$$

8.1 Aufgaben

1. Skizziere die Graphen von $\mathtt{id}_{\mathbb{R}}$ und $\mathtt{const}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Skizziere den Graphen von $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 - x$.
3. Finde eine rekursive Definition der Folge $(\frac{n(n-1)}{2})$.

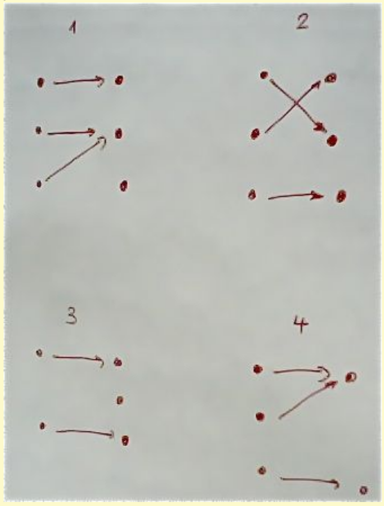
9 Eigenschaften von Abbildungen

Die folgende Definition präzisiert nun die grundlegenden Eigenschaften von Abbildungen.

Definition 9.1 *Sei f eine Abbildung von A nach B.*

1. *f heißt injektiv, wenn für je zwei Elemente x, x' von A aus $f(x) = f(x')$ die Aussage $x = x'$ folgt.*
2. *f heißt surjektiv, wenn für jedes Element y von B ein Element x von A mit $f(x) = y$ existiert.*
3. *f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.*

In folgendem schematischen Bild ist die Abbildung 1. weder injektiv noch surjektiv, 2. bijektiv, 3. injektiv und 4. surjektiv.

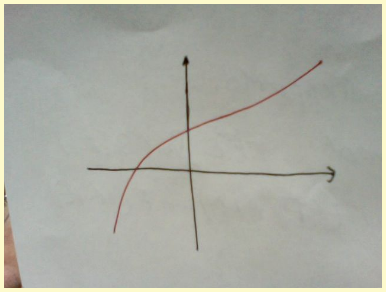


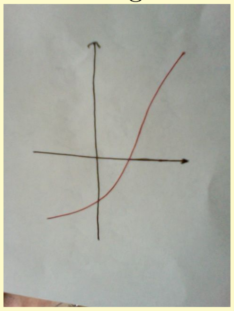
Bijektionen sind invertierbare Abbildungen. Wir beginnen zunächst mit einigen theoretischen Vorbetrachtungen.

Definition 9.2 *Für eine Relation $R \subseteq A \times B$ definieren wir die inverse Relation durch*

$$R^{-1} := \{(y,x) \in B \times A \,|\, (x,y) \in R\} \ .$$

Das Inverse einer Relation $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ erhält man durch Spiegeln an der Diagonalen.





Sei $f : A \to B$ eine funktionale Relation zwischen B und A.

Lemma 9.3 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

1. *Ist f bijektiv.*
2. *f^{-1} ist funktional.*

Proof. Übungsaufgabe ! □

Seien $f : A \to B$ eine Abbildung und $U \subseteq A$, $V \subseteq B$ Teilmengen.

Definition 9.4 *Die Einschränkung von f auf U ist die (funktionale!) Relation*

$$f_{|U} := f \cap (B \times U) \ .$$

Wir setzen

$$f(U) := \{b \in B\} \,|\, (\exists a \in U \,|\, f(a) = b)\} \ .$$

und

$$f^{-1}(V) := \{a \in A \,|\, f(a) \in V\} \ .$$

Insbesondere ist

$$\mathtt{Bild}(f) := f(B)$$

das Bild von f

Seien A, B ein Mengen und U, V disjunkte Teilmengen von A so daß $A = U \cup V$ gilt. Seien weiter Abbildungen $f : U \to B$ und $g : V \to B$ gegeben.

Lemma 9.5 *Es gibt genau eine Abbildung $h : A \to B$ mit $h_{|U} = f$ und $h_{|V} = g$. Wenn $f(U) \cup g(V) = B$ ist, dann ist h surjektiv. Wenn f und g injektiv sind und $f(U) \cap g(V) = \emptyset$ gilt, dann ist h injektiv.*

Proof. Übungsaufgabe.

9.1 Aufgaben

1. Beweis von Lemma 9.3

2. Überprüfe folgende Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität.

   (a) $add_c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $add_c(n) := n + c$ für ein festes $c \in \mathbb{N}$.

   (b) $mult_c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $mult_c(n) := cn$ für ein festes $c \in \mathbb{N}$.

   (c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) := n^2$.

   (d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ ist gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ ist ungerade} \end{cases}$

3. Beschreibe die inverse Abbildung von $\mathbb{Q} \ni x \mapsto 3x - 1 \in \mathbb{Q}$ explizit.

4. Seien $f : A \to B$ eine Abbildung und V, V' Teilmengen von B. Zeige die Relationen $f^{-1}(V \cap V') = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V')$.

5. Seien $f : A \to B$ eine Abbildung und U, U' Teilmengen von A. Zeige die Relation $f(U \cap U') \subseteq f(U) \cap f^{-1}(U')$. Zeige durch ein Beispiel, daß diese Inklusion im allgemeinen echt ist.

6. Zeige Lemma 9.5.

10 Komposition

In diesem Abschnitt formalisieren wir die Prozedur der Hintereinanderausführung von Abbildungen. Wir diskutieren dies zunächst auf der Ebene von Relationen. Sei R eine Relation zwischen A und B und S eine Relation zwischen B und C.

Definition 10.1 *Wir definieren die Komposition der Relationen R und S durch*

$$R \circ S := \{(a, c) \in A \times C \mid \textit{Es gibt ein Element } b \textit{ in } B \textit{ mit } (a, b) \in R \textit{ und } (b, c) \in S)\} \ .$$

In Formeln

$$R \circ S := \{(a, c) \in A \times C \mid (\exists b \in B \mid ((a, b) \in R) \wedge ((b, c) \in S))\} \ .$$

Im folgenden Lemma bezeiche T eine dritte Relation zwischen C und D.

Lemma 10.2 *1. Es gilt $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$*

2. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

3. Sind R und S funktional, so auch $R \circ S$.

4. Sind R und R^{-1} funktional, dann gilt $R^{-1} \circ R = \mathtt{id}_B$.

5. *Es gilt* $(R^{-1})^{-1} = R$.

Proof.

1. Wir zeigen, daß $R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$ gilt. Der Beweis der umgekehrten Inklusion ist ähnlich. Sei also $(a, d) \in R \circ (S \circ T)$. Dann gibt es ein Element b in B mit $(a, b) \in R$ und $(b, d) \in S \circ T$. Damit gibt es weiter ein Element c in C mit $(b, c) \in S$ und $(c, d) \in T$. Dann ist aber $(a, c) \in R \circ S$ und folglich $(a, d) \in (R \circ S) \circ T$.

2. Übungsaufgabe.

3. Übungsaufgabe.

4. Übungsaufgabe

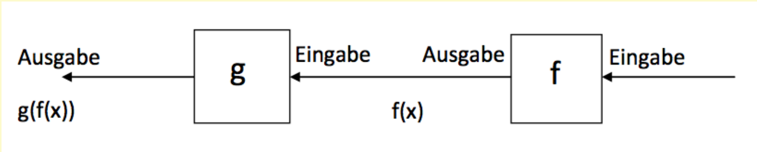
5. Klar.

□

Wir benutzen den Teil 3. von Lemma 10.2 um die Komposition von Abbildungen zu definieren. Sei f eine Abbildung von A nach B und g eine Abbildung von B nach C.

Definition 10.3 *Die Komposition der Abbildungen* $g \circ f$ *von* A *nach* C *ist durch die Komposition der Relationen definiert.*

Der Wert von $g \circ f$ auf dem Element a von A ist $g(f(a))$.



Lemma 10.4 *Seien* f *eine Abbildung von* A *nach* B. *Dann ist* f *eine Bijektion genau dann, wenn es eine Abbildung* g *von* B *nach* A *gibt, so daß* $g \circ f = \mathtt{id}_A$ *und* $f \circ g = \mathtt{id}_B$ *gilt.*

Proof. Übungsaufgabe. □

Die Abbildung g heißt die inverse Abbildung von f.

Lemma 10.5 *Ist* f *eine Bijektion, dann ist die inverse Abbildung von* f *eindeutig bestimmt und durch* f^{-1} *gegeben.*

Proof. Übungsaufgabe. □

1. Weiter oben hatten wir für jede Menge A eine Bijektion zwischen der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ von A und der Menge $\{wahr, falsch\}^A$ der Aussagen über Elemente von A durch
$$U \mapsto (a \in U) \ , \quad U \in \mathcal{P}(A) \tag{6}$$
beschrieben. Die inverse Abbildung von $\{wahr, falsch\}^A$ nach $\mathcal{P}(A)$ ist durch
$$P \mapsto \{a \in A \mid P(a)\} \ , \quad P \in \{wahr, falsch\}^A$$
gegeben.

2. Sei A eine Menge. Dann haben wir eine Bijektion von $A^{\{1,2\}}$ nach $A \times A$, welche durch
$$\phi \mapsto (\phi(1), \phi(2)), \quad \phi \in A^{\{1,2\}}$$
gegeben wird. Dies prüft man wieder am einfachsten durch die Angabe der inversen Bijektion von $A \times A$ nach $A^{\{1,2\}}$
$$(a,b) \mapsto \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline a & b \end{array} \ , \quad (a,b) \in A \times A$$
nach. Wir prüfen durch Einsetzen der Definitionen nach, daß diese beiden Abbildungen invers zueinander sind.

Seien A, B, C, D Mengen und $g : C \to D$ und $h : A \to B$ Abbildungen.

Definition 10.6 *Wir definieren die Abbildungen*
$$g_* : C^B \to D^B \ , \quad f \mapsto g \circ f$$
und
$$h^* : C^B \to C^A \ , \quad f \mapsto f \circ h \ .$$

Lemma 10.7 *Es gelten folgende Aussagen:*

1. $(g$ *ist injektiv* $) \Rightarrow (g_*$ *ist injektiv*$)$

2. $(g$ *ist surjektiv* $) \Rightarrow (g_*$ *ist surjektiv*$)$

3. $(h$ *ist surjektiv* $) \Rightarrow (h^*$ *ist injektiv* $)$

4. $(h$ *ist injektiv* $) \Rightarrow (h^*$ *ist surjektiv* $)$

Proof. Übungsaufgabe. Teil 2. braucht im Allgemeinen das Auswahlaxiom. □

10.1 Aufgaben

1. Beweis von Lemma 10.2.

2. Seien zum Beispiel g von $\{0, 1, 2\}$ nach $\{a, b, c, d\}$ und f von $\{u, v, w, x\}$ nach $\{0, 1, 2\}$ durch
$$g := \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline a & b & b \end{array} \qquad f := \begin{array}{c|c|c|c} u & v & w & x \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$
gegeben. Bestimmen Sie $g \circ f$ explizit.

3. Beweis von Lemma 10.4.

4. Beweis von Lemma 10.5.

5. Seien $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ durch $f(n) := n(n + 1)$ und $g(n) := 2n - 1$ gegeben. Beschreibe die Abbildungen g^*f und g_*f von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ durch Abbildungsterme.

6. Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ Abbildungen. Überprüfe die Relationen $(g \circ f)^*h = f^*(g^*h)$ und $(h \circ g)_*f = h_*(g_*f)$.

11 Über die Anzahl der Elemente von Mengen

Ab sofort werden wir folgende sprachliche Vereinfachungen verwenden, durch welche die die optische Lesbarkeit längerer mathematischer Texte hoffentlich verbessert. Statt

sei a ein Element von A

schreiben wir

$\ldots$ sei $a \in A \ldots$.

In dieser Kurzform wird das Symbol a eingeführt, wobei das Symbol A vorher festgelegt sein muß und festgelegt, daß die Aussage $a \in A$ wahr ist.
Diese Formulierung ist deutlich von dem Ausdruck der Behauptung zu trennen, daß ein vorher schon mit a bezeichnetes Objekt ein Element von A ist. Letztere würde man nämlich in der Form

es gilt $a \in A$

notieren.
Statt

$\ldots$ eine Abbildung f von A nach B

schreiben wir

eine Abbildung $f : A \to B$.

Hiermit geben wir dem Symbol f seine Bedeutung und machen auf optisch übersichtliche Weise deutlich, welche Mengen der Definitions- und Bildbereich der Abbildung f sind. Die Symbole A und B müssen vorher erklärt worden sein.
Statt

sei U eine Teilmenge von A

schreiben wir

$$\text{sei } U \subseteq A.$$

Hier wird das Symbol U festgelegt, wobei wiederum das Symbol A vorher erklärt worden sein muß.
Wir betrachten den folgenden Begriff welcher die Vorstellung formalisiert, daß zwei Mengen die gleiche Anzahl von Elementen haben.

Definition 11.1 *Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $A \to B$ gibt.*

1. Die Mengen $A := \{a, b, c, d\}$ und $B := \{0, 1, 2, 3\}$ sind gleichmächtig. Eine Bijektion ist zum Beispiel durch die Abbildung mit der Wertetabelle

a	b	c	d
0	1	2	3

   gegeben.

2. Die Mengen $A := \{a, b, c, d\}$ und $B := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ sind nicht gleichmächtig. Um das zu sehen, muß man zeigen, daß keine Bijektion zwischen A und B existiert. Dazu müßte man sich im Prinzip eine Liste aller 4096 Abbildungen $B \to A$ hinschreiben und für jede einzelne nachprüfen, ob sie eine Bijektion ist. Für große Mengen ist das unpraktisch. Wir haben ja sofort gesehen, daß die Mengen verschieden viele Elemente haben und es deshalb keine Bijektion zwischen ihnen geben kann.

Die folgende Diskussion dient dazu, diese Einsicht zu formalisieren. Wir führen den Begriff der Anzahl der Elemente eine Menge ein. Die Bestimmung der Anzahl der Elemente wird auf die Konstruktion eine Bijektion mit einer Vergleichsmenge zurückgeführt. In der Praxis ist es viel einfacher, Bijektionen anzugeben, als deren Nichtexistenz nachzuweisen. Gleichmächtige Mengen haben dieselbe Anzahl von Elementen.
Sei A eine Menge von Mengen (zur Warnung siehe 4.2). Dann können wir Gleichmächtigkeit als eine Relation auf A betrachten:

$$R := \{(X, Y) \in A \times A \mid X \text{ ist gleichmächtig zu } Y\} \ .$$

In 13.2 zeigen wir, daß "Gleichmächtigkeit" eine Äquivalenzrelation ist.
Wir diskutieren nun den Begriff der Anzahl genauer. Wir unterscheiden zunächst endliche und unendliche Mengen. Die Idee für die Unterscheidung dieser beiden Fälle besteht darin, daß man aus einer unendlichen Menge Elemente entfernen kann, ohne die Anzahl zu verändern, was sicher bei endlichen Mengen nicht geht, siehe Lemma 11.5.

Definition 11.2 *Eine Menge heißt unendlich, wenn sie gleichmächtig zu einer echten Teilmenge von sich selbst ist. Eine Menge ist endlich, wenn sie nicht unendlich ist.*

Wir schreiben diese Definition noch einmal als Formel, um den versteckten Existenzquantor hervorzuheben.

$$(\text{Die Menge } A \text{ ist unendlich.}) := (\exists B \in \mathcal{P}(A) | ((B \neq A) \wedge (B \text{ und } A \text{ sind gleichmächtig}))) \ .$$

1. Ein typisches Beispiel einer unendlichen Menge ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Um das zu sehen betrachten wir die echte Teilmenge $\mathbb{N}' := \{n \in \mathbb{N} | n \geq 1\}$ und definieren die Bijektion $f : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}$ durch $f(n) := n - 1$.

2. Man kann die Bedingung für die Unendlichkeit einer Menge wie folgt umformulieren:

   Lemma 11.3 *Eine Menge A ist genau dann unendlich, wenn es eine injektive, aber nicht surjektive Abbildung $A \to A$ gibt.*

   Proof. In der Tat sind nämlich A und $f(A)$ gleichmächtig und es gilt die echte Inklusion: $f(A) \subset A$. □

3. **Lemma 11.4** *Enthält eine Menge eine unendliche Teilmenge, dann ist sie selbst unendlich.*

   Proof. Seien B eine Menge und $A \subseteq B$. Wir nehmen an, daß $\sharp A = \infty$ gilt. Dann gibt es eine echte Teilmenge $A' \subset A$ und eine Bijektion $f : A' \to A$. Wir zerlegen B in die disjunkten Teilmengen A und $B \setminus A$ und sehen, daß $B' := (B \setminus A) \cup A'$ eine echte Teilmenge von B ist. Wir definieren eine Bijektion $g : B' \to B$ durch $g_{|B\setminus A} := \mathtt{id}_{B\setminus A}$ und $g_{|A'} := f$. Damit enthält B die echte, zu B gleichmächtige Teilmenge B'. Folglich gilt $\sharp B = \infty$. □

4. Es folgt, daß die Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ unendlich sind, da sie jeweils $\mathbb{N}$ enthalten.

Lemma 11.5 *Sei A eine unendliche Menge und $a \in A$. Dann ist $A' := A \setminus \{a\}$ auch unendlich.*

Proof. Da A unendlich ist, gibt es eine echte Teilmenge $B \subset A$ und eine Bijektion $f : B \to A$. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Wenn $a \in B$ ist und $f(a) = a$ gilt, dann ist $B \setminus \{a\}$ eine echte Teilmenge von $A \setminus \{a\}$ und $f_{|B\setminus\{a\}} : B \setminus \{a\} \to A \setminus \{a\}$ eine Bijektion.

2. Sei $a \in B$ und $f(a) \neq a$. Dann existiert ein $b \in B$ mit $f(b) = a$. Wir definieren eine neue Bijektion $\tilde{f} : B \to A$ durch $\tilde{f}_{|B\setminus\{a,b\}} := f$ und $\tilde{f}(a) := a$ und $\tilde{f}(b) := f(a)$. Dies produziert die Situation 1.

3. Sei $a \notin B$. Dann existiert ein $b \in B$ mit $f(b) = a$. Die Menge $B \setminus \{b\}$ ist eine echte Teilmenge von $A \setminus \{a\}$ und $f : B \setminus \{b\} \to A \setminus \{a\}$ ist eine Bijektion.

□

Es stimmt nicht, daß je zwei unendliche Mengen gleichmächtig sind. Vielmehr gibt es verschiedene Stufen der Unendlichkeit. Wir demonstrieren dies an folgendem Beispiel.

Lemma 11.6 *Sei A eine Menge. Dann sind A und $\mathcal{P}(A)$ nicht gleichmächtig. Es existiert keine Surjektion $A \to \mathcal{P}(A)$.*

Proof. Die zweite Aussage ist stärker. Wir beweisen sie indirekt und nehmen die Existenz einer Surjektion $f : A \to \mathcal{P}(A)$ an. Wir bilden $Q := \{b \in A \mid b \notin f(b)\}$. Dann existiert ein $a \in A$ mit $Q = f(a)$.

1. Wenn $a \in Q$ gilt, dann gilt $a \in f(a)$ und $a \notin f(a)$. Dieser Fall ist also ausgeschlossen.
2. Wenn $a \notin Q$ gilt, dann ist $a \notin f(a)$ und $a \in f(a)$. Dieser Fall ist also auch ausgeschlossen.

Widerspruch. □

Die Mengen

$$\mathbb{N}\ , \quad \mathcal{P}(\mathbb{N})\ , \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\ , \quad \dots$$

sind also alle unendlich, aber paarweise nicht gleichmächtig.

Definition 11.7 *Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Eine nicht abzählbare unendliche Menge heißt überabzählbar.*

Die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist also überabzählbar.

Hier ist ein Kriterium, mit welchem man die Abzählbarkeit einer Menge einsehen kann.

Lemma 11.8 *Sei A eine unendliche Menge welche eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ zuläßt. Dann ist A abzählbar unendlich.*

Proof. Wir konstruieren eine Bijektion $g : \mathbb{N} \to A$ rekursiv wie folgt. Wir betrachten die Teilmengen $< n > := \{0, \dots, n\}$ von $\mathbb{N}$ und benutzen, daß diese Mengen endlich sind.

Wir setzen $g(0) := f(0)$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und g auf $< n - 1 >$ schon konstruiert und injektiv. Da A nicht endlich ist, ist $A \setminus g(< n - 1 >)$ nicht leer. Da f surjektiv ist, ist die Teilmenge $f^{-1}(A \setminus g(< n - 1 >)$ von $\mathbb{N}$ nicht leer. Sei i_n das minimale Element dieser Teilmenge. Wir setzen g auf $< n >$ fort durch $g(n) := f(i_n)$. Diese Fortsetzung ist wieder injektiv.

Wir erhalten eine Abbildung $g : \mathbb{N} \to A$. Man kann sich davon überzeigen, daß diese Abbildung eine Bijektion ist. Wir überlassen das Argument als Übungsaufgabe. □

Wir kommen nun zum Anzahlbegriff für endliche Mengen. Die Anzahl einer endlichen Menge A soll eine natürliche Zahl sein, die wir in der Form $\sharp A$ notieren. Um diese Zahl zu beschreiben, definieren jetzt eine Folge von Vergleichsmengen (A_n) in der folgenden rekursiven Weise. Wir setzen

$$A_0 := \emptyset \ .$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $0 < n$. Unter der Annahme, daß wir die Mengen A_m für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq m < n$ schon konstruiert haben, setzen wir

$$A_n := A_{n-1} \sqcup \{A_{n-1}\} \ .$$

Wir müssen hier genau zwischen der Menge A_{n-1} und der Menge $\{A_{n-1}\}$, deren einziges Element A_{n-1} ist, unterscheiden. Also erhalten wir

$$A_1 = \{\emptyset\} \ , \quad A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \ , \quad A_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ , \ldots$$

und so weiter. Nach dem Induktionsprinzip verfügen wir damit über wohlbestimmte Mengen A_n für alle natürlichen Zahlen n. Nach Konstruktion gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ daß $A_n \subset A_{n+1}$. Diese Inklusionen sind echt, da etwa $A_n \in A_{n+1}$ gilt, nicht aber $A_n \in A_n$.
Um die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge als natürliche Zahl definieren zu können, müssen wir uns von der Wahrheit folgender Aussagen überzeugen.

Proposition 11.9 *1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge A_n endlich.*

2. Wenn für zwei natürliche Zahlen n und m die Mengen A_n und A_m gleichmächtig sind, dann gilt $n = m$.

3. Ist A eine endliche Menge, dann existiert ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ so daß A zu A_n gleichmächtig ist.

Proof.

1. Wir zeigen zunächst durch einen Widerspruchsbeweis, daß die Mengen A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ endlich sind. Die Menge A_0 ist leer, hat also keine echte Teilmenge und ist damit endlich. Wenn nicht alle A_n endlich sind, dann gibt es ein minimales $n \in \mathbb{N}$ derart, daß A_n unendlich ist. Wir wissen schon, daß $0 < n$ gilt. Wegen $A_{n-1} = A_n \setminus \{A_{n-1}\}$ wäre nach Lemma 11.5 auch A_{n-1} unendlich. Widerspruch!

2. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $m < n$. Wir zeigen nun wiederum indirekt, daß A_m und A_n nicht gleichmächtig sind. In der Tat, gäbe es eine Bijektion $A_n \to A_m$ dann wäre die Komposition dieser Abbildung mit der Einbettung $A_m \to A_n$ injektiv und nicht surjektiv. Damit wäre aber A_n nach Lemma 11.3 unendlich.

   Das hatten wir schon ausgeschlossen.

3. Sei nun A eine endliche Menge. Wir konstruieren rekursiv injektive Abbildungen $f_n : A_n \to A$.

   Die kanonische Abbildung $f_0 : A_0 \to A$ ist injektiv.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und f_m für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ schon definiert. Entweder ist $f_n : A_n \to A$ bijektiv, oder es gibt ein Element $a \in A$, welches nicht im Bild von f_n liegt. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten definieren wir die injektive Abbildung $f_{n+1} : A_{n+1} \to A$ durch Fortsetzung von f_n vermöge $f_{n+1}(\{A_n\}) := a$. Wenn die Konstruktion nicht abbricht, dann erhalten wir eine injektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to A$ durch $g(n) := f_{n+1}(\{A_n\})$. Dann wäre A aber unendlich nach Lemma 11.4. Also muß die Konstruktion abbrechen. Also erhalten wir eine Bijektion $f : A_n \to A$ für irgend eine natürlich Zahl n. Es kann dann aber keine weitere von n verschiedene natürlich Zahl m mit einer Bijektion $A_m \to A$ geben, weil sonst auch A_n und A_m gleichmächtig wären.

□

Damit läßt die Anzahl für endliche Mengen durch Vergleich mit den Mengen A_n erklären.

Definition 11.10 *Sei A eine endliche Menge. Wir definieren die Anzahl der Elemente $\sharp A$ als die eindeutig bestimmte natürliche Zahl n mit der Eigenschaft daß A zu A_n gleichmächtig ist.*

Lemma 11.11 *Es gilt*

$$\sharp\{0, \ldots, n\} = n + 1 \ .$$

Proof. Wir definieren eine Bijektion

$$\{0, \ldots, n\} \ni i \mapsto A_n \in A_{n+1} \ .$$

□

Die Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen vertragen sich mit mengentheoretischen Operationen wie folgt.

Proposition 11.12 *Seien A und B endliche Mengen. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. $\sharp(A \sqcup B) = \sharp A + \sharp B$.
2. $\sharp(A \times B) = \sharp A \cdot \sharp B$.
3. $\sharp B^A = \sharp B^{\sharp A}$.
4. $\sharp\mathcal{P}(A) = 2^{\sharp A}$.

Proof.

1. Wir führen einen Induktionsbeweis nach der Anzahl der Elemente von B. Sei $n := \sharp A$.

   Wenn $\sharp B = 0$ ist, dann ist $B = \emptyset$ und die Behauptung klar.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und die Formel für alle Mengen B mit $\sharp B \leq m$ schon bewiesen. Wir nehmen nun an, daß $\sharp B = m+1$ gilt. Dann existiert eine Bijektion $g : A_{m+1} \to B$. Wir setzen $B' := g(A_m)$. Dann ist $\sharp B' = m$ und nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Bijektion $f : A_{n+m} \to A \sqcup B'$. Wir setzen f zu einer Bijektion $h : A_{n+m+1} \to A \sqcup B$ fort, indem wir $f(\{A_{n+m}\}) := g(\{A_m\})$ setzen.

2. Wir führen wieder eine Induktion nach der Anzahl der Elemente von B durch.

   Wenn $\sharp B \in \{0,1\}$ ist, dann ist die Aussage klar.

   Sein nun $n \in \mathbb{N}$ und die Formel für alle Mengen B mit $\sharp B \leq n$ schon bewiesen. Wir nehmen nun an, daß $B = n+1$. Wir können ein Element $b \in B$ wählen und setzen $B' := B \backslash \{b\}$. Dann gilt $\sharp B' = n$ und es gibt eine Bijektion $A \times B \to A \times B' \sqcup A \times \{b\}$. Mit 1. und der Induktionsvoraussetzung

$$\sharp(A \times B) = \sharp(A \times B') + \sharp(A \times \{b\}) = \sharp A \cdot \sharp B' + \sharp A = \sharp A \cdot (\sharp B' + 1) = \sharp A \cdot \sharp B \ .$$

3. Wir führen eine Induktion nach der Anzahl der Elemente von A durch.

   Wenn $\sharp A = 1$ ist, dann ist $\sharp B^A = \sharp B$, da eine Abbildung $A \to B$ durch die Angabe des Wertes auf dem einzigen Element von A genau bestimmt ist.

   Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und die Formel für alle Mengen A mit $\sharp A \leq n$ schon bewiesen. Wir nehmen nun an, daß $\sharp A = n+1$ ist. Wir können ein Element $a \in A$ wählen und setzen $A' := A \setminus \{a\}$. Für jedes $b \in B$ definieren wir die Teilmenge

$$X_b := \{f \in B^A \mid f(a) = b\} \ .$$

   Wenn $b, b' \in B$ und $b \neq b$, dann gilt $X_b \cap X_{b'} = \emptyset$. Andererseits gilt

$$B^A \cong \bigsqcup_{b \in B} \{f \in B^A \mid f(a) = b\} \ .$$

   Für jedes $b \in B$ haben eine Bijektion

$$X_b \to B^{A'} \ , \quad f \mapsto f_{|A'} \ .$$

   Damit gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\sharp B^A = \sharp B \sharp (B^{A'}) = \sharp B \sharp B^{\sharp A'} = \sharp B^{(\sharp A')+1} = \sharp B^{\sharp A} \ .$$

4. Wir hatten schon eine Bijektion (6)

$$\mathcal{P}(A) \to \{wahr, falsch\}^A$$

   konstruiert. Da $\sharp\{wahr, falsch\} = 2$ gilt, folgt aus 3., daß

$$\sharp \mathcal{P}(A) = 2^{\sharp A}$$

   gilt.

11.1 Aufgaben

1. Seien A und B nicht-leere Mengen. Zeigen Sie, daß $A \times B$ und A^B unendlich sind, sobald eine der Mengen A oder B unendlich ist und im zweiten Fall A mindestens zwei Elemente hat.

2. Sei A eine unendliche Menge. Zeigen Sie, daß es dann eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt.

12 Kombinatorische Formeln

Sei wieder A eine endliche Menge und $n \in \mathbb{N}$. Wir interessieren uns nun für folgende Größen:

1. $\sharp\{f : A_n \to A \mid f \text{ is injektiv}\}$ - Anzahl der geordneten Teilmengen von A mit n Elementen

2. $\sharp\{f : A_n \to A \mid f \text{ is bijektiv}\}$ - Anzahl der Ordnungen von A

3. $\sharp\{X \in \mathcal{P}(A) \mid \sharp X = n\}$ - Anzahl der Teilmengen von A mit n Elementen

1. Wir identifizieren A_{49} mit der Menge der Kugeln einer bekannten Lotterie. Dann ist

$$\sharp\{f : A_6 \to A_{49} \mid f \text{ is injektiv}\}$$

die Menge der möglichen Ziehungen (mit Reihenfolge) im Spiel 6 aus 49. Wir müssen Injektivität verlangen, da keine Kugel zweimal gezogen werden kann. Im realen Spiel kommt es auf die Reihenfolge nicht an. Die Zahl

$$\frac{1}{\sharp\{X \in \mathcal{P}(A_{49}) \mid \sharp X = 6\}}$$

ist also die Wahrscheinlichkeit eines Sechsers.

Wir definieren die Abbildung $!(\dots) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (lies $n! :=!(n)$ als n-Fakultät) durch

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k \ .$$

Verabredungsgemäß hat ein leeres Produkt den Wert 1, also gilt $0! = 1$.

Lemma 12.1 *Für eine endliche Menge A und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sharp\{f : A_n \to A \mid f \textit{ is injektiv}\} = \sharp A((\sharp A) - 1) \dots ((\sharp A) - n + 1) = \frac{(\sharp A)!}{((\sharp A) - n)!} \ . \qquad (7)$$

Proof. Wir beweisen induktiv.

Wir betrachten zunächst den Fall $n = 0$: Es gilt

$$\sharp\{f : A_0 \to A \mid f \text{ is injektiv}\} = 1 = \frac{(\sharp A)!}{((\sharp A) - 0)!} \ .$$

In der Tat gilt

$$A^{\emptyset} := \{R \subseteq A \times \emptyset \mid R \text{ ist funktional}\} = \{\emptyset\} \ .$$

Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Wir nehmen an, daß für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ die Formel

$$\sharp\{f : A_m \to A \mid f \text{ is injektiv}\} = \frac{(\sharp A)!}{((\sharp A) - m)!}$$

schon gezeigt ist. Für jedes injektive $g : A_{n-1} \to A$ setzen wir

$$A_g := \{f : A_n \to A \mid f \text{ is injektiv und } f_{|A_{n-1}} = g\} \ .$$

Für $g, g' \in \{g : A_{n-1} \to A \mid \ g \text{ is injektiv}\}$ mit $g \neq g'$ gilt $A_g \cap A_{g'} = \emptyset$. Weiter gilt

$$\{f : A_n \to A \mid f \text{ is injektiv}\} \cong \bigsqcup_{\{g : A_{n-1} \to A \mid \ g \text{ is injektiv}\}} A_g \ .$$

Wir überzeugen uns nun, daß

$$\sharp A_g = (\sharp A) - (n - 1)$$

ist. In der Tat gibt es $(\sharp A) - (n-1)$-viele Möglichkeiten, den Wert $f(A_{n-1})$ in $A \setminus g(A_{n-1})$ festzulegen. Beachten hier den Unterschied: $g(A_{n-1})$ ist das Bild von g, also eine Teilmenge von A, während $f(A_{n-1})$ der Wert von f auf dem Element $A_{n-1} \in A_n$ ist, also ein Element von A. Es gilt

$$\sharp\{f : A_n \to A \mid f \text{ is injektiv}\} = ((\sharp A) - (n - 1))\frac{(\sharp A)!}{((\sharp A) - (n - 1))!} = \frac{(\sharp A)!}{((\sharp A) - n)!} \ .$$

□

Corollary 12.2 *Sei A endlich. Die Anzahl der bijektiven Abbildungen $A \to A$ ist dann durch $(\sharp A)!$ gegeben.*

Proof. Man setze $A := A_n$ in 12.1. □

Für die Formulierung der Lösung des dritten Problems führen wir die Binomialkoeffizienten ein.

Definition 12.3 *Für natürliche Zahlen m, n mit $m \leq n$ definieren wir*

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!} \ .$$

Lemma 12.4 *Für eine endliche Menge A und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sharp\{X \in \mathcal{P}(A) \mid \sharp X = n\} = \binom{\sharp A}{n} \ .$$

Proof. Ist $X \in \mathcal{P}(A)$ und $\sharp X = n$, dann existiert eine Bijektion $f : A_n \to X$. Jede andere solche Bijektion kann man als $f \circ \phi$ für eine eindeutig bestimmte Bijektion $\phi : A_n \to A_n$ schreiben. Die Anzahl der Bijektionen von A_n nach X ist also gleich der Anzahl der Bijektionen von A_n nach A_n, also gleich $n!$ nach Korollar 12.2.
Damit ist

$$n! \ \sharp\{X \in \mathcal{P}(A) \mid \sharp X = n\} = \sharp\{f : A_n \to A \mid f \text{ is injektiv}\}$$

und

$$\sharp\{X \in \mathcal{P}(A) \mid \sharp X = n\} = \frac{\sharp A}{(\sharp A - n)!n!} = \binom{\sharp A}{n} \ .$$

□

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Sechsers im Spiel 6 aus 49 ist also

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} \ .$$

Wir führen die Abkürzung

$$F_n(A) := \sharp\{X \in \mathcal{P}(A) \mid \sharp X = n\}$$

ein und betrachten den Term

$$T_A(x) := \sum_{k=0}^{\sharp A} F_k(A) x^k \ .$$

Der Term $T_A(x)$ wird auch als die erzeugende Funktion der Zahlen $F_k(A)$, $k = 0, \ldots, \sharp A$ genannt.

Lemma 12.5 *Es gilt*

$$T_A(x) = (1+x)^{\sharp A} \ . \tag{8}$$

Proof. Wir führen einen Induktionsbeweis.

Der Induktionsanfang ist der Fall $n = 1$. Wenn $\sharp A = 1$ ist, dann gilt $F_A(x) = 1 + x$.

Wir nehmen nun an, daß $n \in \mathbb{N}$ und die Formel (8) unter Annahme $\sharp A < n$ schon bewiesen ist.
Wir nehmen nun an, daß $\sharp A = n$ gilt. Sei $a \in A$ und $A' := A \setminus \{a\}$. Wir zerlegen weiter

$$\{X \in \mathcal{P}(A) | \sharp X = n\} \cong \{X \in \mathcal{P}(A) | (\sharp X = n) \wedge (a \in X)\} \sqcup \{X \in \mathcal{P}(A) | (\sharp X = n) \wedge (a \notin X)\} .$$

Wir haben Bijektionen

$$\{X \in \mathcal{P}(A) \mid \sharp X = n \wedge a \in X\} \to \{X \in \mathcal{P}(A') \mid \sharp X = n - 1\}, \quad X \mapsto X \setminus \{a\} ,$$

und

$$\{X \in \mathcal{P}(A) \mid \sharp X = n \wedge a \notin X\} \to \{X \in \mathcal{P}(A') \mid \sharp X = n\} , \quad X \mapsto X .$$

Wir schließen, daß

$$F_n(A) = F_n(A') + F_{n-1}(A')$$

gilt. Daraus folgt in direkter Rechnung, daß

$$(1 + x)T_{A'}(x) = T_A(x)$$

gilt. Also gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$T_A(x) = (1 + x)(1 + x)^{\sharp A'} = (1 + x)^{\sharp A} .$$

□

Wir haben damit gezeigt:

Corollary 12.6 *1.*

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

2.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} .$$

3.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n .$$

12.1 Aufgaben

1. Zeige die binomische Formel

$$(x+y)^n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \ .$$

2. Seien A eine endliche Menge und $m, n \in \mathbb{N}$. Finde eine Formel für

$$f(n,m) := \sharp\big\{(X,Y) \in \mathcal{P}(A)^2 \mid (X \cap Y = \emptyset) \wedge (\sharp X = n) \wedge (\sharp Y = m)\big\} \ .$$

3. Sei (f_n) die Fibonacci Folge in $\mathbb{N}$, welche rekursiv durch

$$f_0 := 0 \ , \quad f_1 := 1 \ , \quad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$$

gegeben ist. Wir bilden die erzeugende Funktion

$$F_k(x) := \sum_{n=0}^{k} f_n x^n \ .$$

Zeigen Sie, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$F_{k+2}(x) = x + xF_{k+1}(x) + x^2 F_k(x)$$

gilt.

13 Äquivalenzrelationen und Klassen

Äquivalenzrelationen formalisieren die Vorstellung, Elemente einer Menge nach bestimmten Eigenschaften gruppieren zu können.

1. Sei A eine Menge. Dann können wir die Elemente von $\mathcal{P}(A)$ nach Ihrer Mächtigkeit zusammenfassen.

2. Die Menge der Studenten in diesem Raum könnte nach der Zugehörigkeit zu Übungsgruppen unterteilt werden.

3. Die Menge $\mathbb{Z}$ kann in Teilmengen zerlegt werden, die durch den Rest bei der Division durch 3 unterschieden werden.

Definition 13.1 *Eine Relation R auf einer Menge A ist eine Äquivalenzrelation, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

1. *Reflexivität:* $\mathtt{id}_A \subseteq R$

2. *Symmetrie:* $R^{-1} = R$

3. *Transitivität:* $R \circ R \subseteq R$

Hier sind einige Beispiele für Äquivalenzrelationen.

1. Sei A eine Menge. Dann sind $A \times A$ und $\mathtt{id}_A$ die maximale und minimale Äquivalenzrelation auf A.

2. **Lemma 13.2** *Sei A eine Menge. Die Gleichmächtigkeitsrelation $R \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ ist eine Äquivalenzrelation.*

   Proof. Übungsaufgabe. □

3. **Lemma 13.3** *Die Relation $\{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | (3|(m-n))\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.*

   Proof. Übungsaufgabe. □

Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation auf A.

Definition 13.4 *Eine Äquivalenzklasse (bez. R) in A ist eine Teilmenge $X \subseteq A$ mit der Eigenschaft*

1. $X \neq \emptyset$
2. *Für je zwei Elemente $x, y \in X$ gilt $(x,y) \in R$.*
3. *Aus $a \in A$, $x \in X$ und $(a,x) \in R$ folgt $a \in X$.*

Sei R eine Äquivalenzrelation auf A. Dann kann man A als eine disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen schreiben. Genauer gilt:

Lemma 13.5
1. *Sind $X, Y \subseteq A$ Äquivalenzklassen, dann gilt entweder $X = Y$ oder $X \cap Y = \emptyset$.*
2. *Es gilt*
$$A \cong \bigsqcup_{\{X \in \mathcal{P}(A) \mid X \text{ ist Äquivalenzklasse}\}} X \ .$$

Proof.

1. Aus $X \cap Y = \emptyset$ folgt $X \neq Y$. Sein nun $X \cap Y \neq \emptyset$. Wir wählen dann ein Element $z \in X \cap Y$. Für jedes $x \in X$ gilt wegen $z \in X$ daß $(x,z) \in R$. Dann gilt aber wegen $z \in Y$ auch $x \in Y$. Das zeigt die Inklusion $X \subseteq Y$. Analog zeigt man, daß $Y \subseteq X$ gilt. Insgesamt schließen wir, daß aus $X \cap Y \neq \emptyset$ die Gleichheit $X = Y$ folgt.

2. Wir müssen nur noch zeigen, daß jedes $a \in A$ in einer Äquivalenzklasse enthalten ist. Wir definieren die Teilmenge von A

$$[a] := \{x \in A \,|\, a \sim_R x\}$$

und zeigen, daß dies eine Äquivalenzklasse ist. In der Tat ist $a \in [a]$ und damit $[a] \neq \emptyset$. Weiter folgt aus $x, y \in [a]$ daß $x \sim_R a \wedge a \sim_R y$ und damit $x \sim_R y$ gilt. Schließlich, wenn für $y \in A$ die Relation $y \sim_R x$ für ein $x \in [a]$ gilt, dann auch $y \sim_R a$ und damit $y \in [a]$.

□

Definition 13.6 *Mit $A/\sim_R$ bezeichen wir die Menge der Äquivalenzklassen.*

Die Menge $A/\sim_R$ ist also eine Teilmenge der Potenzmenge von A. Wir haben eine kanonische Abbildung $p : A \mapsto A/\sim_R$, welche jedes Element $a \in A$ auf seine Äquivalenzklass $[a]$ abbildet.
Hier sind einige Beispiele

1. Sei A eine Menge. Die Identität $\mathtt{id}_A$ ist eine Äquivalenzrelation auf A. Für jedes $a \in A$ gilt $[a] = \{a\}$ und $p : A \to A/\sim_{\mathtt{id}_A}$ ist eine Bijektion.

2. Sei A eine Menge. Durch $R := A \times A$ wird eine Äquivalenzrelation auf A beschrieben. Für jedes $a \in A$ gilt $[a] = A$.

3. Sei $r \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Relation R auf $\mathbb{Z}$ durch

$$R := \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, r \text{ teilt } m - n\} \ .$$

Im Fall $r = 3$ ist $[5] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$. Diese Relation wird of auch mit

$$n \equiv m \mod r$$

notiert und man schreibt

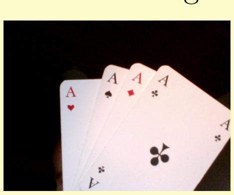
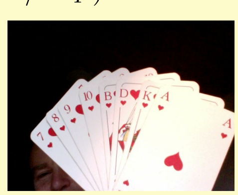
$$\mathbb{Z}/\sim_R := \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \ .$$

4. Sei A die Menge der Karten eines Skatblattes. Wir betrachten die Relationen

   (a) gleiche Zahl: Z

   (b) gleiche Farbe (also Karo, Herz, Pique, Kreuz) : F

   auf A. Dann gilt $\sharp(A/\sim_Z) = 8$ und $\sharp(A/\sim_F) = 4$.

 - Z-Klasse der Asse,  - F-Klasse der Herzen

5. Sei S die Menge der Studenten in diesem Raum und R die Relation

$$s \sim_R t_{:} = \{s \text{ und } t \text{ sind in der gleichen Übungsgruppe}\} .$$

Dann ist $S/\sim_R$ die Menge der Übungsgruppen.

Sei A eine Menge und R eine Äquivalenzrelation auf A. Wir werden oft mir dem Problem konfrontiert werden, eine Abbildung

$$A/\sim_R \to B$$

für eine weitere Menge B zu konstruieren. Dazu werden oft zunächst eine Abbildung $F : A \to B$ betrachten und aus dieser die Abbildung f durch Auswertung auf Vertretern gewinnen:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \arrow[dr, "F"] & \\ A/\sim_R \arrow[r, dotted, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Wir sagen auch, daß F über die Projektion $A \to A/\sim_R$ faktorisiert.

Betrachten wir als Beispiel unser Skatblatt A und die Relation

$$R = \text{gleiche Farbe aus } \{Karo,\ Herz,\ Pique,\ Kreuz\} .$$

Wir fragen uns nun, ob man eine Abbildung

$$f : A/\sim_R \to \{rot,\ schwarz\}$$

definieren kann, welche jeder Karte ihre (physikalische) Farbe zuordnet. Wir können sicherlich jeder Karte eine solche Farbe zuordnen. Dies sei die Abbildung $F : S \to \{rot,\ schwarz\}$.
Sei nun $Karo$ etwa die Äquivalenzklasse der Karokarten. Dann wählen wir eine Karokarte aus, z.B. $7 - Karo$. Wir sehen, daß diese Karte rot ist und setzen

$$f(Karo) := F(7 - Karo) .$$

Diese Konstruktion funktioniert, da wir auch jede andere Karokarte hätten wählen können, z.B. den Karo Buben. Der wäre auch rot gewesen.
Wir kommen nun wieder auf den allgemeinen Fall zurück. Wir nehmen an, daß wir eine Abbildung $F : A \to B$ gegeben haben. Sei nun $X \in A/\sim_R$, dann wählen wir einen Vertreter $a \in X$ und versuchen $f(X) := F(a)$ zu setzen. Wir werden die Definition von f oft in der Form

$$f([a]) := F(a)$$

notieren. Um einzusehen, daß wir auf diese Weise eine Abbildung $A/\sim_R \to B$ konstruieren, müssen wir zeigen, daß der Wert $F(a)$ unabhängig von der Wahl des Vertreters $a \in X$ ist. In diesem Fall sagen wir, daß f wohldefiniert sei.

Wenn wir in unserem Skatbeispiel die Relation Z betrachten und dann versuchen die Farbe einer Äquivalenzklasse durch $f([a]_Z) := F(a)$ zu definieren, dann wäre f nicht wohldefiniert.

13.1 Aufgaben

1. Was ist falsch?

   Proposition 13.7 *Sei R eine symmetrische und transitive Relation auf einer Menge A. Dann ist R reflexiv.*

   Proof. In der Tat, sei $a \in A$. Wir müssen zeigen, daß dann $(a, a) \in R$ gilt. Wir wählen zunächst ein $b \in A$ mit $(a, b) \in R$. Da R symmetrisch ist, gilt dann auch $(b, a) \in R$. Aus $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ folgt nun wegen der Transitivität von R, daß $(a, a) \in R$ gilt.

2. Welches sind Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{N}$:

   (a) Die Nachfolgerrelation $Nachf := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n + 1\}$.

   (b) Die Ordnungsrelation $\leq$.

   (c) Die Relation

   $$n \sim m := (n \text{ und } m \text{ enden auf der gleichen Ziffer (in der Dezimaldarstellung)}) .$$

   (d) $(m \sim n) := (g.g.T(m, n) = 1)$.

   (e) $(m \sim n) := (2|(n^2 - m^2))$.

3. Zeigen Sie 13.3.

4. Welche der Abbildungen sind wohldefiniert:

   (a) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \ni [n] \mapsto [n^2 - 5n] \in \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.

   (b) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \ni [n] \mapsto (2|n) \in \{wahr, falsch\}$.

   (c) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \ni [n] \mapsto (5|n) \in \{wahr, falsch\}$.

14 Ganze und Rationale Zahlen

In diesem Kapitel wiederholen wir die Konstruktion der ganzen und der rationalen Zahlen. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Besonders wichtige Elemente sind $0, 1 \in \mathbb{N}$. Wir haben weiterhin die binären Operationen

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ , \quad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

der Addition und Multiplikation.

Diese Operationen sind kommutativ, assoziativ und vertragen sich mittels dem Distributivgesetz. Eine Menge mit einer assoziativen und kommutativen binären Operation und einem Einselement heißt kommutatives Monoid. Insbesondere sind

$$(\mathbb{N}, 0, +) \ , \quad (\mathbb{N} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$$

kommutative Monoide. Die Kombination dieser Strukturen

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$$

ist eine kommutative Semiringringstruktur. Die Begriffe *Monoid*, *Gruppe*, *Semiring* und die im folgenden benutzten Begriffe *Ring* und *Körper* werden in in der linearen Algebra präzisiert.
Fügt man zu dem kommutativen Monoid $(\mathbb{N}, +, 0)$ Inverse der Addition (also negative Zahlen) hinzu, dann erhält man die kommutative Gruppe $(\mathbb{Z}, +, 0)$ der ganzen Zahlen. Im folgenden zeigen wir, wie dieses Hinzufügen im Detail funktioniert.
Die Idee ist, daß man jede ganze Zahl als Differenz $m - n$ von zwei natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ schreiben kann. Wir parametrisieren die ganzen Zahlen also durch die Menge $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Zwei Paare $(m, n), (k, l) \in \mathbb{N}^2$ stellen dabei die gleiche ganze Zahl da, wenn $m - n = k - l$ gilt. Diese Gleichung kann man auch innerhalb der natürlichen Zahlen ausdrücken in der Form $m + l = n + k$. Wir betrachten also auf der Menge $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Relation

$$R := \{((m, n), (k, l)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid m + l = n + k\}.$$

Lemma 14.1 *Die Relation R ist eine Äquivalenzrelation.*

Proof. Übungsaufgabe. □

Da R eine Äquivalenzrelation ist, können wir die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich R bilden.

Definition 14.2 *Wir definieren die Menge der ganzen Zahlen durch*

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2 / \sim_R \quad .$$

Definition 14.3 *Wir definieren eine Abbildung*

$$\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \ , \quad \iota(n) := [(n, 0)] \ .$$

Wir erklären die Rechenoperationen auf $\mathbb{Z}$ wie folgt:

1. $[(m, n)] + [(k, l)] = [(m + k, n + l)]$
2. $[(m, n)] \cdot [(k, l)] = [(mk + nl, ml + nk)]$

Lemma 14.4 *1. Diese Operationen sind wohldefiniert und erfüllen das Kommutativ-, Assoziativ-, und Distributivgesetz.*

2. Die Abbildung $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist injektiv.

3. $(\mathbb{Z}, +, \iota(0))$ ist eine kommutative Gruppe.

4. $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \iota(0), \iota(1))$ ist ein kommutativer Ring.

Proof. Das Argument sollte im wesentlichen aus der Schule bekannt sein. Wir müssen zeigen, daß die Konstruktion nicht von dieser Wahl der Vertreter der Äquivalenzklasse abhängt. Sei zum Beispiel $[(m, n)] = [(m', n')]$, also $m+n' = m'+n$. Wir müssen dann zeigen, daß $[(m+k, n+l)] = [(m'+k), (n'+l)]$ und $[(mk+nl, ml+nk)] = [(m'k+n'l, m'l+n'k)]$ gelten. Das kann man aber einfach nachrechnen: In der Tat gilt etwa $m + k + n' + l = n + l + m' + k$. □

In der Analysis identifizieren wir gewöhnlich $\mathbb{N}$ mit dem Bild in $\mathbb{Z}$ unter ι. Wir schreiben $n = [(n, 0)]$. Weiter setzen wir wie üblich $-n := [(0, n)]$.
Im Ring $\mathbb{Z}$ hat also jedes Element ein Inverses unter der Addition, jedoch nicht immer für die Multiplikation. Fügt man zu dem Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ multiplikative Inverse für alle von Null verschiedenen Elemente hinzu, dann erhält man den Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ der rationalen Zahlen.
Jede rationale Zahl soll als Bruch $\frac{m}{n}$ dargestellt werden mit $n \neq 0$. Zwei solche Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{k}{l}$ stellen die gleiche rationale Zahl dar, wenn $ml = nk$ gilt.
Mit dem nun schon bekannten Formalismus definieren wir auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Relation

$$R := \{((m, n), (k, l)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \mid ml = nk\} \ .$$

Lemma 14.5 *Die Relation R ist eine Äquivalenzrelation.*

Proof. Übungsaufgabe. □

Definition 14.6 *Wir definieren die Menge der rationalen Zahlen durch*

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z}^2 / \sim_R \setminus [(1, 0)] \ .$$

Definition 14.7 *Wir definieren*

$$\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \ , \quad n \mapsto (n, 1) \ .$$

Wir erklären die Rechenoperationen auf $\mathbb{Q}$ wie folgt:

1. $[(m, n)] + [(k, l)] = [(ml + nk, nl)]$

2. $[(m, n)] \cdot [(k, l)] = [(mk, nl)]$

Lemma 14.8 *1. Diese Operationen sind wohldefiniert und erfüllen das Kommutativ-, Assoziativ-, und Distributivgesetz.*

2. Die Abbildung $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ist injektiv.

3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \iota(0), \iota(1))$ ist ein Körper .

Proof. Wir überlassen diesen Beweis als Übungsaufgabe. □

In der Analysis identifizieren wir $\mathbb{Z}$ mit dem Bild unter ι in $\mathbb{Q}$. Wir schreiben $\frac{m}{n} := [(m,n)]$ und $(m,n)^{-1} = (n,m)$ falls $m \neq 0$ ist. Man kann jede rationale Zahl in der Form $\frac{m}{n}$ mit $0 < n$ schreiben und annehmen, daß m und n keine gemeinsamen Teiler haben.

Proposition 14.9 *Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich.*

Proof. Wir definieren zunächst eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch

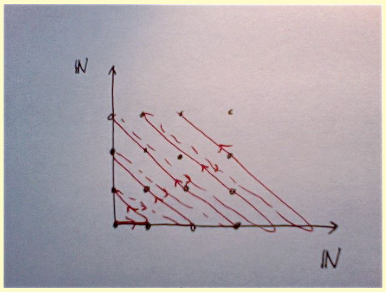
$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & (2|n) \\ -\frac{n+1}{2} & (2 \not| n) \end{cases} .$$

Da $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ injektiv ist, ist $\mathbb{Q}$ nicht endlich. Um die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ zu zeigen, reicht es nach Lemma 11.8 aus eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ anzugeben. Wir betrachten eine Kette von Abbildungen

$$\mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{f \times \mathtt{id}} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \xrightarrow{(m,n) \mapsto \frac{m}{n+1}} \mathbb{Q} .$$

Die zweite und dritte sind surjektiv. Wir müssen also nur eine Surjektion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ konstruieren. Die Idee ist, die Paare natürlicher Zahlen in der folgenden Weise durchzuzählen:

$$(0,0)\ , (1,0)\ , (0,1)\ , (2,0)\ , (1,1)\ , (0,2)\ , (3,0)\ , (2,1)\ , \ldots\ .$$



Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $(a,b) = p(n)$ mit $n := \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$. Siehe Übungsaufgabe 14.1, 5. □

14.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie Lemma 14.1.
2. Zeigen Sie Lemma 14.4.
3. Zeigen Sie Lemma 14.5.
4. Zeigen Sie Lemma 14.8.
5. Zeigen Sie, daß die Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(a,b) := \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$, eine Bijektion ist.
6. Zeige: Für jede endliche Teilmenge $X \subseteq \mathbb{Q}$ existiert eine positive natürlich Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß für alle $x \in X$ das Produkt nx ganz ist.

15 Ordnungsrelationen

Die natürlichen Zahlen können wir der Größe nach ordnen. Die Buchstaben werden im Alphabet geordnet. Daraus ergibt sich die Reihenfolge der Wörter im Duden. Abstrahiert man diese Fälle, so kommt man auf den Begriff einer Ordnungsrelation auf einer Menge. Oft wird eine solche Relation durch das Symbol $\leq$ ausgedrückt. Die Aussage $a \leq b$ bedeutet, daß a kleiner oder gleich b, oder daß das Wort a vor dem Wort b kommt oder mit b übereinstimmt.

Definition 15.1 *Eine Relation R auf einer Menge A ist eine Ordnungsrelation, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:*

1. *Antisymmetrie: $R \cap R^{-1} = \mathtt{id}_A$*
2. *Totalität: $R \cup R^{-1} = A \times A$*
3. *Transitivität: $R \circ R \subseteq R$.*

Eine geordnete Menge ist eine Paar (A, R) aus einer Menge A und einer Ordnungsrelation.

Im folgenden erklären wir die Bedingungen in der Elementsprache. In der Regel benutzt man diese umformulierte Bedingung um nachzuweisen, daß eine Relation eine Ordnungsrelation ist.

1. Wenn für $a, b \in A$ beide Aussagen $a \leq b$ und $b \leq a$ gelten, dann ist $a = b$. Umgekehrt gilt für jedes Element $a \in A$ die Aussage $a \leq a$.
2. Für je zwei Elemente $a, b \in A$ gilt mindestens eine der beiden Aussagen $a \leq b$ oder $b \leq a$.

3. Wenn für Elemente $a, b, c \in A$ die Aussagen $a \leq b$ und $b \leq c$ gelten, dann auch $a \leq c$.

1. Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Ordnungsrelation. Wenn wir die Nachfolgerrelation

$$Nachf := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n = m + 1\}$$

als gegeben ansehen, dann hat $\leq$ die folgende Beschreibung. Wir definieren rekursiv

$$Nachf^0 := \mathtt{id}_{\mathbb{N}}$$

und

$$Nachf^n := Nachf \circ Nachf^{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann gilt

$$\leq = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Nachf^n \ . \tag{9}$$

2. Wir haben weiterhin Ordnungsrelationen $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ die wir später präzise konstruieren werden.

3. Das Alphabet bestimmt eine Ordnungsrelation auf der Menge der Buchstaben. Wir betrachten das Leerzeichen als kleinsten Buchstaben.

4. Sei (A, R) eine Menge mit einer Relation R und $B \subseteq A$ eine Teilmenge. Die Einschränkung der Relation R auf die Teilmenge B wird durch ${}_{B|}R_{|B} := R \cap (B \times B)$ definiert.

   Lemma 15.2 *Wenn R eine Ordnungsrelation ist, dann ist auch die Einschränkung ${}_{B|}R_{|B}$ von R auf B eine Ordnungsrelation.*

   Proof. Die Bedingungen werden in der Sprache der Elemente sofort verifiziert. □

   (a) So hat etwa die Menge der Primzahlen eine von der Ordnung von $\mathbb{N}$ induzierte Ordnung.

   (b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ wird die geordnete Teilmenge $\{n \in \mathbb{N} \mid (0 \leq n) \wedge (n \leq m)\}$ mit $[m]$ bezeichnet.

5. **Definition 15.3** *Eine geordnete Menge (A, R) ist wohlgeordnet, wenn jede Teilmenge von A ein kleinstes Element hat.*

   Ein kleinstes Element eine geordneten Menge ist eindeutig bestimmt (siehe Lemma 16.1).

   Zum Beispiel sind $(\mathbb{N}, \geq)$ und endliche geordnete Mengen wohlgeordnet.

   Wenn (A, R) wohlgeordnet ist, dann definieren wir eine Abbildung

$$\min : \mathcal{P}(A) \to A$$

   welche jedem $U \in \mathcal{P}(A)$ das kleinste Element von U zuordnet.

6. Die Menge der Wörter kann man als Teilmenge von $\{Alphabet\}^{\mathbb{N}}$ verstehen. Die Ordnung der Wörter im Duden ist die lexikographische Ordnung, welche im allgemeinen wie folgt definiert wird.

   Seien (A, R) eine wohlgeordnete Menge und (B, S) eine weitere geordnete Menge. Dann besitzt B^A die lexikographische Ordnungsrelation T. Wir definieren zunächst eine Abbildung $\mathtt{Diff} : B^A \times B^A \to \mathcal{P}(A)$ durch

$$\mathtt{Diff}(f, g) := \{a \in A \mid f(a) \neq g(a)\} \ .$$

   Die Menge $\mathtt{Diff}(f, g)$ ist also die Menge derjenigen $a \in A$, an welchen sich f und g unterscheiden. Dann definieren wir

$$T := \{(f, g) \in B^A \times B^A \setminus \mathtt{id}_{B^A}\} \mid f(\min(\mathtt{Diff}(f, g))) \leq g(\min(\mathtt{Diff}(f, g)))\} \cup \mathtt{id}_{B^A} \ .$$

   Die Herausnahme von $\mathtt{id}_{B^A}$ im ersten Teil ist erforderlich, da $\mathtt{Diff}(f, f)$ für $f \in B^A$ leer und das Minimum nicht definiert ist. Es gilt also $f \leq g$, wenn $f \neq g$ und $f(a) \leq g(a)$ gilt für die kleinste Stelle $a \in A$ an welcher sich f und g unterscheiden, oder wenn $f = g$ ist

   Lemma 15.4 *T ist eine Ordnungsrelation.*

   Hier sind aufsteigend geordnet die ersten Elemente der lexikographisch geordneten Menge $[3]^{[2]}$:

$$000, 001, 002, 003, 010, 011, 012, 013, 020, \dots$$

Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge. Wir schreiben

$$a < b := \{a \leq b\} \wedge (a \neq b) \ .$$

In einer geordneten Menge können wir Intervalle bilden.

Definition 15.5 *Für $a, b \in A$ definieren wir die folgenden Teilmenge von A:*

1. $[a, b] := \{x \in A \mid a \leq x \text{ und } x \leq b\}$
2. $(a, b) := \{x \in A \mid a < x \text{ und } x < b\}$
3. $(a, b] := \{x \in A \mid a < x \text{ und } x \leq b\}$
4. $[a, b) := \{x \in A \mid a \leq x \text{ und } x < b \ \}$
5. $[a, \infty) := \{x \in A \mid a \leq x\}$
6. $(-\infty, b] := \{x \in A \mid x \leq b\}$

Hier sind einige Beispiele:

1. In $(\mathbb{N} \leq)$ habe wir
$$[1,5] = \{1,2,3,4,5\}\ , \quad [1,5) = \{1,2,3,4\}\ , \quad (5,\infty) = \{6,7,8,\dots\}\ , \quad (4,2) = \emptyset\ .$$
2. In $\mathbb{N}^{[1]}$ habe wir
$$[(1,1),(2,3)) = \{[1,0],[1,1],\dots,[1,n],\dots,(2,0),(2,1),(2,2)\}\ .$$
3. In $\{Alphabet\}^{[2]}$ haben wir $(ard, arg) = \{are, arf\}$.

Lemma 15.6 *Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge und $a, b \in A$ mit $a \leq b$. Dann gelten:*

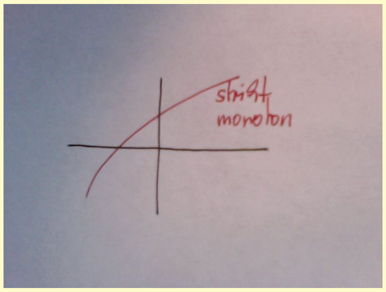
1. $\emptyset = (-\infty, a) \cap [a, \infty)$ *und* $A = (-\infty, a) \cup [a, \infty)$.
2. $\emptyset = (-\infty, a] \cap (a, \infty)$ *und* $A = (-\infty, a] \cup (a, \infty)$
3. *Die Mengen* $(-\infty, a)\ , [a, b]\ , (b, \infty)$ *sind paarweise disjunkt und es gilt* $A = (-\infty, a) \cup [a, b] \cup (b, \infty)$.

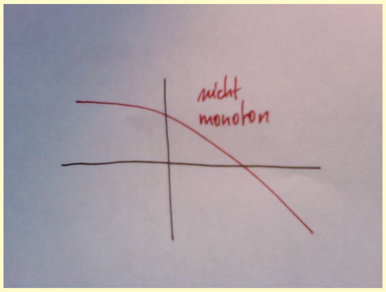
Proof. Wir zeigen 1. Die anderen Fälle haben ähnliche Argumente. Wir zeigen zunächst, daß $(-\infty, a) \cap [a, \infty) = \emptyset$ gilt. In der Tat, wenn $x \in A$ ein Element dieses Durchschnittes wäre, dann würde $x < a$ und $a \leq x$ gleichzeitig gelten. Das ist unmöglich.
Wir zeigen nun, daß $A = (-\infty, a) \cup [a, \infty)$ gilt. Es ist klar daß $(-\infty, a) \cup [a, \infty) \subseteq A$ gilt. Sei nun $x \in A$. Dann gilt entweder $x < a$ oder $a \leq x$. Damit ist $x \in (-\infty, a)$ oder $x \in [a, \infty)$ erfüllt, also $x \in (-\infty, a) \cup [a, \infty)$. □

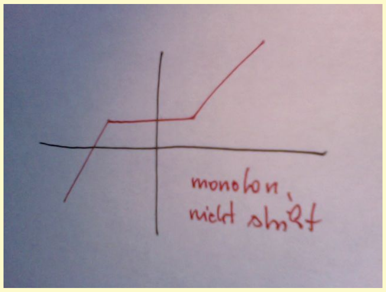
Seien $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ geordnete Mengen. Wir verstehen die Ordnungen $\leq_A$ und $\leq_B$ als Zusatzstrukturen auf den Mengen A und B. In dieser Situation betrachten wir solche Abbildungen von A nach B, die mit den Zusatzstrukturen verträglich sind. Was das genau bedeutet, muß in jedem Fall erklärt werden.

Definition 15.7 *Eine Abbildung $f : A \to B$ ist monoton, wenn*
$$(f \times f)(\leq_A) \subseteq \leq_B$$
gilt. Eine monotone Abbildung ist strikt monoton, wenn sie zusätzlich injektiv ist.

In der Sprache der Elemente bedeutet die Monotonie, daß für je zwei Elemente $a, a' \in A$ aus der Relation $a \leq_A a'$ die Relation $f(a) \leq_B f(a')$ folgt. Die Abbildung f ist strikt monoton, wenn aus der strikten Ungleichung $a < a'$ die strikte Ungleichung $f(a) < f(a')$ folgt.







1. Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := 2n + 1$ ist monoton. Begründung: Seien n, n' natürliche Zahlen und $n \leq n'$. Da $0 \leq 2$ gilt, folgt nach Multiplikation mit 2 die Ungleichung $2n \leq 2n'$. Daraus folgt $2n + 1 \leq 2n' + 1$. Wir haben also gezeigt, daß aus der Ungleichung $n \leq n'$ die Ungleichung $f(n) \leq f(n')$ folgt.

2. Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = (-1)^n$ ist nicht monoton. Begründung: Dazu genügt es, zwei ganze Zahlen n, n' mit $n \leq n'$ zu finden, so daß $f(n) > f(n')$ gilt. Wir nehmen $n := 0$ und $n' = 1$. Es gilt $f(n) = 1$ und $f(n') = -1$. Also gilt $n \leq n'$ und $f(n) > f(n')$.

3. Sei $\mathbb{Q}^{\geq 0} := [0, \infty)$ die Teilmenge der nichtnegativen rationalen Zahlen mit der eingeschränkten Ordnungsrelation. Wir zeigen, daß die Abbildung
$$\mathbb{Q}^{\geq 0} \to \mathbb{Q}\ , \quad x \mapsto x^2$$
monoton ist. Seien $x, y \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$ und gelte $x \leq y$. Da $x \geq 0$ ist, erhalten wir durch Multiplikation mit x die Relation $x^2 \leq xy$ (die Zulässigkeit dieses Schlusses folgt aus dem Axiom 17.1). Analog schließen wir durch Multiplikation mit y aus $x \leq y$ daß $xy \leq y^2$ gilt. Die Transitivität der Ordnungsrelation liefert nun $x^2 \leq y^2$.

15.1 Aufgaben

1. Wir betrachten $\mathbb{Z}^3$ mit der lexikographischen Ordnung. Geben Sie Elemente a, b von $\mathbb{Z}^3$ an mit $a \in ((1, 2, 3), (5, 6, 7))$ und $b \notin ((1, 2, 3), (5, 6, 7))$.

2. Zeigen Sie 15.4.

3. Zeigen Sie, daß die Abbildung
$$\mathbb{Q} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{Q}$$
strikt monoton ist.

4. Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge und $A^{[n]}$ lexikographisch geordnet. Untersuchen Sie die Projektionen $p_i : A^{[n]} \to A$, $i = 0, \ldots, n$ auf Monotonie.

16 Maximum und Supremum

Lemma 16.1 *Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge und $X \subseteq A$ eine nichtleere Teilmenge.*

1. *X besitzt höchstens ein Element $x \in X$ mit der Eigenschaft, daß für alle weiteren Elemente $y \in X$ die Relation $y \leq x$ gilt. Wenn es ein solches Element gibt, dann heißt es das Maximum von X und wird durch* $\max X$ *notiert.*

2. *X besitzt höchstens ein Element $x \in X$ mit der Eigenschaft, daß für alle weiteren Elemente $y \in X$ die Relation $x \leq y$ gilt. Wenn es ein solches Element gibt, dann heißt es das Miniumum von X und wird durch* $\min X$ *notiert.*

Proof. Wir zeigen, daß es nur ein Element $x \in X$ gegeben kann, welches größer oder gleich allen anderen Elementen von X ist. In der Tat, wäre $y \in Y$ ein zweites, dann würde $y \le x$ und $x \le y$ gelten, und damit $x = y$ folgen. □

Das Maximum oder Minimum einer Teilmenge muß nicht immer existieren.

1. Sei $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ die Teilmenge der geraden natürlichen Zahlen. Diese hat ein Miniumum, nämlich $\min(2\mathbb{N}) = 0$, aber kein Maximum.

2. Wir betrachten das Intervall $(0,1) \subset \mathbb{Q}$. Dieses hat weder Maximum noch Minimum. Wir argumentieren indirekt. Sei $x \in (0,1)$ ein Maximum. Dann bilden wir $x' := x + \frac{1-x}{2}$, die Mitte zwischen x und 1. Es gilt $x < x'$ und $x' \in (0,1)$. Das ist ein Widerspruch.

Definition 16.2 *Sei X eine nichtleere Teilmenge der geordneten Menge $(A, \le)$.*

1. *Ein Element $a \in A$ heißt obere Schranke von X, wenn $(\forall x \in X \mid x \le a)$ gilt.*

2. *Wenn X eine obere Schranke besitzt, dann heißt X von oben beschränkt.*

3. *Wenn X von oben beschränkt ist und die Teilmenge der oberen Schranken von A ein Minimum besitzt, dann heißt dieses das Supremum von X und wird durch $\sup X$ notiert.*

4. *Ein Element $a \in A$ heißt untere Schranke von X, wenn $(\forall x \in X \mid a \le x)$ gilt.*

5. *Wenn X eine untere Schranke besitzt, dann heißt X von unten beschränkt.*

6. *Wenn X von unten beschränkt ist und die Teilmenge der unteren Schranken von A ein Maximum besitzt, dann heißt dieses das Infimum von X und wird durch $\inf X$ notiert.*

7. *Die Teilmenge X heißt beschränkt, wenn sie von oben und unten beschränkt ist.*

1. Wir halten folgende wichtige Eigenschaft der Ordnungsrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen fest.

   Lemma 16.3 *Wir betrachten die geordnete Menge $(\mathbb{N}, \le)$. Jede von oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein Maximum. Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein Miniumum.*

   Wie wir oben gesehen haben, hat $(\mathbb{Q}, \le)$ diese Eigenschaften nicht.

2. Wir betrachten eine nichtleere Teilmenge X der lexikographisch geordnete Menge $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Wir definieren rekursiv

$$a_0 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (\exists x \in X \mid x_0 = k)\} \ ,$$

$$a_n := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (\exists x \in X \mid (k = x_n) \wedge (\forall m \in \{0, \ldots, n-1\} \mid x_m = a_m))\}\ .$$

Dann gilt $(a_n) = \inf X$, aber im allgemeinen nicht $(a_n) \in X$.

Als Beispiel betrachten wir die Menge X, welche aus den Folgen f_n für $n \in \mathbb{N}$ besteht, wobei

$$f_n := (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 2, 2, \ldots)$$

ist. Dann ist $\inf X = (1, 1, \ldots)$. Die Menge X hat aber kein Minimum.

3. **Lemma 16.4** *Wenn* $\max X$ *existiert, so auch* $\sup X$ *und es gilt* $\max X = \sup X$. *Analoges gilt für Minimum und Infimum.*

   Proof. Wenn $\max X$ existiert, dann ist es eine obere Schranke von X. In der Tat ist es die kleinste obere Schranke. Wir argumentieren indirekt. Wir nehmen an, daß es eine weitere obere Schranke y von X gibt mit $y < x$. Andererseits gilt wegen $x \in X$ aber $x \leq y$. Das ist ein Widerspruch. □

4. Im allgemeinen gilt $\inf X \leq \sup X$ wenn beide Größen existieren. Den Nachweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

5. Wir betrachten diese Begriffe für Teilmenge der geordneten Menge $(\mathbb{Q}, \leq)$.

   (a) $\max[0, 1] = 1 = \sup[0, 1]$

   (b) $\max[0, 1)$ existiert nicht, aber es gilt $\sup[0, 1) = 1$.

   (c) Die Teilmenge $W := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ ist von unten und oben beschränkt, zum Beispiel durch 3 von oben. Sie hat aber weder Supremum noch Infimum.

   In der Tat, wenn $3 \leq x$ ist, dann gilt wegen der Monotonie der Funktion $x \mapsto x^2$ auch $9 \leq x^2$, also insbesondere $2 < x^2$ und damit $x \notin W$.

   Wir zeigen nun, daß W kein Supremum besitzt. Wir argumentieren wieder indirekt und nehmen an, daß es ein Supremum $x = \sup W \in \mathbb{Q}$ gäbe. Wir wissen, daß es keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ geben kann. Dann ist entweder $x^2 < 2$ oder $x^2 > 2$. Wenn $x^2 < 2$ ist, dann gibt es eine rationale Zahl x' mit $x < x'$ und $x'^{,2} < 2$[1]. Damit wäre x keine obere Schranke der Menge W. □

Wir untersuchen nun die Verträglichkeit der Bildung von Supremum und Maximum mit monotonen Abbildungen. Seien $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ geordnete Mengen und $f : A \to B$ eine monotone Abbildung.

Lemma 16.5 *Sei* $X \in \mathcal{P}(A)$. *Dann gelten:*

[1] Das war eine Hausaufgabe!

1. *Wenn X von oben beschränkt ist, dann ist $f(X)$ von oben beschränkt.*

2. *Wenn* $\max X$ *existiert, dann gilt* $\max f(X) = f(\max X)$.

3. *Wenn* $\sup X$ *und* $\sup f(X)$ *existieren, dann gilt* $\sup f(X) \leq f(\sup X)$.

Proof.

1. Wenn $a \in A$ eine obere Schranke von X ist, dann ist $f(a)$ eine obere Schranke von $f(X)$.

2. Wäre $y \in f(X)$ mit $f(\max X) < y$, dann würde es ein $z \in X$ mit $f(z) = y$ gegeben. Dann gilt $z \leq \max X$ und damit $y = f(z) \leq f(\max X)$. Widerspruch.

3. Auf jeden Fall ist $f(\sup X)$ eine obere Schranke von $f(X)$ nur möglicherweise nicht die kleinste.

□

Im Folgenden zeigen wir durch zwei Beispiele, daß man in Lemma 16.5 3. weder die Annahme, daß $\sup f(X)$ existiert weglassen kann, noch die Behauptung dahingehend verschärfen kann, daß $\sup f(X) = f(\sup X)$ gilt.

1. Sei $A := (0,1) \cup [3,6]$ und $f : A \to \mathbb{Q}$ die Einbettung. Diese Abbildung ist monoton. Es gilt $\sup(0,1) = 3$. Andererseits ist $\sup f((0,1)) = 1$.

2. Wir betrachten A wie in 1., $B := (0,1) \cup (2,6]$ und die kanonische Einbettung $A \to B$. Dann existiert $\sup(0,1)$, nicht aber $\sup f(0,1)$.

Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge und B eine weitere Menge. Sei $f : B \to A$ eine Abbildung und $f(B) \subseteq A$ das Bild von f.

Definition 16.6 1. *Die Abbildung f heißt von oben beschränkt, falls $f(B)$ von oben beschränkt ist. In diesem Fall setzen wir*

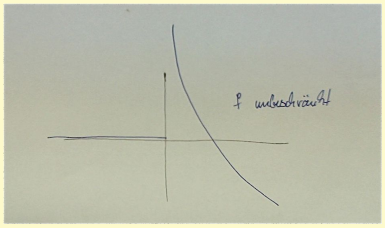
$$\sup f := \sup f(B) \ , \quad \max f := \max f(B) \ ,$$

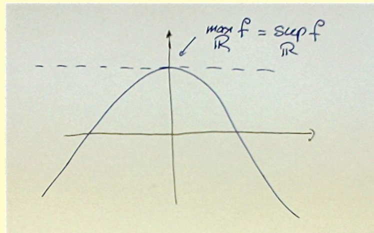
falls diese Größen existieren.

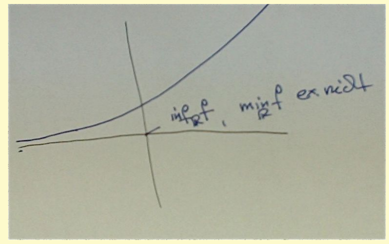
2. *Die Abbildung f heißt von unten beschränkt, falls $f(B)$ von unten beschränkt ist. In diesem Fall setzen wir*

$$\inf f := \inf f(B) \ , \quad \min f := \min f(B) \ ,$$

falls diese Größen existieren.







Ist $U \subseteq B$ eine Teilmenge, dann schreiben wir auch

$$\max_U f := \max f_{|U} \ , \quad \sup_U f := \sup f_{|U} \quad \text{etc.}$$

16.1 Aufgaben

1. Sei X eine Teilmenge einer geordneten Menge $(A, \leq)$ für welche $\inf X$ und $\sup X$ existieren. Zeigen Sie, daß dann $\inf X \leq \sup X$ gilt.

2. Untersuchen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{Q}$ auf untere/obere Beschränktheit und Existenz von Minimum/Maximum bzw. Infimum/Supremum:

   (a) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 < 27)\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{Q} \mid (x^3 < 28) \wedge (-1 \leq x)\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{Q} \mid (\exists n \in \mathbb{N} \mid nx = 1)\}$

   (d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid (\forall n \in \mathbb{N} \mid nx = 1)\}$

3. Untersuchen Sie, ob für folgende Folgen (a_n) rationaler Zahlen (d.h. Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$) die Größen $\sup(a_n)$ oder $\inf(a_n)$ existieren. Berechnen Sie diese Zahlen gegebenenfalls und überprüfen Sie, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

   (a) $a_n := \frac{1}{n+1}$

   (b) $a_n := (-1)^n \frac{n}{n+1}$

   (c) $a_n := \frac{n}{n+1}$

   (d) $a_n := \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)} - \frac{(-1)^n n^2}{n+2}$

4. Sei $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid (\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \mid x = n(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1})\}$. Zeigen Sie, daß A von unten und oben schränkt ist und berechnen Sie $\sup A$ und $\inf A$ und, gegebenfalls, $\max A$ und $\min A$.

17 Geordnete Körper

In diesem Abschnitt untersuchen wir Ordnungsrelationen auf Körpern genauer. Zunächst diskutieren wir die Verträglichkeit einer Ordnungselation mit den arithmetischen Operationen im Allgemeinen. Danach besprechen wir die Ordnung auf dem Körper $\mathbb{Q}$.

Axiom 17.1 *Sei $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ein Semiring und $\leq$ eine Ordnungsrelation auf R. Wir sagen, daß die Ordnungsrelation $\leq$ mit den arithmetischen Operationen verträglich ist, wenn folgende Aussagen über Elemente $x, y, z \in R$ gelten:*

1. *Aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$.*

2. *Aus $0 \leq x$ und $0 \leq y$ folgt $0 \leq xy$.*

In anderen Worten, die Addition von einem festen Element und die Multiplikation mit einem festen nichtnegativen Element sind monotone Abbildungen von $(R, \leq)$ in sich.

Lemma 17.2 *Sei $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ein Ring und $\leq$ eine Ordnungsrelation auf R, welche 17.1 erfüllt. Dann gelten für $x, y, z \in R$:*

1. *Aus $x \leq 0$ und $y \leq 0$ folgt $0 \leq xy$.*

2. *Es gilt $0 \leq x^2$, insbesondere also $0 \leq 1$.*

3. *Wenn $z \leq 0$ und $x \leq y$, dann gilt $yz \leq xz$.*

4. *Wenn $0 < x \leq y$ und multiplikativ inverse Elemente x^{-1}, y^{-1} existieren, dann gilt $y^{-1} \leq x^{-1}$.*

Proof.

1. Aus $x \leq 0$ nach 17.1, 1., daß $x + (-x) \leq 0 + (-x)$, also $0 \leq -x$ gilt. Analog folgt aus $y \leq 0$, daß $0 \leq -y$ gilt. Nach 17.1, .2. schließen wir $0 \leq (-x)(-y)$, also $0 \leq xy$.

2. Folgt aus 1., da entweder $0 \leq x$ oder $x < 0$.

3. Es gilt $x - y \leq 0$. Damit $0 \leq xz - yz$, also $yz \leq xz$.

4. Wir zeigen zunächst $0 \leq x^{-1}$. Andernfalls wäre $0 < -x^{-1}$ und damit $0 < -1$, Widerspruch. Analog gilt $0 \leq y^{-1}$. Wir multiplizieren $0 \leq y - x$ mit $x^{-1}y^{-1}$ und erhalten $0 \leq x^{-1} - y^{-1}$, also $y^{-1} \leq x^{-1}$.

Wir haben bisher akzeptiert, daß es auf $\mathbb{Q}$ eine Ordnungsrelation $\leq$ gibt, welche dem Axiom 17.1 genügt. Wir wollen das im folgenden genauer begründen.
Wir starten mir der Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ (siehe (9)) von welcher wir als gegeben akzeptieren, daß sie das Axiom 17.1 erfüllt. Siehe auch Aufgabe 1.

Definition 17.3 *Wir definieren die Relation $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ durch*

$$\leq := \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n - m \in \mathbb{N}\} \ .$$

Lemma 17.4 *Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ ist eine Ordnungsrelation und erfüllt Axiom 17.1. Die Einbettung $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ is monoton.*

Proof. Wir müssen nachweisen, daß $\leq$ eine Ordnungsrelation ist. Wir diskutieren als Beispiel die Transitivität: Seien $m, n, k \in \mathbb{Z}$ und gelte $m \leq n$ und $n \leq k$. Dann gilt $n - m \in \mathbb{N}$ und $k - n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt durch Addition $k - m \in \mathbb{N}$, also $m \leq k$. Den Nachweis der restlichen Eigenschaften überlassen wir als eine Übungsaufgabe.

Wir weisen nun Axiom 17.1,1. nach. Sei $m \leq n$, also $n - m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $(m + k) - (n + k) = m - n \in \mathbb{N}$, also $m + k \leq n + k$.

Den Nachweis von Axiom 17.1, 2. und der Monotonie der Einbettung $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ überlassen wir als Übungsaufgabe. □

Definition 17.5 *Wir definieren die Relation $\leq$ auf $\mathbb{Q}$ durch*

$$\leq := \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid (\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid (nx \in \mathbb{Z}) \wedge (ny \in \mathbb{Z}) \wedge (nx \leq ny))\} \ .$$

Lemma 17.6 *Diese Relationen $\leq$ auf $\mathbb{Q}$ ist eine Ordnungsrelation und erfüllt das Axiom 17.1. Die Einbettung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ist monoton.*

Proof. Wir diskutieren zunächst den Nachweis der Eigenschaften einer Ordnungsrelation.

1. Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{Q}$ $x \leq y$ und $y \leq z$. Wir finden $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $mx, my \in \mathbb{Z}$ und $ny, nz \in \mathbb{Z}$ und $mx \leq my$ und $ny \leq nz$. Wir setzen $p := mn$. Dann ist $px, py, pz \in \mathbb{Z}$ und es gilt $px \leq py \leq pz$ in der Ordnung von $\mathbb{Z}$. Also ist $x \leq z$ in der Ordnung von $\mathbb{Q}$.
2. Antisymmetrie: Übungsaufgabe.
3. Totalität: Übungsaufgabe.

Wir weisen nun Axiom 17.1 nach.

1. Seien $x, y, z \in \mathbb{Q}$ und gelte $x \leq y$. Dann finden wir ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $nx, ny, nz \in \mathbb{Z}$ und $nx \leq ny$. Es folgt $n(x + z) \leq n(y + z)$ also $x + z \leq y + z$.
2. Die Verträglichkeit mit der Multiplikation ist eine einfache Übung.

Schließlich verbleibt als Übungsaufgabe, die Monotonie der Einbettung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ zu zeigen. □

Anhand der Lösung der folgenden Aufgabe zeigen wir, wie man die Eigenschaften der Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{Q}$ anwenden kann.

Finde alle rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$, welche der Ungleichung $x^3 - 3x^2 + 2x \leq 0$ genügen.

Gesucht ist also eine möglichst explizite Darstellung der Menge

$$U := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 - 3x^2 + 2x \leq 0\} \ .$$

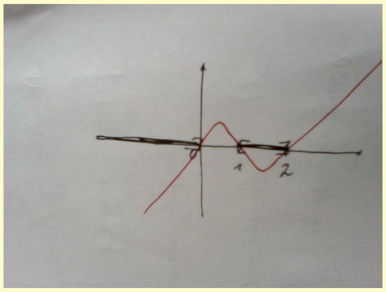
Eine akzeptable Lösung wäre zum Beispiel:

$$U = (-\infty, 0] \cup [1, 2] \ .$$

Eine Begründung könnte so aussehen: Wir sehen die Faktorisierung

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2) \ .$$

Damit können wir die Situation we folgt skizzieren:



Wir zerlegen

$$\mathbb{Q} = (-\infty, 0] \cup (0, 1) \cup [1, 2] \cup (2, \infty)$$

in paarweise disjunkte Teilmengen diskutieren diese separat wie folgt.

1. Sei $x \in (-\infty, 0]$. Dann sind alle drei Faktoren nicht positiv. Folglich ist das Produkt der ersten beiden Faktoren nichtnegativ. Multipliziert man mit dem dritten Faktor, so erhält man ein nichtpositives Ergebnis. Folglich gilt $x \in U$.

2. Ist $x \in (0, 1)$, dann sind genau zwei Faktoren negativ und einer positiv. Somit ist das Produkt positiv. Es gilt $x \notin U$.

3. Für $x \in [1, 2]$ sind zwei Faktoren nicht negativ und einer nicht positiv. Damit ist das Produkt nicht positiv und $x \in U$.

4. Für $x \in (2, \infty)$ sind alle drei Faktoren positiv und damit auch das Produkt. Also gilt $x \notin U$.

Im Folgenden zeigen wir weitere Beispiele für geordnete Körper und Körper, die keine Ordnung besitzen.

1. Wir werden später sehen, daß der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ geordnet ist. Damit ist auch jeder Unterkörper von $\mathbb{R}$ geordnet, beispielsweise $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

2. Andererseits läßt sich die Ordnungsrelation von $\mathbb{Q}$ nicht auf jede Erweiterung ausdehnen. So besitzt $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ keine Ordnungsrelation, welche dem Axiom 17.1 genügt. In der Tat ist in einem geordneten Körper $-1 < 0$. In $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ ist -1 ein Quadrat und müßte positiv sein. Ein Körper, der $\sqrt{-1}$ enthält, kann also nicht geordnet sein. Das trifft auch auf den Körper $\mathbb{C}$ zu.

3. Der endliche Körper $\mathbb{F}_p$ ist nicht geordnet. In der Tat wäre $0 \leq 1$. Wir addieren diese Ungleichung $p-1$-mal zu sich selbst und erhalten $0 \leq p-1 = -1$.

Lemma 17.7 (Bernoulli-Ungleichung) *In einem geordneten Körper* $\mathbb{K}$ *gilt für alle* $x \in \mathbb{K}$ *mit* $x \geq -1$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *die Bernoulli-Ungleichung*

$$1 + nx \leq (1+x)^n \ .$$

Proof. Wir benutzen vollständige Induktion.

Für $n = 0$ ist die Ungleichung richtig.

Sei die Ungleichung nun für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Es gilt wegen $0 \leq (1+x)$ und $0 \leq nx^2$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \ .$$

$\square$

17.1 Aufgaben

1. Komplettieren Sie den Beweis von Lemma 17.4.

2. Komplettieren Sie den Beweis von Lemma 17.6.

3. Wir machen folgende Definition:

   Definition 17.8 *Wir definieren eine Relation* R *auf* $\mathbb{N}$ *durch*

   $$R := \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid A_m \subseteq A_n\} \ .$$

   Zeigen Sie (unabhängig von den Annahmen über $\leq$, aber unter Benutzung von Satz 11.12):

   Lemma 17.9 *(a) Die Relation* R *auf* $\mathbb{N}$ *ist eine Ordnungsrelation welche das Axiom 17.1 erüllt.*

   (b) Es gilt $R = \leq$*, wobei* $\leq$ *wie in* (9) *charakterisiert ist.*

4. Löse die Ungleichung $x^2 + x - 2 \geq 0$ in $\mathbb{Q}$.

5. Wann tritt in der Bernoulli-Ungleichung die Gleichheit ein.

6. Zeigen Sie, daß die Folge $((1 + \frac{1}{n+1})^{n+1})$ durch 3 beschränkt ist.

   Hier ist das Argument in Kurzform:

$$(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \le \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1 - 2^{n+2}}{1 - \frac{1}{2}} \le 3 \; .$$

   In der ersten Ungleichung schätzen wir $\frac{(n+1)(n+1-1)\dots(n+1-k)}{(n+1)^k}$ durch 1 nach oben ab. In der zweiten Ungleichung schätzen wir $\frac{1}{k!}$ durch $\frac{1}{2^k}$ ab. Das geht für $k \ge 4$. Der Summand 1 korrigiert den Fehler bei den Termen für $k = 1, 2, 3$. Für die folgende Gleichung benutzen wir die Summenformel für geometrische Summen, welche man durch vollständige Induktion beweisen kann.

7. Wir betrachten einen geordneten Körper. Zeigen Sie, daß für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $x \mapsto x^n$ von $[0, \infty) \to [0, \infty)$ strikt monoton ist.

18 Das Archimedische Axiom

Für jeden Körper $\mathbb{K}$ haben wir zumindest einen Homomorphismus von Monoiden $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, welcher durch

$$\iota(n) := \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\times}$$

gegeben wird. Wenn ι injektiv ist, dann sagen wir, daß $\mathbb{K}$ die Charakteristik $\mathtt{char}(\mathbb{K}) = 0$ hat. Zum Beipiel gilt $\mathtt{char}(\mathbb{Q}) = 0$. Wenn ι nicht injektiv ist, dann wird die Charakteristik von $\mathbb{K}$ durch

$$\mathtt{char}(\mathbb{K}) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid (n \ge 1) \wedge \iota(n) = 0\}$$

definiert. Es gilt zum Beispiel $\mathtt{char}(\mathbb{F}_p) = p$.
Der geordnete Körper $\mathbb{Q}$ erfüllt eine schärfere Variante Bedingung $\mathtt{char}(\mathbb{Q}) = 0$, das archimedische Axiom.

Axiom 18.1 *Ein geordneter Köper* $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1, \le)$ *erfüllt das archimedische Axiom, falls für jedes* $x \in \mathbb{K}$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *existiert, so daß* $x \le \iota(n)$ *gilt.*

Lemma 18.2 *Der geordnete Köper* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \le)$ *erfüllt das archimedische Axiom.*

Proof. Sei $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Dann ist sicher $\frac{m}{n} \le |m|$. □

Corollary 18.3 *Sei* $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1, \le)$ *ein geordnete Köper der archimedische Axiom erfüllt. Sei weiter* $0 < x \in \mathbb{K}$. *Dann existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\iota(n)^{-1} < x$.

Proof. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so daß $x^{-1} + 1 \le \iota(n)$ gilt. □

Es gibt geordnete Körper, die das archimedische Axiom nicht erfüllen. Die Konstruktion des folgenden Beispiels erfordert allerdings etwas fortgeschrittene algebraische Methoden.

Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}[x]$ der Polynome in einer Variablen mit rationalen Koeffizienten. Auf $\mathbb{Q}[x]$ definieren wir eine Ordnungsrelation durch folgende Vorschrift: Es gelte $p > 0$, wenn $p_n > 0$ gilt, wobei $n := \deg(p)$ und p_n der führende Koeffizient von p ist. Diese Vorschrift erfüllt schon Axiom 17.1, 2. Wir setzen diese Vorschrift mit Axiom 17.1,1. verträglich fort so daß $p > q$ genau dann gilt, wenn $p - q > 0$ ist.
Wir betrachten nun den Quotientenkörper $Q(\mathbb{Q}[x])$ des Integritätsbereiches $\mathbb{Q}[x]$. Wir setzen die Ordnung wie beim Übergang von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{Q}[x]$ auf $Q(\mathbb{Q}[x])$ fort so daß $p > q$ genau dann gilt, wenn $rp > rq$ für ein $r \in \mathbb{Q}[x]$ mit $r > 0$ und $rp, rq \in \mathbb{Q}[x]$ gilt.
Der Körper $Q(\mathbb{Q}[x])$ ist geordnet, aber nicht archimedisch. In der Tat ist das Polynom x größer als jede natürliche Zahl (verstanden als konstantes Polynom).

18.1 Aufgaben

1. Sei $\mathbb{K}$ ein archimedisch geordneter Körper. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ eine eindeutige Fortsetzung zu einem Körperhomomorphismus $\hat{\iota} : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ hat. Zeigen Sie weiter, daß für $x, y \in \mathbb{K}$ mit $x < y$ ein $q \in \mathbb{Q}$ existiert mit $x < \hat{\iota}(q) < y$.

2. Sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper, der das archimedische Axiom erfüllt. Sei $x \in \mathbb{K}$ und $1 < x$. Zeigen Sie, daß es für jedes $y \in \mathbb{K}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt so daß $y \leq x^n$ gilt.

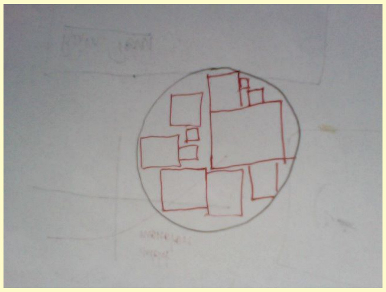
19 Reelle Zahlen

Wir hatten gesehen, daß nicht jede von oben beschränkte Teilmenge $X \subset \mathbb{Q}$ ein Supremum besitzt.

1. Ein Beispiel ist die Menge
$$X := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} .$$
In den zu konstruierenden reellen Zahlen $\mathbb{R}$ währe das Supremum dieser Menge $\sqrt{2}$.

2. Wir betrachten die Folge $((1 + \frac{1}{n+1})^{n+1})$. Diese Folge ist durch 3 beschränkt. Aber $\sup((1 + \frac{1}{n+1})^{n+1})$ existiert in $\mathbb{Q}$ nicht. In $\mathbb{R}$ wäre es durch die Eulersche Zahl e gegeben.

3. Eine rationale Ausschöpfung Q des euklidischen Einheitsballs
$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$
ist eine endliche, paarweise disjunkte Familie $(Q_i)_{i \in I}$ von Quadraten $Q_i \subseteq B$, deren Eckpunkte rationale Koordinaten haben.



Sei q_i die Seitenlänge des Quadrates Q_i. Wir definieren das Volumen der Ausschöpfung durch

$$\mathrm{vol}(Q) := \sum_{i \in I} q_i^2 \ .$$

Sei A die Menge solcher Ausschöpfungen und

$$V := \{x \in \mathbb{Q} \mid (\exists Q \in A \mid x = \mathrm{vol}(Q))\}$$

die Menge der resultierenden Volumina. Das Supremum $\sup V$ existiert in $\mathbb{Q}$ nicht. In $\mathbb{R}$ wäre es das Volumen von B, also die Zahl π.

Um den Defekt nichtexistierender Suprema beschränkter Mengen aufzuheben konstruieren wir eine Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ durch Hinzunahme der oberen Schranken. In der Analysis ist die konkrete Konstruktion dieser Erweiterung irrelevant. Die gesamte Theorie baut nur auf den weiter unten in Definition 19.2 geforderten Eigenschaften eines Körpers reeller Zahlen auf. Für deren Formulierung brauchen wir folgenden Begriff.

Definition 19.1 *Eine geordnete Menge hat die Supremumseigenschaft, wenn für jede von oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge das Supremum existiert.*

Zum Beispiel hat $(\mathbb{Z}, \leq)$ die Supremumseigenschaft. In der Tat, wenn $X \subset \mathbb{Z}$ eine von oben beschränkte Teilmenge ist, dann existiert sogar das Maximum $\max X$. Andererseits hat $\mathbb{Q}$ die Supremumseigenschaft wie schon bemerkt nicht.

Definition 19.2 *Ein Körper reeller Zahlen ist ein geordneter Körper* $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$*, welcher das archimedische Axiom (cf. 18.1) erfüllt und die Supremumseigenschaft besitzt.*

Die Konstruktion eines Körpers $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ durch Hinzunahme oberer Schranken ist wichtig, um die Existenz eines Körpers der reellen Zahlen nachzuweisen. Wir skizzieren hier die Idee, ohne alle Details nachzurechnen.

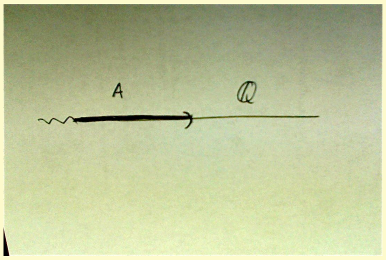
Definition 19.3 *Ein Dedekindscher Schnitt* A *von* $\mathbb{Q}$ *ist eine nichtleere Teilmengen* $A \subseteq \mathbb{Q}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. *A ist von oben beschränkt.*

2. *A ist nach unten abgeschlossen, d.h. mit $a \in A$ ist $(-\infty, a] \subseteq A$.*

3. A hat kein Maximum.

Wir werden im Folgenden einfach Schnitt sagen. Die Idee ist, daß der Schnitt A das möglicherweise in $\mathbb{Q}$ nicht existierende Supremum von A darstellt.



Die zweite und dritte Bedingung ist wichtig, damit jede reelle Zahl einer eindeutig bestimmenten Teilmenge von $\mathbb{Q}$ entspricht. Läßt man die zweite weg, dann könnte man die Zahl 2 durch $(-\infty, 2)$, aber auch durch $(1, 2)$ darstellen. Letztere ist kein Schnitt, da nicht nach unten abgeschlossen. Würde man die dritte Bedingung weglassen, dann würden die Mengen $(-\infty, 1]$ und $(-\infty, 1)$ beide die 1 darstellen würden. Aber $(-\infty, 1]$ ist eben kein Schnitt, weil diese Menge ein Maximum hat.

Definition 19.4 *Wir definieren die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als die Menge der Schnitte von $\mathbb{Q}$.*

1. Als Beispiel betrachte den Schnitt
$$\sqrt{2} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} \cup (-\infty, 0] \ .$$
Wir haben damit $\sqrt{2}$ als reelle Zahl definiert.

2. Analog definieren wir
$$\sqrt[3]{2} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 \leq 2\}$$
Im Gegensatz zu $x \mapsto x^2$ ist $x \mapsto x^3$ monoton so daß wir die untere Abgeschlossenheit nicht extra erzwingen müssen.

Wir wollen $\mathbb{R}$ als Erweiterung der rationalen Zahlen verstehen. Dazu müssen wir die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ identifizieren. Zu diesem Zweck definieren wir eine Abbildung
$$\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \ , \quad \iota(x) := (-\infty, x) \ .$$

Wir müssen einsehen, daß ι injektiv ist. Dazu betrachten wir zwei rationale Zahlen x, y und nehmen an, daß $\iota(x) = \iota(y)$ gilt, also die Gleichheit der Teilmengen $(-\infty, x) = (-\infty, y)$ von $\mathbb{Q}$ gilt. Wenn $x \neq y$ wäre, dann können wir nach eventuellem Vertauschen von x und y annehmen daß $x < y$ gilt. Dann wäre aber $x \in (0, y)$ und $y \notin (0, y)$, also $(-\infty, x) \neq (-\infty, y)$. Widerspruch!

Wir erkären nun eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ durch

$$A \leq A' := A \subseteq A', \quad A, A' \in \mathbb{R} \ .$$

Den Nachweis, daß dies wirklich eine Ordnungsrelation ist, überlassen wir hier als Übungsaufgabe.

Als nächstes müssen wir die Rechenoperationen definieren. Für zwei Schnitte $A, B \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$A + B := \{x \in \mathbb{Q} \mid (\exists a \in A \ \exists b \in B \mid x = a + b)\} \ .$$

Man muß zeigen, daß durch die rechte Seite ein Schnitt definiert wird. Es ist klar, daß diese Menge nicht leer, nach unten abgeschlossen und durch die Summe von oberen Schranken von A und B von oben beschränkt ist. Wäre $a + b$ mit $a \in A$ und $b \in B$ ein Maximum von $A + B$, dann müßte a ein Maximum von A sein. Also hat die Menge $A + B$ kein Maximum.

Das additive Inverse von Schnitt A ist der Schnitt

$$-A := \bigcup_{\{B \in \mathbb{R} \mid B + A \leq \iota(0)\}} B \ .$$

Die Verifikation überlassen wir als Übungsaufgabe.

Die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ definiert man für $A, B \in \mathbb{R}$ mit $\iota(0) < A$ und $\iota(0) < B$ durch

$$AB := \bigcup_{\{a \in A, b \in B \mid (0 \leq a) \ \wedge \ (0 \leq b)\}} (-\infty, ab) \ .$$

Die anderen Fälle erhält man durch

$$AB := \begin{cases} -A(-B) & \text{falls } \iota(0) < A \text{ und } B < \iota(0), \\ -(-A)B & \text{falls } \iota(0) < B \text{ und } A < \iota(0), \\ (-A)(-B) & \text{falls } B < \iota(0) \text{ und } A < \iota(0). \\ (-\infty, 0) & \text{falls } A = \iota(0) \text{ oder } B = \iota(0). \end{cases}$$

Lemma 19.5 *Diese Operationen sind wohldefiniert (liefern also Schnitte) und*

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \iota(0), \iota(1), \leq)$$

ist ein archimedisch geordneter Körper. Die Einbettung $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ist ein Homomorphismus.

Proof. Wir lassen den nicht schweren, aber länglichen Beweis weg. □

An dieser Stelle wäre logischerweise zu zeigen, daß $\sqrt{2}^2 = \iota(2)$ gilt. Das ist eine Übungsaufgabe.

Wir zeigen nun, daß die geordnete Menge $(\mathbb{R}, \leq)$ die Supremumseigenschaft hat.

Lemma 19.6 *Sei $X \subset \mathbb{R}$ nicht leer und von oben beschränkt. Dann gilt*

$$\sup X := \bigcup_{A \in X} A \in \mathbb{R} \ .$$

Proof. Wir müssen zeigen, daß $W := \bigcup_{A \in X} A$ ein Schnitt ist. In der Tat ist W nicht leer und durch jede obere Schranke von X beschränkt. Weiter ist W nach unten abgeschlossen. Wäre $w \in W$ ein Maximum, dann wäre $w \in A$ für ein $A \in X$. Dann wäre aber w ein Maximum von A.
Es ist klar, daß W eine obere Schranke von X ist. Gäbe es eine kleinere obere Schranke V, dann wäre $W \subseteq V$. Widerspruch! □

Lemma 19.7 *In $(\mathbb{R}, \leq)$ hat jede von unten beschränkte Teilmenge X ein Infimum* $\inf X$.

Proof. Wir setzen $-X := \{y \in \mathbb{R} \mid -y \in X\}$. Dann gilt $\inf X = \sup(-X)$. □

Wir erklären nun, wie man die Eindeutigkeit der reellen Zahlen erhält. Das ist wichtig, wenn man sicher sein will, daß die Analysis nicht von gewählten Modell der reellen Zahlen abhängt.

Proposition 19.8 *Wenn $(\mathbb{R}', +, \cdot, 0, 1, \leq)$ ein weiterer Körper reeller Zahlen ist, dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus geordneter Körper*

$$\kappa : (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq) \to (\mathbb{R}', +, \cdot, 0, 1, \leq) \ .$$

Proof. Wir erhalten wegen dem archimedischen Axiom für $\mathbb{R}'$ eine injektive, monotone Abbildung

$$\iota' : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}' \ .$$

Wir betrachten das Diagram

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q} \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[dr, "\iota'"] & \\ \mathbb{R} \arrow[rr, dotted, "\kappa"] & & \mathbb{R}' \end{tikzcd}$$

Es gibt wie angedeutet eine eindeutige ordnungserhaltende Fortsetzung $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$. Sie ist durch

$$\kappa(A) := \sup \iota'(A) \ , \quad A \in \mathbb{R}$$

vollständig bestimmt. Hier verwenden wir die Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}'$.

Man rechnet nun nach, daß κ ein Körperhomomorphismus ist. Insbesondere ist diese Abbildung injektiv.

Wir zeigen nun die Surjektivität. Sei $x \in \mathbb{R}'$. Dann ist $A := \{u \in \mathbb{Q} | \iota'(u) < x\}$ ein Schnitt, also ein Element von $\mathbb{R}$. Wir zeigen, daß $\kappa(A) = x$ gilt. Es gilt sicher $\kappa(A) \leq x$. Wäre

$\kappa(A) < x$, dann würden wir mit dem archimedischen Axiom für $\mathbb{R}'$ eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ finden mit $\kappa(A) < \iota'(q) < x$. Dann wäre aber $q \in A$ und deshalb $\iota'(q) \leq \kappa(A)$. Widerspruch. $\square$

Von nun an werden wir die konkrete Konstruktion der reellen Zahlen nicht mehr benutzen, sondern nur die axiomatische Beschreibung als archimedisch geordneter Körper der die Supremumseigenschaft hat. Wir identifizieren $\mathbb{Q}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}$. Damit sind auch $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ Teilmengen.

19.1 Aufgaben

1. Komplettieren Sie den Beweis von Lemma 19.5.

2. Zeigen Sie, daß $\sqrt{2}^2 = 2$ gilt.

3. Komplettieren Sie den Beweis von Satz 19.8.

4. Wir betrachten die Folge $((1 + \frac{1}{n+1})^{n+1})$ reeller Zahlen. Zeigen Sie, daß
$$\sup((1 + \frac{1}{n+1})^{n+1})$$
existiert.

5. Wir betrachten in $\mathbb{R}$ eine absteigende Folge nicht-leerer, abgeschlossener Intervalle (I_n). Hier ist I_n also von der Form $[a_n, b_n]$ für geeignete reelle Zahlen a_n, b_n und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_n \supseteq I_{n+1}$. Zeigen Sie, daß $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ nicht leer ist.

6. Zeigen Sie, daß folgende Aussage falsch ist:

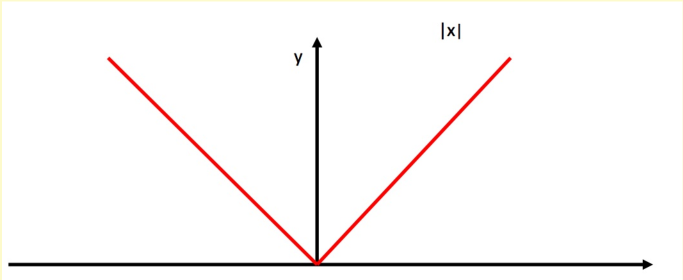
   Für jede Folge von nicht-leeren Intervallen I_n der Form (a_n, b_n) mit $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

7. Seien X eine Menge und $f, g : X \to \mathbb{R}$ von oben beschränkte Abbildungen. Zeigen Sie, daß aus $f \leq g$ folgt, daß $\sup f \leq \sup g$ gilt. Zeigen Sie weiter, daß $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ gilt.

20 Der Betrag

In diesem kurzen Abschnitt besprechen wir den Umgang mit der Betragsfunktion.

Definition 20.1 *Die Betragsfunktion* $|\ldots| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *wird durch*
$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} .$$
definiert.



Das folgende Lemma faßt die Eigenschaften der Betragsfunktion zusammen.

Lemma 20.2
1. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x| \geq 0$.*
2. *Weiter ist $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.*
3. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten $x \leq |x|$ und $-x \leq |x|$.*
4. *Für $x, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $|\lambda x| = |\lambda||x|$*
5. *Für x, y gilt die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$*
6. *Seien $c, \epsilon \in \mathbb{R}$ und $\epsilon \geq 0$. Dann ist die Ungleichung $|x - c| \leq \epsilon$ für $x \in \mathbb{R}$ äquivalent zur Gültigkeit der Ungleichungskette*
$$c - \epsilon \leq x \leq c + \epsilon \ .$$
7. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x| - |y| \leq |x - y|$.*

Proof. Die ersten 4 Aussagen sind einfach zu sehen. Wir zeigen die Dreiecksungleichung und machen dazu die folgende Falldiskussion.

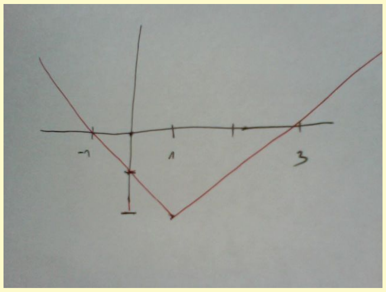
1. Wenn $x + y \geq 0$ gilt, dann ist $|x + y| = x + y$. Kombinieren wir dies mit $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$, so erhalten wir $|x + y| \leq |x| + |y|$.
2. Sei nun $x+y \leq 0$. Dann gilt $|x+y| = -x-y$. Wir erhalten wiederum $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Für 6. argumentieren wir wie folgt. Sei $|x - c| \leq \epsilon$. Dann gelten $x - c \leq \epsilon$ und $c - x \leq \epsilon$. Daraus folgen die beiden behaupteten Ungleichung. Die Umkehrung lassen wir als Übungsaufgabe.

Wir zeigen nun 7. Wir starten mit $x = x - y + y$ und wenden die Dreiecksungleichung an. Wir erhalten $|x| \leq |x - y| + |y|$. Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Hier ein Beispiel für die Lösung einer Ungleichung, welche die Betragsfunktion enthält.

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung $|x - 1| - 2 \leq 0$ erfüllen.



Um eine solche Ungleichung zu lösen, macht man eine Fallunterscheidung.

1. Fall : $x-1 \geq 0$. Wir müssen dann die Ungleichung $x-1-2 \leq 0$ lösen. Der erste Fall liefert also die Lösungsmenge $L_1 := \{x \in \mathbb{R} : \mid (x \geq 1) \wedge (x \leq 3)\}$. Es gilt $L_1 = [1, 3]$.

2. Fall : $x - 1 < 0$. Wir müssen dann die Ungleichung $-(x-1) - 2 \leq 0$ lösen. Der zweite Fall trägt also die Lösungsmenge $L_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid (x < 1) \wedge (-1 \leq x)\}$ bei. Es gilt $L_2 := [-1, 1)$.

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist $L_1 \cup L_2$, also $[-1, 3]$.

20.1 Aufgaben

1. Lösen Sie die Ungleichung $2|x-4| - 10 \leq x$ in $\mathbb{R}$.

2. Lösen Sie die Ungleichung $|x+1| + |x-1| \geq 1$ in $\mathbb{R}$.

3. Lösen Sie die Ungleichung $||x-1| - 1| - 1 \leq 0$ in $\mathbb{R}$.

21 Folgenkonvergenz

Wie kann man eine reelle Zahl angeben? Für natürliche Zahlen haben wir die Ziffern $0, 1, \dots 9$. Für größere Zahlen benutzen wir das Dezimalsystem in dem wir etwa

$$1032 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2$$

schreiben können. Rationale Zahlen können wir als Quotienten ganzer Zahlen schreiben, etwa in der Form $\frac{2}{7}$. Diese Form der Darstellung ist kompakt, hat aber den Nachteil der Nichteindeutigkeit. Zum Beispiel kann man dieselbe Zahl auch in der Form $\frac{4}{14}$ schreiben. Eindeutigkeit kann erzwungen werden, wenn man $n > 0$ und $g.g.T(m, n) = 1$ fordert. Ein Nachteil dieser Darstellung als Bruch ist, daß nicht auf den ersten Blick erkenntlich ist, welche der Zahlen $\frac{2}{7}$ oder $\frac{13}{51}$ nun die größere ist. In einigen Fällen kann man rationale Zahlen als endliche Dezimalbrüche schreiben, etwa

$$\frac{3}{4} = 0.75 = 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} \ .$$

Die Zahl $\frac{2}{7}$ hat allerdings keine endliche Dezimalbruchentwicklung, sondern eine periodische

$$0,285714285714285714\ldots\ .$$

Dies ist genaugenommen eine unendliche Summe, deren präzisen Sinne wir erst noch erklären müssen. Die Dezimaldarstellung ist aber auch nicht eindeutig. Zum Beispiel ist

$$0.1999999\cdots = 0.2\ .$$

Man kann Eindeutigkeit erzwingen, indem man keine 9-er Perioden zuläßt.
Eine präzise Darstellung der Quadrdatwurzel der 2 ist sicher

$$\sqrt{2} := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}\ .$$

Es ist aber klar, daß sich damit schwer rechnen läßt und man auch keine Vorstellung über die Größe von $\sqrt{2}$ bekommt. Für praktische Zwecke ist eine unendliche Dezimaldarstellung

$$\sqrt{2} = 1.414\cdots = 1 + 4\cdot 10^{-1} + 1\cdot 10^{-2} + 4\cdot 10^{-3} + \ldots$$

viel informativer. Zum Beispiel sehen wir sofort, daß

$$1.4 \leq \sqrt{2} \leq 1.5$$

gilt. Sei

$$x_0.x_{-1}x_{-2}x_{-3}\ldots$$

ein unendlicher Dezimalbruch. Unsere Interpretation ist daß er eine Folge (a_n) von rationalen Zahlen

$$\begin{aligned}
a_0 &:= x_0\\
a_1 &:= x_0 + x_{-1}10^{-1}\\
a_2 &= x_0 + x_{-1}10^{-1} + x_{-2}10^{-2}\\
a_3 &= x_0 + x_{-1}10^{-1} + x_{-2}10^{-2} + x_{-3}10^{-3}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

beschreibt. Die Zahl a_n approximiert dabei die Zahl x bis auf eine Genauigkeit 10^{-n}.
Im folgenden abstrahieren wir von dieser konkreten Situation und geben eine präzisen Begriff dafür, das eine Folge von Zahlen eine Zahl beliebig genau approximiert.

Definition 21.1 *Eine Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl a, falls für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n - a| \leq \epsilon$ erfüllt ist.*

Definition 21.2 *Eine Folge reeller Zahlen heißt konvergent, wenn es eine reelle Zahl gibt, gegen welche die Folge konvergiert.*

Die Formel

$$\text{Es gilt } \mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = a$$

ist eine Kurzform der Aussage, daß die Folge (a_n) gegen a konvergiert.
Unter der Voraussetzung, daß die Folge (a_n) gegen a konvergiert, benutzen wir das Symbol

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n$$

als eine Bezeichnung für die reelle Zahl a.
In logischen Symbolen geschrieben gilt:

$$(\text{ Es gilt } \mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = a) = (\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{>}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \mid\ n_0 \leq n \Rightarrow |a - a_n| \leq \epsilon)\ .$$

Sei $P(n)$ eine Aussageform über natürliche Zahlen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n)\}$ ist endlich.
2. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt.

In diesem Fall sagen wir auch, daß $P(n)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Eine Folge reller Zahlen (a_n) konvergiert also genau dann gegen a, wenn für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ die Ungleichung $|a_n - a| \leq \epsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Kommen wir zurück auf unseren Dezimalbruch. Wir illustrieren an diesem Beispiel, wie man mit der Definition 21.1 umgeht.

Lemma 21.3 *Sei $x_0.x_{-1}x_{-2}x_{-3}\ldots$ ein unendlicher Dezimalbruch. Wir bilden die Folge (a_n) durch $a_n := \sum_{k=0}^{n} x_{-k}10^{-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (a_n) konvergiert.*

Proof. Zunächst müssen wir uns den Kandidaten für den Grenzwert a der Folge (a_n) verschaffen. Zunächst beobachten wir, daß die Folge (a_n) etwa durch $a_0 + 1$ von oben beschränkt ist. Damit existiert das Supremum $a := \sup(a_n)$. Wir behaupten nun, daß die Folge (a_n) gegen a konvergiert.
Die übliche Argumentation geht wie folgt. Wir stellen uns vor, daß uns "jemand" eine positive reelle Zahl $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ vorgibt. Wir müssen dann erklären wie wir n_0 wählen wollen. Im vorliegenden Fall wählen wir n_0 so groß, daß $10^{-n_0} \leq \epsilon$ gilt. Das ist nach Aufgabe 18.1, 1. möglich. Für das Argument ist es egal, wie wir auf diese Wahl kommen. Im vorliegenden Fall sicher durch den Überblick über den Rest des Arguments. Wir müssen nun zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n - a| \leq \epsilon$ gilt. In der Tat gilt

$$a_{n_0} \leq a_n \leq a_{n_0} + 10^{-n_0} \leq a_{n_0} + \epsilon\ .$$

Insbesondere gilt $a_{n_0} \leq a \leq a_{n_0} + 10^{-n_0}$ und damit $|a - a_n| \leq 10^{-n_0} \leq \epsilon$. □

Damit die Darstellung einer rellen Zahl durch einen unendlichen Dezimalbruch sinnvoll ist, darf eine konvergente Folge nur gegen einen Grenzwert konvergieren.

Lemma 21.4 *Sei (a_n) eine konvergente Folge reeller Zahlen und $a, a' \in \mathbb{R}$, so daß $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = a$ und $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = a'$ gelten. Dann gilt $a = a'$.*

Proof. Wir argumentieren indirekt und nehmen an, daß $a \neq a'$ gilt. Wir setzen $\epsilon := \frac{|a-a'|}{4}$. Dann gilt $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$. Wir finden $n_0, n_0' \in \mathbb{N}$ derart, daß aus $n, n' \in \mathbb{N}$ und $n \geq n_0$, $n' \geq n_0'$ folgt, daß $|a_n - a| \leq \epsilon$ und $|a_{n'} - a'| \leq \epsilon$ gilt. Dann gilt für $m := \max\{n_0, n_0'\}$ daß $|a_m - a| \leq \epsilon$ und $|a_m - a'| \leq \epsilon$. Daraus folgt nach der Dreiecksungleichung $|a - a'| \leq 2\epsilon$, also $|a - a'| \leq \frac{|a-a'|}{2}$. Das ist sicher falsch. $\square$

Hier sind weitere Beipiele für den Nachweis einer Folgenkonvergenz.

1. **Lemma 21.5** *Es gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.*

   Proof. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ nach dem archimedischen Axiom derart, daß $\epsilon^{-1} \leq n_0$ gilt. Wenn $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $n_0 \leq n$ erfüllt, dann auch $\epsilon^{-1} \leq n + 1$. Aus letzterer folgt $\frac{1}{n+1} \leq \epsilon$ und schließlich $|\frac{1}{n+1} - 0| \leq \epsilon$. $\square$

2. **Lemma 21.6** *Sei $x \in (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Dann gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} x^n = 0$.*

   Proof. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Es gilt $1 < |x^{-1}|$. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $\epsilon^{-1} \leq |x^{-1}|^{n_0}$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, daß $\epsilon^{-1} \leq |x^{-1}|^n$. Letztere Ungleichung ist äquivalent zu $|x^n - 0| \leq \epsilon$. $\square$

3. **Lemma 21.7** *Sei $x \in (0, 1)$. Dann gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} n x^n = 0$.*

   Proof. Wir setzen $\delta := x^{-1} - 1$. Dann gilt $\delta \in \mathbb{R}^{>}$ und $x^{-n} = (1 + \delta)^n$. Wir nehmen $n \geq 3$ an und schreiben die ersten drei Terme der binomischen Formel explizit auf:

   $$x^{-n} = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \delta^k \ .$$

   Wir sehen durch ignorieren positiver Terme, daß

   $$x^{-n} \geq \frac{n(n-1)}{2}\delta^2$$

   ist. Daraus folgt

   $$x^n \leq \frac{2}{n(n-1)}\delta^{-2}$$

   und schließlich

   $$n x^n \leq \frac{2}{n-1}\delta^{-2} \ .$$

   Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq 3$ derart, daß

   $$\frac{2}{n_0 - 1}\delta^{-2} \leq \epsilon$$

gilt. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ daß

$$\frac{2}{n-1}\delta^{-2} \leq \epsilon \ ,$$

also

$$|nx^n - 0| \leq \epsilon \ .$$

□

Wir betrachten die Folge der Fibonacci-Zahlen, welche induktiv durch

$$a_0 := 0 \ , \quad a_1 := 1 \ , \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ .$$

gegeben wird. Diese Folge konvergiert offensichtlich nicht. Aber auf den ersten Blick erscheint die Begründung für diese Einsicht als schwierig. Wir müßten für jede reelle Zahl a zeigen, daß die Bedingung der Definition 21.1 nicht erfüllt werden kann. Glücklicherweise hat die Konvergenz einer Folge Konsequenzen, die einfacher falsifiziert werden können.

Lemma 21.8 *Eine konvergente Folge (a_n) reeller Zahlen ist beschränkt. Es gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n \leq$ $\sup(a_n)$.*

Proof. Sei $a \in \mathbb{R}$ und gelte $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = a$. Wir betrachten die Bedingung in 21.1 für die Wahl $\epsilon := 1$ Dann gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n - a| \leq 1$ gilt. Damit ist

$$\min\Big\{\{a_n \mid n = 0, \ldots, n_0 - 1\} \cup \{a - 1\}\Big\}$$

eine untere und

$$\max\Big\{\{a_n \mid n = 0, \ldots, n_0 - 1\} \cup \{a + 1\}\Big\}$$

eine obere Schranke der Folge (a_n).
Es gilt $a_n \leq \sup(a_m)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen indirekt, daß dann $a \leq \sup(a_m)$ gilt. Wäre $a > \sup(a_m)$, dann wäre $\epsilon := \frac{a - \sup(a_m)}{2}$ positiv. Für genügend große $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a| \leq \epsilon$. Daraus folgt $a_n \geq a - \epsilon$, also mit $a = \sup(a_m) + (a - \sup(a_m))$ auch $a_n \geq \sup(a_m) + \epsilon$. Das ist falsch. □

1. Wir zeigen nun:

   Lemma 21.9 *Die Fibonachi-Folge (a_n) ist nicht beschränkt.*

Proof. Wir behaupten, daß für all $n \geq 0$ die Ungleichung $n - 3 \leq a_n$ gilt. Der Nachweis erfolgt durch Induktion. Die Ungleichung stimmt für $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ durch Inspektion. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 6$. Wir nehmen an, das die behauptete Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ gezeigt ist. Wir schätzen ab und erhalten folgende Kette von Ungleichungen

$$a_m = a_{m-1} + a_{m-2} \geq m - 4 + m - 5 = 2m - 9 = m - 3 + m - 6 \geq m - 3 \ .$$

□

Weil die Fibonachi-Folge nicht beschränkt ist, kann sie auch nicht konvergieren.

2. Ist ist aber nicht so, daß jede beschränkte Folge konvergiert. Als Beispiel betrachten wir $((-1)^n)$ gegeben durch Diese Folge ist sicher durch 1 von oben und durch -1 von unten beschränkt.

   Lemma 21.10 *Die Folge* $((-1)^n)$ *konvergiert nicht.*

   Proof. Wir argumentieren indirekt und nehmen an, daß die Folge konvergiert, sagen wir gegen a. In 21.1 wählen wir $\epsilon = \frac{1}{3}$. Dann gilt für alle genügend großen geraden natürliche Zahlen n die Ungleichung $|a - 1| \leq \frac{1}{3}$, also insbesondere $0 < a$. Andererseits gilt für alle genügend große ungerade natürliche Zahlen n die Ungleichung $|a + 1| \leq \frac{1}{3}$, also insbesondere $a < 0$. Beide Ungeichungen gleichzeitig können nicht gelten. Damit ist die Annahme, daß die Folge $((-1)^n)$ gegen a konvergiert, falsch. □

21.1 Aufgaben

Untersuchen Sie folgende Folgen (a_n) auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

1. $a_n := \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2}$.
2. $a_n := \frac{1}{1+\frac{2}{n}}$.
3. $a_n := \frac{(1+n)^n}{n}$.
4. $a_n := \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.
5. $a_n := n^k x^n$, $k \in \mathbb{N}$.

22 Monotone Folgen, $\limsup$, $\liminf$

In diesem Kapitel lernen wir weitere Methoden kennen, mit denen wir Folgen auf Konvergenz analysieren und Grenzwerte berechnen können. Wir werden eine monotone Folge (a_n) auch als monoton wachsend bezeichnen. Wir sagen, daß die Folge (a_n) monoton fällt, wenn $(-a_n)$ monoton wächst.

Lemma 22.1 *Sei (a_n) eine monoton wachsende und von oben beschränkte Folge. Dann konvergiert diese Folge.*

Proof. Wir benutzen die Supremumseigenschaft der reeller Zahlen und setzen $a := \sup(a_n)$. Wir behaupten, daß

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = a$$

gilt. Wir argumentieren indirekt. Wir nehmen an, daß es ein $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gibt so daß für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und $|a_n - a| > \epsilon$ existiert. Wegen $a_n \leq a$ gilt dann $a_n < a - \epsilon$, und wegen der Monotonie der Folge auch $a_{n_0} < a - \epsilon$. Dann wäre aber $a - \epsilon$ auch eine obere Schranke von (a_n) und damit $a \leq a - \epsilon$. Das ist falsch. □

Analog oder durch Übergang zur Folge $(-a_n)$ zeigt man:

Lemma 22.2 *Sei (a_n) eine monoton fallende und von unten beschränkte Folge. Dann konvergiert diese Folge.*

1. Die Folge $(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}})$ ist monoton wachsend und hat damit einen Grenzwert. Wir werden weiter unten sehen, daß

   $$\mathtt{lim}_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = 1$$

   gilt.

2. Wir zeigen, daß die Folge $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ monoton wächst. Es gilt für $n \geq 1$ daß

   $$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \ .$$

   Wir benutzen jetzt die Ungleichung

   $$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \ .$$

   Man kann zeigen, daß diese Folge durch 3 von oben beschränkt ist, siehe 17.1. Wir werden später einsehen, daß

   $$\mathtt{lim}_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = e$$

   gilt.

3. Sei nun (a_n) wieder die Fibonachi-Folge. Wir betrachten die Folge der Quotienten (b_n) gegeben durch

$$b_n := \frac{a_n}{a_{n+1}} \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Da für $n \geq 1$ die Ungleichung $0 < a_n < a_{n+1}$ gilt, gilt auch $0 < b_n < 1$. Die Folge (b_n) also im Gegensatz zur Folge (a_n) beschränkt.

Lemma 22.3 *(a) Die Folge (b_{2n}) ist monoton wachsend und die Folge (b_{2n+1}) ist monoton fallend.*

(b) Sei $b' := \mathtt{lim}_{n\to\infty} b_{2n}$ und $b'' := \mathtt{lim}_{n\to\infty} b_{2n+1}$. Dann gilt $b' = b''$.

(c) Es gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} b_n = b'$.

Proof. Wir rechnen

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \frac{a_n}{a_{n+1}} \\ &= \frac{a_{n+1}^2 - a_{n+2}a_n}{a_{n+2}a_{n+1}} \end{aligned}$$

und betrachten die Zähler weiter für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - a_{n+2}a_n &= (a_n + a_{n-1})^2 - (a_n + a_{n+1})a_n \\ &= a_n^2 + 2a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 - a_n^2 - (a_n + a_{n-1})a_n \\ &= -a_n^2 + a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 \\ &= -a_n^2 + a_{n-1}a_{n+1} \\ &= -(a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}) \ . \end{aligned}$$

Da $a_1^2 - a_2 a_0 = 1$ ist, gilt also mit Induktion

$$a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^{n+1} \ .$$

Es gilt also

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(-1)^n}{a_{n+2}a_{n+1}} \ .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} b_{n+2} - b_n &= (b_{n+2} - b_{n+1}) + (b_{n+1} - b_n) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{a_{n+3}a_{n+2}} + \frac{(-1)^n}{a_{n+2}a_{n+1}} \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{a_{n+2}a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+3}a_{n+2}} \right) \end{aligned}$$

Wir sehen, daß die Folge (b_{2n}) monoton wächst. Analog fällt (b_{2n+1}) monoton.

Damit existieren die folgenden Grenzwerte:

$$\texttt{lim}_{n\to\infty} b_{2n} =: b' \ , \quad \texttt{lim}_{n\to\infty} b_{2n+1} =: b'' \ .$$

Wir behaupten, daß

$$b' = b''$$

gilt. In der Tat existiert für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ die Ungleichungen $|b' - b_{2n}| \leq \epsilon$ und $|b'' - b_{2n+1}| \leq \epsilon$ gelten. Dann gilt

$$|b_{2n+1} - b_{2n}| = |b_{2n+1} - b'' + b'' - b' + b' - b_{2n}| \geq |b'' - b'| - |b' - b_{2n}| - |b'' - b_{2n+1}| \geq |b'' - b'| - 2\epsilon.$$

Damit gilt für $n \geq n_0$

$$|b'' - b'| \leq 2\epsilon + \frac{1}{a_{2n+2}a_{2n+1}} \ .$$

Da die Folge $(a_{2n+1}a_{2n+2})$ unbeschränkt ist, folgt daraus (mit dem Archimedischen Axiom) $|b'' - b'| \leq 2\epsilon$. Da wir ϵ beliebig vorgeben können, folgt $b' = b''$. Daraus folgt $\texttt{lim}_{n\to\infty} b_n = b'$ in einfacher weise. □

Es ergibt sich schließlich die Frage, ob man die Zahl $b := b'$ explizit beschreiben kann. Wir werden dieses Problem in Kor. 29.2 lösen.

Für eine nicht-leere, von oben beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ möge S_A die Menge der oberen Schranken von A bezeichnen. Dann gilt nach Definition des Supremums

$$\sup A = \min S_A \ .$$

Wenn $A \subseteq B$ gilt und auch B von oben beschränkt ist, dann haben wir die Relation $S_B \subseteq S_A$ und damit

$$\sup A \leq \sup B \ .$$

Sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Teilmenge

$$A_n := \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \qquad (10)$$

aller Folgenglieder ab der Stelle n. Es gilt offensichtlich für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ daß $A_n \subseteq A_m$ und damit

$$\sup A_n \leq \sup A_m \ , \ \inf A_n \geq \inf A_m \ .$$

Eine obere (bzw. untere) Schranke der Folge (a_n) ist auch eine der Folgen $(\sup A_n)$ oder $(\inf A_n)$. Wenn die Folge (a_n) beschränkt ist, dann konvergieren also die monotonen Folgen $(\sup A_n)$ und $(\inf A_n)$.

Definition 22.4 *Für eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen definieren wir*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \texttt{lim}_{n\to\infty} \inf A_n \ , \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \texttt{lim}_{n\to\infty} \sup A_n \ .$$

Zum Beispiel gilt

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1 \ , \quad \limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1 \ .$$

Lemma 22.5 *Für eine beschränkte Folge* (a_n) *gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n \ .$$

Insbesondere konvergiert die Folge (a_n) *genau dann, wenn*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

gilt. In diesem Fall ist

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \ .$$

Proof.
Wir sehen zunächst, daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \ge m$ die Ungleichung $\inf A_m \le \sup A_n$ gilt. Daraus folgt für alle $m \in \mathbb{N}$ daß $\inf A_m \le \limsup_{n\to\infty} a_n$ und schließlich $\mathtt{lim}_{m\to\infty} a_m \le \limsup_{n\to\infty} a_n$.

1. Wir nehmen an, daß die Folge (a_n) konvergiert und zeigen, daß $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ gelten.

   Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$ die Ungleichung $|a_n - a| \le \epsilon$ gilt.

   Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $n \ge n_0$ Dann gilt für alle $x \in A_n$ die Ungleichung $x \le a + \epsilon$. Wir schließen, daß $\sup A_n \le a + \epsilon$. Da $a_n \in A_n$ ist, gilt $a - \epsilon \le \sup A_n$. Insgesamt erhalten wir $|\sup A_n - a| \le \epsilon$.

   Das zeigt, daß $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$ gilt. Analog zeigen wir $\liminf_{n\to\infty} a_n = a$.

2. Wir nehmen nun an, daß $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ gilt. Sei $a := \liminf_{n\to\infty} a_n$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$ gilt $|\sup A_n - a| \le \epsilon$ und $|\inf A_n - a| \le \epsilon$.

   Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $n \ge n_0$. Dann gilt $a_n \in A_n$ und damit $\inf A_n \le a_n$ und $a_n \le \sup A_n$, Daraus schließen wir $a - \epsilon \le a_n$ und $a_n \le a + \epsilon$. Beides zusammen ergibt $|a_n - a| \le \epsilon$.

   Das zeigt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = a$.

□

22.1 Aufgaben

1. Komplettieren Sie den Beweis von Teil 3 von Lemma 22.3. Zeigen Sie allgemeiner:

   Lemma 22.6 *Seien (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Es gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann wenn $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_{2n} = a$ und $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$ gelten.*

2. Zeigen Sie folgende Aussage:

   Lemma 22.7 *Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Es gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann, wenn für jede monotone, unbeschränkte Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_{f(n)} = a$.*

3. Geben Sie eine präzisen Ausdruck für die Menge A_n in (10) an.

4. Sei $x \in (0, 1)$. Wir definieren die Folge (a_n) rekursiv durch $a_0 := x$ und $a_{n+1} := 1-a_n^2$. Zeigen Sie, daß die Folge (a_n) beschränkt ist und die Relationen $0 \le \liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n \le 1$ gelten.

5. Sei A eine nicht-leere und von oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß es eine Folge (a_n) gibt mit folgenden Eigenschaften:

   (a) Es gilt $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (b) (a_n) ist monoton.

   (c) $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

6. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Wir betrachten die Abbildung

   $$\{n \in \mathbb{N} \mid x \le n\} \ni n \mapsto (1 + \frac{x}{n+1})^{n+1} \in \mathbb{R} \ .$$

   Zeigen Sie, daß diese Abbildung monoton wächst.

23 Arithmetische Operationen mit konvergenten Folgen

Komplizierte Folgen werden oft durch arithmetische Operationen aus einfacheren Folgen zusammengesetzt. Für das Berechnen der Grenzwerte dieser Folgen ist es dann günstig, die Verträglichkeit der Bildung von Grenzwerten mit den arithmetischen Operationen auszunutzen.
Seien (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen.

Lemma 23.1 *1. Wenn*

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{und} \quad \mathtt{lim}_{n\to\infty} b_n = b$$

gelten, dann auch

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \ , \quad \mathtt{lim}_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab \ .$$

2. *Wenn* $\texttt{lim}_{n\to\infty} a_n = a$ *gilt und* (b_n) *nicht konvergiert, dann konvergiert auch* $(a_n + b_n)$ *nicht.*

3. *Gelte für alle* $n \in \mathbb{N}$ *die Ungleichung* $a_n \neq 0$. *Wenn dann* $\texttt{lim}_{n\to\infty} a_n = a$ *mit* $a \neq 0$ *gilt, dann gilt* $\texttt{lim}_{n\to\infty} a_n^{-1} = a^{-1}$.

4. *Wenn* $\texttt{lim}_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $a \neq 0$ *gilt und* (b_n) *nicht konvergiert, dann konvergiert auch* $(a_n b_n)$ *nicht.*

Proof.

1. Wir betrachten zunächst den Fall einer Summe von Folgen. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2}\ , \quad |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2}\ .$$

   Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

   auch

$$|a_n + b_n - a - b| \leq \epsilon\ .$$

   Wir betrachten jetzt das Produkt. Sei wieder $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - a| \leq \min\left\{1, \frac{\epsilon}{2(|b| + 1)}\right\}$$

   und

$$|b_n - b| \leq \min\left\{1, \frac{\epsilon}{2(|a| + 1)}\right\}\ .$$

   Es gilt

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |(a_n - a)||b_n| + |a||(b_n - b)|\ .$$

   Für $n \geq n_0$ erhalten wir wegen $|b_n| \leq |b| + 1$ daß

$$|(a_n - a)||b_n| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad |a||(b_n - b)| \leq \frac{\epsilon}{2}\ .$$

   Daraus ergibt sich $|a_n b_n - ab| \leq \epsilon$.

2. Wir argumentieren indirekt. Würde $(a_n + b_n)$ konvergieren, so auch $([a_n + b_n] - a_n)$, also (b_n).

3. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichungen
$$\frac{|a|}{3} \leq |a_n| \ , \quad |a_n - a| \leq \frac{|a|^2\epsilon}{3}$$
gelten. Wir schreiben $|a_n^{-1} - a^{-1}| = |a_n|^{-1}|a|^{-1}|a - a_n|$. Dann gilt für $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n|^{-1} \leq \frac{3}{|a|}$ und damit $|a_n^{-1} - a^{-1}| \leq \epsilon$.

4. Würde $(a_n b_n)$ konvergieren, dann auch $(a_n^{-1}[b_n a_n])$, also (b_n).

□

Lemma 23.2 *Wir betrachten Polynome*
$$p(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_0 \ , \quad q(x) = d_l x^l + d_{l-1}q^{l-1} + \cdots + d_0 \ .$$
mit $c_k \neq 0$ *und* $d_l \neq 0$ *und bilden die Folge* (a_n) *reeller Zahlen durch*
$$a_n := \begin{cases} \frac{p(n)}{q(n)} & q(n) \neq 0 \\ 0 & q(n) = 0 \end{cases} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$
Dann gilt

1. *Wenn* $k > l$ *ist, dann konvergiert* (a_n) *nicht.*
2. *Wenn* $k = l$ *ist, dann gilt* $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = \frac{c_k}{d_l}$.
3. *Wenn* $k < l$ *ist, dann gilt* $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = 0$.

Proof. Wir schreiben
$$\frac{p(n)}{q(n)} = n^{k-l}\frac{c_k + c_{k-1}n^{-1} + \cdots + c_0 n^{-k}}{d_l + d_{l-1}n^{-1} + \ldots d_0 n^{-l}} \ .$$
Wir sehen zunächst ein, daß
$$\mathtt{lim}_{n\to\infty}\frac{c_k + c_{k-1}n^{-1} + \cdots + c_0 n^{-k}}{d_l + d_{l-1}n^{-1} + \ldots d_0 n^{-l}} = \frac{c_k}{d_l}$$
gilt.

1. $k > l$: Da $\frac{c_k}{d_l} \neq 0$ ist und (n^{k-l}) nicht konvergiert, konvergiert die Folge (a_n) nicht.
2. Wenn $k = l$ ist, dann gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = \frac{c_k}{d_l}$.
3. Wenn $k < l$ ist, dann gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = 0$, da $\mathtt{lim}_{n\to\infty} n^{k-l} = 0$.

□

23.1 Aufgaben

Überprüfen Sie folgende Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzert.

1. $(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{(n+1)^2}})$

2. Für $x \in \mathbb{R} : (\frac{1-x^{n+1}}{1-x})$.

3. $(\frac{n+\frac{1}{n+1}}{n+2^{-n}})$

24 Cauchy Folgen, Konvergenz gegen $\pm\infty$

Um das Kriterium für die Konvergenz einer Folge nachzuprüfen, mußte man bisher den potentiellen Grenzwert dieser Folge schon kennen oder Monotonievoraussetzungen machen. Das Cauchy-Kriterium liefert eine Methode, die Konvergenz einer Folge reeller Zahlen einzusehen, ohne den Grenzwert zu kennen.

Definition 24.1 *Eine Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge, wenn für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und $m \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n - a_m| \leq \epsilon$ gilt.*

Lemma 24.2 *Eine Cauchyfolge (a_n) reeller Zahlen ist konvergent. Umgekehrt ist jede konvergente Folge reeller Zahlen eine Cauchyfolge.*

Proof.
Sei (a_n) eine Cauchyfolge. Wir zeigen die Konvergenz. Wir zeigen zunächst, daß die Folge (a_n) beschränkt ist. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_{n_0} - a_n| \leq 1$ gilt. Insbesondere ist

$$\max\{a_0, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0} + 1\}$$

eine obere Schranke für die Folge. Analog zeigt man die Existenz einer unteren Schranke.

Wir zeigen nun, daß $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ gilt und wenden Lemma 22.5 an.

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben und $n_0 \in \mathbb{N}$ wie in der Cauchy-Bedingung gewählt. Dann gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und $m \geq n_0$ daß $a_m \leq a_n + \epsilon$. Daraus folgt $\sup A_m \leq a_n + \epsilon$ und schließlich $\limsup_{m\to\infty} a_m \leq a_n + \epsilon$. Daraus folgt weiter $\limsup_{m\to\infty} a_m \leq \inf A_n + \epsilon$ und schließlich $\limsup_{m\to\infty} a_m \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \epsilon$. Damit ist

$$|\limsup_{m\to\infty} a_m - \liminf_{n\to\infty} a_n| \leq \epsilon \ .$$

Diese Ungleichung ist für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ richtig. Folglich gilt $\limsup_{m\to\infty} a_m = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Wir zeigen nun, daß aus der Konvergenz einer Folge die Cauchy-Eigenschaft folgt. Sei $a \in \mathbb{R}$ und gelte $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = a$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$ gilt $|a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$ und $n_0 \leq m$, daß

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ .$$

□

Wir betrachten als Beispiel die Folge, welche durch

$$a_0 := 0, \quad a_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^{-1} \ n \geq 1$$

gegeben wird. Es ist eine leichte Übungsaufgabe, sich zu überlegen, daß für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq 1$, und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n - a_m| \leq n_0^{-1}$ gilt. Die Folge (a_n) ist also eine Cauchy-Folge.
Wir werden später, nachdem wir die Logarithmusfunktion eingeführt haben, sehen, daß

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = \ln 2$$

gilt.
Ein divergente Folge kann sehr chaotisch aussehen, oder aber auch ein systematischen Verhalten haben. Eine Möglichkeit des letzteren wird in folgender Definition beschrieben.

Definition 24.3 *Eine Folge reeller Zahlen (a_n) konvergiert gegen ∞, wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für $n \in \mathbb{N}$ aus $n \geq n_0$ die Ungleichung $c \leq a_n$ folgt. Die Folge (a_n) konvergiert gegen $-\infty$, wenn $(-a_n)$ gegen ∞ konvergiert. Wir notieren diese Fälle als $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

Beachte, daß eine Folge, die gegen ∞ oder $-\infty$ konvergiert, nicht konvergent ist in Sinne der Definition 21.2. Der Begriff

konvergiert gegen ∞

ist eine Einheit und kann im Augenblick nicht in

konvergiert

und

der Grenzwert ist ∞

zerlegt werden.
Wir werden später in 32 eine Topologie auf der vervollständigten Zahlengeraden $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ definieren. Damit kann die Konvergenz gegen ∞ oder $-\infty$ auf gleicher Ebene wie die Konvergenz gegen jedes andere Element von $\mathbb{R}$ verstanden werden kann.

1. Die Folge (n) konvergiert gegen ∞, nicht aber $((-1)^n n)$.
2. Jede monoton wachsende und nicht konvergente Folge konvergiert gegen ∞.
3. Wenn (a_n) gegen ∞ konvergiert und $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht. So gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty}(-1)^n(n+1)^{-1} = 0$, nicht aber $\mathtt{lim}_{n\to\infty}(-1)^n(n+1) = \infty$.

24.1 Aufgaben

1. Sei (x_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen welche gegen 0 konvergiert. Wir bilden für alle $n \in \mathbb{N}$ die Summe $a_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x_k$. Zeigen Sie, daß (a_n) eine Cauchyfolge ist.

2. Untersuchen Sie auf Konvergenz (einschließlich gegen $\pm\infty$):

   (a) $(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2})$

   (b) $(\frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n+2})$

   (c) $(\frac{1}{1-\frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n+1}}})$.

25 Reihen

Wir motivieren das Thema anhand einiger Beispiele.

1. In früheren Vorlesungen hatten wir einen Dezimalbruch

$$2.4673\ldots$$

   als eine unendliche Summe

$$2 + \frac{4}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots$$

   interpretiert. Wir hatten die Folge (a_n) gebildet, wobei a_n die endliche Summe der ersten n Summanden ist. Die Summe aller Terme hatten wir dann als Grenzwert dieser Folge interpretiert.

2. Betrachten wir das klassische Beispiel von Achill und der Schildkröte. Achill laufe doppelt so schnell wie die Schildkröte, welche am Anfang einen Vorsprung von x hat und mit der Geschwindigkeit v kricht. Nach der Zeit $t_0 := \frac{x}{2v}$ ist Achill am Startpunkt der Schildkröte, die in dieser Zeit einen Weg $t_0 v = \frac{x}{2}$ zurückgelegt hat. Diese Strecke läuft Achill in $t_1 := \frac{x}{4v}$, aber die Schildkröte hat dann den Vorsprung $t_1 v = \frac{x}{4}$. Die alte Frage ist, ob Achill die Schildkröte überhaupt einholen kann, und wenn ja, dann nach welcher Zeit. Nach obiger Überlegung müßte dies die Zeit

$$\frac{x}{2v} + \frac{x}{4v} + \frac{x}{8v} + \cdots = \frac{x}{v}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) = \frac{x}{v}$$

   sein. In der Tat ist die Schildkröte in dieser Zeit die Strecke x gekrochen, während Achill die Strecke $2x$ zurückgelegt hat. Er hat damit den Vorsprung aufgeholt und ist an der selben Stelle wie die Schildkröte.

Wir führen nun das dazugehörige abstrakte Konzept ein. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Wir möchte gerne die Summe

$$a_0 + a_1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

bilden. Dazu bilden wir eine neue Folge (s_n) durch die Vorschrift

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_n \ .$$

Definition 25.1 *Die Folge (s_n) nennt man die aus der Folge (a_n) gebildete Reihe. Die Zahlen s_n heißen auch Partialsummen der Reihe. Wenn die Folge (s_n) gegen eine reelle Zahl s konvergiert, dann heißt s Grenzwert der Reihe. Wir notieren den Grenzwert als*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := s \ .$$

In der Regel werden wir abkürzend einfach den Term

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

eine Reihe nennen und gegebenfalls sagen, dass sie konvergiere. Das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet damit sowohl die Folge (s_n) der Partialsummen als auch deren Grenzwert. Es wird immer aus dem Kontext klar sein, welche Bedeutung vorliegt.
Ein sehr wichtiges Beipiel ist die geometrische Reihe.

Definition 25.2 *Wir betrachten eine reelle Zahl x. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ heißt geometrische Reihe.*

Wir untersuchen nun, für welche $x \in \mathbb{R}$ die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert und berechnen gegebenenfalls ihren Grenzwert. Dazu bestimmen wir zunächst die Partialsummen explizit.

Lemma 25.3 *Es gilt für $x \neq 1$.*

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} \ .$$

Für $x = 1$ haben wir

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = k + 1 \ .$$

Proof. Der Fall $x = 1$ ist klar. Wir nehmen $x \neq 1$ an und führen einen Induktionsbeweis. Aussage stimmt für $k = 0$. Sei nun k eine natürliche Zahl und die Formel für alle natürlichen Zahlen l mit $l < k$ schon gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k} x^n &= \sum_{n=0}^{k-1} x^n + x^k \\
&\stackrel{i}{=} \frac{1-x^k}{1-x} + x^k \\
&= \frac{1-x^k+(1-x)x^k}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \ .
\end{aligned}$$

Bei i haben wir die Induktionsvoraussetzung benutzt. □

Lemma 25.4 *Die geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *konvergiert genau dann, wenn* $|x| < 1$ *gilt. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \ .$$

Proof. Wenn $x = 1$ ist, dann ist die Folge der Partialsummen (s_k) der geometrischen Reihe durch $s_k = k + 1$ gegeben und insbesondere nicht beschränkt. In diesem Fall konvergiert die geometrische Reihe nicht.
Sei nun $x \neq 1$. Wir schreiben

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x} x^{k+1} \ .$$

Wenn $|x| > 1$ ist, dann ist (x^{k+1}) eine unbeschränkte Folge. Da der Vorfaktor $\frac{1}{1-x}$ nicht verschwindet, ist auch die Folge der Partialsummen der geometrischen Reihe unbeschränkt. Damit konvergiert die geometrische Reihe für $|x| > 1$ nicht.
Schließlich, wenn $|x| < 1$ ist, dann konvergiert die Folge (x^{k+1}) gegen Null. Folglich konvergiert die geometrische Reihe gegen $\frac{1}{1-x}$. □

Um die Konvergenz komplizierterer Reihen einzusehen, brauchen wir handliche Kriterien.

Lemma 25.5 (Majorantenkriterium) *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine Reihe und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *eine konvergente Reihe mit der Eigenschaft, daß für alle* $n \in \mathbb{N}$ *die Ungleichung* $|a_n| \leq b_n$ *gilt. Dann konvergiert auch die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*.*

Wenn die Bedingung des Lemmas erfüllt ist, dann nennt man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ auch eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Proof. Seien (s_n) und (t_n) die Folgen der Partialsummen der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und $m \geq n_0$ die Ungleichung $|t_n - t_m| \leq \epsilon$ gilt.
Seien nun $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ und oBdA $m \leq n$. Dann gilt

$$|s_m - s_n| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k = |t_m - t_n| \leq \epsilon \ .$$

□

Die Bedingung im Majorantenkriterium kann man dahingehend abschwächen, daß die Ungleichung $|a_n| \leq b_n$ nur für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gelten muß.

1. Für $x \in (-1, 1)$ und $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n^k x^n \ .$$

   Wir wählen eine Zahl $r \in (0, 1)$ mit $|x| < r$ und schreiben $x = sr$. Dann gilt $s \in (-1, 1)$. Weiterhin gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} n^k |s|^n = 0$. Damit gilt $|n^k x^n| \leq r^n$ für fast alle n. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ ist eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^k x^n$ die damit auch konvergiert.

Lemma 25.6 *Wenn eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Proof. Die Folge der Partialsummen der Reihe eine Cauchyfolge. Es gilt $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k$.
Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Dann gilt $|a_n| \leq \epsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. □

Zum Beispiel konvergieren die Reihen $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$ oder $\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)$ nicht.

25.1 Aufgaben

1. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+x^n}$ konvergiert.

2. Untersuchen Sie auf Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

3. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}$?

26 Klassische Funktionen

Aus dem Vergleich mir der geometrischen Reihe kann man ein weiteres Kriterium für die Reihenkonvergenz ableiten.

Lemma 26.1 (Quotientenkriterium) *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Wir nehmen an, daß es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$ gilt.*

1. *Wenn es ein $q \in [0,1)$ und ein $n_1 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ gilt, dann konvergiert die Reihe.*

2. *Wenn es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ gilt, dann konvergiert die Reihe nicht.*

Proof. Sei $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Im ersten Fall gilt $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_2$. Daraus folgt $|a_n| \leq |a_{n_2}|q^{n-n_2}$. Damit ist die geometrische Reihe $\sum_{n=n_2}^{\infty} |a_{n_2} q^{-n_2}| q^n$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=n_2}^{\infty} a_n$.
Im zweiten Fall sieht man leicht, daß die Folge (a_n) nicht gegen 0 konvergiert. □

Eine wichtige Reihe ist die Exponentialreihe, welcher für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

gegeben ist.

Lemma 26.2 *Die Exponentialreihe konvergiert für jede reelle Zahl x.*

Proof. Der Fall $x = 0$ ist trivial. Wir nehmen an, daß $x \neq 0$ gilt. Wir wenden das Quotientenkriterium an. Sei $n_0 := 0$, $q := \frac{1}{2}$ und $n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq |2x|\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1$ gilt

$$|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}| = |\frac{x}{n+1}| \leq |\frac{x}{n_1}| \leq \frac{|x|}{|2x|} \leq \frac{1}{2} = q \ .$$

Definition 26.3 *Die Exponentialfunktion.*

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ist die Abbildung, welche jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Exponentialreihe zuordnet. Wir schreiben oft auch $e^x := \exp(x)$.

Wir führen nun die trigonometrischen Funktionen über ihre Reihendarstellungen ein.

Lemma 26.4 *Die Reihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$.

Proof. Wir betrachten die erste Reihe und den Fall daß $x \neq 1$ gilt. Wir wenden das Quotientenkriterium an. Sei $q := \frac{1}{2}$. Wir setzen $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $n_0 \geq 2x^2$ gilt. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ daß

$$|\frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}}{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}| = |\frac{x^2}{(2n+3)(2n+1)}| \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{x^2}{n_0} \leq \frac{1}{2} = q \ .$$

Definition 26.5 *Wir definieren die trigonometrischen Funktionen*

$$\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

durch

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \quad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Für $x \in (-1, 1)$ betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ .$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|$ ist eine konvergente Majorante.

Definition 26.6 *Wir definieren die Logarithmusfunktion* $\log : (0, 2) \to \mathbb{R}$ *durch*

$$\log(x) := -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}$$

Wir werden später die Logarithmusfunktion zu einer Abbildung $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ausdehnen und zeigen, daß für alle $x \in (0, \infty)$ gilt:

$$\exp(\log(x)) = x \ .$$

26.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß die Reihen

$$\sinh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren und damit wohldefinierte Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestimmen.

2. Untersuchen Sie auf Konvergenz:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n!}}$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

27 Das Verdichtungsprinzip und die harmonische Reihe

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

heißt harmonische Reihe. In diesem Fall konvergiert die Folge der Summanden $(\frac{1}{n})$ tatsächlich gegen Null. Dies wäre nach Lemma 25.6 aber nur notwendig für die Konvergenz der harmonischen Reihe, ist aber nicht hinreichend. In der Tat konvergiert die harmonische Reihe nicht wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 27.1 *Die harmonischen Reihe (d.h. die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$) ist nicht beschränkt.*

Proof. Das folgende Argument benutzt das sogenannte Verdichtungsprinzip. Es gilt

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \ .$$

Wir können alle 2^n Summanden auf der rechten Seite durch $\frac{1}{2^{n+1}}$ nach unten abschätzen. Wir erhalten die Ungleichung

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} \geq 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \ .$$

Also gilt $s_1 \geq \frac{1}{2}$, $s_2 \geq \frac{2}{2}$, $s_4 \geq \frac{3}{2}$ und so weiter. Wir schließen induktiv, daß für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung

$$s_{2^{n-1}} \geq \frac{n}{2}$$

gilt. Das zeigt die Unbeschränktheit der Folge (s_n). □

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

heißt alternierende harmonische Reihe. Wir werden sehen, daß diese Reihe konvergiert. In der Tat folgt das aus einer Anwendung des folgenden Lemmas.

Lemma 27.2 *Sei (x_n) eine monoton fallende, gegen Null konvergierende Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$.*

Proof. Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x_k$ die $n$te Partialsumme. Wir sehen ein, daß die Teilfolge (s_{2n}) monoton fällt. Umgekehrt wächst die Teilfolge (s_{2n+1}) monoton. Schließlich gilt für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung

$$s_{2n+1} \le s_{2n} \ .$$

Wir sehen, daß die monoton fallende Folge (s_{2n}) nach unten und die monoton wachsende Folge (s_{2n+1}) nach oben beschränkt ist. Folglich konvergieren diese Folgen und wir können die reellen Zahlen

$$S := \mathtt{lim}_{n\to\infty} s_{2n} \ , \quad s := \mathtt{lim}_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

definieren. Es gilt

$$S - s = \mathtt{lim}_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n+1}) = -\mathtt{lim}_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0 \ .$$

Damit konvergiert die Folge (s_n). □

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = -\ln(2) \ .$$

Das können wir aber erst einsehen, wenn wir die Logarithmusfunktion ausführlich behandelt haben.
Wir untersuchen nun die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ für $k \ge 2$. Das Quotientenkriterium ist nicht anwendbar: Es gilt

$$\frac{(n+1)^{-k}}{n^{-k}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^k}$$

und

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^k} = 1 \ .$$

Wir verwenden das folgende Kriterium:

Lemma 27.3 *Sei (a_n) eine monoton fallende Folge nichtnegativer reller Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.*

Proof. Seien (s_n) und (t_n) die monoton wachsenden Folgen der Partialsummen der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 < n < 2^{k+1}$ gilt

$$s_n \le \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=2^i}^{2^{i+1}-1} a_j \le \sum_{i=0}^{k} a_{2^i} 2^i = t_k \ .$$

Wenn die Folge (t_k) konvergiert, dann ist sie beschränkt. In diesem Fall ist dann auch die Folge (s_n) beschränkt und nach Lemma 22.1 konvergent.

Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2^{k+1}$ gilt

$$s_n \geq \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=2^i}^{2^{i+1}-1} a_j \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} a_{2^{i+1}} 2^{i+1} \geq \frac{1}{2}(t_{k+1} - t_0) \ .$$

Wenn die Folge (s_n) konvergiert, dann ist sie beschränkt. Dann ist aber auch (t_n) beschränkt und damit konvergent. □

Corollary 27.4 *Für $k \geq 2$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$.*

Proof. Wir verwenden das Kriterium 22.1. Wir zeigen die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^k}$ mit dem Quotientenkriterium. Es gilt

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(2^{n+1})^k}}{\frac{2^n}{(2^n)^k}} = 2^{1-k} \ .$$

Wegen $k \geq 2$ gilt $2^{1-k} \leq \frac{1}{2}$ und das Quotientenkriterium ist erfüllt. □

27.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{n^2}$$
konvergiert.

2. Zeigen Sie, daß die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{n}$$
divergiert.

3. Untersuchen Sie die Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$$
auf Konvergenz.

4. Untersuchen Sie die Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \frac{1}{n}}$$
auf Konvergenz.

28 Absolute Konvergenz, Umordnen

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen, $k \in \mathbb{N}$ und

$$f : \{1, \dots k\} \to \{1, \dots, k\}$$

eine Bijektion. Dann folgt aus dem Kommutativgesetz für die Addition, daß

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_{f(n)}$$

gilt. Wir nennen die rechte Seite eine Umordnung der Summe mittels f. In diesem Kapitel untersuchen wir, inwieweit Umordnen die Konvergenz und Grenzwerte unendlicher Summen beeinflußt.

Definition 28.1 *Sei I eine endliche Menge und $a : I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir definieren Operation*

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{n=1}^{\sharp I} a_{f(n)} \ ,$$

wobei $f : \{1, \dots, \sharp I\} \to I$ eine beliebig gewählte Bijektion ist.

Man kann sich überlegen, daß die Summe über I wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Bijektion f abhängt.
Sei J eine weitere endliche Menge und $b \in \mathbb{R}^J$. Dann gilt

$$\sum_{i \in I} a_i \sum_{j \in J} b_j = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j \ .$$

Wir fragen uns wieder, ob diese Rechnung auch für konvergente Reihen funktioniert.
Zur Motivation betrachten wir folgende Rechnung mit der Exponentialreihe.
Wir schreiben die binomische Formel in der Form

$$(x+y)^n = \sum_{\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q=n\}} \frac{n!}{p!q!} x^p y^q \ .$$

Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q=n\}} \frac{n!}{p!q!} \frac{x^p y^q}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q=n\}} \frac{x^p}{p!} \frac{y^q}{q!} = \dots \ .$$

Wir beobachten, daß

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q=n\}$$

eine paarweise disjunkte Zerlegung der Menge $\mathbb{N}^2$ ist. Wir würden gerne wie folgt weiterrechnen.

$$\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid p+q=n\}} \frac{x^p}{p!}\frac{y^q}{q!} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{x^p}{p!}\frac{y^q}{q!} = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{x^p}{p!} \sum_{q\in\mathbb{N}} \frac{y^q}{q!} = e^x e^y \ .$$

Wir werden diese Gleichung weiter unten rechtfertigen. Die entscheidende Voraussetzung ist die absolute Konvergenz der betreffenden Reihen.

Definition 28.2 *Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.*

1. Für $x \in (-1,1)$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^k$ absolut.
2. Das Quotientenkriterium impliziert die absolute Konvergenz. Insbesondere konvergieren die Reihen für e^x und $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ absolut.
3. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert nicht absolut.

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ die mittels f umgeordnete Reihe. Es stellt sich die Frage, ob mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ konvergiert und ob gegebenfalls die Grenzwerte übereinstimmen.
Wir zeigen zunächst ein negatives Ergebnis:

Lemma 28.3 *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann existiert für jede relle Zahl x eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, daß die durch f umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ gegen x konvergiert.*

Proof. Wir definieren

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \ge 0\} \ , \quad B := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < 0\} \ .$$

Dann gilt $A \cap B := \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{N}$. Wir definieren die Folgen (u_n) und (v_n) durch

$$u_n := \sum_{\{i\in A \mid i\le n\}} a_i \ , \quad v_n := \sum_{\{i\in B \mid i\le n\}} a_i \ .$$

Wir sehen ein, daß beide Folgen unbeschränkt sind. Wir definieren nun die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv wie folgt. Wir setzen $f(0) := 0$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, daß $f(n)$ für alle alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \le k$ schon definiert ist.

- Wenn $\sum_{n=0}^{k} a_{f(n)} > x$, dann wählen wir

  $$f(k+1) := \min\{l \in B \mid l \notin f(\{0,\dots,k\}\} \ ,$$

  also den negativen Summanden mit dem kleinsten noch nicht verwendeten Index.

- Falls $\sum_{n=0}^{k} a_{f(n)} \le x$, dann setzen wir

$$f(k+1) := \min\{l \in A \mid l \notin f(\{0,\dots,k\}\} \ ,$$

also den positiven Summanden mit dem kleinsten noch nicht verwendeten Index.

Es ist klar, daß die so definierte Abbildung f injektiv ist. Wir sehen weiter durch ein indirektes Argument ein, daß f surjektiv ist. Wäre ein Element $h \in A$ nicht im Bild von f, dann sind auch alle Elemente von A, die größer als h sind, nicht im Bild. Damit würden aber ab einem bestimmten Schritt k_0 der Konstruktion immer nur negative Summanden ausgewählt werden. Insbesondere wäre dann $\sum_{n=0}^{k} a_{f(n)} > x$ für alle $k \ge k_0$. Da die Folge (v_n) nach unten unbeschränkt ist, ist das aber nicht möglich.
Wir sehen weiter mit einem induktiven Argument, daß

$$|\sum_{n=0}^{k} a_{f(n)} - x| \le \sup_{l \ge k} |a_l| \ .$$

Daraus folgt die Konvergenz $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)} = x$. □

Wir kommen nun zur positiven Aussage.

Lemma 28.4 *Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion ist, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ absolut und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)} \ .$$

Proof. Wir zeigen zunächst, daß die umgeordnete Reihe auch absolut konvergiert. Wir weisen das Cauchykriterium nach. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \le m \le n$ gilt

$$\sum_{i=m}^{n} |a_i| \le \epsilon.$$

Es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\{0,\dots,n_0\} \subseteq f(\{0,\dots,n_1\}) \ .$$

Dann gilt für $k, l \in \mathbb{N}$, mit $n_1 \le k \le l$ daß

$$\sum_{i=k}^{l} |a_{f(i)}| \le \sum_{i=u}^{U} |a_i| \le \epsilon \ ,$$

wobei

$$u := \min f_{|\{k,\dots,l\}} \ , \quad U := \max f_{|\{k,\dots,l\}}$$

und wir $n_0 \leq u \leq U$ benutzen. Wir sehen also, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{f(n)}|$ auch absolut konvergiert.
Wir wählen nun $n_2 \in \mathbb{N}$ so groß, daß $f(\{0, \ldots, n_1\} \subseteq \{0, \ldots, n_2)$ gilt. Wenn $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$ ist, dann gilt

$$|\sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_{f(n)}| \leq \sum_{i=n_0}^{n} |a_i| + \sum_{i=n_1}^{n} |a_i| \leq 2\epsilon \ .$$

Daraus folgt

$$|\sum_{i=0}^{\infty} a_i - \sum_{i=0}^{\infty} a_{f(n)}| \leq 2\epsilon \ .$$

Da ϵ beliebig klein gewählt werden kann, gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_{f(n)} \ .$$

□

Definition 28.5 *Sei I eine abzählbar unendliche Menge und $(a_i) \in \mathbb{R}^I$. Wir wollen die Summe $\sum_{i \in I} a_i$ definieren. Dazu wählen wir eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to I$ und definieren*

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$$

falls die Reihe auf der echten Seite absolut konvergiert.

In diesem Fall ist nach Lemma 28.4 die Summe $\sum_{i \in I} a_i$ unabhängig von der Wahl von f. Die Summe $\sum_{i \in I} a_i$ ist also wohldefiniert.
Wir untersuchen nun Produkte konvergenter Reihen.

Lemma 28.6 *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sogar absolut konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \ .$$

Proof. Seien $A_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$, $B_n := \sum_{i=0}^{n} b_i$ und $C_n := \sum_{i=0}^{n} c_i$ die Partialsummen und $b := \mathtt{lim}_{n\to\infty} B_n$. Dann gilt mit $\beta_n := B_n - b$:

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \\ &= a_0(b + \beta_n) + a_1(b + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(b + \beta_0) \\ &= A_n b + \sum_{i=0}^{n} a_i \beta_{n-i} \ . \end{aligned}$$

Sei

$$\gamma_n := \sum_{i=0}^{n} a_i \beta_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \beta_i \ .$$

Wir müssen zeigen, daß $\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0$ gilt. Sei $\alpha := \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $|\beta_n| \leq \frac{\epsilon}{\alpha+1}$. Für diese Zahlen n gilt dann

$$|\gamma_n| \leq \sum_{i=0}^{n_0} |a_{n-i}||\beta_i| + \sum_{i=n_0+1}^{n} |a_{n-i}||\beta_i| \leq \sum_{i=0}^{n_0} |a_{n-i}||\beta_i| + \epsilon$$

Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} |a_{n-i}| = 0$. Wir erhalten

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \epsilon \ .$$

Da ϵ beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung. □

Corollary 28.7 *Die Exponentialfunktion erfüllt die folgende Funktionalgleichung:*

$$e^{x+y} = e^x e^y \ .$$

Insbesondere ist sie strikt monoton.

Proof. Wir zeigen nur die strikte Monotonie. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$. Dann gilt

$$\exp(x+\epsilon) = \exp(x)\exp(\epsilon) < \exp(x) \ ,$$

da $\exp(\epsilon) > 1$. Letztere Ungleichung folgt unmittelbar aus der Reihendarstellung. □

28.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie die Funktionalgleichungen

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \ , \quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \ .$$

29 Die Fibonacci Folge

In diesem Abschnitt wollen wir als Anwendung der Reihentheorie Eigenschaften der Fibonacci-Folge zeigen. Zur Erinnerung, die Fibonacci Folge ist rekursiv durch

$$f_0 := 0 \ , \quad f_1 := 1 \ , \quad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$$

gegeben ist. Wir kodieren diese Folge in der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.

Diese Reihe konvergiert für $|x| < \frac{1}{2}$. In der Tat ist (f_n) monoton wachsend. Daraus folgt für $n \geq 1$ daß

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \leq 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} \leq 2 \ .$$

Damit gilt für $n \geq 1$

$$|\frac{f_{n+1}x^{n+1}}{f_n x^n}| \leq 2|x| < 1 \ .$$

Wir definieren die Funktion

$$F : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R} \ , \quad x \mapsto F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \ .$$

Lemma 29.1 *Die Funktion F erfüllt die Funktionalgleichung*

$$F(x) = x + xF(x) + x^2 F(x) \ .$$

Proof. Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ absolut konvergiert, können wir folgt rechnen:

$$\begin{aligned} x + xF(x) + x^2F(x) &= x + x\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \\ &= F(x) \ . \end{aligned}$$

□

Wir stellen die Gleichung $F(x) = x + xF(x) + x^2F(x)$ nach $F(x)$ um und erhalten

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \ .$$

Die Menge der Nullstellen des Nenners ist $\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$. Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch und schreiben

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{xA}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{xB}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \ .$$

Die Zahlen A, B bestimmen wir aus dem Gleichungssystem

$$A + B = 0 \ , \quad A\frac{-1-\sqrt{5}}{2} + B\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1 \ .$$

Wir eliminieren B und erhalten

$$A(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}) = 1 \ ,$$

also

$$A = -\frac{1}{\sqrt{5}} \ , \quad B = \frac{1}{\sqrt{5}} \ .$$

Es ergibt sich schließlich

$$F(x) = -\frac{\frac{x}{\sqrt{5}}}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{x}{\sqrt{5}}}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \ .$$

Wir schreiben das um in

$$F(x) = \frac{\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\frac{x}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{2x}{-1+\sqrt{5}}} - \frac{\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\frac{x}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{2x}{-1-\sqrt{5}}} \ .$$

Wir entwickeln nun die beiden Terme in geometrische Reihen und erhalten

$$F(x) = \frac{2}{-1+\sqrt{5}}\frac{x}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{-1+\sqrt{5}}\right)^n - \frac{2}{-1-\sqrt{5}}\frac{x}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{-1-\sqrt{5}}\right)^n \ .$$

In der Tat folgt aus $|x| < \frac{1}{2}$ daß $|\frac{2x}{-1\pm\sqrt{5}}| < 1$ gilt. Es gilt also für alle $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ daß

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{2^n}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{-1+\sqrt{5}}\right)^n - \left(\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\right)^n\right) \ .$$

Daraus lesen wir die explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen ab:

Corollary 29.2 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$f_n = \frac{2^n}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{-1+\sqrt{5}}\right)^n - \left(\frac{1}{-1-\sqrt{5}}\right)^n\right) \ .$$

Wir schließen weiter

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ .$$

29.1 Aufgaben

1. Wir betrachten die rekursiv durch

$$f_0 := 0 \ , \quad f_1 := 1 \ , \quad f_{n+2} := \frac{1}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

gegeben Folge. Benutzen Sie die Theorie der erzeugenden Reihe, um (wie oben für die Fibonacci-Folge) eine explizite Formel für f_n anzugeben.

30 Komplexe Zahlen

Es gibt keine reelle Zahl x mit der Eigenschaft, daß $x^2 = -2$ gilt. In der Tat, gäbe es eine solche Zahl, dann würde nämlich $0 \le x^2 = -2$ gelten.
Man kann aber eine solche Zahl, die wir vorläufig mit $\sqrt{-2}$ bezeichnen zu den reellen Zahlen hinzufügen. Wir betrachten dazu Paare (a, b) aus reellen Zahlen, die wir in der Form $a + b\sqrt{-2}$ schreiben und erklären die Rechenoperationen durch

$$(a + b\sqrt{-2})(c + d\sqrt{-2}) := (a + c) + (b + d)\sqrt{-2}) \ ,$$

$$(a + b\sqrt{-2})(c + d\sqrt{-2}) := (ac - 2bd) + (ad + bc)\sqrt{-2} \ .$$

Man überzeugt sich durch Nachrechnen, daß man damit eine kommutative Ringstruktur auf $\mathbb{R}^2$ definiert mit dem Nullelement $0 + 0\sqrt{-2}$ und dem 1-Element $1 + 0\sqrt{-2}$. Ist $0 + 0\sqrt{-2} \neq a + b\sqrt{-2}$, dann existiert auch das multiplikative Inverse

$$(a + b\sqrt{-2})^{-1} := \frac{a}{a^2 + 2b^2} + \frac{-b}{a^2 + 2b^2}\sqrt{-2} \ .$$

Wir haben damit auf $\mathbb{R}^2$ die Struktur eines Körpers definiert, den man gewöhnlich mit $\mathbb{R}(\sqrt{-2})$ bezeichnet. Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}(\sqrt{-2})$, $a \mapsto a + 0\sqrt{-2}$ ist injektiv.
Im Körper $\mathbb{R}(\sqrt{-2})$ kann man die Gleichung $x^2 = -1$ lösen. In der Tat sind die Elemente $0 \pm \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{2}}$ Lösungen dieser Gleichung.
Diese Konstruktion kann man mit jeder anderen von Null verschiedenen Zahl anstelle von 2 genauso durchführen. Überlicherweise nimmt man die 1 und führt die Abkürzung $i := \sqrt{-1}$ ein. Wir schreiben Elemente der Menge $\mathbb{R}^2$ in der Form $a + bi$ und definieren die Rechenoperationen durch

$$(a + bi)(c + di) := (a + c) + (b + d)i \ ,$$

$$(a + bi)(c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i \ .$$

Das Nullelement und das 1-Element sind durch $0 + 0i$ und $1 + 0i$ gegeben.

Lemma 30.1 *Die Menge $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen $+$, $\cdot$ und den Elementen $0 + 0i$ und $1 + 0i$ ist ein Körper. Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $a \mapsto a + 0i$ ist ein Homomorphismus.*

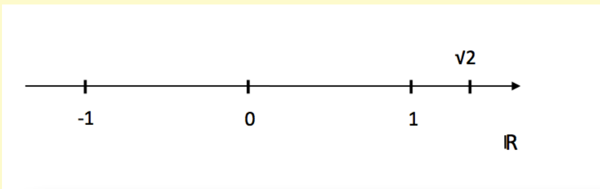
Proof. Übungsaufgabe. □

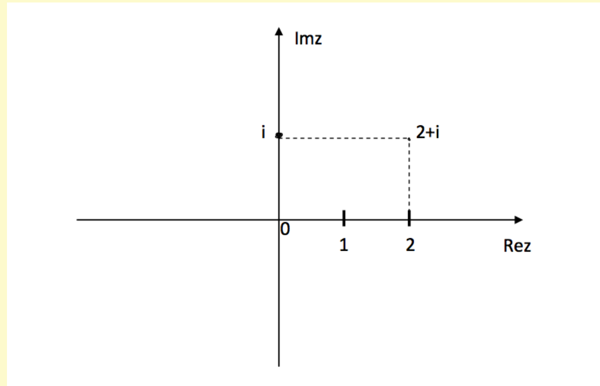
Definition 30.2 *Der in Lemma 30.1 beschriebene Körper heißt Körper der komplexen Zahlen und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.*

Während wir die Elemente von $\mathbb{R}$ als Punkte auf der Zahlengeraden veranschaulichen können, interpretieren wir die komplexen Zahlen als Punkte in der Ebene.

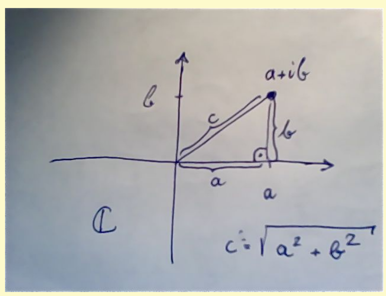
Definition 30.3 *Wir definieren den Betrag der komplexen Zahl $a + bi$ als*

$$|a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2} \ .$$





Die anschauliche Bedeutung des Betrages ist der Abstand der komplexen Zahl von 0. Das folgt aus dem Satz von Phytagoras.



Definition 30.4 *Wir definieren die komplex konjugierte Zahl von $a + bi$ durch $\overline{a + bi} := a - bi$.*

Lemma 30.5 *Für zwei komplexe Zahlen z, z' gelten:*

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
3. $z\overline{z} = |z|^2$.
4. $|zz'| = |z||z'|$
5. $|z + z'| \leq |z| + |z|$.
6. $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Proof. Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung und lassen die anderen Aussagen als Übungsaufgabe. Es gilt

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z}') = |z|^2+|z'|^2+z\overline{z}'+\overline{z}z' = |z|^2+|z'|^2+2\mathtt{Re}(z\overline{z}') \leq |z|^2+|z'|^2+2|z||z'| = (|z|+|z'|)^2 \,.$$

□

30.1 Aufgaben

1. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $x^3 = 2$ in $\mathbb{C}$.

2. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x^2$, surjektiv ist.

3. Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4| \leq 3\}$ in der Ebene.

31 Abstand und Topologie

Sei $x \in \mathbb{R}$. Eine Umgebung von x ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die alle Punkte enthält, welche genügend nahe bei x liegen. Präzise kann man das wie folgt formulieren.

Definition 31.1 *Eine Teilmenge $W \subset \mathbb{R}$ heißt Umgebung von x, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq W$ gilt.*

Hier sind einige Beispiele, die den Umgebungsbegriff verdeutlichen sollen.

1. $\mathbb{R}$ ist eine Umgebung jeder rellen Zahl.

2. $[-1, 1]$ ist eine Umgebung von 0.

3. Das Intervall (a, b) ist eine Umgebung jedes seiner Punkte.

4. Das Intervall $[a, b)$ ist keine Umgebung von a.

5. Ist $W \subseteq W' \subseteq \mathbb{R}$ und W eine Umgebung von x , dann ist W' eine Umgebung von x.

Definition 31.2 *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ heißt offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist.*

1. (a, b) oder (a, ∞) sind offen.

2. $(a, b]$ und $[a, b)$ sind weder abgeschlossen noch offen.

3. $[a, b]$ ist abgeschlossen.

Für zwei reelle Zahlen x, y interpretieren wir $|x - y|$ als Abstand zwischen x und y. Für $\epsilon \in R^{>}$ ist $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ die Menge der Zahlen, deren Abstand von x kleiner als ϵ ist. Wir schreiben $d(x, y) := |x - y|$ und halten folgende Eigenschaften fest.

Axiom 31.3 (Axiome für einen Abstand)

1. $d(x, y) \geq 0$

2. $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$

3. *Symmetrie:* $d(x, y) = d(y, x)$
4. *Dreiecksungleichung:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Wir benutzen diese Eigenschaften, um den Begriff eines Abstandes auf beliebigen Mengen einzuführen.

Definition 31.4 *Sei X eine Menge. Ein Abstand (oder auch Metrik genannt) auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, welche für alle $x, y, z \in X$ die 31.3 formulierten Bedingungen erfüllt. Ein metrischer Raum ist ein Paar (X, d) aus einer Menge und einem Abstand.*

Durch die Festlegung der Funktion d bestimmen wir eine Abstandsmessung zwischen den Punkten von X. Wir interpretieren also den Wert $d(x, y)$ als den Abstand zwischen den Punkten $x, y \in X$ gemessen mit d. Hier sind einige Beispiele für Metriken.

1. Auf $\mathbb{R}$ haben wir den Abstand $d(x, y) := |x - y|$. Wenn wir $\mathbb{R}$ als metrischen Raum betrachten und nichts anderes gesagt wird, dann ist immer dieser Abstand gemeint.

2. Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir den euklidischen Abstand

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Es gilt beispielsweise in $\mathbb{R}^3$:

$$d((1, 1, 1), (2, 2, 2)) = \sqrt{3}.$$

Manchmal schreibt man auch d_2 für diesen Abstand. Insbesondere dann, wenn man ihn von anderen Abständen auf $\mathbb{R}^n$ wie

$$d_1(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\ , \quad d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} |x_i - y_i|$$

unterscheiden möchte. Es gilt

$$d_1((1, 1, 1)(2, 2, 2)) = 3\ , \quad d_\infty((1, 1, 1), (2, 2, 2)) = 1\ .$$

Wenn nichts anderes festgelegt wird, betrachtet man auf $\mathbb{R}^n$ diesem Abstand.

3. Auf $\mathbb{C}$ betrachten wir normalerweise den Abstand $d(z, z') := |z - z'|$. Unter der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist das der euklidische Abstand.

4. Auf jeder Menge haben wir den diskreten Abstand

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

5. Sei A eine Menge. Dann definieren wir einen Abstand auf

$$X := \{f \in \mathbb{R}^A \mid f \text{ ist beschränkt}\}$$

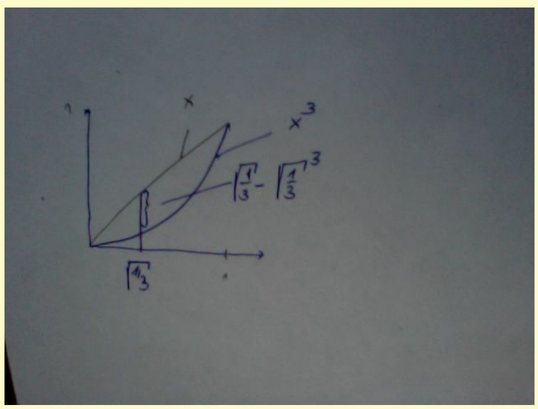
durch

$$d(f,g) := \sup |f-g| \ .$$

Sei $X := [0,1]$ und $g, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x$ und $g(x) := x^3$ gegeben. Dann ist

$$d(f,g) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \ .$$

Das Supremum von $[0,1] \ni x \mapsto |x - x^3| \in \mathbb{R}$ wird an der Stelle $\sqrt{\frac{1}{3}}$ angenommen.



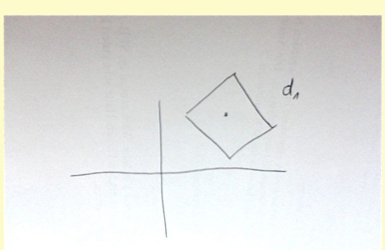
Definition 31.5 *Sei (X,d) ein metrischer Raum.*

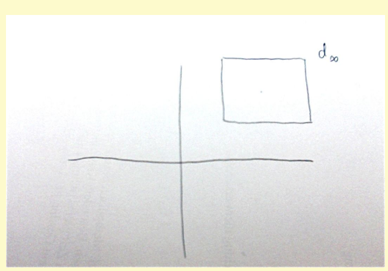
1. *Für $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}^{>}$ sei*

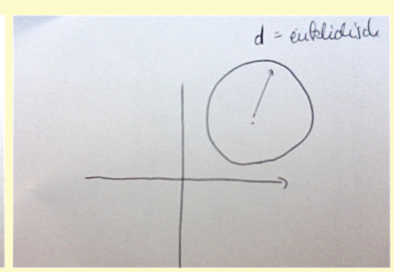
$$B(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

der Ball vom Radius r um x. Also ist $B(x,r)$ genau die Menge der Punkte in X, deren Abstand von x (gemessen mit d) kleiner als r ist.

Die folgenden Skizzen stellen die Form der Bälle im $\mathbb{R}^2$ mit den Abständen d_1, d_∞ und dem euklidischen Abstand dar:



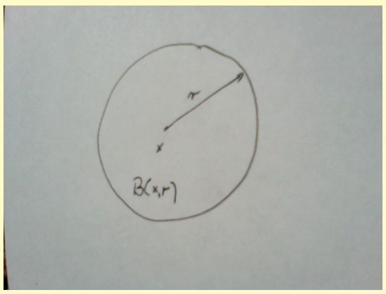


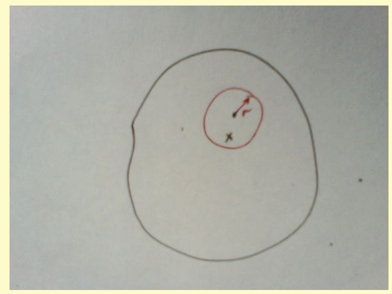


2. *Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt Umgebung von x, wenn es ein $r \in \mathbb{R}^>$ gibt mit $B(x,r) \subseteq U$.*

3. *Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.*

4. *Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist.*





Als Anwendung der Dreiecksungleichung zeigen wir:

Lemma 31.6 *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}^>$. Dann ist der Ball $B(x,r)$ offen.*

Proof. Sei $y \in B$. Wir müssen einen Ball um y finden, der in $B(x,r)$ enthalten ist. Es gilt $d(x,y) < r$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ derart, daß $d(x,y) + \epsilon < r$ gilt. Wir zeigen, daß dann $B(y,\epsilon) \subseteq B(x,r)$ gilt. Sei $z \in B(y,\epsilon)$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,y) + \epsilon < r \ .$$

Also ist $z \in B(x,r)$. □

In folgendem Lemma halten wir wesentliche Eigenschaften offener und abgeschlossener Teilmengen eines metrischen Raumes (X,d) fest.

Lemma 31.7 1. *Eine beliebige Vereinigung offener Teilmengen ist offen.*

2. *Ein beliebiger Durchschnitt abgeschlossener Teilmengen ist abgeschlossen.*

3. *Ein endlicher Durchschnitt offener Teilmengen ist offen.*

4. *Eine endliche Vereinigung abgeschlossener Teilmengen ist abgeschlossen.*

Proof.

1. Sei $(U_b)_{b\in B}$ eine Familie offener Teilmengen in X. Wir müssen zeigen, daß $\bigcup_{b\in B} U_b$ eine Umgebung jedes ihrer Punkte x ist. In der Tat existiert ein $b \in B$ mit $x \in U_b$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}^>$ mit $B(x,r) \subseteq U_b$. Dann ist aber auch

$$B(x,r) \subseteq U_b \subseteq \bigcup_{b\in B} U_b \ .$$

2. Folgt aus 1. durch Komplementbildung.

3. Sei B endlich und $(U_b)_{b\in B}$ eine Familie offener Teilmengen. Wir zeigen, daß $\bigcap_{b\in B} U_b$ eine Umgebung jedes ihrer Punkte x ist. Für jedes $b \in B$ existiert ein $r_b \in \mathbb{R}^>$ mit $B(x, r_b) \subseteq U_b$. Sei $r := \min_{b\in B} r_b$. Dann ist $r \in \mathbb{R}^>$ und
$$B(x,r) \subseteq \bigcap_{b\in B} B(x, r_b) \subseteq \bigcap_{b\in B} U_b.$$

4. Folgt aus 3. durch Komplementbildung.

In den Aussagen 3. und 4. von Lemma 31.7 kann man die Voraussetzung der Endlichkeit nicht weglassen. Wir betrachten als Beispiel den metrischen Raum $\mathbb{R}$. Zum Beispiel ist $\{x\}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ abgeschlossen. Aber es gilt
$$(0,1) = \bigcup_{x\in(0,1)} \{x\}\ .$$
Diese Teilmenge ist offen und nicht abgeschlossen. Andererseits ist
$$\{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$$
ein unendlicher Durschnitt offener Teilmengen, welcher nicht mehr offen ist.

Eine ganze Reihe von Begriffen und Beweisen in der Analysis kann man so formulieren, daß sie nur den Begriff der offenen Mengen und die obigen Eigenschaften benutzen. Aus diesem Grunde führen wir den Begriff der Topologie ein.

Definition 31.8 *Sei X eine Menge. Eine Topologie auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, welche folgenden Eigenschaften hat:*

1. *$\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$*

2. *$\mathcal{T}$ ist abgeschlossen unter der Bildung beliebiger Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{T}$.*

3. *$\mathcal{T}$ ist abgeschlossen unter der Bildung endlicher Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{T}$.*

Eine topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X.

Definition 31.9 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

1. *Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Teilmengen.*

2. *Die Komplemente offener Mengen heißen abgeschlossene Teilmengen.*

3. *Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt Umgebung von x, wenn es eine offene Teilmenge U gibt mit $x \in U \subseteq V$.*

Wenn wir auf einer Menge X eine Topologie auszeichnen, dann können wir über Umgebungen reden. Der Begriff der Umgebung eines Punktes x präzisiert, was mit der Gesamtheit aller zu x genügend benachbarten (gemessen mit der betrachteten Topologie) Punkte gemeint ist.

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. In Definition 31.5 haben wir festgelegt, welche Teilmengen von X offen sind. Die Menge $\mathcal{T}$ dieser offenen Teilmengen erfüllt nach Lemma 31.7 die Axiome für eine Topologie. Wir haben also jedem metrischen Raum einen topologischen Raum zugeordnet. Diesen nennt man auch den unterliegenden topologischen Raum.

2. Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir die Metriken d_1, d_2 und d_∞ und damit unterliegende Topologien $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_\infty$.

   Lemma 31.10 *Es gilt $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_\infty$.*

   Proof. Übungsaufgabe. □

3. Sei X eine Menge. Dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eine Topologie. Sie heißt diskrete Topologie und wird durch den diskreten Abstand induziert.

4. Sei X eine Menge. Dann ist $\{\emptyset, X\}$ eine Topologie. Sie heißt chaotische Topologie.

Wir betrachten nun einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und eine Teilmenge W. Wir setzen

$$\mathcal{T}_{|W} := \{V \in \mathcal{P}(W) \mid (\exists U \in \mathcal{T} \mid V = W \cap U)\} \ .$$

Lemma 31.11 *Die Teilmenge $\mathcal{T}_{|W}$ ist eine Topologie auf W.*

Proof. Übungsaufgabe. □

Definition 31.12 *Wir bezeichnen $\mathcal{T}_{|W}$ als die induzierte Topologie auf W.*

Wenn wir nichts anderes sagen, dann betrachten wir Teilmengen eines topologischen Raumes immer als topologische Räume mit der induzierten Topologie.

Lemma 31.13 *Ist d eine Metrik auf X und $\mathcal{T}$ die durch d induzierte Topologie. Dann ist $d_{|W \times W}$ eine Metrik auf W, welche $\mathcal{T}_{|W}$ induziert.*

Proof. Übungsaufgabe. □

Wir betrachten einige Beispiele in der Welt der reellen Zahlen.

1. Die Teilmenge $[0,3) \subseteq [0,4]$ ist offen in der induzierten Topologie auf $[0,4]$, nicht aber $[1,2] \subset [0,2]$.

2. Die Teilmenge $(0,1] \in (0,4]$ ist abgeschlossen in der induzierten Topologie auf $[0,4]$, nicht aber $(0,1) \subseteq (0,1]$.

3. Wir betrachten $\mathbb{N}$ mit der durch die Einbettung $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ induzierten Topologie. Der Punkt $\{1\}$ ist eine offene Teilmenge. In der Tat ist $\{1\} = (0,2) \cap \mathbb{N}$.

31.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

2. Zeigen Sie, daß Punkte eines metrischen Raumes abgeschlossen sind.

3. Wir betrachten die Teilmenge $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die auf $\mathbb{Z}$ induzierte Topologie die diskrete Topologie ist.

4. Zeigen Sie Lemma 31.11.

5. Zeigen Sie Lemma 31.13.

6. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist. *Hinweis: Betrachte die Teilmenge* $W := \bigcup_{\{V \in \mathcal{T} \mid V \subseteq U\}} V$. *Schließe aus der Voraussetzung, daß diese offene Menge mit* U *übereinstimmt.*

32 Konvergenz von Folgen

Man kann den Begriff der Konvergenz von Folgen auf den topologischen Kontext ausdehnen. Die folgende Definition benutzt den durch die Wahl der Topologie bestimmten Umgebungsbegriff.

Definition 32.1 *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum und* (x_n) *eine Folge in* X *und* $x \in X$. *Die Folge konvergiert gegen* x *genau dann, wenn für jede Umgebung* U *von* x *die Aussage* $x_n \in U$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, dann werden wir oft X als topologischen Raum betrachten, wobei die Topologie die von der Metrik d induzierte ist. Wir werden diese Konvention meist nicht explizit erwähnen.

Lemma 32.2 *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Eine Folge* (x_n) *in* X *konvergiert gegen* $x \in X$ *genau dann, wenn für jedes* $\epsilon > 0$ *die Aussage* $x_n \in B(x, \epsilon)$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Proof. Wir nehmen zunächst an, daß (x_n) gegen x konvergiert. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$. Dann ist $B(x,\epsilon)$ eine Umgebung von x. Folglich gilt $x_n \in B(x,\epsilon)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
Wir zeigen nun die Umkehrung. Sei U eine Umgebung von x. Dann existiert ein $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ mit $B(x,\epsilon) \subseteq U$. Nach Voraussetzung gilt $x_n \in B(x,\epsilon)$ und damit auch $x_n \in U$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. □

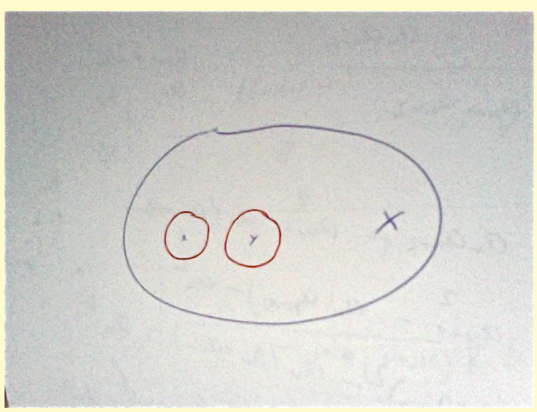
Wir betrachten den metrischen Raum $\mathbb{R}$ mit dem Abstand $d(x,y) := |x-y|$. In diesem Fall stimmt der hier neu eingeführte Konvergenzberiff mit dem alten in Definition 21.1 eingeführten überein.
Im Folgenden betrachten wir einige Eigenschaften des Grenzwertbegriffs für Folgen und heben Unterschiede zwischen dem metrischen und dem allgemeinen topologischen Kontext hervor.

1. In einem metrischen Raum hat eine Folge höchstens einen Grenzwert. Der Beweis von Lemma 21.4 verallgemeinert sich sinngemäß.

2. In einem allgemeinen topologischen Raum kann eine Folge mehrere Grenzwerte haben. In der chaotischen Topologie konvergiert jede Folge gegen jedes Element.

3. Um den in 2. beschriebenen Effekt zu vermeiden, muß man Trennungseigenschaften über die Topologie voraussetzen. Es gibt eine ganze Reihe von Trennungsaxiomen, die gelegentlich in der Form T_i durchnumeriert werden. Die wichtigste ist die Hausdorff-Eigenschaft T_2.

   Definition 32.3 *Ein topologischer Raum hat die Hausdorff-Eigenschaft, wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y existieren mit $U \cap V = \emptyset$.*

   Ein topologischer Raum mit mehr als einem Punkt und der chaotischen Topologie hat die Hausdorff Eigenschaft nicht.

   Lemma 32.4 *Ein metrischer Raum hat die Hausdorff-Eigenschaft.*

Proof. Übungsaufgabe. □

4. **Lemma 32.5** *In einem topologischen Raum mit der Hausdorff-Eigenschaft hat eine Folge höchstens einen Grenzwert.*

   Proof. Übungsaufgabe. □

Für einen metrischen Raum (X, d) können wir den Begriff einer Cauchyfolge verallgemeiner.

Definition 32.6 *Eine Folge (x_n) in X ist eine Cauchyfolge, wenn für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und $m \geq n_0$ gilt $d(x_n, x_m) \leq \epsilon$.*

1. Für allgemeine metrische Räume ist es nicht richtig, daß jede Cauchyfolge konvergiert. Als Beispiel betrachten wir den metrischen Raum $\mathbb{Q}$ als Teilraum von $\mathbb{R}$ und eine Folge rationaler Zahlen (x_n) welche in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Diese Folge ist sicher eine Cauchyfolge, aber (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergent.

2. **Definition 32.7** *Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.*

3. Die reellen Zahlen sind als metrischer Raum vollständig, während $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist.

4. Der Raum $\mathbb{R}^k$ mit jedem der Abstände d_1, d_2, d_∞ ist vollständig.

   Lemma 32.8 *Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}^k$ mit dem Abstand d_ℓ für ein $\ell \in \{1, 2, \infty\}$ ist eine Cauchyfolge (oder eine gegen $y \in \mathbb{R}^n$ konvergierende Folge) genau dann, wenn die Folgen $(x_{n,i})$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ Cauchyfolgen (oder gegen y_i konvergierende Folgen) sind. Hierbei ist $x_{n,i}$ und y_i die i'te Komponente von x_n oder y.*

   Proof. Übungsaufgabe.

5. **Lemma 32.9** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $W \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist $(W, d_{|W \times W})$ genau dann vollständig, wenn die Teilmenge W abgeschlossen ist.*

   Proof. Wir nehmen an, daß W abgschlossen ist. Sei (w_i) eine Cauchyfolge in W. Dann ist (w_i) eine Cauchyfolge in X und es gibt wegen der Vollständigkeit von X ein Element $x \in X$ mit $\mathtt{lim}_{n \to \infty} w_n = x$. Es gilt $x \in W$. Wäre nämlich $x \notin W$, dann gäbe es wegen der Abgeschlossenheit von W eine Umgebung U von x mit $U \cap W = \emptyset$. Andererseits müßte $w_n \in U$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Widerspruch. Man sieht nun leicht ein, daß (w_n) im metrischen Raum W gegen x konvergiert.

Sei nun $(W, d_{|W\times W})$ vollständig. Wir nehmen an, daß W als Teilmenge von X nicht abgeschlossen ist. Dann ist $X \setminus W$ nicht offen. Damit gibt es einen Punkt $x \in X \setminus W$ derart, daß wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $w_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap W$ wählen können. In X gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} w_n = x$. Damit ist (w_n) eine Cauchyfolge in W. Sie hat aber in W keinen Grenzwert. Damit ist W nicht vollständig. $\square$

Wir betrachten die Menge $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, welche wir als vervollständigte Zahlengeraden bezeichnen. Auf $\overline{\mathbb{R}}$ definieren wir die Topologie durch

$$\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}} := \left\{ U \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}) \;\middle|\; \begin{array}{cc} U \cap \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} & \mathit{und} \\ (\infty \in U) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R} \mid (x, \infty) \subseteq U) & \mathit{und} \\ (-\infty \in U) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R} \mid (-\infty, x) \subseteq U) & \end{array} \right\} .$$

In anderen Worten, wir betrachten die Teilmengen der Form $(x, \infty) \cup \{\infty\}$ als Umgebungen von ∞ und die Teilmengen $(-\infty, x) \cup \{-\infty\}$ als Umgebungen von $-\infty$.

Lemma 32.10 *$\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}}$ ist eine Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$.*

Proof. Übungsaufgabe. $\square$

Lemma 32.11 *Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen $a \in \overline{\mathbb{R}}$ im Sinne von Def. 21.1 für $a \in \mathbb{R}$ oder Def. 24.3 für $a \in \{\infty, -\infty\}$ genau dann, wenn (a_n) gegen a in Sinne von Def. 32.1 konvergiert.*

Proof. Das ist im Wesentlichen eine Umformulierung der Definitionen. $\square$

1. In $\overline{\mathbb{R}}$ gilt:
$$\mathtt{lim}_{n\to\infty} n = \infty \ .$$
In der Tat, sei U eine Umgebung von ∞. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, \infty) \subseteq U$. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber $x < n$ und damit $n \in U$. $\square$

2. In $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert $((-1)^n n)$ nicht.

32.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß eine Folge reeller Zahlen genau dann gemäß der Definition 32.1 konvergiert, wenn sie gemäß Definition 21.1 konvergiert.

2. Zeigen Sie, daß in einem metrischen Raum eine Folge höchstens einen Grenzwert hat.

3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein chaotischer topologischer Raum. Zeigen Sie, daß jede Folge in X gegen jedes Element von X konvergiert.

4. Komplettieren Sie den Beweis von Lemma 32.4.

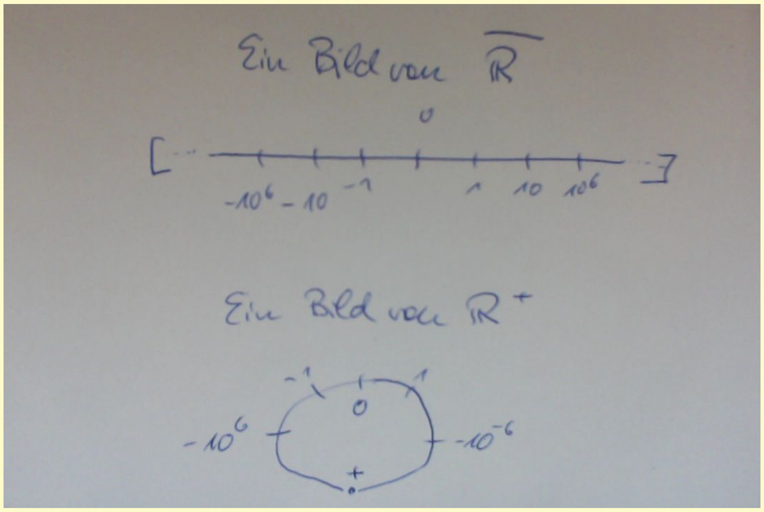
5. Komplettieren Sie den Beweis von Lemma 32.5.

6. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, daß der diskrete Abstand auf X die diskrete Topologie induziert. Zeigen Sie weiter, daß X mit dem diskreten Abstand vollständig ist.

7. Zeigen Sie Lemma 32.10.

8. Zeigen Sie, daß es auf $\overline{\mathbb{R}}$ einen Abstand gibt, welcher die Topologie $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}}$ induziert.

9. Sei $\{+\}$ eine einpunktige Menge. Definieren Sie eine Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^+}$ auf $\mathbb{R}^+ := \mathbb{R} \cup \{+\}$ derart, daß $(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^+})_{|\mathbb{R}}$ die Standardtopologie von $\mathbb{R}$ ist und die Folgen (n), $(-n)$ und $((-1)^n n)$ alle gegen $+$ konvergieren. Den Raum $\mathbb{R}^+$ nennt man auch die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}$.



33 Komplexe Reihen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ hat einen Abstand $d(z, z') := |z - z'|$ und damit die Struktur eines topologischen Raumes mit der Hausdorff Eigenschaft. Insbesondere ist der Begriff der Konvergenz von Folgen und damit auch von Reihen definiert.
Wir betrachten also eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, wobei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen ist. Die Reihe steht wieder für die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=0}^{k} a_n)$. Die Reihe konvergiert, wenn diese Folge im topologischen Raum $\mathbb{C}$ konvergiert. Das ist nach Lemma 32.8 gleichbedeutend mit der Konvergenz der Folgen $(\mathrm{Re} \sum_{n=0}^{k} a_n)$ und $(\mathrm{Im} \sum_{n=0}^{k} a_n)$ der Real- und Imaginärteile der Partialsummen.

Das Majorantenkriterium und das Quotientenkriterium übertragen sich wörtlich auf den komplexen Fall und zeigen jeweils die absolute Konvergenz. Auch der Beweis des Umordnungssatzes für absolut konvergente Reihen verallgemeinert sich wörtlich.

Definition 33.1 *Wir definieren die Funktionen* $\exp, \sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *durch*

$$\begin{aligned} \exp(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \sin(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Diese Reihen konvergieren für alle komplexe Zahlen x absolut. Diese Definitionen setzen die Definitionen für reelle Argumente fort. Der Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion verallgemeinert sich wörtlich. Es gilt also

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \ .$$

Die Eulersche Formel stellt einen fundamentalen Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen her.

Lemma 33.2 (Eulersche Formel) *Für alle* $x \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x) \ .$$

Proof. Wir spalten die Exponentialreihe in zwei Summen auf. Die erste Summe ist die über die geraden natürlichen Zahlen und die zweite die Summe über die ungeraden. Dies liefert die Formel. □

Da die Koeffizienten der Potenzreihe $\exp(x)$ reell sind, gilt

$$\overline{\exp(x)} = \exp(\overline{x})$$

gilt. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\overline{ix} = -ix$ und damit wegen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1 \ .$$

Mit der Eulerformel schließen wir:

Corollary 33.3 *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

Weiter erhalten wir aus

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= \exp(i(x+y)) \\
&= \exp(ix)\exp(iy) \\
&= (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y)) \\
&= (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) + i(\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y))
\end{aligned}$$

und lesen für reelle Argumente x die Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \ , \quad \sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

ab. Diese Identitäten gelten dann aber für alle komplexen Zahlen x.

Die Exponential- und die Trigonometrischen Funktionen werden durch Potenzreihen definiert. Im Folgenden legen wir einige allgemeine Tatsachen über Potenzreihen dar.

Definition 33.4 *Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

für $z \in \mathbb{C}$ und eine Folge komplexer Zahlen (a_n).

Lemma 33.5 *Wenn eine Potenzreihe für $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ absolut. Wenn die Reihe für $z_0 \in \mathbb{C}$ nicht konvergiert, dann auch nicht für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > |z_0|$.*

Proof. Sei $|z| < |z_0|$. Dann gilt

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| |\frac{z}{z_0}|^n \ .$$

Nun ist $(|a_n z_0^n|)$ eine Nullfolge und $|\frac{z}{z_0}| < 1$. Folglich ist $\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{z}{z_0}|^n$ eine konvergente Majorante.
Möge die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ nicht konvergieren und für $z \in \mathbb{C}$ die Ungleichung $|z| > |z_0|$ gelten. Dann kann nach der ersten Aussage auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nicht konvergieren. □

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe. Wir betrachten die Menge

$$K := \{r \in [0,\infty) \mid (\exists z \in \mathbb{C} \mid \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert und } |z| = r)\}$$

konvergiert.

Definition 33.6 *Der Konvergenzradius $r \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$ der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist durch*

$$r := \left\{ \begin{array}{cc} \infty & K \textit{ ist unbeschränkt} \\ \sup K & \textit{sonst} \end{array} \right\}$$

definiert.

Sei r der Konvergenzradius der $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann konvergiert diese Reihe nach Lemma 33.5 absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$. Wenn $|z| > r$ ist, dann konvergiert die Reihe nicht. Im Grenzfall $|z| = r$ kann man keine allgemeine Aussage treffen.
Als Beispiel betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \; .$$

Sie konvergiert für $|z| < 1$ und konvergiert nicht für $|z| > 1$. Sie konvergiert nicht für $z = 1$, aber sie konvergiert für $z = -1$.

Wir wollen eine Formel für den Konvergenzradius bereitstellen. Dazu zeigen wir zunächst das Wurzekriterium.

Lemma 33.7 (Wurzelkriterium) *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine Reihe komplexer Zahlen.*

1. *Wenn es eine Zahl $q \in [0,1)$ gibt und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$ gilt $\sqrt[n]{|c_n|} \leq q$, dann konvergiert die Reihe absolut.*

2. *Wenn die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt[n]{|c_n|} \geq 1\}$ unendlich ist, dann konvergiert die Reihe nicht.*

Proof.

1. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ is eine konvergente Majorante.

2. Die Folge $|c_n|$ ist keine Nullfolge.

□

Lemma 33.8 (Formel für den Konvergenzradius) *Der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ wird durch*

$$r = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & (\sqrt[n]{|a_n|}) \textit{ beschränkt und } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0 \\ \infty & (\sqrt[n]{|a_n|}) \textit{ beschränkt und } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0 & (\sqrt[n]{|a_n|}) \textit{ unbeschränkt} \end{array} \right\}$$

gegeben.

Proof. Wir betrachten den Fall, daß $r \notin \{0, \infty\}$. Die anderen Fälle sind ähnlich. Wenn $z \in \mathbb{C}$ und $|z| < r$ gilt, dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} r = \frac{r}{r} = 1 \; .$$

Damit konvergiert die Potenzreihe absolut. Wenn $|z| > r$ gilt. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} r = 1$$

und damit konvergiert die Reihe nicht. □

1. Der Konvergenzradius der Exponentialreihe ist also ∞.

2. Der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n} \ ,$$

welche gegen $-\ln(1+x)$ konvergiert, ist 1.

3. Der Konvergenzradius der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, die gegen $\frac{1}{1-z}$ konvergiert, ist 1.

4. Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n n^3 z^n$$

ist $\frac{1}{3}$. Dazu rechnen wir $\sqrt[n]{3^n n^3} = 3\sqrt[n]{n}^3$ und benutzen $\texttt{lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (siehe 35.1).

Für spätere Zwecke halten wir folgende schärfere Aussage über Konvergenz einer Potenzreihe fest. Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r konvergiert auf jedem Ball $B(0,s)$ mit $s < r$ gleichmäßig. Im Detail:

Lemma 33.9 *1. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit einem Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}^>$ und $s \in (0,r)$. Dann existiert für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $z \in B(0,s)$ gilt: Wenn $n \in \mathbb{N}$ und $n_0 \leq n$, dann*

$$|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k| \leq \epsilon \ .$$

2. Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^>$ mit $\delta < r$ derart, daß aus $z \in B(0,\delta)$ folgt

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - a_0| \leq \epsilon \ .$$

Proof. Die Behauptung, daß die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $B(0,s)$ konvergiert, besagt, daß man für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ und $z \in B(0,s)$ ein eventuell von z abhängendes $n_0 \in \mathbb{N}$ wählen kann, so daß fogende Aussage gilt:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$ gilt

$$|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k| \leq \epsilon \ .$$

Der Punkt bei der gleichmäßigen Konvergenz in 1. ist, daß eine Zahl n_0 gefunden werden kann, so daß diese Aussage für alle $z \in B(0,s)$ gilt.
Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis.

1. Sei $t \in (s, r)$. Dann gilt

$$|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| t^k.$$

   Wenn $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben ist, dann müssen wir n_0 derart wählen, daß $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| t^k \leq \epsilon$ gilt.

2. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß

$$|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k z^k| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

   für alle $z \in B(0, \frac{r}{2})$ gilt. Dann wählen wir $\delta \in (0, \frac{r}{2})$ so, daß aus $|z| \leq \delta$ folgt

$$|\sum_{k=0}^{n_0} a_k z^k - a_0| \leq \frac{\epsilon}{2} \ .$$

   Dann gilt für $z \in B(0, \delta)$

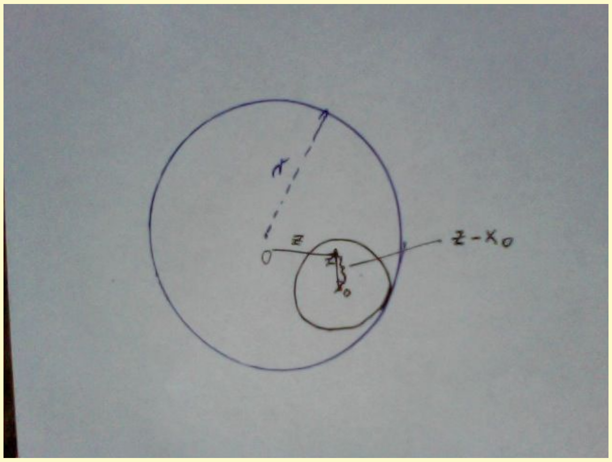
$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - a_0| \leq |\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n_0} a_k z^k + \sum_{k=0}^{n_0} a_k z^k - a_0| \leq |\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k z^k| + |\sum_{k=0}^{n_0} a_k z^k - a_0| \leq \epsilon \ .$$

□

Lemma 33.10 (Transformationssatz) *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r und $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $|x_0| < r$. Dann gibt es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit dem Konvergenzradius s mit $s \geq r - |x_0|$ derart, daß für alle $z \in B(x_0, r - |x_0|)$ gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - x_0)^n \ .$$

Proof.



Wir schreiben

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0 + x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k \left[\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k
\end{aligned}$$

mit

$$b_k := \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} \ .$$

Wegen

$$\sum_{k=0}^{n} |\binom{n}{k} (x - x_0)^k x_0^{n-k}| = (|x - x_0| + |x_0|)^n < r^n$$

konvergieren alle diese Summen absolut und die vorgenommenen Umordnungen sind gerechtfertigt. □

Als Beispiel betrachten wir die folgende Umrechnung, die für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ gültig ist.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{1}{1 - (x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})} \\
&= \frac{2}{1 - 2(x - \frac{1}{2})} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} (x - \frac{1}{2})^n
\end{aligned}$$

33.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\ln(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1-x)^n}{n}$$

   für $|x| < 1$ konvergiert.

2. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{C}$

$$\sinh(x) = -i \sin(ix)\ , \quad \cosh(x) = \cos(ix)$$

   gilt.

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$.

34 Topologische Begriffe

Definition 34.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

1. *Ein Punkt $x \in X$ heißt isolierter Punkt, wenn $\{x\} \in \mathcal{T}$ gilt.*
2. *Eine Teilmenge $W \subseteq X$ heißt diskret, wenn die auf W induzierte Topologie die diskrete Topologie ist.*

1. Eine Teilmenge $W \subseteq X$ ist diskret genau dann, wenn jeder Punkt $w \in W$ ein isolierter Punkt in $(W, \mathcal{T}_{|W})$ ist.
2. Die Teilmengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}$ sind diskret.
3. Das Bild $B \subset \mathbb{R}$ der Abbildung $\mathbb{N} \ni n \mapsto n^{-1} \in \mathbb{R}$ ist diskret, nicht aber $B \cup \{0\}$.
4. Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist diskret. Ist nämlich $x \in W$, so betrachten wir die offene Teilmenge $U_x := \mathbb{R} \setminus \{x\} = (-\infty, x) \cup (x, \infty)$. Für $y \in W$ ist der endliche Durchschnitt $V_y := \bigcap_{x \neq y} U_x$ offen und es gilt $\{y\} = W \cap V_y$.

Definition 34.2 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt zusammenhängend, wenn es keine zwei disjunkte, nichtleere, offene Teilmengen U, V von X mit $U \cup V = X$ gibt.*

Im folgenden Lemma betrachten wir Intervalle in $\mathbb{R}$ mit der induzierten Topologie.

Lemma 34.3 *Intervalle in $\mathbb{R}$ sind zusammenhängend.*

Proof. Wir betrachten als Beispiel $[a, b]$. Sei $[a, b] = U \cup V$ eine disjunkte Zerlegung durch in $[a, b]$ offene nichtleere Teilmengen U, V. Möge ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \in U$ gelten. Sei $v \in V$. Dann betrachten wir die Teilmenge $U_v := \{u \in U \,|\, u < v\}$. Wegen $a \in U_v$ ist diese Teilmenge nicht leer. Sie ist durch v beschränkt. Es gilt $c := \sup U_v \in [a, b]$. Da mit v eine ganze Umgebung von v in V enthalten ist, gilt sicher $c < v$. Wäre $c \in U$, dann würde eine Umgebung von c in U enthalten sein, es gäbe damit Element $u' \in U$ mit $u < u' < v$ und c wäre nicht das Supremum von U_v. Also gilt $c \in V$. Dann wäre wiederum eine Umgebung von c in V. Insbesondere also gäbe es eine kleinere obere Schranke von U_v. Widerspruch. □

1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn die Mengen X und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

2. Die Mengen $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. In der Tat ist $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ als Intervall zusammenhängend.

3. Eine diskreter topologischer Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er aus einem Punkt besteht.

Definition 34.4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und Y eine Menge. Eine Abbildung $X \to Y$ heißt lokal konstant, wenn für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung U in X existiert, so daß $f_{|U} = \mathtt{const}_{f(x)}$ gilt.*

Lemma 34.5 *Ist X zusammenhängend und f lokal konstant, dann ist f konstant.*

Proof. Wir argumentieren indirekt. Sei $x \in X$ und gelte $f^{-1}(\{f(x)\}) \neq X$. Wir setzen $U := f^{-1}(\{f(x)\})$ und $V := f^{-1}(Y \setminus \{f(x)\})$. Dann sind U und V offen. In der Tat folgt aus der lokalen Konstanz von f, daß für $y \in U$ (bzw. $y \in V$) eine ganze Umgebung von y in U (bzw. in V) liegt. Dann bilden $\{U, V\}$ eine Zerlegung von X in zwei disjunkte offene Teilmengen und X wäre damit nicht zusammenhängend. □

Sie X eine Menge und $P : \mathcal{P}(X) \to \{wahr, falsch\}$ eine Aussage über die Teilmengen von X.

Definition 34.6 *Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist eine kleinste Teilmenge für welche die Aussage $P(A)$ gilt, wenn $P(A)$ gilt und für jede Teilmenge $B \subseteq A$ die Aussage $(P(B) \Rightarrow (A = B))$ gilt.*

Analog definiert man die größte Teilmenge welche P erfüllt.

Die Relation $\subseteq$ ist eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(X)$, siehe 46.3. Allgemeiner betrachtet man kleinste oder größte Elemente auf halbgeordneten Mengen.

Im allgemeinen muß eine solche Teilmenge weder existieren noch eindeutig sein.

1. Es gibt keine größte Teilmenge von $\mathbb{N}$, die endlich ist.

2. Es gibt viele kleinste Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit mindestens drei Elementen.

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $W \subseteq X$ eine Teilmenge.

Definition 34.7 *Ein Abschluß von W ist eine kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, welche W enthält.*

In der Tat existiert der Abschluß immer und ist eindeutig. Er wird mit $\overline{W}$ bezeichnet und ist durch

$$\overline{W} = \bigcap_{\{B \subseteq X \mid B \text{ abgeschlossen und } W \subseteq B\}} B$$

gegeben.

Definition 34.8 *Wenn $\overline{W} = X$ gilt, dann heißt W dicht in X.*

Lemma 34.9 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $W \subseteq X$ eine Teilmenge. Wenn (w_n) eine Folge in W ist, welche in X gegen $x \in X$ konvergiert, dann gilt $x \in \overline{W}$. Unter der Annahme, daß $(X, \mathcal{T})$ der unterliegende topologische Raum eines metrischen Raumes ist, gilt auch die Umkehrung.*

Proof. Sei (w_n) eine Folge in W und $\mathtt{lim}_{n\to\infty} w_n = x$. Wäre $x \notin \overline{W}$, dann wäre $X \setminus \overline{W}$ eine Umgebung von x. Es gilt $x_n \in X \setminus \overline{W}$ für kein $n \in \mathbb{N}$ und damit nicht für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Damit würde aber nicht $\mathtt{lim}_{n\to\infty} w_n = x$ gelten. Widerspruch.

Wir nehmen an, daß $(X, \mathcal{T})$ der unterliegende Raum eines metrischen Raumes (X, d) ist. Wir können daher Bälle benutzen. Sei $x \in \overline{W}$. Wir zeigen zunächst, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $W \cap B(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$. Wäre nämlich für ein $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $W \cap B(x, \frac{1}{n}) = \emptyset$ richtig, dann wäre für jede abgeschlossene Teilmenge B von X mit $W \subseteq B$ auch $B \setminus B(x, \frac{1}{n})$ abgeschlossen und $W \subseteq B \setminus B(x, \frac{1}{n})$. Dann wäre $\overline{W} \subseteq B \setminus B(x, \frac{1}{n})$ und deshalb $x \notin \overline{W}$. Widerspruch.
Wir wählen nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $w_n \in W \cap B(x, \frac{1}{n})$ aus. Dann ist (w_n) eine Folge in W und es gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} w_n = x$.

□

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Sei $W \subseteq X$ eine Teilmenge und $x \in X$. Das folgende Lemma gibt ein einfaches Kriterium, mit welchem man prüfen kann, ob $x \in \overline{W}$ gilt.

Lemma 34.10 *Es gilt $x \in \overline{W}$ genau dann, wenn jede Umgebunge von x einen nichtleeren Durchschnitt mit W hat.*

Proof. Wenn $x \notin \overline{W}$ gilt, dann ist $X \setminus \overline{W}$ eine Umgebung von x, welche W nicht schneidet. Sei nun $x \in \overline{W}$ und $V \subseteq X$ eine Umgebung von X. Wir müssen zeigen, daß $V \cap W \neq \emptyset$ gilt. Wir nehmen das Gegenteil an. Wir können nach eventuellem Ersetzen von V durch eine offene Teilmenge annehmen, daß V offen ist. Dann wäre $X \setminus V$ eine abgeschlossene Teilmenge von X, welche W enthält. Damit wäre $\overline{W} \subseteq X \setminus V$ und $x \notin \overline{W}$. Widerspruch. □

1. Ist W in X abgeschlossen, dann gilt $W = \overline{W}$.

2. Wir betrachten den topologischen Raum $\mathbb{R}$. Es gilt $[1,2] = \overline{(1,2)} = \overline{(1,2]}$.

3. Wir betrachten den topologischen Raum $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ für $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und die Teilmenge $\mathbb{Q} \cap (a,b)$. Dann gilt $\overline{\mathbb{Q} \cap (a,b)} = (a,b)$. Betrachtet man $\mathbb{Q} \cap (a,b)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$, dann gilt natürlich $\overline{\mathbb{Q} \cap (a,b)} = [a,b]$.

4. Die Menge $\mathbb{Q}$ ist eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ mit dem Kriterium 34.10. Sei U eine Umgebung von x. Dann gibt es ein $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ mit $B(x,\epsilon) \subseteq U$. Es gibt eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $x \leq q \leq x + \epsilon$. Dann gilt $q \in B(x,\epsilon)$ und folglich $q \in U \cap \mathbb{Q}$.

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $W \subseteq X$ eine Teilmenge.

Definition 34.11 *Ein Inneres von W ist eine größte offene Teilmenge von W.*

Das Innere von W existiert und ist eindeutig. Das Innere von W wird mit $\overset{\circ}{W}$ bezeichnet und ist durch

$$\overset{\circ}{W} = \bigcup_{\{U \in \mathcal{T} \mid U \subseteq W\}} U$$

gegeben.

Definition 34.12 *Wir definieren den Rand von W durch*

$$\partial W := W \setminus \overset{\circ}{W} \quad .$$

Lemma 34.13 *Sei $x \in W$. Dann gilt $x \in \partial W$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von x die Relation $U \cap (X \setminus W) \neq \emptyset$ gilt.*

Proof. Sei $x \in \partial W$ und U eine Umgebung von x. Wäre $U \cap (X \setminus W) = \emptyset$, dann würde $x \in \overset{\circ}{W}$ gelten und damit nicht $x \in \partial W$. Widerspruch.
Sei nun umgekehrt $x \in W$ so daß jede Umgebung U von x mit $X \setminus W$ einen nicht-leeren Durchschnitt hat. Wäre $x \in \overset{\circ}{W}$, dann wäre $\overset{\circ}{W}$ eine Umgebung von x welche $X \setminus W$ trivial schneidet. Also gilt $x \in \partial W$. □

1. Wenn W offen ist, dann gilt $W = \overset{\circ}{W}$ und $\partial W = \emptyset$.

2. Wir betrachten Teilmengen von $\mathbb{R}$. Seien $a,b \in R$ und $a < b$. Es gilt $\overset{\circ}{\overline{[a,b)}} = (a,b)$ und $\partial[a,b) = \{a\}$.

3. Es gilt $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}= \emptyset$ und $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

   Wir zeigen, daß $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ auch dicht in $\mathbb{R}$ ist. Daraus folgt sofort $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}= \emptyset$ und $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. Wir verwenden wieder 34.10. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $U \subseteq \mathbb{R}$ eine Umgebung von x. Wir wählen $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ mit $B(x, \epsilon) \subseteq U$. Wenn $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist, dann gilt $U \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Wenn $x \in \mathbb{Q}$ gilt, dann finden wir ein $\delta \in \mathbb{Q}^{>}$ mit $\delta\sqrt{2} < \epsilon$. Dann ist $x + \delta\sqrt{2} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap B(x, \epsilon) \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap U$.

4. Die Cantormenge ist die Teilmenge

   $$C := \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{\{x \in \{0,1\ldots,3^k-1\} \mid \neg(3|x-1)\}} \left[\frac{x}{3^k}, \frac{x+1}{3^k}\right].$$

   des Einheitsintervalls.

   Hier ist das Bild des obigen Durchschnittes bis $k = 6$. Die Cantormenge selbst ist darin enthalten, wäre aber *unsichtbar dünn*, mathematisch gesprochen also eine Menge ohne Lebesgueinhalt.

Lemma 34.14 *(a) C ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.*

(b) $\overset{\circ}{C}= \emptyset$

(c) C ist überabzählbar.

Proof.

(a) C ist ein unendlicher Durchschnitt von Vereinigungen jeweis endlich vieler abgeschlossener Intervalle. Damit ist C abgeschlossen.

(b) Die Cantormenge enthält keine offene Teilmenge. In der Tat, wenn $x \in C$ ist, dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y \in \mathbb{R} \setminus C$ mit $|x - y| \leq 3^{-n}$.

(c) Wir überzeugen uns zunächst, daß die Abbildung

$$f : \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}} \to [0, 1]\ , \quad f((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$$

surjektiv ist. Sei $x \in [0,1]$. Dann definieren wir rekursiv $a_0 := 0$ und dann

$$a_n := \max\{l \in \{0,1,2\} \mid \sum_{k=0}^{n-1} a_k 3^{-k} + l3^{-n} \le x\} \ .$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k 3^{-k} - x| \le 3^{-n} \ .$$

Folglich ist $x = f((a_n))$.

Die Abbildung f ist nicht injektiv, da etwa $f(1,2,2,2,\dots) = f(2,0,0,0\dots)$ gilt. Man sieht aber leicht ein, daß die Einschränkung von f auf die überabzählbare Teilmenge $\{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}} \subset \{0,1,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ injektiv ist. Es gilt $f(\{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}) = C$. Folglich ist auch C überabzählbar.

34.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß in einem allgemeinen topologischen Raum eine endliche Teilmenge nicht notwendig diskret sein muß.

2. Bestimmen Sie Rand, Inneres und Abschluß der Teilmenge $(-\infty,-1)\cup(-1,1])\setminus\{0\}$ von $\mathbb{R}$.

3. Wir betrachten auf $\mathbb{Q}$ die von der Einbettung $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ induzierte Topologie $\mathcal{T}$. Zeigen Sie, daß für jede endliche Teilmenge $I \subset \mathbb{Q}$ eine Abbildung $f : I \to \mathcal{T}$ existiert derart, daß

   (a) die Bilder von f paarweise disjunkt sind,

   (b) für alle $x \in I$ gilt $x \in f(x)$,

   (c) $\bigcup_{x\in I} f(x) = \mathbb{Q}$.

4. **Definition 34.15 (Abstand zwischen Teilmenge und Punkt)** *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir definieren den Abstand eines Punkts $x \in X$ von einer nichtleeren Teilmenge $A \subseteq X$ durch*

   $$d(A,x) := \inf d_{|A\times\{x\}} \ .$$

   Allgemeiner definieren wir für zwei nichtleere Teilmengen $A,B \subseteq X$ den Abstand

   $$d(A,B) := \inf d_{|A\times B} \ .$$

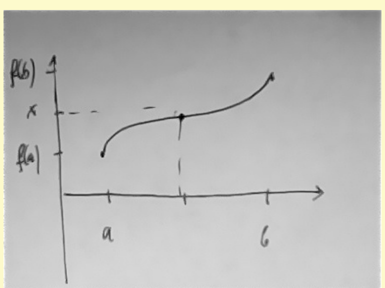
   Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge und $x \in X$. Zeigen Sie, daß $x \in \overline{A}$ genau dann gilt, wenn $d(A,x) = 0$ ist.

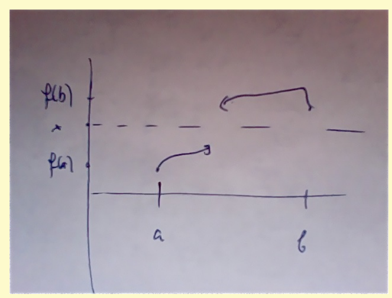
5. Sei (X, d) ein metrischer Raum und A, B nichtleere Teilmengen. Zeigen Sie, daß aus $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ folgt, daß $d(A, B) = 0$ ist. Zeigen Sie, daß die Umkehrung nicht gelten muß.

   Betrachten Sie den metrischen Raum $(0, \infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ und die Teilmengen $A, B \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$, welche die Graphen der Abbildungen $\mathtt{const}_0$ und $(0, \infty) \ni x \mapsto x^{-1} \in \mathbb{R}$ sind.

35 Stetige Abbildungen

Wir betrachten ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und eine Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß $f(a) \leq f(b)$ gilt und betrachten eine Zahl $x \in [f(a), f(b)]$. Wenn wir den Graphen von f als eine durchgehende Linie zeichnen können, dann würden wir erwarten, daß es eine Zahl $c \in [a, b]$ gibt mit $f(c) = x$. Wenn der Graph Lücken besitzt, dann muß es eine solche Zahl offensichtlich nicht geben.





In diesem Kapitel werden wir erklären, wie man präzise ausdrücken kann, daß der Graph von f eine durchgehende Linie ist und daß die sich daraus anschaulich ergebenen Tatsachen richtig sind. Dazu führen einen der grundlegenden Begriffe der Analysis, den Begriff der Stetigkeit, ein.
Hier ist eine weitere Frage, die durch den Stetigkeitsbegriff beantwortet wird. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei $x \in X$ und (x_n) eine Folge in X mit $\mathtt{lim}_{n\to\infty} x_n = x$. Wir fragen uns, ob die Folge $(f(x_n))$ in Y gegen den Punkt $f(x) \in Y$ konvergiert, also ob

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty} f(x_n) = f(\mathtt{lim}_{n\to\infty} x_n)$$

gilt. Wir werden sehen, daß man *den Grenzwert aus f herausziehen* kann, wenn f im Punkt x stetig ist.

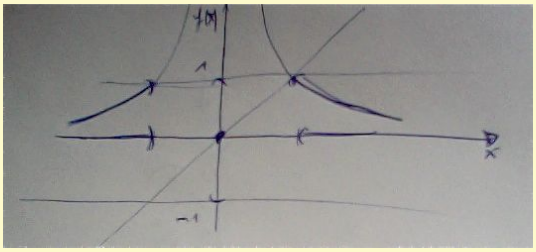
Der Begriff der Stetigkeit einer Abbildung wird natürlicherweise im topologischen Kontext eingeführt. In der folgenden Definition benutzen wir nur den Umgebungsbegriff.

Definition 35.1 (Stetigkeit) *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $x \in X$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig in x, wenn für jede Umgebung $U \subseteq Y$ von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x ist. Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in allen Punkten von X stetig ist.*

1. Wir betrachten die Abbildung $\mathtt{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zeigen, daß diese im Punkt 0 nicht stetig ist. Es gilt $\mathtt{sign}(0) = 0$. Wir betrachten die Umgebung $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ von 0. Dann ist $\mathtt{sign}^{-1}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \{0\}$. Das ist keine Umgebung von 0 im topologischen Raum $\mathbb{R}$.

   Die Abbildung $\mathtt{sign}$ ist in jedem Punkt von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig, da $\mathtt{sign}_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ lokal konstant ist.

2. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) := \left\{ \begin{array}{cc} |x^{-1}| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array} \right\}$$
   ist im Punkt 0 nicht stetig. Es gilt $f(0) = 0$. Wir wählen die Umgebung $(-1, 1)$ von 0. Dann gilt
$$f^{-1}(-1, 1) = \{0\} \cup (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \ .$$
   Auch das ist keine Umgebung von 0.



3. Die identische Abbildung $X \to X$ eines topologischen Raumes ist stetig.

4. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ lokal konstant. Dann ist f stetig. Wir zeigen die Stetigkeit im Punkt $x \in X$. Es gibt eine Umgebung U von x derart, daß $f_{|U} = \mathtt{const}_{f(x)}$ gilt. Sei nun V irgend eine Umgebung von $f(x)$. Dann gilt $f(U) \subseteq V$.

5. Hier sind zwei weitere triviale Beispiele: Wenn X diskret oder Y chaotisch ist, dann ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

Wir haben den Begriff der Stetigkeit mit Hilfe des Umgebungsbegriffs definiert. Das folgende Lemma gibt eine Umformulierung, welche offene Mengen benutzt.

Lemma 35.2 *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann stetig, wenn $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$ gilt.*

Proof. Wir nehmen zunächst an, daß $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$ gilt. Sei $x \in X$ und U eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert eine offene Teilmenge $U' \subseteq Y$ mit $f(x) \in U' \subseteq U$. Entsprechend unserer Annahme ist $f^{-1}(U')$ offen. Da $x \in f^{-1}(U') \subseteq f^{-1}(U)$ gilt, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x. Wir schließen, daß f im Punkt x von X stetig ist.

Sei umgekehrt f in jedem Punkt von X stetig. Sei $U \in \mathcal{T}_Y$ und $x \in f^{-1}(U)$. Dann ist U eine Umgebung von $f(x)$ und $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x. Damit ist die Menge $f^{-1}(U)$ Umgebung jedes ihrer Punkte, also offen. $\square$

Die Eigenschaft, stetig zu sein, ist mit der Komposition von Abbildungen verträglich.

Lemma 35.3 *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und $(Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist die Komposition $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

Proof. Wir benutzen das Kriterium Lemma 35.2. Es gilt

$$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{T}_Z) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{T}_Z)) \subseteq f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X \ .$$

$\square$

Wir werden diese Aussage später so formalisieren:

Die Gesamtheit der topologischen Räume und stetigen Abbildungen bilden eine Kategorie.

Wir nehmen nun an, daß die Topologien $\mathcal{T}_X$ und $\mathcal{T}_Y$ auf den Räumen X und Y durch Abstände d_X und d_Y induziert sind. In diesem Fall können wir die Stetigkeit mit dem ϵ-δ-Kriterium nachprüfen.

Lemma 35.4 ($\epsilon - \delta$-Kriterium) *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Die Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig in x genau dann, wenn für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ ein $\delta \in \mathbb{R}^>$ existiert, so daß für $y \in X$ aus $d_X(y, x) \leq \delta$ die Ungleichung $d_Y(f(y), f(x)) \leq \epsilon$ folgt.*

Proof. Wir nehmen zunächst an, daß das ϵ-δ-Kriterium erfüllt ist. Sei $x \in X$ und $U \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$. Dann finden wir ein $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ mit $B(f(x), \epsilon) \subseteq U$. Also gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^>$ mit $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$. Damit ist $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x.

Wir nehmen nun an, daß f im Punkt $x \in X$ stetig ist. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Dann ist $B(f(x), \epsilon)$ eine Umgebung von $f(x)$. Folglich ist $f^{-1}(B(f(x), \epsilon)$ eine Umgebung von x und es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}^>$ so daß $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \epsilon)$. Also gilt $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$. $\square$

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $a \in X$.

   Lemma 35.5 *Die Abbildung ("Abstand von a")*

   $$g : X \to \mathbb{R} \ , \quad g(x) := d(x, a)$$

   ist stetig.

Proof. Wir zeigen die Stetigkeit im Punkt $x \in X$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Dann können wir $\delta := \epsilon$ wählen. In der Tat gelten für $y \in B(x, \delta)$ als Konsequenz der Dreiecksungleichung für den Abstand d die Ungleichungen

$$d(y,a) \le d(y,x) + d(x,a) \le \epsilon + d(x,y) \ , \quad d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a) \le \epsilon + d(y,a) \ .$$

Beide zusammen ergeben

$$|g(y) - g(x)| = |d(y,a) - d(x,a)| \le \epsilon \ .$$

2. Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \quad f(y) := ry$$

stetig. Wir betrachten den Fall, daß $r \neq 0$. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ vorgegeben. Wir setzen $\delta := \frac{\epsilon}{r}$. Es gilt $\delta \in \mathbb{R}^>$. Dann folgt für alle $y \in \mathbb{R}$ aus $|y - x| \le \delta$, daß

$$|f(y) - f(x)| = |r(x - y)| \le r\delta = \epsilon \ .$$

3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ und $f, g : X \to \mathbb{R}$ Abbildungen, welche im Punkt x stetig sind.

Dann ist auch die Abbildung $f + g : X \to \mathbb{R}$ im Punkt x stetig.

Sei $V \subseteq \mathbb{R}$ eine Umgebung von $f(x) + g(x)$. Wir wählen $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ derart, daß

$$B(f(x) + g(x), \epsilon) \subseteq V \ .$$

Dann sind $U_f := f^{-1}(B(f(x), \frac{\epsilon}{2})$ und $U_g := g^{-1}(B(g(x), \frac{\epsilon}{2})$ Umgebungen von x. Wir setzen $U := U_f \cap U_g$. Dann ist U eine Umgebung von x und aus $y \in U$ folgt

$$\begin{aligned} |(f+g)(y) - (f+g)(x)| &= |f(y) - f(x) + g(y) + g(x)| \\ &\le |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| \\ &\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \ . \end{aligned}$$

Folglich gilt $(f+g)(U) \subseteq B(f(x) + g(x), \epsilon) \subseteq V$. Damit ist $(f+g)^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ und $f, g : X \to \mathbb{R}$ Abbildungen, welche im Punkt x stetig sind.

Dann ist auch $fg : X \to \mathbb{R}$ im Punkt x stetig.

Sei $V \subseteq \mathbb{R}$ eine Umgebung von $f(x)g(x)$. Wir wählen $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ so daß $B(f(x)g(x), \epsilon) \subseteq V$. Die Menge $U_1 := f^{-1}(B(f(x), 1)) \cap g^{-1}(B(g(x), 1))$ ist eine Umgebung von x.

Die Funktionen $|f|_{|U_1}$ und $|g|_{|U_1}$ sind durch $|f(x)|+1$ bzw. $|g(x)|+1$ beschränkt. Wir finden nun eine Umgebung U_2 von x derart, daß aus $y \in U_2$ die Ungleichungen

$$|f(y)-f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2(|g(x)|+1)}$$

und

$$|g(y)-g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2(|f(x)|+1)}$$

folgen. Dann ist $U := U_1 \cap U_2$ eine Umgebung von x und aus $y \in U$ folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
|(fg)(y)-(fg)(x)| &= |f(y)g(y)-f(x)g(x)| \\
&= |f(y)(g(y)-g(x))+(f(y)-f(x))g(x)| \\
&\leq |f(y)(g(y)-g(x)|+|(f(y)-f(x))g(x)| \\
&\leq (|f(x)|+1)\frac{\epsilon}{2(|f(x)|+1)}+(|g(x)|+1)\frac{\epsilon}{2(|g(x)|+1)} \\
&= \epsilon\ .
\end{aligned}$$

Folglich gilt $(fg)(U) \subseteq B(f(x)g(x),\epsilon) \subseteq V$. Damit ist $(fg)^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

5. Wir können nun die Stetigkeit von Polynomen schließen. Wir betrachten etwa

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ , \quad f(x) := 3x^3+x^2+1\ .$$

Zunächst ist Abbildung $x \mapsto x$ stetig. Damit ist auch $x \mapsto x^2$ stetig. Weiter ist die Abbildung $x \mapsto 3x$ stetig. Also auch $x \mapsto 3x^3$. Damit ist die Summe $x \mapsto 3x^3+x^2$ stetig. Die konstante Abbildung $x \mapsto 1$ ist stetig. Damit auch f.

6. **Lemma 35.6** *Die Abbildung* $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *ist stetig.*

Proof. Sei $c \in \mathbb{C}$. Wir schreiben

$$\exp(x)-\exp(c) = \exp(c)(\exp(x-c)-1)\ .$$

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Nach Lemma 33.9 existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß aus $x \in B(c,\delta)$ folgt

$$|\exp(x-c)-1| \leq \frac{\epsilon}{|\exp(c)|}\ .$$

Daraus folgt $|\exp(x)-\exp(c)| \leq \epsilon$. □

7. Seien $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $W \subseteq X$ und $V \subseteq Y$. Wenn $f: X \to Y$ an der Stelle $w \in W$ stetig ist und $f(W) \subseteq V$ gilt, dann ist auch ${}_{V|}f_{|W}: W \to V$ an der Stelle w stetig.

8. Wir können die Sinus- und Kosinusfunktionen durch die Exponentialfunktion wie folgt darstellen:

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix)) \ , \quad \cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix)) \ .$$

   Corollary 35.7 *Die Abbildungen* $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sind stetig.*

   Damit sind auch die Einschränkungen

$$\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

   stetig.

9. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

   Lemma 35.8 *Eine Abbildung* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *ist genau dann stetig, wenn die Koordinatenfunktionen* $f_i : X \to \mathbb{R}$ *für alle* $i \in \{1, \dots, n\}$ *stetig sind.*

   Proof. Sei $x \in X$.

   Wir nehmen zunächst an, daß f stetig ist und fixieren $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir zeigen, daß dann $f_i : X \to \mathbb{R}$ im Punkt x stetig ist. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Dann finden wir eine Umgebung $U \subseteq X$ von x derart, daß $f(U) \subseteq B(f(x), \epsilon)$ gilt. Dann gilt $f_i(U) \subseteq B(f_i(x), \epsilon)$.

   Wir nehmen jetzt an, daß die Koordinatenfunktionen im Punkt x stetig sind. Wir zeigen, daß dann auch f im Punkt x stetig ist Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Dann finden wir für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Umgebung $U_i \subseteq U$ von x derart, daß $f_i(U_i) \subseteq B(f_i(x), \frac{\epsilon}{n})$. Dann ist $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$ eine Umgebung von x und es gilt $f(U) \subseteq B(f(x), \epsilon)$. □

10. **Lemma 35.9** *Eine lineare Abbildung* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *ist stetig.*

    Proof. Nach Lemma 35.8 reicht es, den Fall $m = 1$ zu betrachten. Es gibt ein Element $a \in \mathbb{R}^n$ derart, daß $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ gilt. Es reicht also, die Stetigkeit einer Abbildung der Form $x \mapsto x_i$ zu zeigen. Dann sind auch die Abbildungen $x \mapsto a_i x_i$ und damit deren Summe f stetig.

    Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir zeigen die Stetigkeit der Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) := x_i$ im Punkt $u \in \mathbb{R}^n$. Wir verwenden das $\epsilon - \delta$-Kriterium mit $\delta := \epsilon$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Dann gilt $g(B(u, \delta)) \subseteq B(u_i, \epsilon)$. □

11. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \quad f(x) := \exp\big(\sin(x)^2 + 2\cos(x) + 2x\big)$$

ist stetig. Schreibe f in geeigneter Weise als Komposition von schon als stetig bekannten Abbildungen:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto (\sin(x)^2, 2\cos(x), 2x)} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{y \mapsto \sum_{i=1}^3 y_i} \mathbb{R} \xrightarrow{z \mapsto \exp(z)} \mathbb{R} \ .$$

Lemma 35.10 *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$.*

1. *Wenn f im Punkt x stetig ist, dann gilt für jede Folge (x_n) in X mit $\mathtt{lim}_{n\to\infty} x_n = x$ auch $\mathtt{lim}_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.*

2. *Wir nehmen nun an, daß die Topologie $\mathcal{T}_X$ von einem Abstand induziert wird. Wenn für jede Folge (x_n) in X mit $\mathtt{lim}_{n\to\infty} x_n = x$ auch $\mathtt{lim}_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ gilt, dann ist f im Punkt x stetig.*

Proof.

1. Sei U eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x und es gilt $x_n \in f^{-1}(U)$ für fast alle n. Folglich gilt $f(x_n) \in U$ für fast alle n.

2. Wir argumentieren indirekt und nehmen an, daß f im Punkt x nicht stetig ist. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq Y$ von $f(x)$ derart, daß für keine Umgebung $V \subseteq X$ von x gilt $f(V) \subseteq U$. Wir können also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ finden mit $f(x_n) \notin U$. Dann konvergiert die Folge (x_n) gegen x, aber die Folge $(f(x_n))$ konvergiert nicht gegen $f(x)$. Widerspruch.

$\square$

Die zweite Aussage des Lemmas wird im allgemeinen falsch, wenn man die Annahme, daß $\mathcal{T}_X$ von einem Abstand induziert ist, wegläßt. Dies motiviert die Einführung des Begriffs der *Folgenstetigkeit* als eine schwächere Form der Stetigkeit.

Hier sind einige Beispiele, in welchen das Herausziehen des Grenzwertes aus einer Abbildung benutzt wird.

1. Es gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} \exp(1 + \frac{n}{2n+1}) = \exp(\frac{3}{2})$. Wir nutzen, daß $\mathtt{lim}_{n\to\infty}(1 + \frac{n}{2n+1}) = \frac{3}{2}$ gilt und exp an der Stelle $\frac{3}{2}$ stetig ist.

2. Es gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} e^{e^{\frac{1}{n+1}}} = e$. Wir benutzen. daß $\mathtt{lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ und daß $x \mapsto e^{e^x}$ an der Stelle 0 stetig ist.

3. Um $\mathtt{lim}_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n$ zu berechnen kann man nicht erst $\mathtt{lim}_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})=1$ und dann $\mathtt{lim}_{n\to\infty}1^n=1$ rechnen. Damit würde man das **falsche** Ergebnis $\mathtt{lim}_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=1$ erhalten. In der Tat gilt aber $\mathtt{lim}_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=e$. Wir schreiben $f_n(x):=x^n$ und $(1+\frac{1}{n+1})^n=f_n(1+\frac{1}{n+1})$. Hier hängt also die Abbildung selbst von n ab, während in der Situation von Lemma 35.10 die Abbildung f nicht von n abhängen darf.

Im Folgenden betrachten wir das Intervall $[0,\infty)\subseteq\mathbb{R}$ als geordnete Menge. Für ein positives $n\in\mathbb{N}$ betrachten wir die Abbildung $x^n:[0,\infty)\to[0,\infty)$. Diese Abbildung ist strikt monoton. Für $r\in[0,\infty)$ betrachten wir die Teilmenge

$$A(r,n):=\{x\in[0,\infty)\mid x^n<r\}$$

von $\mathbb{R}$. Wegen

$$r\le 1+nr\le(1+r)^n$$

ist $A(r,n)$ durch $1+r$ von oben beschränkt.

Definition 35.11 *Wir definieren die n-te Wurzel aus r durch*

$$\sqrt[n]{r}:=\sup A(r,n)\ .$$

Lemma 35.12 *Die Zahl $\sqrt[n]{r}$ ist die einzige nicht-negative reelle Zahl, welche die Gleichung*

$$(\sqrt[n]{r})^n=r \tag{11}$$

erfüllt.

Proof. Die Eindeutigkeitsaussage folgt unmittelbar aus der Injektivität von

$$[0,\infty)\ni x\mapsto x^n\in[0,\infty)\ .$$

Wir zeigen nun, daß die Gleichung (11) erfüllt ist, Wir argumentieren indirekt. Wäre $({}^n\sqrt{r})^n\neq r$, dann setzen wir $\epsilon:=\frac{1}{2}|r-({}^n\sqrt{r})^n|$ und es gilt $0<\epsilon$. Die Abbildung $x\mapsto x^n$ ist im Punkt ${}^n\sqrt{r}$ stetig. Wir finden ein $\delta\in\mathbb{R}^{>}$, so daß aus $|x-{}^n\sqrt{r}|\le\delta$ folgt $|x^n-({}^n\sqrt{r})^n|\le\epsilon$.

1. Wäre $({}^n\sqrt{r})^n<r$, dann würde ${}^n\sqrt{r}+\delta\in A(n,r)$ und damit ${}^n\sqrt{r}+\delta\le{}^n\sqrt{r}$ gelten. Widerspruch!

2. Wäre $({}^n\sqrt{r})^n>r$, dann würde ${}^n\sqrt{r}-\delta\notin A(n,r)$ und damit ${}^n\sqrt{r}-\delta\ge{}^n\sqrt{r}$ gelten. Widerspruch!

□

35.1 Aufgaben

1. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Zeigen Sie, daß eine Abbildung $X \to Y$ stetig ist, wenn X diskret oder Y chaotisch ist.

2. Zeigen Sie, daß jede Abbildung $f : W \to \mathbb{R}$ stetig ist, wenn W eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

3. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie: Wenn Y diskret ist, dann ist f lokal konstant.

4. Zeigen Sie: Eine stetige Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}$ ist konstant.

5. Sei $W \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $f : W \to \mathbb{R}$ stetig genau dann ist, wenn für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

6. Seien $W, V \subseteq \mathbb{R}$, $f : W \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(W) \subseteq V$ und $g : V \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, daß die Komposition $g \circ f : W \to \mathbb{R}$ stetig ist.

7. Sei $W \subseteq \mathbb{R}$ und $f : W \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, daß $\frac{1}{f} : W \setminus \{x \in W \mid f = 0\} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

8. Zeigen Sie die Stetigkeit der Abbildungen sin, cos, sinh und cosh von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

9. Sei $q \in \mathbb{Q}$ und $q = \frac{a}{b}$ mit teilerfremden $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Für $x \in \mathbb{R}^{>}$ definieren wir
$$x^q := (\sqrt[b]{x})^a \ .$$
Zeigen Sie für $q, q' \in \mathbb{Q}$ die Relationen $(x^q)^{q'} = x^{qq'}$, $x^q x^{q'} = x^{q+q'}$.

10. Zeigen Sie, daß $\mathtt{lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt.

    Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$ daß $1 \leq \sqrt[n]{n}$. Für $\epsilon \in (0, 1)$ und $n \geq \frac{2}{\epsilon^2}$ gilt $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \epsilon$. In der Tat folgt aus $\sqrt[n]{n} > 1 + \epsilon$, daß $n > (1 + \epsilon)^n \geq 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 \geq n^2 \frac{\epsilon^2}{2}$, also $n < \frac{2}{\epsilon^2}$. □

36 Umkehrfunktionen

Wir betrachten jetzt reelle Zahlen a, b mit $a \leq b$.

Lemma 36.1 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $x \in \mathbb{R}$ und erfülle eine der beiden Ungleichungen $f(a) \leq x \leq f(b)$ oder $f(b) \leq x \leq f(a)$. Dann existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = x$.*

Proof. Wir argumentieren indirekt. Wir betrachten den Fall, daß $f(a) \leq f(b)$ gilt. Wir nehmen an, daß es kein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = x$ gibt. Wir betrachten die Teilmengen

$$U := f^{-1}(-\infty, x) \ , \quad V := f^{-1}(x, \infty)$$

von $[a, b]$. Da f stetig ist, sind diese offen nach Lemma 35.4. Da nach Annahme der Punkt x nicht im Bild von f ist, gilt $U \cup V = [a, b]$. Weiter sind diese Teilmengen nicht leer, da $a \in U$ und $b \in V$ gilt. Damit wäre aber $[a, b]$ nichttrivial in zwei disjunkte offene Teilmengen zerlegt und deshalb nicht zusammenhängend. Widerspruch nach Lemma 34.3. □

Wir benutzen den Zwischenwertsatz, um folgende Aussage zu zeigen.

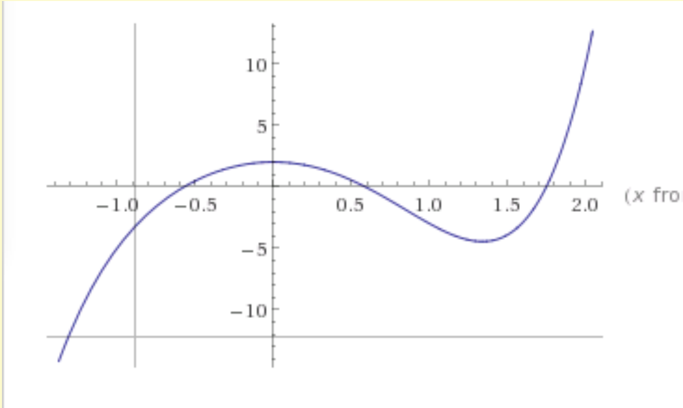
Lemma 36.2 *Ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ ungeraden Grades n hat eine Nullstelle.*

Proof. Wir schreiben

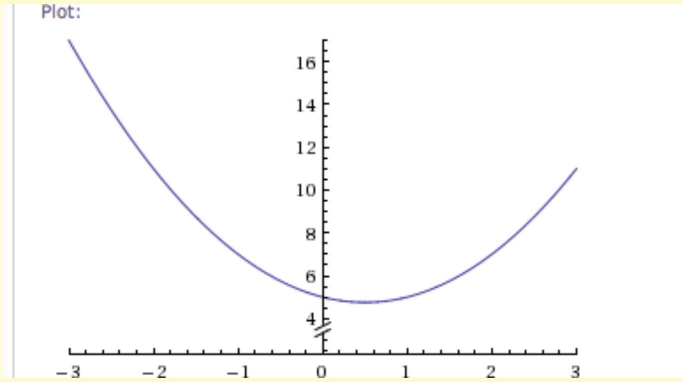
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0 \ .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $a_n > 0$ gilt. Anderfalls ersetzen wir nämlich p durch $-p$. Wenn wir p als Abbildung $p : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ betrachten, dann gilt $\mathtt{lim}_{n \to \infty} p(\pm n) = \pm\infty$. Folglich finden wir eine natürliche Zahl n derart, daß $p(-n) < 0$ und $0 < p(n)$ gilt. Dann ist $0 \in [p(-n), p(n)]$ und nach Lemma 36.1 gibt es ein $x \in [-n, n]$ mit $p(x) = 0$. □

Hier ist ein Bild von $x^5 - 6x^2 + 2$. Wir können $n = 3$ wählen.



Wenn wir die Voraussetzung, daß p ungeraden Grad hat, weglassen, dann stimmt die Aussage nicht. Hier ein Bild von $x^2 - x + 5$:



Wir betrachten ein Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und eine Abbildung $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Lemma 36.3 *Wenn f stetig und strikt monoton ist, dann ist $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ eine Bijektion.*[2]

Proof.

1. Aus der Monotonie von f folgt $f([a,b]) \subseteq [f(a), f(b)]$
2. Da die Abbildung f sogar strikt monoton ist, ist sie injektiv.
3. Da f stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, daß f surjektiv ist.

□

Möge die Abbildung $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ stetig und strikt monoton sein. Dann können wir nach Lemma 36.3 die inverse Abbildung

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$$

bilden.

Lemma 36.4 *Die Abbildung f^{-1} ist strikt monoton und stetig.*

Proof. Wir zeigen zunächst indirekt, daß f^{-1} strikt monoton ist. Seien $c, d \in [f(a), f(b)]$ und $c < d$. Wäre $f^{-1}(c) \geq f^{-1}(d)$, dann würde $f(f^1(c)) \geq f(f^{-1}(d))$ gelten, also $c \geq d$. Widerspruch.
Wir zeigen nun, daß f^{-1} stetig ist. Sei $U \subseteq [a,b]$ eine offene Teilmenge. Dann müssen wir zeigen, daß ihr Urbild $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ unter f^{-1} eine offene Teilmenge von $[f(a), f(b)]$ ist.
Wir betrachten ein Element $c \in f(U)$ und müssen dann zeigen, daß $f(U)$ eine Umgebung von c enthält. Es existiert ein $x \in U$ mit $f(x) = c$. Da U offen ist, können wir eine Umgebung von x in U der Form $[y,z]$ finden. Es gilt $[f(y), f(z)] = f([y,z]) \subseteq f(U)$. Also ist $[f(y), f(z)]$ eine Umgebung von c in U. □

[2]Formal korrekt müßten wir schreiben: $_{|[f(a),f(b)]}f$

Wir betrachten eine Abbildung $f : (a, b) \to (c, d)$, wobei wir zulassen, daß a oder c den Werte $-\infty$, und b oder d den Wert ∞ haben. Wir wollen den Konstruktion einer stetigen Umkehrfunktion auf diesen Fall ausdehnen, in welchem der Definitionsbereich von f kein beschränktes abgeschlossenes Intervall ist. Dazu machen wir die folgenden Annahmen.

Assumption 36.5 *1. Die Abbildung f ist strikt monoton wachsend.*

2. Die Abbildung f ist stetig.

3. Für eine monoton fallende Folge (x_n) in (a, b) mit $\mathtt{lim}_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

4. Für eine monoton wachsende Folge (x_n) in (a, b) mit $\mathtt{lim}_{n\to\infty} x_n = b$ gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} f(x_n) = d$.

Die dritte und vierte Bedingung ist wichtig, um die Surjektivität von f zu sichern.

1. Die Abbildung $\mathtt{id} : (0, \infty) \to (0, \infty)$ erfüllt 36.5.

2. Die Abbildung $(0, \infty) \ni x \mapsto x^n \in (0, \infty)$ erfüllt 36.5.

3. Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ erfüllt 36.5.

Lemma 36.6 *Wenn eine Abbildung $f : (a, b) \to (c, d)$ die Bedingungen 36.5 erfüllt, dann dann gibt es eine stetige, monotone Umkehrfunktion $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$, welche ihrerseits den Bedingungen 36.5 genügt.*

Proof.

1. f ist injektiv (strikte Monotoie).

2. f ist surjektiv. Sei $y \in (c, d)$. Dann existieren $a', b' \in (a, b)$ mit $y \in [f(a'), f(b')]$. Dann existiert $x \in [a', b']$ mit $f(x) = y$.

3. f^{-1} ist stetig (lokale Eigenschaft).

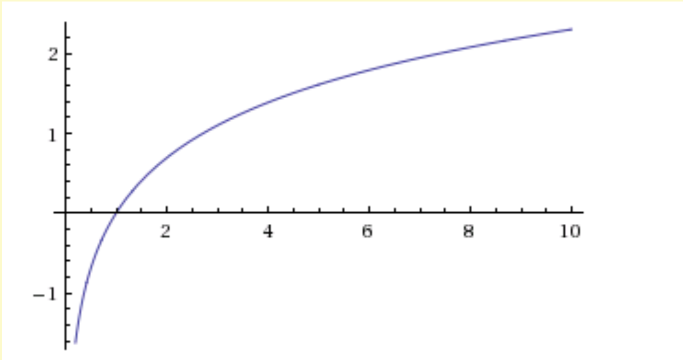
Die Abbildung f^{-1} erfüllt 36.5. □

1. Die Abbildung $\mathbb{R}^{>} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}^{>}$ erfüllt die Bedingungen von Lemma 36.5. Wir schließen, daß die Wurzel $\mathbb{R}^{>} \ni \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ eine strikt monotone, stetige Abbildung ist.

2. Die Abbildung
$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>}$$
hat eine strikt monotone stetige inverse Abbildung
$$\log : \mathbb{R}^{>} \to \mathbb{R} \ .$$

Wir sehen später, daß diese auf dem Intervall $(0, 2)$ mit der schon früher definierten, auch mit log bezeichneten Abbildung übereinstimmt.

Hier ist ein Plot der Funktion log:



Sei $x \in (0, \infty)$. Bisher haben die Potenzen x^q zunächst für $q \in \mathbb{N}$, dann für $q \in \mathbb{Z}$ und schließlich für $q \in \mathbb{Q}$ definiert.

Definition 36.7 *Sei $x \in (0, \infty)$. Dann definieren wir für $q \in \mathbb{C}$:*

$$x^q := \exp(q \log(x)) \ .$$

Ist $q \in \mathbb{Q}$, dann stimmt diese Definition mit der Früheren überein. Wir schreiben dazu $q := \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Dann gilt zunächst

$$\exp(\frac{1}{b} \log(x)) = \sqrt[b]{x} \ ,$$

da

$$\exp(\frac{1}{b} \log(x))^b = \exp(\log(x)) = x \ .$$

Folglich gilt

$$\exp(q \log(x)) = (\sqrt[b]{x})^a \ .$$

Die rechte Seite ist unsere alte Definition von x^q, während die linke Seite die Definition von x^q entsprechend 36.7 ist.

36.1 Aufgaben

1. Sei $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß die Abbildung

   $$(0, \infty) \ni x \mapsto x^q \in \mathbb{R}$$

   stetig ist.

2. Zeigen Sie: Eine stetige injektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist monoton.

3. Geben Sie eine injektive, nicht monotone Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.

4. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, X zusammenhängend und f stetig. Zeigen Sie, daß $f(X)$ zusammenhängend ist.

5. Sei $W \subseteq X$ eine zusammenhängende Menge und $f : W \to \mathbb{R}$ stetig. Seien $a, b \in f(W)$ und $a \leq b$. Zeigen Sie, daß $[a, b] \in f(W)$ gilt.

37 Extremwerte

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

Definition 37.1 *1. Die Abbildung f hat im Punkt x ein lokales Maximum, wenn es eine Umgebung U von x gibt, so daß $f(x)$ eine obere Schranke von $f_{|U}$ ist.*

2. Die Abbildung f hat im Punkt x ein (globales) Maximum, wenn $f(x)$ eine obere Schranke von f ist.

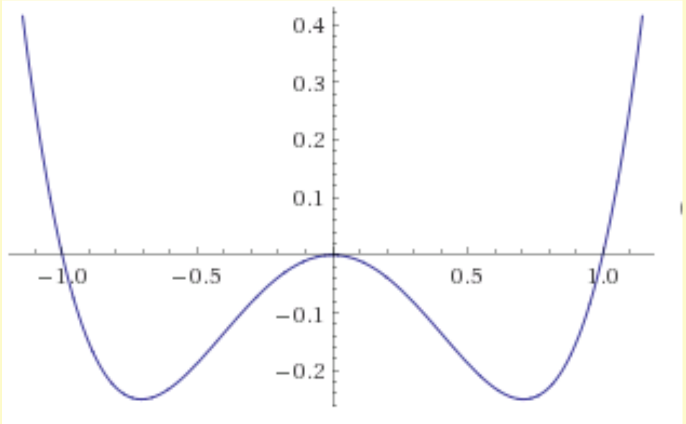
Lokale und globale Minima werden analog definiert.

1. Die Abbildung $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat im Punkt 0 ein globales Minimum.

2. Die Abbildung $x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat keine lokalen Extremwerte. Das folgt aus der strikten Monotonie dieser Abbildung.

3. Die Abbildung $x^2_{|[2,3]} : [2, 3) \to \mathbb{R}$ hat ein globales Minimum in 2 und kein lokales Maximum.

4. Die Abbildung $x^4 - x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat in 0 ein lokales Maximum und in $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ globale Minima. Sie hat kein globales Maximum.



Im Folgenden werden wir hinreichende Bedingungen für die Existenz von Extremwerten angeben.

Sei (x_n) eine Folge in einer Menge X, also ein Element von $X^{\mathbb{N}}$. Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine strikt monotone Abbildung, dann heißt $(x_n) \circ f = (x_{f(n)}) \in X^{\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (x_n).

Definition 37.2 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge hat.*

Lemma 37.3 *Eine abgeschlossene Teilmenge W eines folgenkompakten Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist folgenkompakt.*

Proof. Sei (w_n) eine Folge in W. Dann besitzt sie als Folge in X eine konvergente Teilfolge. Da W abgeschlossen ist, ist diese Teilfolge nach Lemma 34.9 auch in W konvergent. □

1. Ein chaotischer topologischer Raum ist folgenkompakt da in ihm jede Folge konvergiert.

2. $\mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie ist nicht folgenkompakt. Die Folge (n) hat keine konvergente Teilfolge.

3. $\mathbb{R}$ ist nicht folgenkompakt, da sonst die Teilmenge $\mathbb{N}$ folgenkompakt wäre.

Lemma 37.4 (Bolzano-Weierstrass) *Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge W von $\mathbb{R}$ ist folgenkompakt.*

Proof. Sei (x_k) eine Folge in W. Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{Z}$ die Teilmenge $I(n,i) := (\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$. Da W beschränkt ist, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$\{i \in \mathbb{Z} \mid I(n,i) \cap W \neq \emptyset\}$$

endlich. Wir definieren nun rekursiv eine Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt. Wir wählen $g(0) \in \mathbb{Z}$ so daß

$$\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in I(0, g(0))\}$$

unendlich ist. Wenn $g(n)$ schon definiert ist, dann wählen wir $g(n+1)$ so daß

$$I(n+1, g(n+1)) \subset I(n, g(n))$$

und

$$\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in I(n+1, g(n+1))\}$$

unendlich ist.
Wir definieren nun die injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv wie folgt: Wir setzen $f(0) \in \mathbb{N}$ so daß $x_{f(0)} \in I(0, g(0))$ gilt. Wenn nun $f(n)$ schon definiert ist, dann wählen wir

$$f(n+1) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (k \geq f(n)) \wedge (x_k \in I(n, g(n)))\} \ .$$

Die Teilfolge $(x_{f(i)})$ ist eine Cauchyfolge in W. Da W abgeschlossen und damit als Teilmenge von $\mathbb{R}$ vollständig ist (Lemma 5), konvergiert diese Teilfolge. □

Corollary 37.5 *Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist folgenkompakt.*

Proof. Übungsaufgabe. Betrachte die Komponenten. □

1. Das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist folgenkompakt.

2. Das Intervall $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist nicht folgenkompakt. In der Tat hat die Folge (n^{-1}) in $(0, 1]$ keine konvergente Teilfolge. Beachte, daß $(0, 1]$ nicht abgschlossen ist.

3. Die unbeschränkte Teilmenge Menge $[0, \infty)$ ist nicht folgenkompakt.

Lemma 37.6 *Sei $(X, \mathcal{T})$ folgenkompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig.*

1. f ist beschränkt.

2. Die Abbildung f hat auf X ein globales Maximum und Minimum.

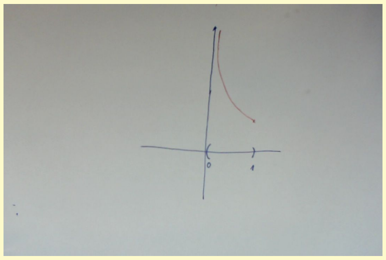
Proof.

1. Wir zeigen zunächst die Beschränktkeit von f. Wir argumentieren indirekt. Sei f nach oben unbeschränkt. Dann finden für eine Folge (x_n) in X mit der Eigenschaft daß $f(x_n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Indem wir (x_n) durch eine Teilfolge ersetzen, können wir annehmen, daß (x_n) konvergiert. Da f stetig ist, konvergiert $(f(x_n))$. Das ist aber nicht möglich, da diese Folge unbeschränkt ist.

2. Wir zeigen nun die Existenz eines globalen Maximums. Nach 1. ist f beschränkt. Sei $y := \sup f$. Dann existiert eine Folge $(x_n) \in X$ derart, daß $\texttt{lim}_{n\to\infty} f(x_n) = y$ gilt. Indem wir (x_n) durch eine Teilfolge ersetzen, können wir annehmen, daß (x_n) konvergiert. Wir setzen $x := \texttt{lim}_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von f, daß $f(x) = y$ ist. Damit hat f an der Stelle x eine globales Maximum.

□

1. Wir betrachten die Abbildung $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-1}$. Diese Abbildung ist stetig aber nicht beschränkt. Sie hat auch kein Minimum. Hier ist $(0, 1)$ nicht Folgenkompakt. Die Folge $(\frac{1}{n})$ in $(0, 1)$ hat keine konvergente Teilfolge.



2. Wir definieren die Abbildung

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \quad f(x) := \begin{cases} 2 & x = 0 \\ x^{-1} & x \neq 0 \end{cases}$$

Diese Abbildung ist nicht beschränkt. Das Intervall $[0,1]$ ist folgenkompakt, die Abbildung f ist aber nicht stetig.

37.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie Korollar 37.5.
2. Sei $W \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und strikt monoton. Sei $x \in W$ ein lokales Maximum oder Minimum von $f_{|W}$. Zeigen Sie, daß $x \in \partial W$ liegt.
3. Zeigen Sie, daß ein diskreter topologischer Raum genau dann folgenkompakt ist, wenn er endlich ist.
4. Zeigen Sie, daß eine folgenkompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen ist.

38 Grenzwerte und stetige Fortsetzung von Abbildungen

Seien A, B, C Mengen mit $A \subseteq B$ und $f : A \to C$.

Definition 38.1 *Eine Abbildung $g : B \to C$ heißt Fortsetzung von f auf B wenn $g_{|A} = f$ gilt.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & C \\ & B \arrow[ur, dotted, "g"] & \end{tikzcd}$$

Wenn C nicht leer ist, dann existiert immer eine Fortsetzung. Sei $c \in C$ irgend ein Element. Dann kann man g auf B durch $g_{|A} := f$ und $g_{|B \setminus A} := \mathtt{const}_c$ definieren. In der Regel möchte man aber, daß die Fortsetzung g Eigenschaften von f erbt, zum Beispiel Stetigkeit. Wir untersuchen das Problem, stetige Fortsetzungen stetiger Abbildungen im topologischen Kontext zu finden.
Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Wir betrachten eine Teilmenge $W \subset \mathbb{R}$, ein Element $x \in \overline{W}$ und eine Abbildung $f : W \to Y$.

Definition 38.2 *Die Abbildung f hat im Punkt x den Grenzwert $y \in Y$, wenn die Abbildung $g : W \cup \{x\} \to Y$ gegeben durch $g_{|W \setminus \{x\}} := f_{|W \setminus \{x\}}$ und $g(x) := y$ im Punkt x stetig ist. Wir notieren diese Eigenschaft durch $\mathtt{lim}_{w \to x} f(w) = y$.*

1. Beachte, daß der Wert von f an der Stelle x im Fall, daß $x \in W$ gilt, für den Grenzwert irrelevant ist.

2. Die Abbildung $f : W \to Y$ ist also genau dann stetig, wenn für jedes $x \in W$ gilt

$$\texttt{lim}_{w \to x} f(w) = f(x) \ .$$

3. Wenn x ein isolierter Punkt von $\overline{W}$ ist, dann hat f in diesem Punkt jeden Punkt $y \in Y$ als Grenzwert.

4. **Lemma 38.3** *Wenn $(Y, \mathcal{T}_Y)$ die Hausdorff-Eigenschaft hat und x in $\overline{W}$ nicht isoliert ist, dann hat f im Punkt x höchstens einen Grenzwert.*

   Proof. Seien $y, y' \in Y$ zwei verschiedene Grenzwerte von f im Punkt x. Dann existieren Umgebungen U und U' von y und y' mit $U \cap U' = \emptyset$. Seien $\tilde{f}$ und $\tilde{f}'$ die Fortsetzungen von f auf $W \cup \{x\}$ durch $\tilde{f}(x) = y$ und $\tilde{f}'(x) = y'$. Dann sind $\tilde{f}^{-1}(U)$ und $\tilde{f}'^{,-1}(U')$ zwei Umgebungen von x mit $\tilde{f}^{-1}(U) \cap \tilde{f}'^{,-1}(U') = \{x\}$. Damit wäre x isoliert, was wir ausgeschlossen hatten. □

Wir nehmen an, daß die Topologie $\mathcal{T}_X$ von einem Abstand d_X induziert wird. Seien wie vorher $W \subseteq X$, $f : W \to Y$, $x \in \overline{W}$ und $y \in Y$.

Lemma 38.4 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

1. *Es gilt* $\texttt{lim}_{w \to x} f(w) = y$.

2. *Für jede Folge (w_n) in $W \setminus \{x\}$, welche gegen x konvergiert, konvergiert $(f(w_n))$ gegen y.*

3. *Für jede Umgebung U von y existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß aus $w \in W \setminus \{x\}$ und $d_X(w, x) \leq \delta$ folgt $f(w) \in U$.*

Proof.

1. Wir beginnen mit 1. ⇒ 2.. Sei $g : W \cup \{w\} \to Y$ die stetige Fortsetzung von $f_{|W \setminus \{x\}}$ auf $W \cup \{x\}$ durch $g(x) := y$. Sei nun (w_n) eine Folge in $W \setminus \{x\}$ die gegen x konvergiert. Da g in x stetig ist, konvergiert $(g(w_n))$ gegen y. Nun gilt $(f(w_n)) = (g(w_n))$. Also konvergiert auch $(f(w_n))$ gegen y.

2. Wir zeigen jetzt 2. ⇒ 3.. Wir argumentieren indirekt. Sei eine Umgebung U von y gegeben und existiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $w_n \in W \setminus \{w\}$ mit $d(x, w_n) \leq (n+1)^{-1}$ und $f(w_n) \notin U$. Dann gilt $\texttt{lim}_{n \to \infty} w_n = x$ und $(f(w_n))$ konvergiert nicht oder zumindest nicht gegen y.

3. Wir zeigen nun 3. ⇒ 1. In der Tat ist die Bedingung 3 genau das Kriterium für die Stetigkeit der Fortsetzung von $f_{|W \setminus \{x\}}$ auf $W \cup \{x\}$ durch $f(x) := y$.

□

1. Wir betrachten $(0,1)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und die Abbildung $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 + 3$. Dann gilt $\mathtt{lim}_{x\to 0} f(x) = 3$ und $\mathtt{lim}_{x\to 1} f(x) = 4$.

2. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) := \frac{x^2-1}{x-1}$. Dann gilt $\mathtt{lim}_{x\to 1} f(x) = 2$. Dazu schreiben wir $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

3. Mit Hilfe der Bedingung 2. von Lemma 38.4 können wir die in Lemma 23.1 gezeigten Regeln sinngemäß auf Grenzwerte von Funktionen übertragen. So gilt etwa:

$$\mathtt{lim}_{x\to 0} \cos(x)\exp(3+x) + 4x^3 = \cos(0)\exp(3) + 0 = \exp(3) \ .$$

4. Wir betrachten $W := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : W \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) := \frac{1}{x}$. Es gilt

$$\mathtt{lim}_{x\to 0} f_{|(0,\infty)} = \infty \ .$$

   Die Funktion f selbst hat keinen Grenzwert für $x \to 0$.

Sei $W \subseteq X$ und $f : W \to Y$ eine stetige Abbildung.

Lemma 38.5 *Wenn $(Y, \mathcal{T}_Y)$ die Hausdorff-Eigenschaft hat, dann gibt es höchstens eine stetige Fortsetzung $\bar{f} : \overline{W} \to Y$ von f.*

Proof. Sei $\bar{f} : \overline{W} \to Y$ eine stetige Fortsetzung. Sei weiter $x \in \overline{W} \setminus W$. Dann ist x nicht isoliert und die Abbildung $\bar{f}_{|W\cup\{x\}} : W \cup \{x\} \to Y$ stetig. Folglich gilt

$$\bar{f}(x) = \mathtt{lim}_{w\to x} f(w) \ .$$

Das zeigt mit Lemma 38.3 die Eindeutigkeit der Fortsetzung. □

□

1. Eine stetige Fortsetzung muß jedoch nicht immer existieren. Wir betrachten

$$x^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R} \ .$$

   Dies Abbildung hat keine stetige Forsetzung auf $\overline{(0,1)} = [0,1]$.

2. Die Abbildung $\mathtt{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathtt{sign}(x) := \begin{cases} 1 & > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

   hat keine stetige Forsetzung auf $\mathbb{R}$.

3. Die Abbildung $x\mathtt{sign}(x) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ hat eine stetige Forsetzung auf $\mathbb{R}$.

4. Sei $r \in (0,\infty)$. Dann hat die Abbildung $\mathbb{Q} \ni x \mapsto r^x : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$.

38.1 Aufgaben

1. Untersuchen Sie, ob die Funktion $f : W \to \overline{\mathbb{R}}$ einen Grenzwert für $x \to u$ hat:

   (a) $W := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) := \frac{\exp(x)-1-x}{x^2}$, $u := 0$

   (b) $W := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) := \frac{1}{x^2}$, $u := 0$

   (c) $W := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) := \frac{\mathtt{sign}(x)}{x}$, $u := 0$

   (d) $W := \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) := \frac{x^2-1}{\exp(x)-1}$, $u := 1$.

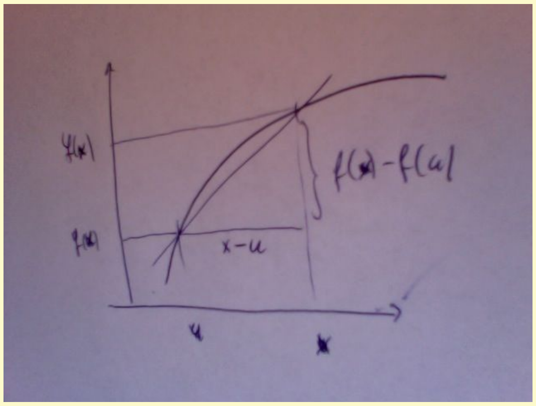
39 Differenzierbarkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $u \in U$.

Definition 39.1 *Wir definieren den Differenzenquotienten von f an der Stelle u als die Abbildung*

$$U \setminus \{u\} \ni x \mapsto \Delta_u(f)(x) := \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \in \mathbb{R} \ .$$

Hier sind Interpretationen des Differenzenquotienten in Anwendungen:



1. Wir betrachten eine Straße im Gebirge. Wir modellieren die Situation, indem wir die Höhe der Straße als Funktion der Projektion auf die Horizontale angeben. Ein Abschnitt dieser Horizontalen wird durch ein Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ beschrieben und wir betrachten die Höhenfunktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Sei jetzt $u \in (a, b)$. Der Differenzenquotient $\Delta_u(f)(x)$ gibt den auf den Abstand $x - u$ normierten Höhenunterschied der Straße an den Stellen u und x an, also die mittlere Steigung auf dieser Strecke.

2. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes entlang einer Geraden. In diesem Fall beschreibt die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ den Ort des Punktes in Abhängigkeit des Zeitparameters in (a, b). Der Differenzenquotient $\Delta_u(f)(x)$ beschreibt die mittlere Geschwindigkeit des Punktes zwischen den Zeiten u und x.

Es gilt $u \in \overline{U \setminus \{u\}}^U$. Folglich können wir den Grenzwert des Differenzenquotienten $\Delta_u(f)$ an der Stelle u betrachten.

Definition 39.2 (Differenzierbarkeit) *Die Abbildung f heißt im Punkt u differenzierbar, wenn der Grenzwert $\mathtt{lim}_{x \to u} \Delta_u(f)(x)$ existiert. In diesem Fall heißt die reelle Zahl*

$$f'(u) := \mathtt{lim}_{x \to u} \Delta_u(f)(x)$$

die Ableitung von f im Punkt u.

Die Abbildung f heißt differenzierbar, wenn sie in allen Punkte von U differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$U \ni u \mapsto f'(u) \in \mathbb{R}$$

die Ableitung von f.

Wir interpretieren die Ableitung in den oben betrachteten Beispielen:

1. Die Ableitung $f'(u)$ ist ein Maß für den Anstieg der Straße an der Stelle u.

2. Die Ableitung $f'(u)$ ist die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit u.

Lemma 39.3 *Wenn f im Punkt u differenzierbar ist, dann ist f im Punkt u stetig.*

Proof. Es gilt für $x \in U$ daß

$$f(x) = f(u) + (x - u)\Delta_u(f)(x) .$$

Der Grenzwert des zweite Summanden für $x \to u$ existiert und ist Null.
Daraus folgt sofort

$$\mathtt{lim}_{x \to u} f(x) = f(u) .$$

□

1. Sei $r \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = rx$ gegeben. Dann gilt $f'(u) = r$ für jedes $u \in \mathbb{R}$.

2. Die Ableitung einer konstanten Funktion ist Null.

Wir wollen nun die Ableitungen einfacher Funktionen berechnen. Dazu überlegen wir uns zunächst die folgenden Regeln:

Lemma 39.4 (Summen und Produkte) *Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zwei Abbildungen, die im Punkt $u \in U$ differenzierbar sind. Dann gilt:*

1. *Die Summe $f + g$ ist im Punkt u differenzierbar und es gilt*

$$(f + g)'(u) = f'(u) + g'(u) \ .$$

2. *Das Produkt fg ist im Punkt u differenzierbar und es gilt*

$$(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u) \ .$$

3. *Wenn f keine Nullstelle hat, dann ist $\frac{1}{f}$ im Punkt u differenzierbar und es gilt*

$$(\frac{1}{f})'(u) = -\frac{f'(u)}{f(u)^2} \ .$$

Proof.

1. Es gilt $\Delta_u(f + g) = \Delta_u(f) + \Delta_u(g)$. Daraus folgt sofort 1.

2. Es gilt $\Delta_u(fg)(x) = \Delta_u(f)(x)g(x) + f(u)\Delta_u(g)(x)$. Da g im Punkt u stetig ist, folgt daraus sofort 2.

3. Es gilt

$$\Delta_u(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{x-u}\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(u)}\right) = -\frac{1}{f(u)f(x)}\frac{f(x) - f(u)}{x - u} = -\frac{\Delta_u(f)(x)}{f(u)f(x)} \ .$$

   Die Behauptung folgt nun sofort durch Bildung des Grenzwertes für $x \to u$.

1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = ax + b$ gegeben. Dann gilt $f'(u) = a$ für alle $u \in \mathbb{R}$.

2. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ daß $(x^n)' = nx^{n-1}$. Wir zeigen das induktiv. Wir hatten schon gesehen, daß $x' = 1$ gilt. Wir führen den Induktionsschritt $(n) \Rightarrow (n+1)$ durch:

$$(x^{n+1})' = (xx^n)' = x'x^n + x(x^n)' = x^n + xnx^{n-1} = (n + 1)x^n \ .$$

3. Es gilt
$$(\sum_{n=0}^{k} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{k-1} a_{n+1}(n+1)x^n \ .$$

Einige wichtige Funktionen sind über ihre Potenzreihen definiert. Im Folgenden betrachten wir die Ableitung von Potenzreihen im Allgemeinen. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}^{>}$. Wir definieren die Abbildung
$$(-r, r) \ni x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

Lemma 39.5 *1. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$ ist gleich r.*

2. Die Abbildung f ist differenzierbar.

3. Es gilt für $x \in (-r, r)$ daß
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n \ .$$

Proof.

1. Wir berechnen den Konvergenzradius der der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$ nach Lemma 33.8. Wir rechnen
$$|a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = (|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}} = |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n(n+1)}} \ ,$$
$$\sqrt[n]{|a_{n+1}|(n+1)} = \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\,\sqrt[n]{n+1}|a_{n+1}|^{\frac{1}{(n+1)n}} \ .$$
Wir benutzen
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = r^{-1} \ , \quad \mathtt{lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1 \ , \quad \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{(n+1)n}} \le 1$$
um auf
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|(n+1)} = r^{-1} \ .$$
zu schließen. Für $r = \infty$ werden diese Formeln entsprechend interpretiert.

2. Sei nun $u \in (-r, r)$. Nach dem Transformationssatz 33.10 gibt es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit einem positiven Konvergenzradius derart daß
$$f(u + z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \ .$$

Damit gilt

$$\Delta_u(f)(u+z) = z^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} z^n \ .$$

Wir schließen mit Lemma 33.9,2., daß

$$\mathtt{lim}_{z\to 0}\Delta_u(f)(u+z) = b_1$$

gilt. Damit ist f im Punkt u differenzierbar.

3. Wir haben im Transformationssatz gezeigt, daß

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n u^{n-1}$$

gilt. Daraus folgt sofort die Formel für $f'(u)$.

□

1. Es gilt $\exp' = \exp$. In der Tat, nach Lemma 39.5 gilt

$$\exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \exp(x) \ .$$

□

2. Es gilt für $x \in (0,2)$ daß
$$\log'(x) = \frac{1}{x} \ .$$
Zur Erinnerung,
$$\log(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n} \ .$$
Nach Lemma 39.5 gilt
$$\log'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(1-x)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} \ .$$

3. Es gilt $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$. In der Tat gilt zum Beispiel
$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \ .$$

Die Eigenschaft der Differenzierbarkeit läßt sich wie folgt umformulieren.

Lemma 39.6 *Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $u \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann ist f im Punkt u genau dann differenzierbar, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ und eine Abbildung $r : U \to \mathbb{R}$ gibt, so daß*

$$f(x) - f(u) - a(x-u) = (x-u)r(x) \ , \quad \texttt{lim}_{x\to u} r(x) = 0 \ .$$

In diesem Fall gilt $f'(u) = a$.

Proof. Sei die Bedingung erfüllt. Dann gilt

$$\Delta_u(f)(x) - a = r(x) \ .$$

Damit ist f im Punkt differenzierbar und es gilt $f'(u) = a$.
Sei umgekehrt f in u differenzierbar. Dann setzen wir

$$r(x) := \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x = u \\ \Delta_u(f)(x) - f'(u) & x \in U \setminus \{u\} \end{array} \right. \ .$$

Dann gilt $\texttt{lim}_{x\to u} r(x) = 0$. □

Lemma 39.7 (Kettenregel) *Seien U, V offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : V \to \mathbb{R}$ Abbildungen derart, daß $f(U) \subseteq V$ gilt. Dann ist die Komposition $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ definiert. Seien $u \in U$, f in u und g in $f(u)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ im Punkt u differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(u) = g'(f(u))f'(u) \ .$$

Proof. Wir schreiben

$$f(x) = f(u) + f'(u)(x-u) + (x-u)r(x)$$

und

$$g(y) = g(f(u)) + g'(f(u))(y - f(u)) + (y - f(u))s(y) \ .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(u)) &= g'(f(u))(f(x) - f(u)) + (f(x) - f(u))s(f(x)) \\ &= g'(f(u))(f'(u)(x-u) + (x-u)r(x)) \\ &\quad +(x-u)(f'(u) + r(x))s(f(x)) \\ &= g'(f(u))g'(u)(x-u) + (x-u)t(x) \end{aligned}$$

mit

$$t(x) := r(x) + (f'(u) + r(x))s(f(x)) \ .$$

In der Tat gilt $\texttt{lim}_{x\to u} t(x) = 0$. □

Hier sind einige Beispiele, in welchen die bisher bekannten Regeln angewendet werden:

1. $\exp(x^2)' = 2x\exp(x^2)$.
2. $\sin(\exp(-x)) = -\exp(-x)\cos(\exp(-x))$.
3. $\sin(x\log(x^3+1))' = (\log(x^3+1) + \frac{3x^3}{x^3+1})\cos(x\log(x^3+1))$.

Lemma 39.8 (Umkehrfunktion) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $u \in (a, b)$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ strikt monoton und im Punkt u differenzierbar mit $f'(u) \neq 0$. Sei $c := \mathtt{lim}_{x\to a} f(x)$ und $d := \mathtt{lim}_{x\to b}$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ im Punkt $v := f(u)$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(v) = \frac{1}{f'(u)} \ .$$

Proof. Die Umkehrfunktion existiert und ist stetig nach Lemma 36.6. Wir rechnen für $z \in (c, d)$:

$$\begin{aligned}
\Delta_v(f^{-1})(z) &= \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(v)}{z - v} \\
&= \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(v)}{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(v))} \\
&= \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(v))}{f^{-1}(z) - f^{-1}(v)}} \\
&= \frac{1}{\Delta_{f^{-1}(v)}(f)(f^{-1}(z))} \ .
\end{aligned}$$

Wir bilden nun den Grenzwert für $z \to v$ und beachten, daß f^{-1} im Punkt v stetig ist. □

Hier sind einige Anwendungen.

1. Wir betrachten $\log := \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Dann gilt
$$\log(x)' = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x} \ .$$
2. $(x^r)' = (\exp(r\log(x)))' = r\frac{1}{x}\exp(r\log(x)) = rx^{r-1}$
3. $(r^x)' = (\exp(x\log(r)))' = \log(r)\exp(x\log(r)) = \log(r)r^x$
4. $(x^x)' = \exp(x\log(x))' = (\log(x) + 1)\exp(x\log(x)) = (\log(x) + 1)x^x$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir erhalten die Abbildung $f' : U \to \mathbb{R}$. Wenn diese wieder differenzierbar ist, dann können wir die zweite Ableitung $f'' : U \to \mathbb{R}$ bilden. Wenn wir diese Prozedur fortsetzen können, dann erhalten wir rekursiv definiert die k-Ableitung

$$f^{(k+1)} := (f^{(k)})' : U \to \mathbb{R} \ .$$

Definition 39.9 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir*

$$C^k(U,\mathbb{R}) := \{f \in \mathbb{R}^U \mid f \text{ ist } k\text{-mal differenzierbar und } f^{(k)} \text{ ist stetig.}\}.$$

Wir definieren die Menge der glatten Funktionen durch

$$C^\infty(U,\mathbb{R}) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U,\mathbb{R}) \ .$$

1. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß $C^k(U,\mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $C^\infty(U,\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-Vekträume (und sogar $\mathbb{R}$-Algebren) sind.
2. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ daß $C^{k+1}(U,\mathbb{R}) \subseteq C^k(U,\mathbb{R})$.
3. Es gilt $\sin, \cos, \exp \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Es gilt $\log \in C^\infty((0,\infty),\mathbb{R})$.
5. Es gilt $x^k|x| \in C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus C^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Sei wieder $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$. Dann kann man diese Abbildung durch ihre Komponenten $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$ ausdrücken.

$$f = (f_1,\ldots,f_n) \ .$$

Definition 39.10 *Die Abbildung f heißt differenzierbar, wenn ihre Komponenten f_i für alle $i = 1,\ldots,n$ differenzierbar sind. Wir setzen $f' := (f'_1,\ldots,f'_n)$. Wir können die Räume $C^k(U,\mathbb{R}^n)$ und $C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$ wir vorher bilden.*

1. Wir werden dies insbesondere auf komplexwertige Funktionen anwenden. Die Räume $C^k(U,\mathbb{C})$ und $C^\infty(U,\mathbb{C})$ sind $\mathbb{C}$-Vektorräume.
2. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung

   $$\mathbb{R} \ni \to \exp(\lambda x) \in \mathbb{C}$$

   glatt und es gilt $\exp(\lambda x)' = \lambda \exp(\lambda x)$.
3. Als Anwendung zeigen wir, daß die Menge

   $$\{f \in \mathbb{C}^\mathbb{R} \mid (\exists \lambda \in \mathbb{C} \mid (f(x) = \exp(\lambda x))\}$$

   im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^\mathbb{R}$ linear unabhängig ist. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda, c \in \mathbb{C}^n$ derart gegeben, daß

   $$\sum_{k=1}^{n} c_k \exp(\lambda_k x) = 0$$

gilt Wir differenzieren bis zu $n-1$ Mal und werten dann bei $x = 0$ aus. Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k^l = 0 \ , \quad l = 0, \dots n-1 \ .$$

Wir betrachten die Matrix $\Lambda = (\lambda_k^l) \in \mathtt{Mat}(n, \mathbb{R})$. Dies ist die Vandermonde Matrix der Zahlen $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Es gilt

$$\det(\Lambda) = \prod_{n \geq k > l \geq 1} (\lambda_k - \lambda_l) \ .$$

Wenn die Komponenten von λ paarweise verschieden sind, dann ist $\det(\Lambda) \neq 0$. Folglich gilt $c = 0$.

39.1 Aufgaben

1. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, daß die Menge

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid (\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid (f(x) = \cos(\lambda x)) \vee (f(x) = \sin(\lambda x))\} \ .$$

   linear unabhängig ist. Zeigen Sie, daß dies auch nach Einschränkung auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ richtig bleibt.

2. Sei $\gamma \in \mathbb{C}$. Zeigen sie, daß die Menge

$$\{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid (\exists k \in \mathbb{N} \mid f(x) = x^k \exp(\gamma x))\}$$

   in $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ linear unabhängig ist. Zeigen Sie, daß diese Menge nach Einschränkung auf eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ immer noch linear unabhängig ist.

40 Extremwerte und Mittelwertsatz

In diesem Kapitel untersuchen wir, wie lokale Eigenschaften einer differenzierbaren Funktion durch ihre Ableitung charakterisiert werden. Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

Definition 40.1 *Sei $u \in U$. Die Abbildung f hat im Punkt u ein lokales Extremum, wenn f in u ein lokales Maximum oder lokales Minimum hat.*

1. Die Funktion $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat im Punkt 0 ein lokales (und sogar globales) Minimum.

2. Die Funktion $x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat keine lokalen Extrema.

3. Die Funktion $x^4 - x^2 : R \to \mathbb{R}$ hat lokale Extrema in 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lemma 40.2 *Wenn f im Punkt x ein lokales Extremum hat, dann gilt $f'(x) = 0$.*

Proof. Möge f im Punkt u ein lokales Maximum haben. Dann existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ von u so daß für alle $v \in V$ die Ungleichung $f(v) \leq f(u)$ gilt. Zur Erinnerung:

$$\Delta_u(f)(v) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} .$$

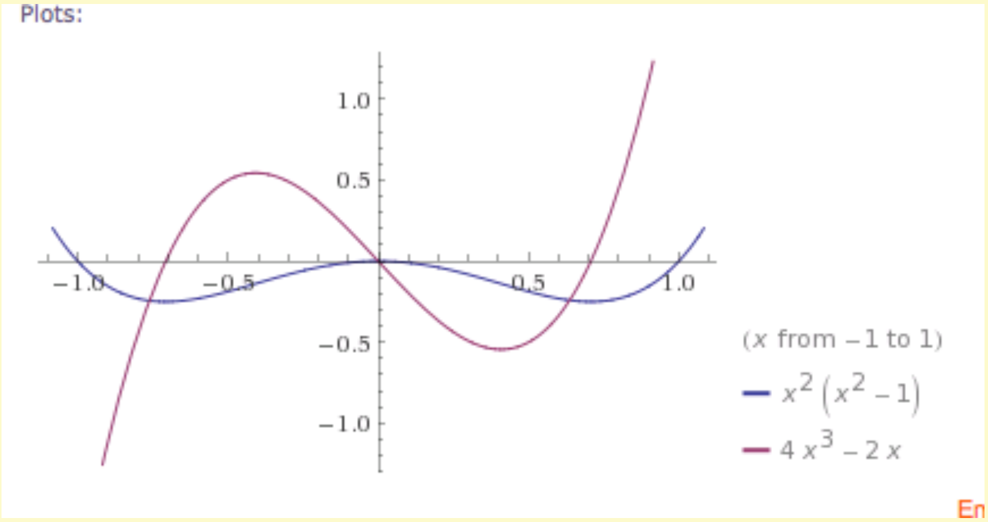
Damit gilt für $v \in V$ daß $\Delta_u(f)(v) \geq 0$ falls $v < u$ und $\Delta_u(f)(v) \leq 0$ falls $v > u$. Es gilt $u \in \overline{V \cap (u, \infty)}$ und $u \in \overline{V \cap (-\infty, u)}$. Daraus folgt $\mathtt{lim}_{v \to u} \Delta_u(f)_{|V \cap (-\infty,u)}(v) \geq 0$ und $\mathtt{lim}_{v \to u} \Delta_u(f)_{|V \cap (u,\infty)}(v) \leq 0$. Beide Grenzwerte ergeben die Zahl $f'(u)$ und folglich gilt $f'(u) = 0$. □

Wir betrachten die oben genannten Beispiele.

1. Es gilt $(x^2)' = 2x$ und $2x(0) = 0$.

2. Es gilt $(x^3)' = 3x^2$. Es gilt $3x^2(0) = 0$ obwohl an dieser Stelle kein lokales Extremum der Funktion liegt. Aus der Bedingung $f'(x) = 0$ kann man also nicht auf ein lokales Extremum an der Stelle x schließen.

3. Die Funktion $(x^4 - x^2)' = 4x^3 - 2x$ hat ihre Nullstellen in 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Der folgende Plot zeigt die Funktion $x^4 - x^2$ und deren Ableitung $4x^3 - 2x$:



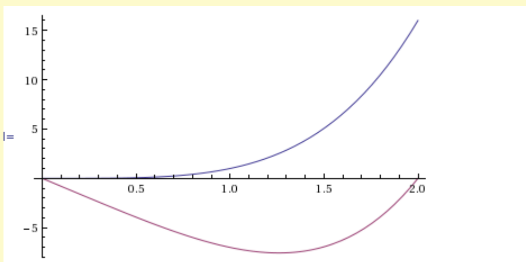
Lemma 40.3 (Mittelwertsatz) *Sei $a, b \in U$ mit $a < b$ und $[a, b] \subseteq U$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

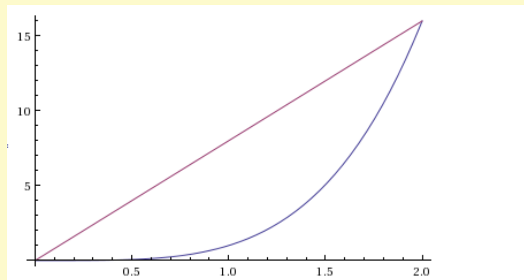
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Proof. Wir betrachten auf $[a, b]$ die Abbildung

$$g(x) := f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Im Bild: $f(x) := x^4$ und $g(x) := x^4 - 8x$ (bzw. x^4 und $8x$) auf $[a, b] = [0, 2]$.





Dann gilt $g(a) = f(a) = g(b)$. Wenn g konstant ist, dann gilt für alle $\xi \in (a, b)$ daß $g'(\xi) = 0$ und damit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Wenn g nicht konstant ist, dann besitzt g nach Lemma 37.6 ein globales Extremum, welches in einem Punkt $\xi \in (a, b)$ liegt. Es gilt

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

□

Corollary 40.4 (Satz von Rolle) *Seien $a, b \in U$ mit $a < b$ und $[a, b] \subseteq U$. Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Proof. Das ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem Mittelwertsatz. □

Lemma 40.5 *Wenn $f' > 0$ ist, dann ist f auf jedem Intervall in U streng monoton wachsend.*

Proof. Sei $I \subseteq U$ ein Intervall und $a, b \in I$ mit $a < b$. Dann gilt $[a, b] \subseteq U$ und für ein $\xi \in (a, b)$ gilt $0 < f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, woraus $f(a) < f(b)$ folgt. □

Definition 40.6 *Ein Punkt $u \in U$ heißt kritischer Punkt von f, wenn $f'(x) = 0$ gilt.*

Wir hatten schon in Lemma 40.2 gesehen, daß ein lokales Extremum von f ein kritischer Punkt sein muß. Die Umkehrung gilt aber nicht wie das Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$ zeigt. Für diese Funktion ist 0 ein kritischer Punkt, aber kein lokales Extremum.
Wenn f zweimal stetig differenzierbar ist, dann kann man mit Hilfe der zweiten Ableitung entscheiden, ob ein kritischer Punkt ein lokales Extremum ist.

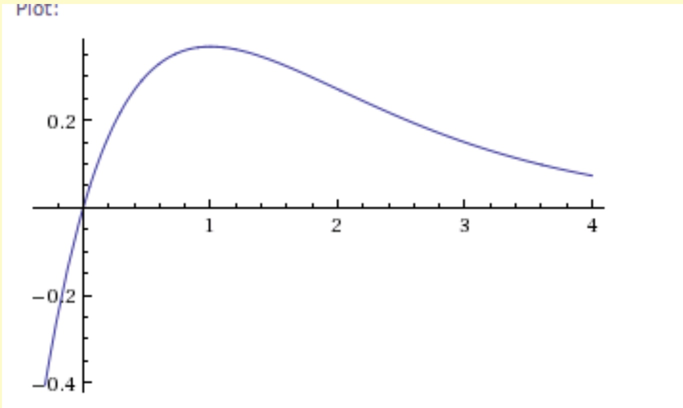
Lemma 40.7 *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei u ein kritischer Punkt von U. Wenn $f''(u) \neq 0$ ist, dann ist u ein lokales Extremum. Genauer ist u ein lokales Maximum, wenn $f''(u) < 0$ und ein lokales Minimum, wenn $f''(u) > 0$ gilt.*

Proof. Wir betrachten den Fall, daß $f''(u) > 0$ gilt. Da f'' stetig ist, existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß $(u-\delta, u+\delta) \subseteq U$ und für alle $x \in (u-\delta, u+\delta)$ die Ungleichung $f''(x) > 0$ gilt. Damit ist f' auf $(u-\delta, u+\delta)$ strikt monoton wachsend. Wir schließen, daß für $x \in (u, u+\delta)$ die Ungleichung $f'(x) > 0$ und für $x \in (u-\delta, u)$ die Ungleichung $f'(x) < 0$ gilt. Damit ist f auf $(u-\delta, u)$ strikt monoton fallend und auf $(u, u+\delta)$ strikt monoton wachsend. Folglich ist $f(u) = \inf f_{|(u-\delta,u+\delta)}$. Damit ist u ein Miniumum von f. □

1. Die Bedingung $f''(u) \neq 0$ ist nicht notwendig für ein lokales Extremum. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4$ hat im Punkt 0 ein lokales Minimum. Es gilt aber $f''(0) = 0$.

2. Wir bestimmen die lokalen Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) := x\exp(-x) \ .$$
Es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f'(x) = \exp(-x) - x\exp(-x)$. Der einzige kritische Punkt dieser Funktion ist 1. Es gilt $f''(x) = x^2\exp(-x) - 2\exp(-x)$ und $f''(1) = -e$. Damit hat f an der Stelle 1 ein lokales Maximum.

   Hier ist ein Plot der Funktion $x\exp(-x)$:



40.1 Aufgaben

1. Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{N}$ die lokalen Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) := x^k \exp(-x) \ .$$
Untersuchen Sie, ob diese Extremwerte globale Extremwerte sind.

2. Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1 + |x-1|$.

3. Bestimmen Sie die die lokalen Extremwerte von $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2\exp(-x^2)$.

41 Eigenschaften von $\sin$, $\cos$ und die Zahl π

In diesem Kapitel studieren wir die trigonometrischen Funktionen sin und cos genauer. Diese Funktionen sind durch ihre Potenzreihen

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ , \quad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

definiert, welche auf ganz $\mathbb{R}$ konvergieren. Die folgenden Eigenschaften haben wir schon eingesehen:

1. $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$
2. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$, $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
3. $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
4. $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

Lemma 41.1 *Die Funktion* cos *hat auf dem Intervall* $[0,\infty)$ *eine Nullstelle.*

Proof. Da $\cos(x)$ stetig ist und $\cos(0) = 1$ gilt, gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^>$ derart, daß für alle $x \in [0,\delta]$ die Ungleichung $\cos(x) > 0$ gilt. Wegen $\sin' = \cos$ ist die Funktion sin auf dem Intervall $[0,\delta]$ strikt monoton wachsend. Insbesondere ist $\sin(\delta) > 0$. Wir zeigen nun indirekt, daß cos auf $[\delta,\infty)$ eine Nullstelle haben muß. Die Funktion cos ist stetig. Gäbe es eine solche Nullstelle nicht, dann würde wegen dem Zwischenwertsatz $\cos(x) > 0$ für alle $x \in [0,\infty)$ gelten. Damit wäre sin auf $[0,\infty)$ strikt monoton wachsend. Insbesondere würde für $x \in (\delta,\infty)$ die Ungleichung $\sin(x) > \sin(\delta)$ gelten. Wir betrachten nun die Funktion $\cos(x) + \sin(\delta)x$ auf dem Intervall $[\delta,\infty)$. Deren Ableitung erfüllt $[\cos(x) + \sin(\delta)x]' = -\sin(x) + \sin(\delta) < 0$ für $\delta < x$. Damit ist $\cos(x) + \sin(\delta)x$ auf $[\delta,\infty)$ strikt monoton fallend, also $\cos(x) < \cos(\delta) + \sin(\delta)(\delta - x)$. Diese Funktion ist sicher nicht von unten beschränkt, was im Widerspruch zur Identität $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ steht. Also hat cos auf $[\delta,\infty)$ eine Nullstelle. □

Definition 41.2 *Wir definieren die Zahl* $\pi \in \mathbb{R}$ *durch*

$$\pi = 2\inf\{x \in \mathbb{R}^> \mid \cos(x) = 0\}\ .$$

Die Zahl π ist wohldefiniert, da die Menge der positiven Nullstellen von cos nicht leer und durch 0 von unten beschränkt ist. Es gilt insbesondere $\pi \geq 2\delta$, wobei δ die Zahl aus dem Beweis von Lemma 41.1 ist. Insbesondere ist π positiv. Da cos stetig ist, gilt

$$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0\ .$$

Für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ gilt $\cos(x) > 0$. Damit ist sin auf diesem Intervall strikt monoton wachsend, insbesondere positiv. Folglich ist wegen $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

$$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \ .$$

Wir sehen nun mit Hilfe der Funktionalgleichungen ein:

$$\begin{aligned}
\sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \cos(x) \ , \\
\sin(x + \pi) &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \ , \\
\sin(x + \frac{3\pi}{2}) &= -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = -\cos(x) \ , \\
\sin(x + 2\pi) &= \sin(x) \\
\cos(x + 2\pi) &= \cos(x) \ .
\end{aligned}$$

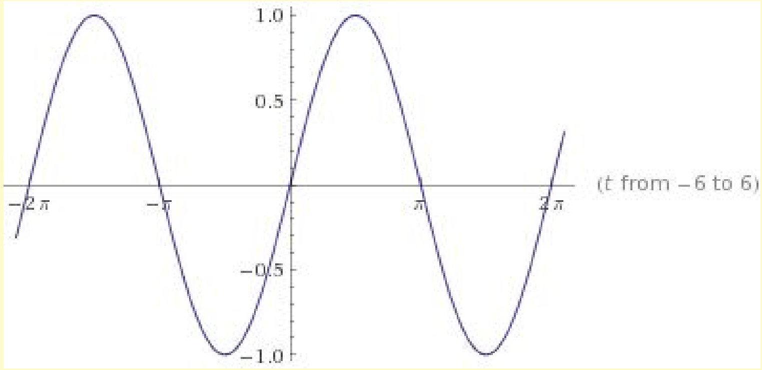
Definition 41.3 *Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit der Periode c, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x) = f(x + c)$ gilt.*

Corollary 41.4 *Die trigonometrischen Funktionen* sin *und* cos *sind periodisch mit der Periode 2π.*

Es gilt $1 = \sin(\frac{\pi}{2}) = 2\sin(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4})$ und $0 = \cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4})^2 - \sin(\frac{\pi}{4})^2$. Daraus folgt $\frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{4})^2$, also

$$\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

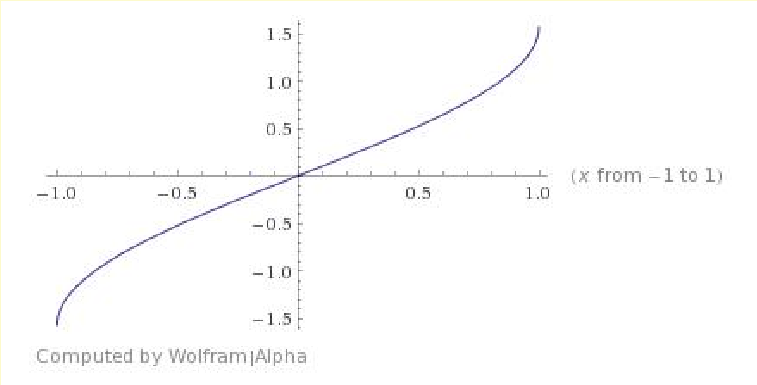
Hier ist ein Bild des Graphen der Funktion *sin*.



Die Funktion sin ist auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ stetig und strikt monoton wachsend. Es gilt $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$. Deshalb gibt es nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Lemmas 36.3 und 36.4) eine stetige und strikt monotone Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ .$$

Hier ist ein Bild des Graphen der Funktion arcsin:



Die Funktion cos ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ strikt monoton fallend und hat die strikt monoton fallende Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi] \ .$$

Nach Lemma 39.8 gilt für $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned} \tag{12}$$

Analog,

$$\begin{aligned} \arccos'(x) &= -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\arccos(x))^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ . \end{aligned}$$

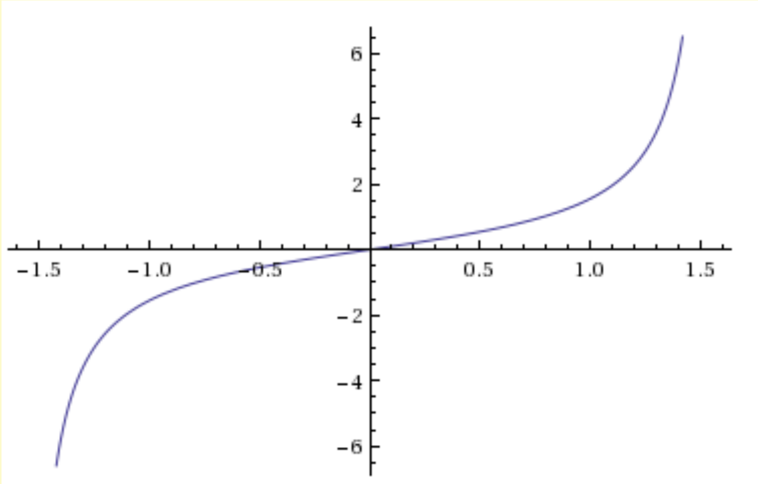
Die Menge der Nullstellen von cos kann suggestiv in der Form

$$\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} := \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi n)\}$$

geschrieben werden. Wir definieren die Tangesfunktion durch

$$\tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R} \ , \quad \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \ .$$

Das folgende Bild zeigt den Graphen der Tangensfunktion im Bereich $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



Es gilt

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} \ .$$

Die Tangensfunktion ist auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ strikt monoton wachsend und es gilt

$$\texttt{lim}_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \pm\infty \ .$$

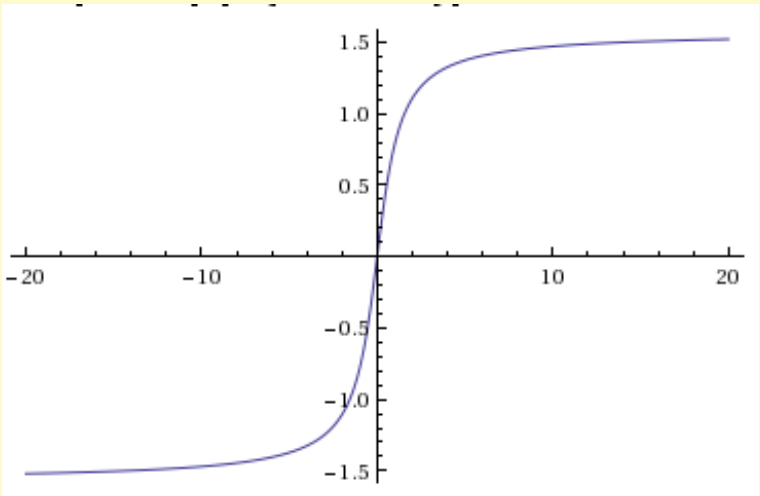
Sie hat deshalb eine Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ .$$

Diese ist differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
\arctan'(x) &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} \\
&= \frac{1}{\frac{\sin^2(\arctan(x))+\cos^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}} \\
&= \frac{1}{\frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))} + 1} \\
&= \frac{1}{\tan^2(\arctan(x)) + 1} \\
&= \frac{1}{1 + x^2}
\end{aligned}$$

Hier ist ein Bild der Funktion arctan.



Mit der Eulerformel können wir schreiben

$$\exp(x + 2\pi i) = \cos(x + 2\pi) + i \sin(x + 2\pi) = \cos(x) + i \sin(x) = \exp(x) \ .$$

Insbesondere gilt

$$\exp(2\pi i) = 1 \ , \quad \exp(x + 2\pi i n) = \exp(x) \ \ \forall x \in \mathbb{C} \ , \forall n \in \mathbb{Z} \ .$$

Weitere spezielle Werte sind

$$\exp(\pi i) = -1 \ , \quad \exp(\frac{\pi}{2}) = i \ .$$

Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann sind die Zahlen

$$\exp(2\pi i \frac{k}{m}) \ , \quad k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

die m-ten Einheitswurzeln, also die m komplexen Lösungen der Gleichung $x^m - 1 = 0$.

41.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß $\sin(x) < x$ für alle $x \in (0, \infty)$ gilt.

2. Zeigen Sie, daß $1 < \frac{\pi}{2}$ gilt.

3. Zeigen Sie, daß für $x \in [0, 3]$ gilt:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \ .$$

   Schließen Sie, daß $\frac{\pi}{2} \in [1, 2]$.

4. Finden Sie eine explizite Formel für $\sin(\frac{2\pi}{3})$.

5. Finden Sie explizite Formeln in der Form $a+bi$ für die dritten und achten Einheitswurzeln.

6. Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Zahlen
$$\exp(2\pi i \frac{p}{m}) \in \mathbb{C} \ , \quad p \in \{0, 1, \dots m-1\}$$
paarweise verschieden sind.

42 Einfache Differentialgleichungen

Die folgende Aussage kann man als einen sehr einfachen Fall einer Eindeutigkeitsaussage für eine Differentialgleichung ansehen.

Lemma 42.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung. Die Gleichung $f' = 0$ impliziert daß f lokal konstant ist.*

Proof. Sei $u \in U$. Dann existiert ein $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ mit $(u-\epsilon, u+\epsilon) \subseteq U$. Wir zeigen, daß f auf $(u-\epsilon, u+\epsilon)$ konstant ist.
Seien $a, b \in (u-\epsilon, u+\epsilon)$ und $a < b$. Dann gilt $[a, b] \subseteq (u-\epsilon, u+\epsilon)$. Nach dem Mittelwertwertsatz 40.3 existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Aus $f'(\xi) = 0$ folgt $f(b) = f(a)$. Folglich gilt $f(x) = f(u)$ für alle $x \in (u-\epsilon, u+\epsilon)$. □

Wir hatten die Abbildung $\log : (0, 2) \to \mathbb{R}$ durch
$$\log(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n} \tag{13}$$
definiert und schon eingesehen, daß
$$\log'(x) = \frac{1}{x}$$
gilt. Wir betrachten Abbildung $f := \exp \circ \log : (0, 2) \to \mathbb{R}$. Es gilt $f'(x) = x^{-1} f(x)$. In der Tat rechnen wir
$$(\exp \circ \log)(x)' = \log'(x) \exp \circ \log(x) = \frac{1}{x} \exp \circ \log(x) = \frac{1}{x} f(x) \ .$$
Weiter sehen wir, daß $f(1) = 1$ gilt. Es gilt
$$(\frac{f(x)}{x})' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{f(x) - f(x)}{x^2} = 0 \ .$$
Damit ist $\frac{f(x)}{x}$ auf $(0, 2)$ konstant. Wegen $f(1) = 1$ gilt $f(x) = x$. Wir sehen also, daß auf $(0, 2)$ die Identität
$$\log(x) = \exp^{-1}(x)$$
gilt.

Definition 42.2 *Wir definieren die Logarithmusfunktion durch* $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *durch* $\log(x) := \exp^{-1}(x)$.

Dies setzt die Definition durch die Potenzreihe (13) fort. Es gilt

$$\log'(x) = \frac{1}{x} \ .$$

Definition 42.3 *Sei* $r \in \mathbb{R}$ *und* $x \in (0, \infty)$*. Wir definieren die Potenz*

$$x^r := \exp(r \log(x)) \ .$$

Lemma 42.4 *Wenn* $r \in \mathbb{Q}$ *ist, dann stimmt diese Definition mit der früheren in 35.1 überein.*

Proof. Sei $r = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt nach Definition

$$x^r = (x^{\frac{1}{b}})^a \ .$$

Auf der anderen Seite ist

$$\exp(\frac{a}{b} \log(x)) = (\exp(\frac{1}{b} \log(x))^a \ .$$

Wir müssen also noch zeigen, daß

$$\exp(\frac{1}{b} \log(x)) = x^{\frac{1}{b}}$$

gilt. Das folgt aber aus den Gleichungen $\exp(\frac{1}{b} \log(x))^b = \exp(\log(x)) = x$ und $(x^{\frac{1}{b}})^b = x$ und der Eindeutigkeit der $b$ten Wurzel. □

42.1 Aufgaben

1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f, g : (-a, a) \to \mathbb{R}$ durch konvergente Potenzreihen

$$f(x) := \sum_{n=0} f_n x^n \ , \quad g(x) := \sum_{n=0} g_n x^n$$

   gegeben. Zeigen Sie: Wenn es eine offene Teilmenge $U \subseteq (-a, a)$ gibt mit $f_{|U} = g_{|U}$, dann gilt $f = g$.

43 Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir untersuchen nun die lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizenten. Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Aufgabe ist es, alle Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f' = af$$

zu finden. Oft schränkt man sich im Definitionsbereich auch auf ein Intervall ein. In den meisten Anwendungen möchte man unter diesen Abbildungen diejenige finden, die an einer bestimmten Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ einen vorgegebenen Wert $c \in \mathbb{R}$ hat. Mit dieser Zusatzbedingung spricht man vom Anfangswertproblem für die Differentialgleichung.

Lemma 43.1 *Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ existiert genau eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Differentialgleichung*

$$f' = af$$

und die Anfangsbedingung $f(x_0) = c$ erfüllt.

Proof. Die Abbildung

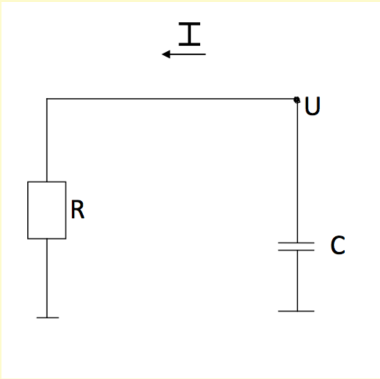
$$f(x) := ce^{a(x-x_0)}$$

erfüllt die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung. Es bleibt der Nachweis der Eindeutigkeit. Wir betrachten nur den Fall $c \neq 0$. Sei g eine weitere Abbildung, welche den Bedingungen genügt. Dann gilt

$$(\frac{g}{f})' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = \frac{a(gf - fg)}{f^2} = 0 \ .$$

Folglich ist $\frac{g}{f}$ konstant. Wegen der Anfangsbedingung gilt $g = f$. $\square$

1. Wir betrachten die Entladung eines Kondensators mit der Kapazität C über einen Widerstand der Größe R. Wir messen die Spannung U am Kondensator zu jedem Zeitpunk t, bestimmen also eine Abbildung $U : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.



Wir erstellen nun ein Modell mit welchem wir eine Vorhersage für diese Funktion machen können. Sei $Q : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Funktion, welche die Ladung $Q(t)$ des Kondensators zur Zeit $t \in [0,\infty)$ beschreibt. Dann ist

$$U(t) = C^{-1}Q(t) \ .$$

Nach dem Ohmschen Gesetz fließt zum Zeitpunkt t der Strom

$$I(t) := R^{-1}U(t)$$

ab. Der Strom ist jedoch genau die negative Änderungsrate der Ladung. Also gilt

$$-Q'(t) = I(t) \ .$$

Wir eliminieren in diesen Gleichung I und Q und erhalten

$$R^{-1}U(t) = -C^{-1}U'(t) \ ,$$

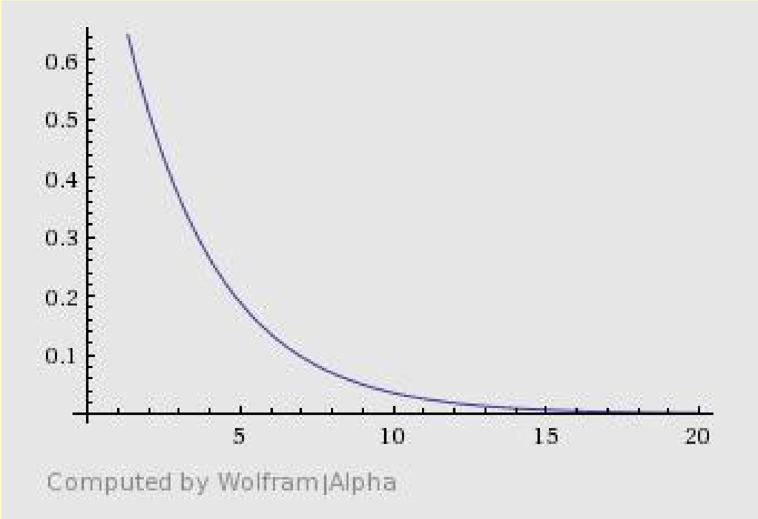
also

$$U'(t) = -\frac{C}{R}U(t) \ .$$

Sei U_0 die gemessene Spannung am Kondensator zur Zeit $t = 0$. Die Lösung der Differentialgleichung für U mit diesem Anfangswert ist

$$U(t) = U_0 \exp(-\frac{C}{R}t) \ .$$

Das folgende Bild zeigt das qualitative Verhalten ($\exp(-x/3)$):



2. Wir betrachten den Zerfall einer radioaktiven Substanz.

Wir beschreiben die Masse der zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallenen Substanz durch eine Funktion $M : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Sie M_0 die am Anfang vorhandene Masse. Die Annahme ist, daß die Atomkerne voneinander unabhängig mit einer Rate γ zerfallen. In jedem kleinen Zeitintervall Δt zerfallen also Kerne der Masse $\gamma M(t)\Delta t$. Als Vorhersagemodell erhalten wir die Differentialgleichung

$$M'(t) = -\gamma M(t) \ , \quad M(0) = M_0 \ .$$

Wir erhalten

$$M(t) = M_0 \exp(-\gamma t) \ .$$

Die Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}}$ ist die Zeit, nach welcher die Hälfte der Masse zerfallen ist. Um diese zu bestimmen, lösen wir die Gleichung

$$M_0 \exp(-\gamma t_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} M_0 \ .$$

Es ergibt sich

$$t_{\frac{1}{2}} = \gamma^{-1} \log(2) \ .$$

43.1 Aufgaben

1. Zeigen sie die Eindeutigkeitsaussage in Lemma 43.1 für den Fall $c = 0$.

2. Seien $a, c \in \mathbb{R}$ und $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $x_0 \in U$. Wir studieren das Anfangswertproblem für $f : U \to \mathbb{R}$:
$$f' = af \ , \quad f(x_0) = c \ .$$
Zeigen Sie, daß dieses Problem genau dann eindeutig lösbar ist, wenn U zusammenhängend ist.

3. Wir betrachten ein realistisches Model der Kondensatorentladung. Sei $C := 100\mu F$ und $R = 10K\Omega$. Nach welcher Zeit ist die Spannung auf ein Zehntel des Anfangswertes gefallen? Zeigen Sie, daß es einen solchen Zeitpunkt gibt und bestimmen sie ihn bis auf 3 Dezimalstellen.

44 Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Seien $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$. Wir suchen nun alle Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ welche der Gleichung

$$f'' + 2\gamma f' + \omega^2 f = 0$$

genügen. Dies ist die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Beim Anfangswertproblem für diese Gleichung sucht man diejenigen Lösungen, die

$$f(0) = c \ , \quad f'(0) = d$$

für vorgegeben Zahlen c, d erfüllen. Wir werden zeigen, daß man das Anfangswertproblem eindeutig lösen kann.
Wir betrachten die Differentialgleichung zunächst als eine für eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion. Da die Funktion f linear in die Differentialgleichung eingeht, gilt: Wenn f_1, f_2 die Differentialgleichung lösen, dann auch $Af_1 + Bf_2$ für $A, B \in \mathbb{C}$.
Wir benutzen den Ansatz

$$f(t) = \exp(\alpha t) \ .$$

Wir setzen den Ansatz ein und erhalten als Bestimmungsgleichung für α:

$$A(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2)\exp(\alpha t) = 0 \ .$$

Wenn $A \neq 0$ ist, muß

$$\alpha \in \{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \ , -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\}$$

gelten. Wir setzen

$$\alpha_\pm := -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \ .$$

Wir diskutieren drei Fälle:

1. $$\gamma^2 - \omega^2 < 0$$

   Wir setzen

   $$\sigma := \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \ .$$

   und schreiben

   $$\exp(\alpha_\pm t) = \exp(-\gamma t)(\cos(\sigma t) \pm i \sin(\sigma t)) \ .$$

   Wir erhalten durch geeignete Linearkombinationen zwei reelle Lösungen

   $$f_1(t) := \exp(-\gamma t)\cos(\sigma t) \ , \quad f_2(t) := \exp(-\gamma t)\sin(\sigma t) \ .$$

2.
$$\gamma^2 - \omega^2 > 0$$

In diesem Fall setzen wir
$$\sigma := \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

und erhalten
$$f_1(t) := \exp(-\gamma t)\exp(\sigma t)\ , \quad f_2(t) := \exp(-\gamma t)\exp(-\sigma t)\ .$$

3. Wenn $\gamma^2 = \omega^2$, dann ist
$$f_1(t) = \exp(-\gamma t)$$

eine Lösung. Diese kann man zum Beispiel durch den Grenzwert für $\sigma \mapsto 0$ aus $\exp(-\gamma t)\cos(\sigma t)$ erhalten. Wir erhalten eine zweite Lösung durch Bildung des Grenzwertes $\sigma \to 0$ aus $\sigma^{-1}\exp(-\gamma t)\sin(\sigma t)$:
$$f_2(t) = t\exp(-\gamma t)\ .$$

Wir prüfen das nach:
$$f_2'(t) = \exp(-\gamma t) - \gamma t\exp(-\gamma t)\ , \quad f_2''(t) = \gamma^2 t\exp(-\gamma t) - 2\gamma\exp(\gamma t)\ .$$

Also
$$\gamma^2 t\exp(-\gamma t) - 2\gamma\exp(\gamma t) + 2\gamma(\exp(-\gamma t) - \gamma t\exp(-\gamma t)) + \gamma^2 t\exp(-\gamma t) = 0\ .$$

In allen Fällen haben wir zwei linear unabhängige Funktionen f_1, f_2 gefunden, die die Differentialgleichung lösen. Damit ist auch jede Linearkombination $Af_1 + Bf_2$ eine Lösung.

Wir kommen nun zu Anfangswertproblem. Wir sehen, daß wir in allen drei Fällen genau eine Lösung des Anfansgwertproblemes als Linearkombination der gefundenen Funktionen f_1, f_2 finden können.

1.
$$f_1(0) = 1\ , \quad f_2(0) = 0$$

und
$$f_1'(0) = -\gamma\ , \quad f_2'(0) = \sigma\ .$$
$$f = cf_1 + \frac{d + \gamma c}{\sigma} f_2$$

2.
$$f_1(0) = 1\ , \quad f_2(0) = 1$$

und
$$f_1'(0) = \sigma - \gamma\ , \quad f_2'(0) = -\sigma - \gamma$$
$$f = \frac{c(\sigma + \gamma) + d}{2\sigma} f_1 + \frac{c(\sigma - \gamma) - d}{2\sigma} f_2$$

3.

$$f_1(0) = 1 \ , \quad f_2(0) = 0$$

und

$$f_1'(0) = -\gamma \ , \quad f_2' = 1 \ .$$

$$f = cf_1 + (d + \gamma c) f_2$$

Wir überzeugen uns nun davon, daß es keine weiteren Lösungen gibt. Sei $\tilde{f}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Dann finden wir genau eine Lösung f des Anfangswertproblems mit $f(0) = -\tilde{f}(0)$, $f'(0) = -\tilde{f}'(0)$ als eine Linearkombination der Funktionen f_1, f_2. Die Summe $f + \tilde{f}$ Löst die Differentialgleichung mit verschwindenden Anfangswerten. Wir zeigen, daß eine solche Lösung die Konstante Funktion mit dem Wert Null sein muß. Sei also f eine Lösung der Differentialgleichung mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$. Wir setzen

$$g(t) := \exp(\gamma t) f(t) \ .$$

Es gilt

$$g'(t) = \gamma \exp(\gamma t) f(t) + \exp(\gamma t) f'(t) \ ,$$

$$\begin{aligned} g''(t) &= \gamma^2 \exp(\gamma t) f(t) + 2\gamma \exp(\gamma t) f'(t) + \exp(\gamma t) f''(t) \\ &= \gamma^2 \exp(\gamma t) f(t) + 2\gamma \exp(\gamma t) f'(t) - 2\gamma \exp(\gamma t) f'(t) - \omega^2 \exp(\gamma t) f(t) \\ &= \gamma^2 \exp(\gamma t) f(t) - \omega^2 \exp(\gamma t) f(t) \\ &= (\gamma^2 - \omega^2) g(t) \ . \end{aligned}$$

Wir betrachten nun

$$E(t) := g'(t)^2 - (\gamma^2 - \omega^2) g(t)^2 \ .$$

Es gilt

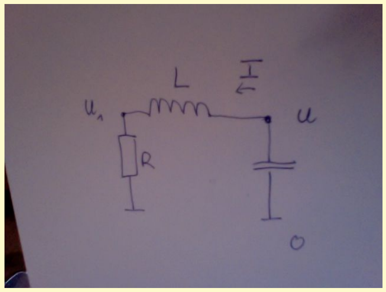
$$E'(t) = 2g'(t)g''(t) - 2(\gamma^2 - \omega^2) g'(t) g(t) = 2g'(t)(g''(t) - (\gamma^2 - \omega^2) g(t)) = 0 \ .$$

Die Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant. Da $E(0) = 0$ gilt, ist $E(t) = 0$. Die Funktion g erfüllt also

$$g'(t) - (\gamma^2 - \omega^2) g(t) = 0 \ , \quad g(0) = 0.$$

Nach Lemma 43.1 folgt $g = 0$.

1. Wir betrachten einen Schwingkreis aus einer Reihenschaltung einer Kapazität C, einer Induktivität L und einem Widerstand R. Am Anfang sei der Kondensator auf die Spannung U_0 aufgeladen und es fließe kein Strom. Wir suchen die Spannung $U(t)$ am Kondensator als Funktion der Zeit.



Es gelten folgende Beziehungen aus dem Ohmschen Gesetz, dem Induktionsgesetz und der Spannungs-Ladungsbeziehung am Kondensator.

$$\begin{aligned} -U' &= \frac{I}{C} \\ I &= \frac{U_1}{R} \\ U &= U_1 + LI' \end{aligned}$$

Wir eliminieren I zuerst und erhalten

$$-U' = \frac{U_1}{RC} \ , \quad U_1 = -RCU' \ , \quad U_1' = -RCU''$$

sowie

$$U = U_1 + \frac{LU_1'}{R} \ .$$

Wir eliminieren nun U_1:

$$U = -RCU' - LCU'' \ .$$

Die Funktion $U(t)$ erfüllt die Gleichung

$$U'' + \frac{R}{L}U' + \frac{1}{LC}U = 0 \ .$$

Als Anfangswerte haben wir

$$U(0) = U_0 \ , \quad U'(0) = 0$$

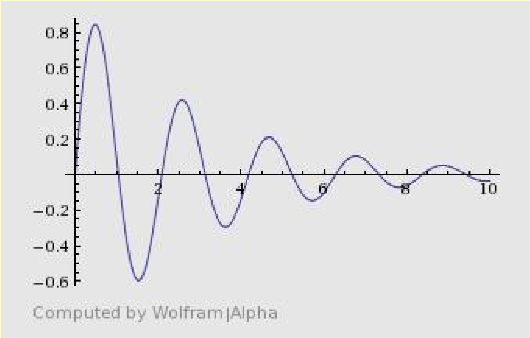
vorgegeben. In den Anwendungen ist der Widerstand klein, so daß $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{C^2L^2}$ gilt. Die Lösung ist also

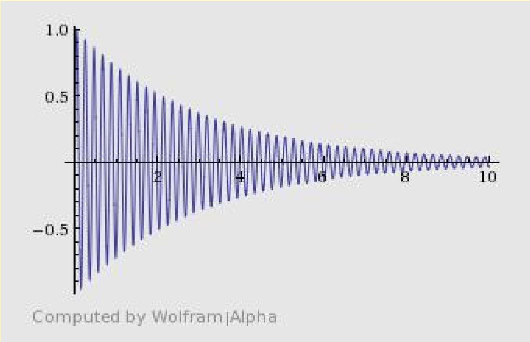
$$U(t) = U_0 \exp(-\frac{R}{2L}t) \left(\cos(\omega t) + \frac{\frac{R}{2L}}{\omega} \sin(\omega t) \right) \ ,$$

mit

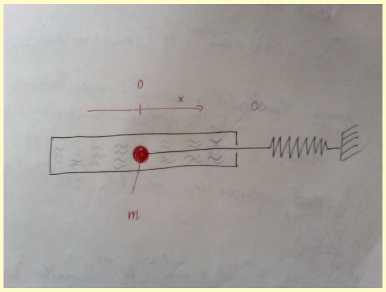
$$\omega := \sqrt{\frac{1}{C^2L^2} - \frac{R^2}{4L^2}} \ .$$

Das qualitative Verhalten wird im folgenden Plots veranschaulicht ($\exp(-x/3)\sin(3x)$ und $\exp(-x/3)\sin(30x)$).





2. In diesem Beispiel modellieren wir einen Stoßdämpfer. Wir betrachten eine Masse m, welche sich entlang eine Geraden in einer zähen Flüssigkeit bewegen kann und durch eine Feder fixiert wird. Am Anfang ist die Feder entspannt und die Masse wird durch einen Stoß in Bewegung mit einer Geschwindigkeit v_0 versetzt. Wir wollen die dann folgende Bewegung vorhersagen. Wir beschreiben den Ort der Masse zur Zeit t durch die reellwertige Funktion $x(t)$. Der Nullpunkt ist so gewählt, daß dort die Feder entspannt ist.



Nach die Hookschen Gesetz ist die durch die Feder ausgeübte Kraft durch

$$F_{Feder} = -\kappa x(t)$$

gegeben, wobei κ die Federkonstante ist. Nach experimenteller Erfahrung kann die Reibungskraft nährungsweise kann durch

$$F_{Reibung} = -\lambda x'(t)$$

beschrieben werden, wobei λ eine positive Zahl ist. Das Newtonsche Gesetz besagt:

$$mx'' = F_{Feder} + F_{Reibung} = -\kappa x(t) - \lambda x'(t) \ .$$

Die Funktion $x(t)$ wird also durch die Lösung des Anfangswertproblems

$$x'' + \frac{\lambda}{m}x' + \frac{\kappa}{m}x = 0 \ , \quad x(0) = 0 \ , \ x'(0) := v \ .$$

gegeben.

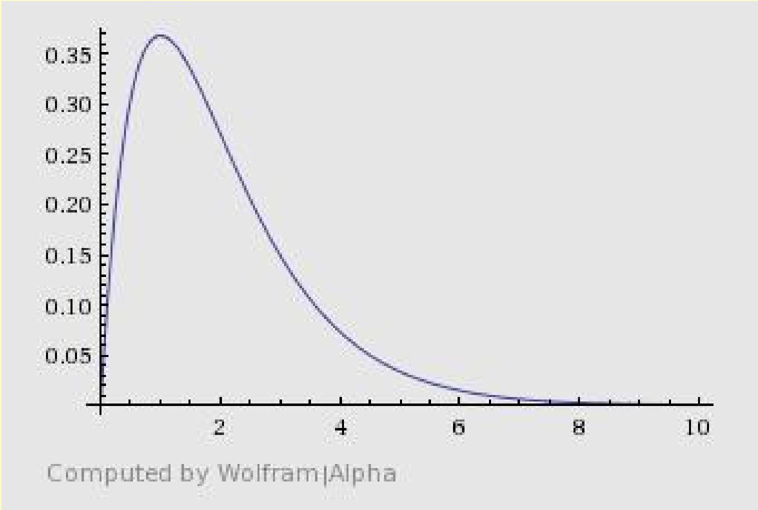
Für einen Stoßdämpfer möchte man Oszillationen vermeiden. Andererseits sollte die Ruhlelage möglichst schnell wieder eingenommen werden. Es wäre also naheliegend, die Konstanten m, κ, λ so abzustimmen, daß der Grenzfall $\sigma = 0$ vorliegt also $\frac{\lambda^2}{4m} = \kappa$ gilt.

Die Bewegung wird in diesem Fall durch

$$x(t) = v_0 t \exp(-\frac{\lambda}{4m} t)$$

gegeben.

Das folgende Bild zeigt das qualitative Verhalten (Plot der Funktion $t \exp(-t)$):

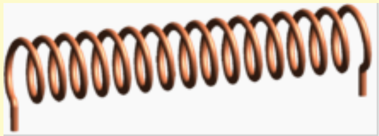


44.1 Aufgaben

1. Wir groß muß L sein, damit bei $C = 50\,pF$ und $R = 0,1\Omega$

$$\omega = 10^6 s^{-1}$$

gilt. Für den Bastler: Wieviele Windungen müßte eine Luftspule



mit einem Durchmesser von $1cm$ und einer Länge von $10cm$ haben?

45 Taylorformel

Nur wenige reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen lassen sich durch einfache Formeln beschreiben. Am elementarsten sind Polynome, die man unter ausschließlicher Verwendung der algebraischen Operationen den Körpers $\mathbb{R}$ definieren kann.

Ein Beispiel ist die Definition

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \quad p(x) := x^4 + 4x^3 - 2x + 1 \ .$$

Für die Funktionen $\exp(x)$ oder $\sin(x)$ braucht man mehr Struktur. Diese werden nämlich durch Potenzreihen eingeführt. Ihre Beschreibung benutzt den Genzwertbegriff und indirekt die Supremumseigenschaft und das archimedische Axiom für $\mathbb{R}$.

Noch indirekter sind Funktionen wie

$$x \mapsto \log(1 + x^2) \ , \quad x \mapsto \arctan(x)$$

beschrieben. In ihrer Definition benutzt man den Satz über die Umkehrfunktion.

In der Analysis versucht man oft, komplizierte Funktionen durch einfachere Funktionen zu approximieren. Dabei muß man jeweils klarstellen, was die Begriffe *einfach* und *approximieren* bedeuten.

Bei der Taylorformel geht es um Approximationen einer Funktion in der Nähe eines bestimmten Punktes durch Polynome, die als *einfacher* betrachtet werden.

Genauer, sei $U \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge, $x \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $k \in \mathbb{N}$.

Definition 45.1 *Eine Abbildung $g : U \to \mathbb{R}$ approximiert f im Punkt x bis zur Ordnung k, wenn es eine Abbildung $r : U \to \mathbb{R}$ gibt mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

1. $f(y) - g(y) = (y - x)^k r(y) \ , \quad \forall y \in U$
2. $\mathtt{lim}_{y \to x} r(y) = 0$.

Hier sind einige direkte Folgerungen aus der Definition:

1. Wenn die Abbildung r existiert, dann ist sie eindeutig bestimmt.
2. Sei f in x stetig. Dann approximiert die konstante Abbildung $g := \mathtt{const}_{f(x)}$ die Funktion f im Punkt x zur Ordnung 0.
3. Sei f in x differenzierbar. Dann approximiert die affine Abbildung

   $$g(y) := f(x) + f'(x)(y - x)$$

   die Abbildung f im Punkt x zur Ordnung 1.

Unter hinreichenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen liefert die Taylorformel Approximationen beliebig hoher Ordnung durch Polynome. Wir nehmen an, daß f im Punkt x mindestens n-mal differenzierbar ist.

Definition 45.2 *Das Taylorpolynom von f der Ordnung n im Punkt x wird durch*

$$\mathtt{Tayl}_{f,n,x}(y) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)(y-x)^k}{k!}$$

definiert.

Wir halten die folgenden Fakten fest:

1. Wenn f ein Polynom der Ordnung $\leq n$ ist, dann gilt

$$\mathtt{Tayl}_{f,n,x} = f \ .$$

   In der Tat, sei

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n} p_k y^k$$

   ein Polynom. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$, so daß die Identität

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n} q_k (y-x)^k$$

   von Polynomen gilt. Wir lesen daraus ab:

$$f^{(k)}(x) = k! q_k \ ,$$

   also

$$q_k = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

   für $k \in \{0, \ldots, n\}$.

2. Es gilt für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$(f - \mathtt{Tayl}_{f,n,x})^{(k)}(x) = 0 \ .$$

3. Es gilt

$$\mathtt{Tayl}_{f,1,x}(y) = f(x) + f'(x)(y-x) \ .$$

Proposition 45.3 (Taylorformel) *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V \subseteq U$ eine zusammenhängende Umgebung von x. Wenn f auf V mindestens $n+1$-mal differenzierbar ist, dann gelten:*

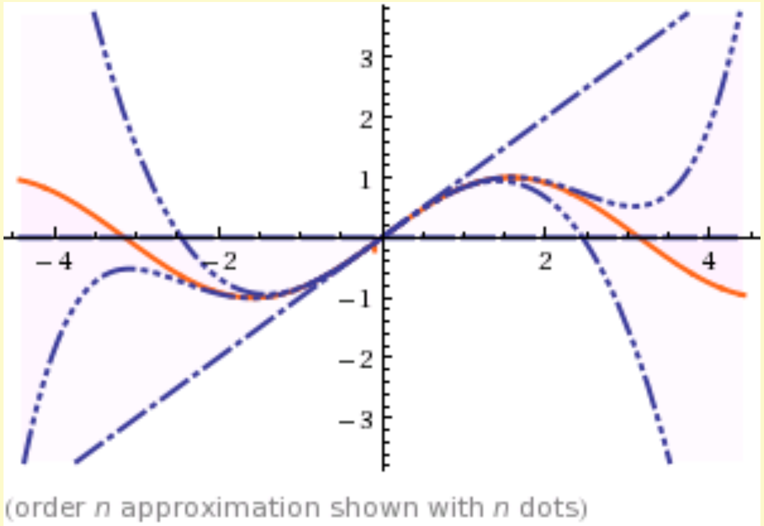
1. *Wenn $f^{(n+1)}$ auf einer Umgebung von x beschränkt ist, dann approximiert das Taylorpolynom $\mathtt{Tayl}_{f,n,x}$ die Funktion f im Punkt x bis zur Ordnung n.*

2. *Für $y \in V$ mit $x \neq y$ existiert im Fall $x < y$ ein $\xi \in (x, y)$ (bzw. $\xi \in (y, x)$ falls $y < x$) mit*
$$f(y) - \mathtt{Tayl}_{f,n,x}(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(y-x)^{n+1}}{(n+1)!} \ .$$

Proof. Die zweite Aussage impliziert die erste. Dazu definieren wir $r(y)$ für $y \neq x$ durch die Gleichung
$$r(y) := \frac{f(y) - \mathtt{Tayl}_{f,n,x}(y)}{(y-x)^n} \ ,$$
und $r(x) := 0$. Dann existiert für jedes $y \in V$ mit $x < y$ (bzw. $y < x$) ein $\xi \in (x, y)$ (bzw. $\xi \in (y, x)$) so daß
$$r(y) = (y-x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \ .$$
Insbesondere gilt $\mathtt{lim}_{y \to x} r(y) = 0$, da $f^{(n+1)}$ in einer Umgebung von x nach Voraussetzung beschränkt ist.

Wir zeigen nun die zweite Aussage. Wir betrachten den Fall $x < y$. Wir definieren
$$M := \frac{f(y) - \mathtt{Tayl}_{f,n,x}(y)}{(y-x)^{n+1}}$$
und setzen
$$g(z) := f(z) - \mathtt{Tayl}_{f,n,x}(z) - M(y-x)^{n+1} \ .$$
Es gilt
$$g^{(k)}(x) = 0$$
für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Wir zeigen, daß $g^{(n+1)}$ im Intervall (x, y) eine Nullstelle hat. Zunächst ist $g(x) = 0$ und $g(y) = 0$. Damit hat g' eine Nullstelle ξ_1 in (x, y). Sei nun $k \in \{1, \ldots n\}$ und gelte $g^{(k)}(\xi_k) = 0$ für $\xi_k \in (x, y)$. Dann hat $g^{(k+1)}$ eine Nullstelle ξ_{k+1} in (x, ξ_k).
Sei nun $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ für ein $\xi \in (x, y)$. Dann gilt
$$f^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!M \ .$$
Wir sehen, daß
$$f(y) - \mathtt{Tayl}_{f,x,n}(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(y-x)^{n+1}}{(n+1)!} \ .$$
□

Das folgende Bild zeigt die Taylorapproximationen der Sinusfunktion der ungeraden Ordnungen bis zum Grad 5.



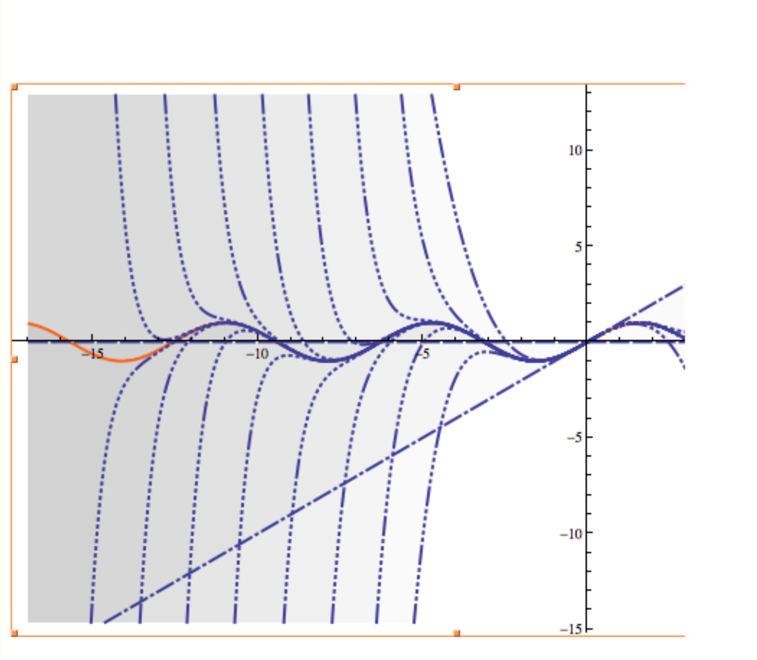
Nehmen wir an, wie wollten zwei Perioden der Sinusfunktion mit einer Genauigkeit von 10^{-2} durch die Taylorapproximation darstellen. Zwei Perioden werden wegen $4\pi \leq 14$ durch das Intervall $[-7, 7]$ abgedeckt. Wir müssen die Ordnung der Taylorapproximation so groß wählen, daß der Fehlerterm

$$\frac{\sin^{(n+1)}(\xi) y^{n+1}}{(n+1)!}$$

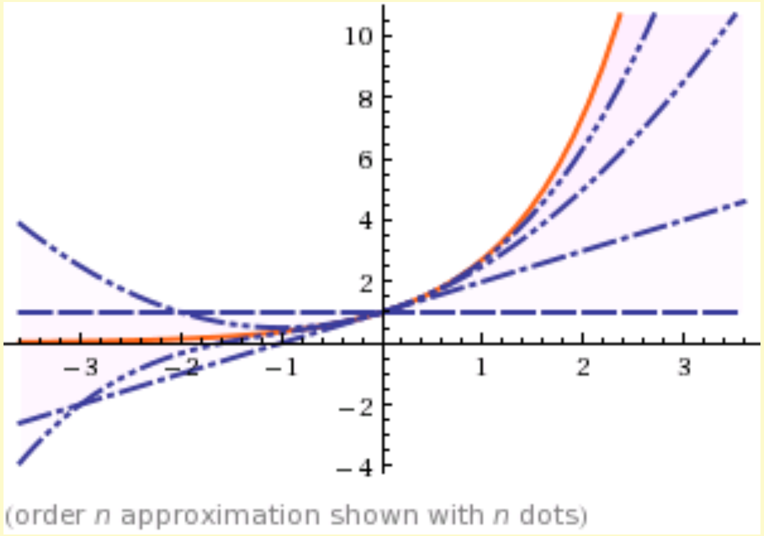
für $y \in [-7, 7]$ dem Betrage nach durch 10^{-2} abgeschätzt wird. Es gilt $|\sin^{(k)}(\xi)| \leq 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{N}$. Demnach muß

$$|\frac{7^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-2}$$

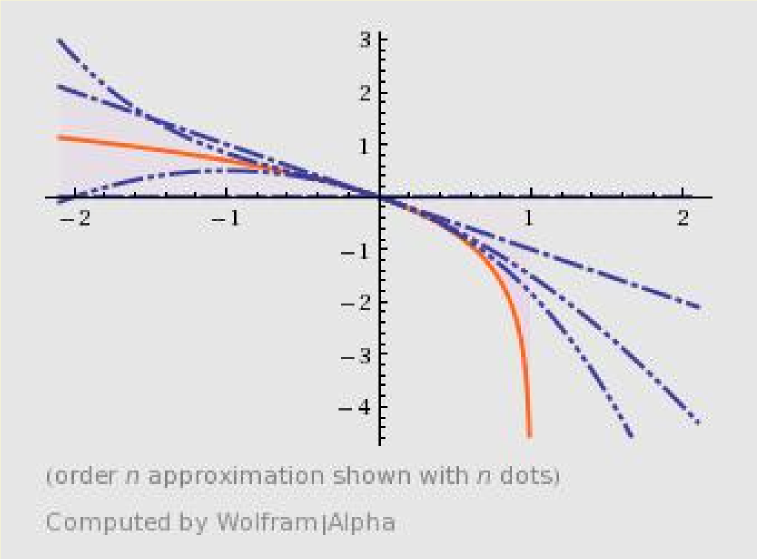
gelten. Das ist sicher für $n = 22$ richtig. Im folgenden Bild sind die Approximationen bis zur Ordnung 33 zu sehen.



Hier sind die Taylorapproximationen der Exponentialfunktionen bis zur Ordnung 3.



Das folgende Bild zeigt die Taylorapproximation von $\log(1-x)$:



Wir nehmen nun an, daß die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ im Punkt x glatt ist. Dann können wir die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)(y-x)^n}{n!}$$

bilden. Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe und hat demnach einen Konvergenzradius $r \in [0, \infty]$.

Definition 45.4 *Wir sagen, daß die Funktion f auf U durch ihre Taylorreihe im Punkt x dargestellt wird, wenn $U \subseteq (x-r, x+r)$ und für alle $y \in U$ gilt*

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)(y-x)^n}{n!} \ .$$

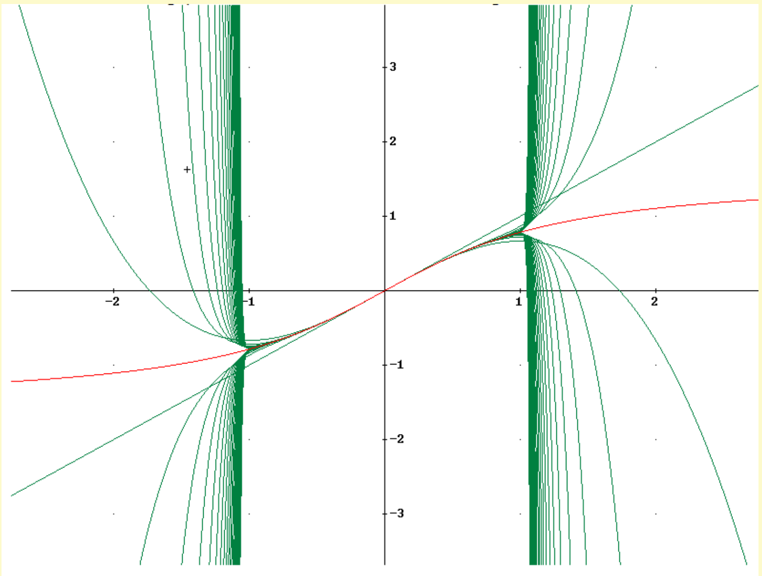
1. Wir bestimmen die Taylorreihe der Abbildung $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt 0. Es gilt für $|x| < 1$ daß

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \ .$$

   Wegen $\arctan(0) = 0$ gilt also für $|x| < 1$:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ .$$

   Wenn $|x| > 1$ ist, dann konvergiert die Taylorreihe nicht mehr. Im folgenden Bild sind der Graph der arctan-Funktion und viele Taylorapproximationen übereinandergedruckt. Man sieht schön, wie die Approximation für $|x| \geq 1$ zusammenbricht.



2. Wir betrachten die Funktion $|x|$. Die Taylorreihe dieser Funktion im Punkt 1 hat nur einen nicht-verschwindenden Term x. Es gilt $|x| = x$ für $x \leq 0$. Die Taylorreihe von $|x|$ konvergiert also auf ganz $\mathbb{R}$, stellt aber die Funktion $|x|$ nur auf dem Intervall $[0, \infty)$ dar.

45.1 Aufgaben

1. Zeige, daß die Abbildung
$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}) & x > 0 \end{cases}$$
glatt ist. Zeige, daß $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Wir möchtem die Werte der Exponentialfunktion im Intervall $[-2, 2]$ durch die Taylorreihe im Punkt 0 mit einer Genauigkeit von 10^{-10} berechnen. Wie viele Terme muß man nehmen.

3. Wir möchten $\arctan(\frac{1}{2})$ mit einer Genauigkeit von 10^{-10} berechnen. Wieviele Terme der Taylorreihe muß man mindestens addieren?

4. Bestimme die Taylorreihe von $x \mapsto \exp(x^2)$.

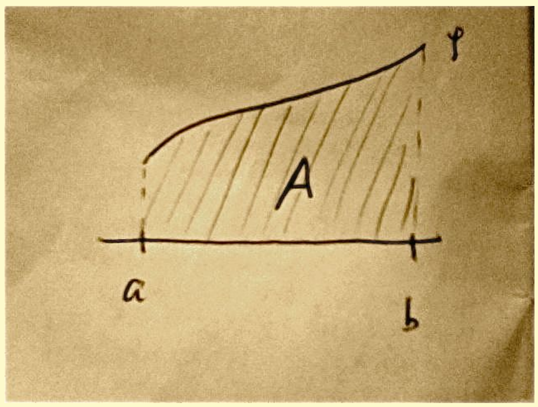
5. Zeige: Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und g, h Polynome der Ordnung n, welche f bis zur Ordnung n im Punkt 0 approximieren. Dann gilt $g = h$.

46 Einfache Funktionen

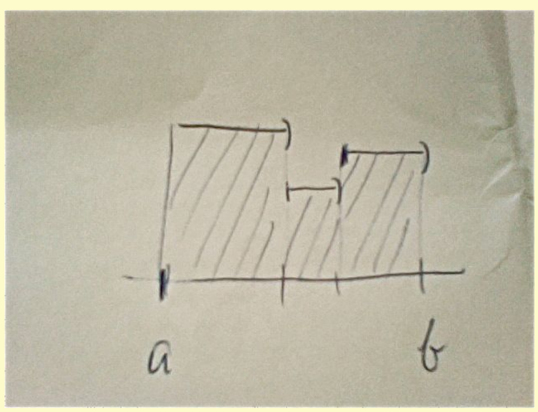
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Wir betrachten eine Abbildung $f : [a, b] \to [0, \infty)$. In den nächsten beiden Kapiteln wollen wir präzisieren, was man unter Fläche der Teilmenge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \in [a, b]) \wedge (y \in [0, f(x)]\}$$

versteht.



Wir betrachten diese Frage zunächst für einfache Funktionen, deren Graphen etwa diese Struktur haben.



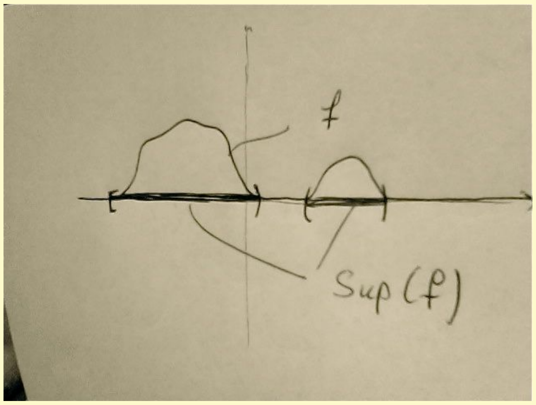
Die Größe der Fläche eines Rechtecks mit einer Basislänge ℓ und der Höhe h wird durch ℓh definiert.
Beachte, daß der Begriff *einfache Funktion* in diesem Zusammenhang ein mathematischer Begriff ist und nicht metamathematisch wie am Beginn von Kapitel 45. Für einfache Funktionen erhält man die Fläche unter dem Graphen durch Summation über endlich viele solcher Rechtecke. Zunächst führen wir eine Menge von Funktionen ein, deren "Fläche und dem Graphen" in Rechtecke zerlegt werden kann. Wir führen dazu zunächst einige Begriffe ein, die auch in anderen Kontexten wichtig sind.

Sei X eine Menge, K ein Körper und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

Definition 46.1 *Der Träger*[3] *von f ist die Teilmenge*

$$\mathtt{supp}(f) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$$

von X.



Seien $f, g : X \to K$ zwei Abbildungen. Folgende einfache Regeln sind leicht einzusehen.

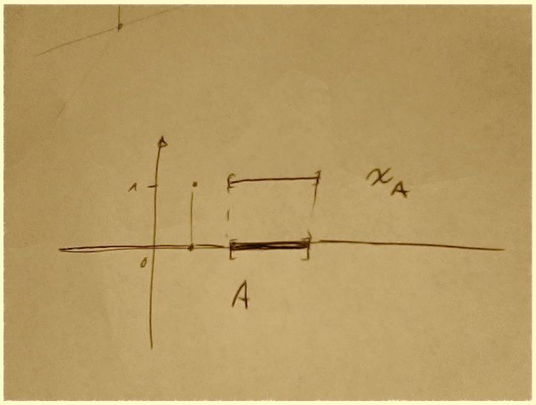
1. $\mathtt{supp}(f+g) \subseteq \mathtt{supp}(f) \cup \mathtt{supp}(g)$.
2. $\mathtt{supp}(fg) = \mathtt{supp}(f) \cap \mathtt{supp}(g)$

Sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

Definition 46.2 *Die charakteristische Funktion $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ ist durch*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

definiert.



Es gelten für Teilmengen A und B von X:

[3] engl. support

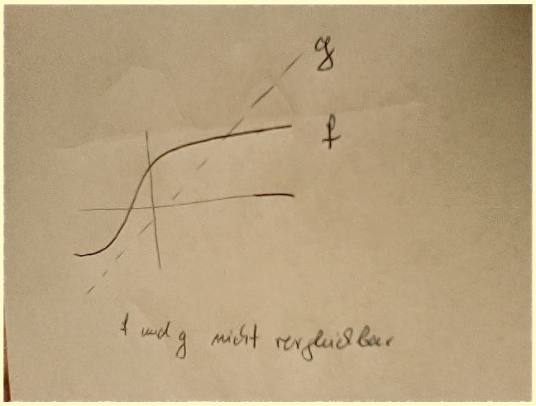
1. $\chi_A \chi_B = \chi_{A\cap B}$.

2. $\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_{A\cup B}$.

3. $\texttt{supp}\, \chi_A = A$,

4. $\chi_A f = f$, falls $\texttt{supp}(f) \subseteq A$.

Wir wollen die Größe reellwertiger Funktionen vergeichen. Der Begriff der Ordnungsrelation muß hierfür abgeschwächt werden, da zwei Funktionen nicht immer verglichen werden können. Ein Beispiel für zwei nichtvergleichbare Funktionen ist in folgendem Bild skizziert.



Definition 46.3 *Eine Halbordnung auf einer Menge X ist eine Relation auf X welche*

1. reflexiv

2. transitiv

3. antisymmetrisch

ist.

1. Im Gegensatz zu einer Ordnungsrelation fordern wir die Totalität nicht. Jede Ordnung ist eine Halbordnung.

2. Die kleinste Halbordnung auf einer Menge X ist $\texttt{id}_X$.

3. Die Relation $\subseteq$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X ist eine Halbordnung.

4. Ist $(X, \leq)$ eine Menge mit einer Halbordnung und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist $(Y, _{|Y} \leq_{|Y})$ eine Menge mit einer Halbordnung.

5. Sei $(X, \leq)$ eine Menge mit einer Halbordnung und W eine weitere Menge. Dann besitzt X^W eine Halbordnung gegeben durch

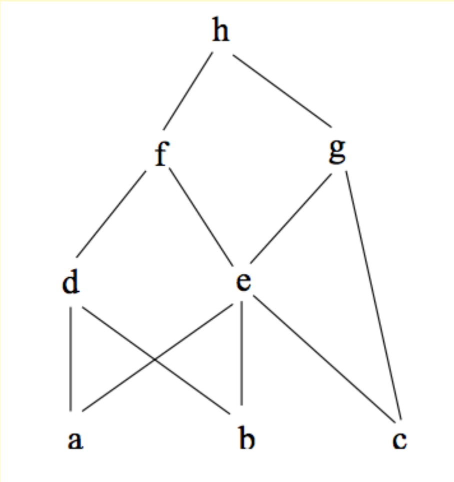
$$f \leq g := (\forall w \in W \mid f(x) \leq g(x)) \ , \quad f, g \in X^W \ .$$

6. Die Eigenschaft, monoton zu sein, kann man für Abbildungen zwischen halbgeordneten Mengen definieren.

   Definition 46.4 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen halbgeordneten Mengen ist monoton, wenn für alle $x, y \in X$ aus $x \leq y$ folgt $f(x) \leq f(y)$.*

7. **Definition 46.5** *Sei $(X, \leq)$ eine Menge mit einer Halbordnung. Ein Element $x \in X$ ist ein kleinstes Element wenn für $y \in X$ aus $y \leq x$ folgt, daß $y = x$ ist. Analog definiert man größte Elemente.*

   Im Gegensatz zu Ordnungen müssen kleinste oder größte Elemente in Halbordnungen nicht eindeutig sein.



In diesem Bild wird eine Halbordnung auf der Menge $\{a, \ldots, h\}$ veranschaulicht. Die Verbindung von d und f deutet an, daß d und f in Relation stehen. Durch die Höhe wird klargestellt, daß $d \leq f$ gilt. In diesem Bild sind allerdings nur solche Elemente verbunden, die unmittelbare Nachfolger voneinander sind. Es gibt also kein Element x mit $d < x < f$. Wir erhalten alle in Relation stehenden Paare aus der Transitivitätsbedingung. So gilt zum Beispiel $d \leq h$, nicht aber $d \leq g$. Die Elemente a, b, c sind kleinste Elemente und h ist ein größtes Element. Die Elemente d und g sind z.B. nicht vergleichbar.

Wir betrachten reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $Z \subseteq [a, b)$ eine endliche Teilmenge. Für jedes $z \in Z$ definieren wir den Nachfolger

$$\nu(z) := \min(\{x \in Z \mid z < x\} \cup \{b\}) \ .$$

Manchmal schreiben wir $\nu^Z(z)$ um anzudeuten, daß wir den Nachfolger von z in Z nehmen.

Definition 46.6 *Eine Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt einfach, wenn es eine endliche Teilmenge $Z \subseteq [a, b)$ gibt, so daß*

$$f = \sum_{z \in Z} f(z) \chi_{[z, \nu(z))}$$

gilt. Wir nennnen eine solche Teilmenge eine für f zulässige Zerlegung. Mit

$$\mathcal{E}([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^{[a,b]}$$

bezeichnen wir die Menge der einfachen Funktionen.

1. Ist $\phi \in \mathcal{E}([a, b])$, dann gilt $\phi(b) = 0$.
2. Ist $Z \subseteq [a, b)$ eine für $f \in \mathcal{E}([a, b])$ zulässige Zerlegungen und $Z' \subseteq [a, b)$ endlich mit $Z \subseteq Z'$, dann ist auch Z' eine für f zulässige Zerlegung.
3. Sei $Z \subset [a, b)$ endlich und $\lambda : Z \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann ist

   $$f \in \mathbb{R}^{[a,b]} \ , \quad f := \sum_{z \in Z} \lambda(z) \chi_{[z, \nu(z))}$$

   eine einfache Funktion und Z eine für f zulässige Zerlegung.

Die Menge $\mathbb{R}^{[a,b]}$ hat die Struktur eines reellen Vektorraumes.

Lemma 46.7 *Die Teilmenge der einfachen Funktionen $\mathcal{E}([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^{[a,b]}$ ist ein Untervektorraum.*

Proof.

1. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{E}([a, b])$ ist $\lambda f \in \mathcal{E}([a, b])$.
2. Seien nun $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ und Z_f und Z_g für f bzw. g zulässige Zerlegungen. Dann ist $Z_f \cup Z_g$ für f und g zulässig. Mann sieht nun leicht ein, daß $Z_f \cup Z_g$ auch für $f + g$ zulässig ist.

□

Wir kommen nun zur Definition der Fläche unter dem Graphen einer einfachen Funktion. Wir nennen die Größe dieser Fläche das Integral.

Definition 46.8 *Für eine einfache Funktion $f \in \mathcal{E}([a, b])$ definieren wir das Integral*

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{z \in Z} f(z)(\nu^Z(z) - z) \ ,$$

wobei Z eine für f zulässige Zerlegung ist.

Der Summand $f(z)(\nu^Z(z)-z)$ ist die Fläche des Rechteckes mit Höhe $f(z)$ und Basislänge $\nu^Z(z)-z$.

Lemma 46.9 *Das Integral einer einfachen Funktion $f \in \mathcal{E}([a,b])$ ist wohldefiniert.*

Proof. Sei $f \in \mathcal{E}([a,b])$. Wir müssen zeigen, daß der Wert von

$$\sum_{z\in Z} f(z)(\nu^Z(z)-z)$$

unabhängig von der Wahl der für f zulässigen Zerlegung Z ist.
Sei Z' eine weitere für f zulässige Zerlegung. Dann ist auch $Z \cup Z'$ eine für f zulässige Zerlegung und es gilt $Z \subset Z \cup Z'$. Es reicht also aus, für zwei für f zulässige Zerlegungen Z, Z' mit $Z \subseteq Z'$ zu zeigen, daß

$$\sum_{z\in Z} f(z)(\nu^Z(z)-z) = \sum_{z'\in Z'} f(z')(\nu^{Z'}(z')-z')$$

gilt. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \sum_{z'\in Z'} f(z')(\nu^{Z'}(z')-z') &= \sum_{z\in Z} \sum_{z'\in Z',\, z'\in[z,\nu(z))} f(z')(\nu^{Z'}(z')-z') \\ &= \sum_{z\in Z} f(z) \sum_{z'\in Z',\, z'\in[z,\nu(z))} (\nu^{Z'}(z')-z') \\ &= \sum_{z\in Z} f(z)(\nu^Z(z)-z) \end{aligned}$$

□

Lemma 46.10 *Das Integral einfacher Funktionen ist eine lineare und monotone Abbildung*

$$I : \mathcal{E}([a,b]) \to \mathbb{R} \ , \quad I(f) := \int_a^b f(x)dx \ .$$

Proof.

1. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{E}([a,b])$. Dann gilt $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.

2. Seien $f, g \in \mathcal{E}([a,b])$. Dann finden wir wie im Beweis von Lemma 46.7 eine Zerlegung Z, welche sowohl für f als auch für g zulässig ist. Es gilt

$$\begin{aligned} I(f+g) &= \sum_{z\in Z} (f(z)+g(z))(\nu(z)-z) \\ &= \sum_{z\in Z} f(z)(\nu(z)-z) + \sum_{z\in Z} g(z)(\nu(z)-z) \\ &= I(f)+I(g) \ . \end{aligned}$$

3. Wenn $f, g \in \mathcal{E}([a,b])$ und $f \leq g$ gilt, dann gilt $I(f) \leq I(g)$. In der Tat ist $0 \leq g-f$ und offensichtlich $0 \leq I(g-f) = I(g)-I(f)$.

46.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß in einer geordneten Menge größte und kleinste Elemente eindeutig bestimmt sind, wenn sie existieren. Zeigen sie weiter, daß sich diese Aussage nicht auf halbgeordnete Mengen verallgemeinert.

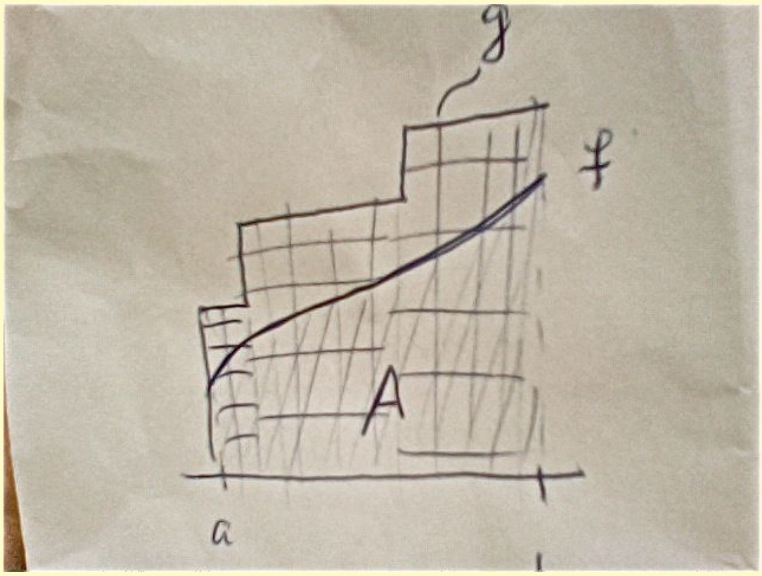
2. Weisen Sie die im Text formulierten Eigenschaften für den Träger einer Funktion nach.

3. Weisen Sie die im Text formulierten Rechenregeln für charakteristische Funktionen nach.

4. Zeigen Sie, daß $\subseteq$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X eine Halbordnung ist.

47 Das Integral

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Abbildung. Wir wollen nun den Begriff der Fläche unter dem Graphen von f definieren. Um die Anschauung zu entwickeln nehmen wir an, daß $0 \leq f$ gilt. Wenn $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine weitere Abbildung ist und $f \leq g$ gilt, dann sollte die Fläche unter dem Graphen von f kleiner als die Fläche unter dem Graphen von g sein. Wenn g eine einfache Funktion ist, dann ist die Fläche unter dem Graphen von g schon definiert. Wir können also den Wert der Fläche unter dem Graphen von f durch Flächen unter den Graphen von g für einfache Funktionen g mit $f \leq g$ von oben eingrenzen. Die Versuch, die Wahl von g zu optimieren führt auf den Begriff des Oberintegrals. Analog kommt man zum Unterintegral.



Definition 47.1 *Wir definieren das Ober- und das Unterintegral von f durch*

$$I^*(f) := \inf\{\int_a^b \phi(x)dx \mid \phi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ und } f_{|[a,b)} \leq \phi_{|[a,b)}\}$$

$$I_*(f) := \sup\{\int_a^b \phi(x)dx \mid \phi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ und } \phi_{|[a,b)} \leq f_{|[a,b)}\}$$

Die Einschränkungen auf das halboffene Intervall $[a,b)$ sind hier notwendig, da wir einfache Funktionen so definiert haben, daß sie im Punkt b den Wert 0 haben. Um zu sehen, daß das Oberintegral wohldefiniert ist, müssen wir einsehen, daß das Infimum über eine nichtleere von unten beschränkte Menge von reellen Zahlen gebildet wird. Da f beschränkt ist, gilt $\sup f\ \chi_{|[a,b)} \in \mathcal{E}([a,b])$ und $f_{|[a,b)} \leq \sup f\ \chi_{|[a,b)]}$. Weiter folgt aus $\phi \in \mathcal{E}([a,b])$ und $f_{|[a,b)} \leq \phi_{|[a,b)}$, daß $\inf f\ \chi_{|[a,b)} \leq \phi_{|[a,b)}$. Damit ist $(b-a)\inf f \leq \int_a^b \phi(x)dx$.

Analog ist das Unterintegral wohldefiniert.

Wenn f selbst einfach ist, dann folgt aus der Monotonie des Integrals für einfache Funktionen, daß

$$I_*(f) = \int_a^b f(x)dx = I^*(f) \ .$$

Lemma 47.2 *Es gilt $I_*(f) \leq I^*(f)$.*

Proof. Sei $\phi \in \mathcal{E}([a,b])$ und $f_{|[a,b)} \leq \phi_{|[a,b)}$. Dann folgt aus $\psi \in \mathcal{E}([a,b])$ und $\psi_{|[a,b)} \leq f_{|[a,b)}$ daß $\psi \leq \phi$. Daraus schließen wir $I_*(f) \leq \int_a^b \phi(x)dx$. Damit gilt auch $I_*(f) \leq I^*(f)$. □

Definition 47.3 *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn sie beschränkt ist und $I_*(f) = I^*(f)$ gilt. In diesem Fall nennen wir die reelle Zahl*

$$\int_a^b f(x)dx := I_*(f)$$

das Integral von f. Mit $\mathcal{R}([a,b]) \subseteq \mathbb{R}^{[a,b]}$ bezeichnen wir die Teilmenge der integrierbaren Funktionen.

Für integrierbare Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist also die Größe der Fläche unter dem Graphen definiert welche mit geeigeneten Vorzeichen betrachten. Insbesondere erweitern wir die Definition des Integrals auf den Fall, daß die untere Grenze größer also die obere ist, durch

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx \ .$$

Das folgende Beispiel zeigt, daß nicht alle Funktionen integrierbar sind. Sei

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann ist 0 die größte einfache Funktion, welche kleiner gleich f ist. Weiter ist $\chi_{[a,b)}$ die kleinste einfache Funktion welche größer gleich $f_{|[a,b)}$ ist. Damit gilt $I_*(f) = 0$ und $I^*(f) = 1$. Folglich ist f nicht integrierbar. Für nicht integrierbare Funktion ist die Fläche unter dem Graphen nicht definiert.

Wir stellen fest, daß einfache Funktionen integrierbar sind und das neu definierte Integral mit dem schon definierten übereinstimmt.

Seien $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ und $\phi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$ und gelte

$$\phi_{|[a,b)} \le f_{|[a,b)} \le \psi_{|[a,b)} \ , \quad \int_a^b (\psi(x) - \phi(x))dx \le \epsilon \ .$$

Dann nennen wir das Paar (ϕ, ψ) eine ϵ-Zange von f. Mit Hilfe dieses Begriffes erhalten wir eine kurze praktische Charakterisierung der Integrierbarkeit.

Corollary 47.4 *Eine Funktion $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ ist genau dann integrierbar ist, wenn es für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ eine ϵ-Zange von f gibt.*

In folgendem Satz sammeln wir die grundlegenden Eigenschaften des Integrals intergrierbarer Funktionen.

Theorem 47.5

1. *Die Teilmenge $\mathcal{R}([a,b]) \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ der integrierbaren Funktionen ist ein Untervektorraum und die Abbildung*

$$\mathcal{R}([a,b]) \ni f \mapsto \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$$

ist linear.

2. *Wenn f, g integrierbar sind und $f \le g$ gilt, dann gilt auch*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \ .$$

3. *Wenn $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und $c \in (a,b)$ gilt, dann ist $f_{|[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])$, $f_{|[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b])$ und es gilt*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \ .$$

4. Wenn f integrierbar ist, dann ist auch $|f|$ integrierbar und es gilt

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

Proof. Für 1. müssen wir zeigen: Wenn f, g integrierbar und $\kappa \in \mathbb{R}$ sind, dann ist auch $f + \kappa g$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (f + \kappa g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \kappa \int_a^b g(x)dx \ .$$

Wir betrachten den Fall, daß $\kappa > 0$. Der Fall $\kappa < 0$ geht analog. Sei $\epsilon \in R^{>}$ gegeben. Dann finden wir eine $\frac{\epsilon}{2}$-Zange (ϕ, ψ) für f und eine $\frac{\epsilon}{2(\kappa+1)}$-Zange (λ, μ) für g. Dann gilt auf $[a, b)$ die Ungleichung

$$\phi + \kappa\lambda \leq f + \kappa g \leq \psi + \kappa\mu$$

und

$$\begin{aligned}\int_a^b [(\psi + \kappa\mu)(x) - (\phi + \kappa\lambda)(x)]dx &= \int_a^b (\psi(x) - \phi(x))dx + \kappa \int_a^b (\mu(x) - \lambda(x))dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\kappa\epsilon}{2(\kappa + 1)} \\ &\leq \epsilon \ .\end{aligned}$$

Folglich ist $(\phi + \kappa\lambda, \psi + \kappa\mu)$ eine ϵ-Zange von $f + \kappa g$. Wir schließen, daß $f + \kappa g \in \mathcal{R}([a, b])$ gilt. Wir sehen weiter, daß

$$\begin{aligned}&|\int_a^b (f + \kappa g)(x)dx - \int_a^b f(x)dx - \kappa \int_a^b g(x)dx| \\ &\leq |\int_a^b (\psi + \kappa\mu)(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx - \kappa \int_a^b \mu(x)dx| + 2\epsilon \\ &= 2\epsilon \ .\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_a^b (f + \kappa g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \kappa \int_a^b g(x)dx \ .$$

Wir haben damit gezeigt, daß $\mathcal{R}([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^{[a,b]}$ ein Untervektorraum und

$$\int_a^b \ldots dx : \mathcal{R}([a, b]) \to \mathbb{R}$$

eine lineare Abbildung ist.

Seien nun $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ und gelte $f \leq g$. Dann folgt für $\phi \in \mathcal{E}([a, b])$ aus $\phi_{|[a,b)} \leq f_{|[a,b)}$ auch $\phi_{|[a,b)} \leq g_{|[a,b)}$. Damit gilt

$$\int_a^b f(x)dx = I_*(f) \leq I_*(g) = \int_a^b g(x)dx \ .$$

Das ist die Monotonie 2. des Integrals.

Wir zeigen nun 3. Wir zeigen zunächst $f_{|[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Wir müssen eine ϵ-Zange von $f_{|[a,b]}$ finden. Sei (ψ, ϕ) eine ϵ-Zange von f. Dann gilt $\chi_{[a,c)}\phi_{|[a,c]}, \chi_{[a,c)}\psi_{|[a,c]} \in \mathcal{E}([a,c])$ und

$$\chi_{[a,c)}\psi_{|[a,c]} \leq f_{|[a,c)} \leq \chi_{[a,c)}\phi_{|[a,c]} \ .$$

Desweiteren gilt $\chi_{[a,c)}(\phi - \psi) \in \mathcal{E}([a,b])$ und wegen $\chi_{[a,c)}(\phi - \psi) \leq (\phi - \psi)$, daß

$$\int_a^c (\phi(x) - \psi(x))dx = \int_a^b \chi_{[a,c)}(x)(\phi(x) - \psi(x))dx \leq \int_a^b (\phi(x) - \psi(x))dx \leq \epsilon \ .$$

Damit ist $(\chi_{[a,c)}\phi_{|[a,c]}, \chi_{[a,c)}\psi_{|[a,c]})$ eine ϵ-Zange von $f_{|[a,c]}$. Wir sehen, daß $f_{|[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c])$. Analog sieht man $f_{|[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b])$ ein.

Nun gilt wegen

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx| \leq 3\epsilon + |\int_a^b \phi(x)dx - \int_a^c \phi(x)dx - \int_c^b \phi(x)dx| = 3\epsilon \ .$$

Da wir ϵ beliebig klein wählen können, gilt die behauptete Gleichung.

Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$ gegeben. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ und (ϕ, ψ) eine ϵ-Zange von f. Für $\delta \in \mathbb{R}^>$ definieren wir

$$\kappa := \begin{cases} -\psi(x) & \psi(x) < 0 \\ \phi(x) & \psi(x)\phi(x) \leq 0 \\ \phi(x) & \phi(x) > 0 \end{cases}$$

und

$$\lambda := \begin{cases} \psi(x) & \phi(x) > 0 \\ \psi(x) & \psi(x)\phi(x) \leq 0 \\ -\phi(x) & \psi(x) < 0 \end{cases}$$

Damit gilt $\kappa, \lambda \in \mathcal{E}([a,b])$ und

$$\kappa_{|[a,b)} \leq |f|_{|[a,b)} \leq \lambda_{|[a,b)} \ .$$

Aus $\lambda - \kappa = \psi - \phi$ folgt, daß $\lambda - \kappa = \psi - \phi$ eine ϵ-Zange für $|f|$ ist. Wir sehen, daß $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$. Die Ungleichung folgt aus $f \leq |f|$ und der Monotonie des Integrals. □

In den folgenden Beispielen berechnen wir Integrale direkt mit der Definition. Später wird uns der Hauptsatz und seine Konsequenz 48.6 eine viel einfachere Methode zur Integralberechnung in die Hand geben.

1. Wir betrachten die lineare Funktion $f : [0,1] \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ betrachten wir die einfachen Funktionen

$$\psi := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \chi_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} \ , \quad \phi := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \chi_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} \ .$$

Dann gilt auf $[0,1)$ die Ungleichung $\psi \leq f \leq \phi$. Weiter gilt mit Lemma 7.2

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n} \ .$$

und

$$\int_0^1 \phi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \ .$$

Da $\mathtt{lim}_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$ gilt, ist f integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \ .$$

2. Wir betrachten die quadratische Funktion $f : [0,1] \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ betrachten wir die einfachen Funktionen

$$\psi := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} \chi_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} \ , \quad \phi := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2} \chi_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} \ .$$

Dann gilt auf $[0,1)$ die Ungleichung $\psi \leq f \leq \phi$. Weiter gilt wegen (5)

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \ .$$

und

$$\int_0^1 \phi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} \ .$$

Da

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \mathtt{lim}_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

gilt, ist f integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \ .$$

47.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß für eine einfache Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = I^*(f) \; .$$

2. Zeigen Sie: Wenn $f \in C([a, b])$ ist, $f(b) = 0$ gilt und die Menge $\{\phi \in \mathcal{E}([a, b]) \,|\, f \leq \phi\}$ ein kleinstes Element hat, dann ist f einfach.

3. Bestimmen Sie allgemeine Formeln für $\int_a^b x^n dx$ für $n = 1, 2, 3$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Zeigen Sie, daß dann $\sqrt{|f|} \in \mathcal{R}([a, b])$ gilt.

48 Das Integral stetiger Funktionen

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

Definition 48.1 *Die Abbildung f heißt gleichmäßig stetig, wenn für alle $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ ein $\delta \in \mathbb{R}^>$ existiert, so daß für alle $x, y \in X$ aus $d_X(x, y) \leq \delta$ die Ungleichung $d_Y(f(x), f(y)) \leq \epsilon$ folgt.*

Gleichmäßige Stetigkeit ist eine Verschärfung des ϵ-δ-Kriteriums. Für die gleichmäßige Stetigkeit wird bei gegebenen $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ die Existenz von $\delta \in \mathbb{R}^>$ gefordert, so daß das ϵ-δ-Kriterium in allen Punkten des Raumes X erfüllt ist. Es ist klar, daß eine gleichmäßig stetige Abbildung stetig ist.

Lemma 48.2 *Sei $f : X \to Y$ stetig. Wenn (X, d_X) folgenkompakt ist, dann ist f gleichmäßig stetig.*

Proof. Wir argumentieren indirekt und nehmen an, daß f nicht gleichmäßig stetig sei. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Dann könnem wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ zwei Punkte $x_n, y_n \in X$ finden mit $d_X(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ und $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Nach Auswahl einer Teilfolge können wir wegen der Folgenkompaktheit von X annehmen, daß die Folge (x_n) einen Grenzwert x hat. Dann gilt auch $\mathtt{lim}_{n\to\infty} y_n = x$. Da f im Punkt x stetig ist, können wir $n \in \mathbb{N}$ so groß wählen, daß $d_Y(f(x_n), f(x)) \leq \frac{\epsilon}{3}$ und $d_Y(f(y_n), f(x)) \leq \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$. Das ist ein Widerspruch. □

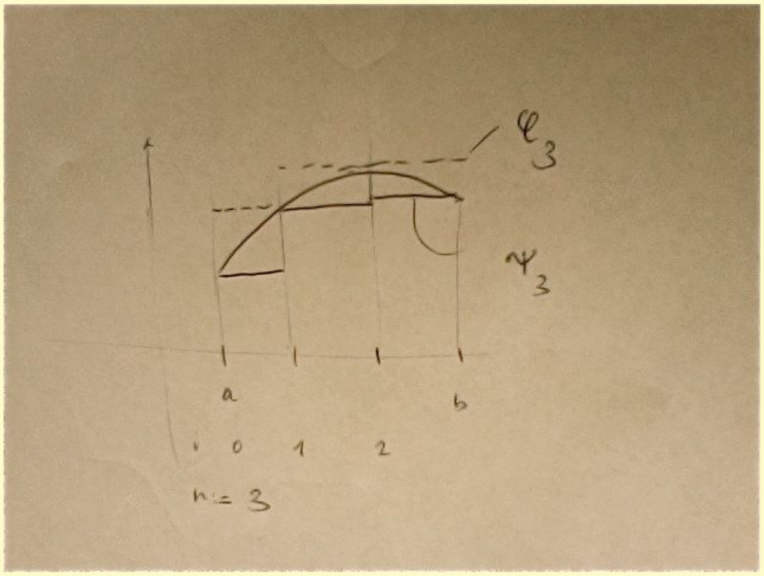
Wir zeigen nun, daß stetige Funktionen integrierbar sind. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$

Proposition 48.3 *Es gilt $C([a, b]) \subseteq \mathcal{R}([a, b])$.*

Proof. Wir betrachten eine stetige Funktion $f \in C([a, b])$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Wir müssen zeigen, daß f eine ϵ-Zange besitzt. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ betrachten wir die Teilmenge

$Z_n := \{a + \frac{i}{n}(b-a) \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$. Wir definieren einfache Funktionen ϕ_n, ψ_n auf $[a,b]$ durch

$$\psi_n := \sum_{z \in Z_n} \inf f_{|[z,\nu(z)]} \chi_{[z,\nu(z))} \ , \quad \phi_n := \sum_{z \in Z_n} \sup f_{|[z,\nu(z)]} \chi_{[z,\nu(z))} \ .$$



Dann gilt auf $[a,b)$ die Ungleichung $\psi_n \le f \le \phi_n$ und

$$\int_a^b (\psi_n(x) - \phi_n(x))dx = \frac{b-a}{n} \sum_{z \in Z_n} (\sup f_{|[z,\nu(z)]} - \inf f_{|[z,\nu(z)]}) \ .$$

Da f stetig und $[a,b]$ als beschränktes Intervall folgenkompakt ist, ist f nach Lemma 48.2 gleichmäßig stetig. Wir finden also ein $n \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $x, y \in [a,b]$ aus $|x-y| \le \frac{1}{n}$ folgt daß $|f(x) - f(y)| \le \frac{\epsilon}{b-a}$ gilt. Aus dieser Ungleichung folgt

$$\sup f_{|[z,\nu(z)]} - \inf f_{|[z,\nu(z)]} \le \frac{\epsilon}{b-a}$$

für alle $z \in Z_n$ und deshalb

$$\int_a^b (\phi_n(x) - \psi_n(x))dx \le \epsilon \ .$$

Wir haben damit die Existenz einer ϵ-Zange für f gezeigt. □

Für $f \in C([a,b])$ definieren wir $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_a^x f(x)dx \ , \quad x \in [a,b]$$

Proposition 48.4 (Hauptsatz) *Es gilt $F \in C([a,b])$. Weiter ist $F_{|(a,b)}$ ist differenzierbar und es gilt*

$$(F_{|(a,b)})' = f_{|(a,b)} \ .$$

Proof. Sei $u \in [a,b]$. Wir betrachten den Differenzenquotienten $\Delta_u(F)(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_u(F)(x) &= \frac{\int_a^x f(x)dx - \int_a^u f(x)dx}{x-u} \\
&= \frac{\int_u^x f(x)dx}{x-u} \\
&= \frac{\int_u^x f(u)dx + \int_u^x (f(x)-f(u))dx}{x-u} \\
&= f(u) + \frac{\int_u^x (f(x)-f(u))dx}{x-u} \ .
\end{aligned}$$

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Dann finden wir ein $\delta \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß aus $x \in [a,b]$ und $|u-x| \leq \delta$ folgt daß $|f(x)-f(u)| \leq \epsilon$ gilt. Daraus folgt für diese Zahlen u daß

$$|\Delta_u(F)(x) - f(u)| \leq \epsilon \ .$$

Wir sehen, daß

$$\mathtt{lim}_{x \to u} \Delta(F)(x) = f(u)$$

gilt. Daraus folgt $(F_{|(a,b)})' = f_{|(a,b)}$. Für die Stetigkeit von F argumentieren wir wie im Beweis von Lemma 39.3. □

In der folgenden Definition betrachten wir $c, d \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $c < d$.

Definition 48.5 *Sei $f \in C((c,d))$. Eine Abbildung $F \in C((c,d))$ heißt Stammfunktion von f, falls F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.*

Proposition 48.6 *Sei $f \in C((c,d))$.*

1. *Wenn F_0 und F_1 Stammfunktionen von f sind, dann gibt es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ so daß die Gleichung $F_0 + C = F_1$ gilt.*

2. *Sei $a \in (c,d)$. Dann ist die Funktion*

$$(c,d) \ni x \mapsto F(x) := \int_a^x f(x)dx \in \mathbb{R}$$

ist eine Stammfunktion von f.

3. *Sind F eine Stammfunktion von f und $a, b \in (c,d)$ mit $a < b$, dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ .$$

Proof.

1. Die Ableitung der Differenz $F_1 - F_0$ auf (a, b) ist Null. Folglich ist diese Differenz auf (a, b) lokal konstant und damit konstant, weil (a, b) zusammenhängend ist.
2. Das ist der Hauptsatz 48.4.
3. Die Differenz
$$F(x) - F(a) - \int_a^x f(x)dx$$
ist einerseits konstant und verschwindet andererseits bei $x = a$. Damit verschwindet sie auch bei $x = b$.

Mit Hilfe des Satzes 48.6 können wir schon viele Integrale ausrechnen.

1. $$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$
für $n \in \mathbb{N}$.
2. $$\int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$$
für $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $a, b > 0$.
3. $$\int_a^b \frac{1}{x} = \log \frac{b}{a}$$
für $a, b > 0$
4. $$\int_a^b \exp(\lambda x)dx = \frac{\exp(\lambda b) - \exp(\lambda a)}{\lambda}$$
5. Es gilt
$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2}\ .$$
6. $$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} = \arctan(b) - \arctan(a)$$
7. $$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(b) - \arcsin(a)$$
für $a < b \in (-1, 1)$

8. Es gilt
$$\int_a^b e^{ct}\sin(\omega t)dt = \frac{e^{cb}\sin(\omega b-\alpha)-e^{ca}\sin(\omega a-\alpha)}{\sqrt{c^2+\omega^2}}$$
wobei α durch die Gleichung $\cos(\alpha)=\frac{c}{\sqrt{c^2+\omega^2}}$ bestimmt wird Dazu rechnen wir:
$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{ct}\sin(\omega t)dt &= \frac{1}{2i}\int_a^b (e^{(c+i\omega)t}-e^{(c-i\omega)t}) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(c+i\omega)b}-e^{(c+i\omega)a}}{c+i\omega}-\frac{e^{(c-i\omega)b}-e^{(c-i\omega)a}}{c-i\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2i(c^2+\omega^2)}((c-i\omega)(e^{(c+i\omega)b}-e^{(c+i\omega)a})-(c+i\omega)(e^{(c-i\omega)b}-e^{(c-i\omega)a})) \\
&= \frac{1}{2i(c^2+\omega^2)}(2ic(e^{cb}\sin(\omega b)-e^{ca}\sin(\omega a))-2i\omega(e^{cb}\cos(\omega b)-e^{ca}\cos(\omega a))) \\
&= \frac{1}{(c^2+\omega^2)}(c(e^{cb}\sin(\omega b)-e^{ca}\sin(\omega a))-\omega(e^{cb}\cos(\omega b)-e^{ca}\cos(\omega a))) \\
&= \frac{1}{\sqrt{c^2+\omega^2}}\left(e^{cb}\sin(\omega b-\alpha)-e^{ca}\sin(\omega a-\alpha)\right) \ . \qquad (14)
\end{aligned}$$

48.1 Aufgaben

1. Sei $f\in\mathcal{R}([a,b])$ und $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ durch $F(x):=\int_a^x f(x)\ dx$ definiert. Zeigen Sie, daß F stetig ist.

2. Sei $r\in\mathbb{R}^>$. Berechnen Sie für $a,b\in\mathbb{R}$ $\int_a^b r^x\ dx$.

49 Rechnen mit Integralen

In diesem Kapitel geben wir weitere Methoden an, mit welchen man Integrale explizit bestimmen kann. Wir betrachten $a,b,c,d\in\overline{\mathbb{R}}$ mit $c<a<b<d$.

Seien $f,g:(c,d)\to\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Da gilt die Relation
$$(fg)' = f'g+fg' \ .$$
Wir erhalten also nach Integration $\int_a^b \dots dx$ die Gleichung
$$f(b)g(b)-f(a)g(a) = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx \ .$$
Wir schreiben diese Gleichung in der üblichen Form der Regel für die partielle Integration um.

Corollary 49.1 (partielle Integration) *Es gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \ .$$

Hier sind einige Anwendungen dieser Regel.

1. Integrale der Form
$$\int_a^b x^n \exp(x)dx$$
kann man durch Rekursion nach n berechnen. Wir wenden die partielle Integrationsregel mit $f(x) = x^n$ und $g(x) = e^x$ an.
$$\int_a^b x^n e^x dx = b^n e^b - a^n e^a - n \int_a^b x^{n-1} e^x dx.$$
Es gilt so zum Beispiel
$$\int_a^b x e^x dx = (b-1)e^b - (a-1)e^a \ .$$

2. Integrale der Form $\int_a^b x^n \sin(x)dx$ oder $\int_a^b x^n \cos(x)dx$ lassen sich ebenfalls rekursiv berechnen.

3. Für $0 < a < b$ gilt
$$\int_a^b x \log(x)dx = \frac{b^2}{2}\log(b) - \frac{a^2}{2}\log(a) - \int_a^b \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{b^2}{2}\log(b) - \frac{a^2}{2}\log(a) - \frac{1}{4}(b^2 - a^2) \ .$$
Hier wenden wir die Regel mit $g(x) = \frac{x^2}{2}$ und $f(x) = \log(x)$ an.

Sei $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $U \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $g([a,b]) \subseteq U$ und $F : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann existiert eine offene Umgebung V von $[a,b]$ mit $g(V) \subseteq U$ und $F \circ g : V \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar. Es gilt auf V

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' \ .$$

Wir setzen $f := F'$ und erhalten mit

$$\int_b^a (F \circ g)'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

die Substitutionsregel.

Corollary 49.2 (Substitutionsregel)

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx \ .$$

Es gilt

1. $$\int_a^b \cos(x)e^{\sin(x)}dx = e^{\sin(b)} - e^{\sin(a)}$$

2. Wir berechnen die halbe Kreisfläche.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\sin(-\frac{\pi}{2})}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-x^2}dx \\
&= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(x)^2}\cos(x)dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx \\
(\sin(x) = \cos(x-\frac{\pi}{2})) \quad &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(x-\frac{\pi}{2})dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x-\frac{\pi}{2})dx \\
&= \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(x)dx \\
(\cos(x) = -\cos(x-\pi)) \quad &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(x)dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx
\end{aligned}$$

Wir erhalten zusammen

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x)+\sin^2(x))dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

49.1 Aufgaben

1. $\int_a^b x^2 e^{3x} dx = ?$

2. $\int_a^b x^2 \sin(x) dx = ?$

3. $\int_a^b x^2 \log(x) dx = ?$

50 Uneigentliche Integrale

Sei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$ und $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

Definition 50.1 *Wenn $f_{|[a,c]}$ für jedes $c \in [a, c)$ integrierbar ist und $\mathtt{lim}_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx$ existiert, dann definieren wir das uneigentliche Integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \mathtt{lim}_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx \ .$$

Analog definieren wir $\int_b^a f(x)\,dx$ für Abbildungen $f : (b, a] \to \mathbb{R}$, falls $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b < a$.

Beachte, daß die Symbolik für uneigentliche Integrale mit der für Integrale übereinstimmt. Man muß also dem Kontext entnehmen, welcher Fall vorliegt. Im Fall eines uneigentlichen Integrals ist der erste Schritt zur Berechnung immer auch die Beantwortung der Frage nach der Existenz.

Für den Nachweis der Existenz hilft manchmal folgendes Lemma.

Lemma 50.2 (Majorantenkriterium) *Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$. Wir machen folgende Annahmen an die Abbildung $f : [a, b) \to \mathbb{R}$.*

1. *Für jedes $u \in [a, b)$ ist $f_{|[a,u]}$ integrierbar.*
2. *Es gibt eine Funktion $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ derart, daß $\int_a^b g(x)dx$ existiert.*
3. *Es gilt $|f| \leq g$.*

Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$.

Proof. Wir wählen eine Folge (u_n) in $[a, b)$ mit $\mathtt{lim}_{n\to\infty} u_n = b$. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ daß

$$|\int_a^{u_n} f(x)\,dx| \leq \int_a^{u_n} |f(x)|\,dx \leq \int_a^{u_n} g(x)\,dx \ .$$

Da $\mathtt{lim}_{n\to\infty} \int_a^{u_n} g(x)\,dx$ existiert, ist die Folge reeller Zahlen $(|\int_a^{u_n} f(x)\,dx|)$ beschränkt und hat damit einen Häufungspunkt I.

Wir zeigen nun, daß

$$\int_a^b f(x)\,dx = I$$

gilt. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir wählen $u \in [a, b)$ derart, daß

$$\int_u^b g(x)dx \leq \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Für $u' \in [u, b)$ finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u' \leq u_n$ und

$$|\int_a^{u_n} f(x)dx - I| \leq \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Dann gilt

$$|\int_a^{u'} f(x) - I| \leq |\int_{u'}^{u_n} f(x)\,dx| + |\int_a^{u_n} f(x)dx - I| \leq \int_{u'}^{u_n} g(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ .$$

. □

Hier sind einige Beispiele:

1. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $c \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$\int_a^\infty \exp(-cx) = \frac{\exp(-ca)}{c} \ .$$

   Wir rechnen für $u \in [a, \infty)$ daß

$$\int_a^u \exp(-cx)dx = \frac{\exp(-ca) - \exp(-cu)}{c} \ .$$

   Es gilt

$$\mathtt{lim}_{u\to\infty} \frac{\exp(-cu) - \exp(-ca)}{c} = \frac{\exp(-ca)}{c} \ .$$

2. Es gilt für $r \in (1, \infty)$ daß

$$\int_1^\infty x^{-r} dx = \frac{1}{r-1} \ .$$

   Wir rechnen für $a \in [a, \infty)$

$$\int_1^u x^{-r} dx = \frac{x^{1-r} - 1}{1-r}$$

   und

$$\mathtt{lim}_{u\to\infty} \frac{x^{1-r} - 1}{1-r} = \frac{1}{r-1} \ .$$

3. Für $r \in (0, \infty)$ existiert das Integral

$$\int_1^\infty \sin(x) x^{-r} dx \ .$$

   Um das einzusehen, benutzen wir für $r > 1$ zunächst das Majorantenkriterium mit

$$|\sin(x)x^{-r}| \leq x^{-r}.$$

Wenn sich die uneigentlich integrierbare Abbildung $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zu einer integrierbaren Abbildung $\tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ fortsetzen läßt, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx\ .$$

Für $r\in(0,1]$ rechnen wir

$$\int_1^c \sin(x)x^{-r}dx = (-\cos(c)c^{-r}+\cos(1)) + r\int_1^c x^{-r-1}\cos(x)dx\ .$$

Wir sehen, daß der Grenzwert $c\to\infty$ der rechten Seite existiert.

Seien nun $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ und $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ gegeben. Wir wählen $c\in(a,b)$.

Definition 50.3 *Wenn $\int_c^b f(x)\,dx$ und $\int_a^c f(x)\,dx$ existieren, dann definieren wir das uneigentliche Integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Man muß sich überzeugen, daß die Existenz und der Wert des uneigentlichen Integrals nicht von der Wahl des Punktes $c\in(a,b)$ abhängt.

1. Es gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi\ .$$
In der Tat ist
$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(b)-\arctan(a)\ .$$

2. Das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+|x|}dx$$
existiert nicht, obwohl zum Beispiel
$$\mathtt{lim}_{u\to\infty}\int_{-u}^{u}\frac{x}{1+|x|}dx = 0$$
gilt. In der Tat gilt für $|x|\geq 1$ daß $|\frac{x}{1+|x|}|\geq\frac{1}{2}$. Damit gilt
$$\int_0^u \frac{x}{1+|x|}dx \geq \int_0^1 \frac{x}{1+|x|}dx + \frac{1}{2}(u-1)\ .$$
Der Grenzwert für $u\to\infty$ existiert nicht.

Lemma 50.4 *Für $r \in (0,\infty)$ existiert $\int_0^\infty e^{-x}x^{r-1}dx$.*

Proof. Wir zeigen, daß

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{r-1}dx$$

existiert. In der Tat gilt $\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}x^{r-1} = 0$. Damit existiert $c \in \mathbb{R}$ derart, daß $e^{-\frac{x}{2}}x^{r-1} \leq c$ für alle $x \in [1,\infty)$. Dann ist $e^{-x}x^{r-1} \leq ce^{-\frac{x}{2}}$. Da $\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ existiert, existiert auch $\int_1^\infty e^{-x}x^{r-1}dx$.

Es gilt $e^{-x}x^{r-1} \leq x^{r-1}$ und $\int_0^1 x^{r-1} = \frac{1}{r}$. Folglich existiert

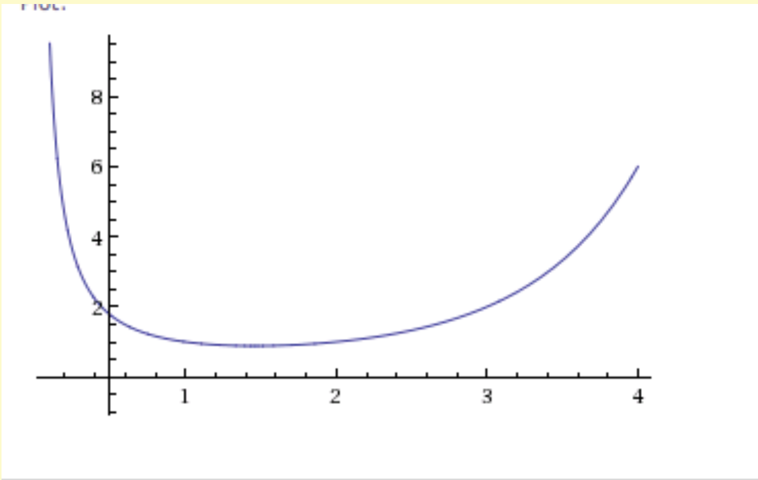
$$\int_0^1 e^{-x}x^{r-1}\,dx\ .$$

□

Definition 50.5 *Wir definieren die Γ-Funktion als die Abbildung*

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}\ , \quad \Gamma(r) := \int_0^\infty e^{-x}x^{r-1}dx\ .$$

Hier ist ein Plot der Γ-Funktion



1. Es gilt $r\Gamma(r) = \Gamma(r+1)$. In der Tat gilt

$$\int_a^b e^{-x}x^r dx = -(e^{-b}b^r - e^{-a}a^r) + r\int_a^b e^{-x}x^{r-1}dr\ .$$

Wir bilden den Grenzwert für $a \to 0$ und $b \to \infty$ und erhalten

$$\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)\ .$$

2. Es gilt $\Gamma(1) = 1$.

3. Es gilt für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ daß
$$\Gamma(n) = (n-1)! \ .$$
Wir zeigen das induktiv. Es gilt $\Gamma(1) = 1 = 0!$. Sei nun $\Gamma(n) = (n-1)!$. Dann gilt $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$.

50.1 Aufgaben

1. Für welche $r \in \mathbb{R}$ existiert
$$\int_0^1 x^r dr \ .$$
Berechnen Sie gegebenenfalls die Wert.

2. Existiert
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2} \ .$$
Berechnen Sie gegebenenfalls die Wert.

3. Zeigen Sie, daß $\int_0^1 \sin(\frac{1}{x})dx$ existiert.

4.

51 Inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Wir wollen folgendes Problem modellieren. Wir haben ein Schwimmbad mit der Grundfläche 1. Das Schwimmbad hat einen einen Abflußspalt. Damit ist die Abflußrate proportional zur Füllhöhe H, also durch αH für eine Konstante α gegeben. Wir haben weiter einen Zufluß Z, der von der Zeit abhängen kann. Am Anfang ist das Schwimmbad leer. Unsere Aufgabe besteht in der Beschreibung der Füllhöhe $H(t)$ zur Zeit t. Wir wollen insbesondere untersuchen, was passiert, wenn der Zustrom konstant $Z(t) = Z_0$ oder periodisch mit einer Periode $2\pi\omega^{-1}$, z.B. $Z(t) = Z_0(1 + \sin(\omega t))$ ist.

Im Text haben wir ein Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung für die Funktion $t \mapsto H(t)$ beschrieben.
$$H' = -\alpha H + Z \ , \quad H(0) = 0 \ .$$
Das ist eine inhomogene lineare Differemtialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Seien $a, c \in \mathbb{R}$ und $g \in C([0,\infty)$ stetig.

Proposition 51.1 *Es gibt genau eine stetige und auf $(0,\infty)$ differenzierbare Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, welche auf $(0,\infty)$ der Gleichung*

$$f' + af = g$$

und der Anfangsbedingung $f(0) = c$ genügt.

Proof. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Seien f_0, f_1 zwei Funktionen, welche den obigen Bedingungen genügen. Dann erfüllt die Differenz $\phi := f_1 - f_0$ die Bedingungen:

$$\phi' + a\phi = 0 \quad \text{auf } (0,\infty)\ , \quad \phi(0) = 0\ .$$

Wir hatten in 43.1 gesehen, daß es genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion gibt, welche der Differentialgleichung auf ganz $\mathbb{R}$ und der Anfangsbedingung genügt. Das ist in dem vorliegenden Fall die Nullfunktion. Wir können dieses Ergebnis aber nicht direkt anwenden, weil wir hier nur annehmen, daß ϕ auf $[0,\infty)$ stetig und die Differentialgleichung auf $(0,\infty)$ betrachten.
Deshalb bringen wir noch einmal ein Argument welches zeigt, daß $\phi = 0$ gilt. Dazu betrachten wir die Funktion $\psi(t) := \phi(t)e^{at}$. Es gilt für $t \in (0,\infty)$ wegen der Differentialgleichung für ϕ, daß

$$\psi'(t) = \phi'(t)e^{at} + a\phi(t)e^{at} = -a\phi(t)e^{at} + a\phi(t)e^{at} = 0\ .$$

Damit ist ψ auf $(0,\infty)$ lokal konstant und damit konstant, da $(0,\infty)$ zusammenhängend ist. Da ψ stetig und $\psi(0) = 0$ ist, gilt $\psi = 0$. Daraus folgt $\phi = 0$.

Wir wissen schon daß die Abbildung $f \mapsto f(0)$ eine Bijektion zwischen der Menge der Lösungen der homogenen Gleichung $f' + af = 0$ und $\mathbb{R}$ definiert. Die inverse Abbildung ist

$$\mathbb{R} \ni C \mapsto f : (\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) := Ce^{-at} \in \mathbb{R})\ .$$

Um die inhomogene Gleichung zu lösen, machen wir den Ansatz

$$f(x) = C(t)e^{-at}\ ,$$

d.h. wir nehmen an, daß C eine noch zu bestimmende auf $[0,\infty)$ stetige und auf $(0,\infty)$ differenzierbare Funktion ist. Diese Ansatz heißt Variation der Konstanten. Wir setzen diesen Ansatz in die linke Seite der Differentialgleichung ein und erhalten die Bedingung

$$C'(t)e^{-at} - aC(t)e^{at} + aC(t)e^{-at} = C'(t)e^{-at}$$

Wir erhalten für C die folgenden Bedingungen.

$$C'(t) = e^{at}g(t)\ , \quad C(0) = c\ .$$

Diese Gleichung können wir unmittelbar durch Integration lösen.

$$C(t) = c + \int_0^t e^{as} g(s) ds \ .$$

Insbesondere, wenn $g = g_0$ constant ist, dann gilt

$$C(t) = c + g_0 \frac{e^{at} - 1}{a} \ , \quad f(t) = ce^{-at} + \frac{g_0}{a}(1 - e^{-at}) \ .$$

Wenn $g = g_0 \sin(\omega t)$ ist dann rechnen wir:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{as} g(s) ds &= \int_0^t e^{as} g_0 \sin(\omega s) ds \\ &= \frac{g_0}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \left(e^{at} \sin(\omega t - \gamma) + \sin(\gamma) \right) \ , \end{aligned}$$

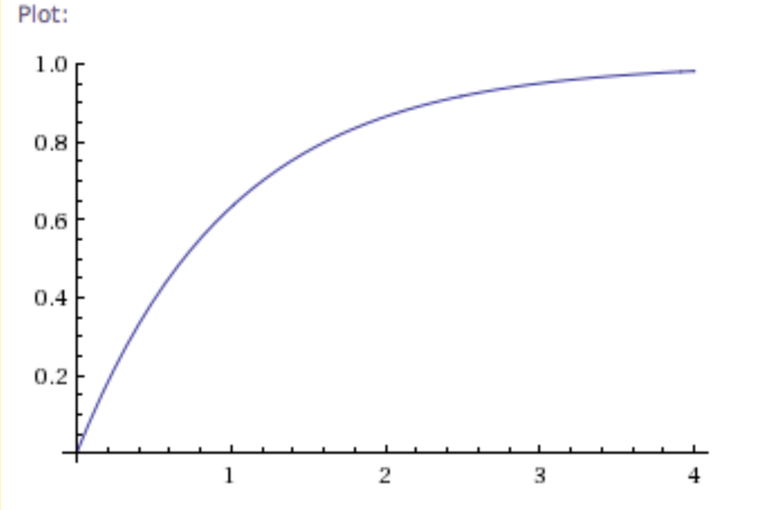
wobei $\gamma \in (-\pi, \pi]$ so gewählt ist, daß $\cos(\gamma) = \frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ gilt. Zusammengesetzt:

$$f(t) = ce^{-at} + \frac{g_0}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \left(\sin(\omega t - \gamma) + e^{-at} \sin(\gamma) \right)$$

Wir kommen nun zu unserem Schwimmbad zurück. Wenn der Zustrom konstant Z_0 ist, dann erhalten wir

$$H(t) = Z_0 \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \ .$$

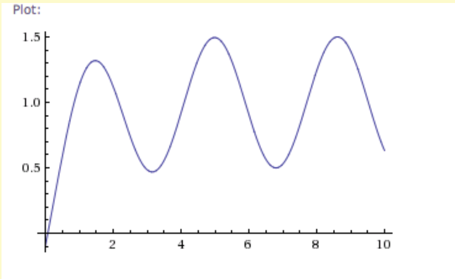
Hier ist ein Plot von $1 - \exp(-t)$:



Ist der Zufluß periodisch $Z_0(1 + \sin(\omega t))$, dann gilt

$$H(t) = Z_0 [\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} (\sin(\omega t - \gamma) + e^{-\alpha t} \sin(\gamma))]$$

Hier ist ein Plot dieser Funktion für $\omega = \sqrt{3}$ und $\alpha = 1$.



Die Methode der Variation der Konstanten funktioniert auch in einem etwas allgemeineren Fall einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$f'(t) + a(t)f(t) = g(t) \ , \quad f(0) = c \ ,$$

wobei jetzt a eine stetige Funktion der Zeit sein darf. Wir betrachten zunächst die homogene Gleichung

$$\phi'(t) + a\phi(t) = 0 \ .$$

Wir prüfen durch Nachrrechnen, daß

$$\phi(t) := e^{-\int_0^t a(s)ds}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Wir sehen insbesondere, daß ϕ keine Nullstelle hat.

Wir finden wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit dem Ansatz $f(t) = C(t)\phi(t)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $C'\phi = g$. Wir lösen diese Gleichung durch Integration.

$$C(t) = \int_0^s \phi(s)^{-1} g(s) ds$$

und finden die Lösung unseres ursprünglichen Problems durch

$$f(t) = \frac{c}{\phi(0)}\phi(t) + \phi(t)\int_0^t \phi(s)^{-1} g(s) ds \ .$$

Wir können die explizite Form von ϕ einsetzen:

$$f(t) = \frac{c}{\phi(0)} e^{-\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du} g(s) ds$$

51.1 Aufgaben

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$f' + f = x^2 \ , \quad f(0) = 1 \ .$$

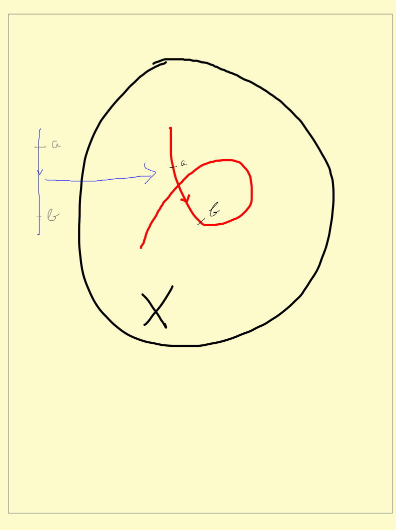
2. Finden Sie einen Anfangswert $c \in \mathbb{R}$ derart, daß die Lösung des Anfangswertproblems
$$f' + f = x \ , \quad f(0) = c$$
zur Zeit $x = 1$ eine Nullstelle hat.

3. Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems
$$f' + xf = x^2 \ , f(0) = 1$$
explizit.

4. Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem
$$f' + af = g \ , \quad f(0) = f_0$$
für stetige a und g eine eindeutige Lösung besitzt.

52 Kurven

Definition 52.1 *Eine Kurve in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to X$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ gilt.*



Eine Kurve darf nicht mit dem Bild der Abbildung γ verwechselt werden. Die Parametrisierung ist ein Bestandteil der Daten einer Kurve.

1. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann wir durch
$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \ , \quad \gamma(t) := x + t(y - x) \in \mathbb{R}^n$$
eine Kurve definiert, nämlich die gerade Strecke von x nach y.

2. Sei $x \in X$ ein Punkt in einem topologischen Raum. Dann ist

$$\mathtt{const}_x : [0,1] \to X$$

eine Kurve, nämlich die konstante Kurve in x.

3. Sei $[a,b] : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann erhalten wir eine Kurve

$$\gamma : U \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \gamma(x) = (x, f(x)) \ .$$

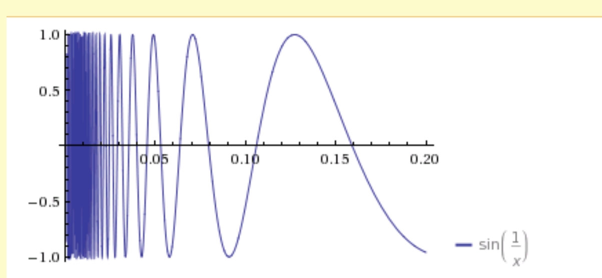
Das Bild von γ ist der Graph von f.

Definition 52.2 *Ein topologischer Raum heißt bogenzusammenhängend, wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ ein Kurve $\gamma : [0,1] \to X$ existiert, so daß $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gilt. Wir sagen auch, daß die Kurve γ die Punkte x und y verbindet.*

Lemma 52.3 *Ein bogenzusammenhängender Raum ist zusammenhängend.*

Proof. Wir argumentieren indirekt. Wir betrachten einen topologischen Raum X der nicht zusammenhängend ist. Dann existieren offene disjunkte nichtleere Teilmengen U, V mit $X = U \cup V$. Wir wählen Punkte $u \in U$ und $v \in V$. Wäre X bogenzusammenhängend, dann gäbe es eine Kurve $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma(1) = v$. Dann wären $\gamma^{-1}(U)$ und $\gamma^{-1}(V)$ nicht leer, offen und disjunkt. Damit wäre aber $[0,1]$ nicht zusammenhängend. Widerspruch. $\square$

Die Umkehrung von Lemma 52.3 gilt nicht. Die durch folgende Skizze beschriebene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit der induzierten Topologie ist zusammenhängend, nicht aber bogenzusammenhängend.



Genauer betrachte man die Vereinigung der y-Achse mit dem Graphen der Abbildung $(0,\infty) \ni x \mapsto \sin(\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}$.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Wir definieren die Komponenten $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ durch die Gleichung $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Die Abbildung f ist stetig differenzierbar, wenn die Komponenten f_i für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ stetig differenzierbar sind und die Ableitung von f ist durch

$$f' : U \to \mathbb{R}^n \ , \quad f' = (f_1', \ldots, f_n')$$

gegeben.

Kurven sind auf abgeschlossenen Intervallen definiert. Wir erweitern den Begriff der Differenzierbarkeit und der Ableitung einer Kurve wie folgt.

Definition 52.4 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt stetig differenzierbar, wenn es eine offene $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $[a, b] \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Fortsetzung $\tilde{\gamma} : U \to \mathbb{R}^n$ von γ gibt.*

Ist γ stetig differenzierbar und $u \in [a, b]$, dann definieren wir $\gamma'(t) := \tilde{\gamma}'(t)$. Wir überlassen den Nachweis, daß $\gamma'(u)$ wohldefiniert (also unabhängig von der Wahl der Fortsetzung) und stetig ist als Übungsaufgabe. Wenn γ stetig differenzierbar ist, dann ist $I \ni t \mapsto \|\gamma'\| \in \mathbb{R}$ stetig.

Definition 52.5 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ als*

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \ .$$

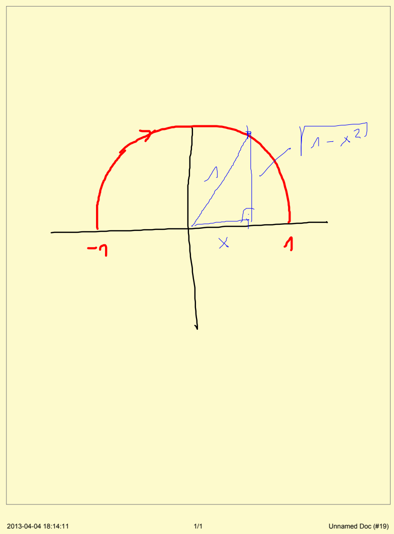
1. Die Länge einer konstanten Kurve ist Null.

2. Wenn $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ die Strecke zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist, dann gilt $L(\gamma) = \|x - y\|$. In der Tat ist $\gamma(t) = x + t(y - x)$, damit $\gamma'(t) = x - y$ und $\|\gamma'(t)\| = \|x - y\|$ konstant.

3. Wir berechnen nun die Länge eines Halbkreises, den wir als Kurve

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \gamma(x) := (x, \sqrt{1 - x^2})$$

darstellen.



Es gilt

$$\gamma'(x) = (1, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$$

und damit

$$\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Damit gilt nach (12)

$$L(\gamma) = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi \ .$$

Lemma 52.6 *Die Länge einer Kurve ist reparametrisierungsinvariant. Genauer, sei* $\phi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a, b]$ *stetig differenzierbar ,* $a := \phi(\tilde{a})$, $b := \phi(\tilde{b})$, $\phi_{|[\tilde{a},\tilde{b}]}$ *monoton wachsend,* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *eine stetig differenzierbare Kurve und* $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi$ *Dann gilt* $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$.

Proof. Wir rechnen mit der Kettenregel $\tilde{\gamma}'(x) = \gamma'(\phi(x))\phi'(x)$ und $\phi'(x) \geq 0$ sowie der Substitutionsformel

$$\begin{aligned} L(\tilde{\gamma}) &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \|\tilde{\gamma}'(x)\| dx \\ &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \|\gamma'(\phi(x))\| |\phi'(x)| dx \\ &= \int_a^b \|\gamma(x)\| dx \\ &= L(\gamma) \end{aligned}$$

□

Sei (X, d) ein metrischer Raum. und $\gamma : [a, b] \to$ eine Kurve. Für eine endliche Teilmenge $Z \subseteq [a, b)$ definieren wir

$$L_Z(\gamma) := \sum_{z \in Z} d(\gamma(z), \nu(z)) \ , \tag{15}$$

wobei $\nu(z)$ der Nachfolger von z in $Z \cup \{b\}$ ist. Wir setzen weiter

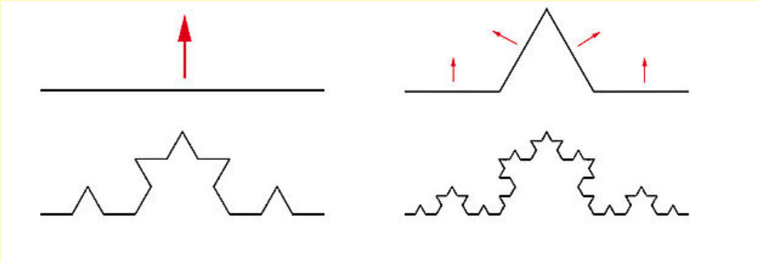
$$L_*(\gamma) := \sup_Z L_Z(\gamma) \in \overline{\mathbb{R}} \ ,$$

wobei wir das Supremum über alle endlichen Teilmengen $Z \subset [a, b)$ nehmen.

Definition 52.7 *Wir nennen γ rektifizierbar, wenn $L_*(\gamma) < \infty$ gilt.*

Lemma 52.8 *Eine stetig differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und es gilt $L_*(\gamma) = L(\gamma)$.*

Diese Zeichnung zeigt die Konstruktion einer nicht rektifizierbaren Kurve (Kochkurve).



In jedem Iterationsschritt wird das mittlere Drittel eines jeden Geradenstücks durch die aus den beiden anderen Seiten des entsprechenden gleichseitigen Dreiecks bestehende Kurve ersetzt. In jedem Schritt verlängert sich die Kurve um den Faktor $\frac{4}{3}$.

52.1 Aufgaben

1. Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeige, daß $\gamma'(0)$ wohldefiniert ist.

2. Zeige Lemma 52.8.

3. Zeige, daß aus $Z \subseteq Z'$ folgt $L_Z(\gamma) \leq L_{Z'}(\gamma)$ (Notation von (15)).

4. Präzisiere die Konstruktion der Kochkurve und zeige, daß sie nicht rektifizierbar ist.

5. Zeigen Sie, daß für eine Reparametriserung $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ einer Kurve γ gilt $L(\tilde{\gamma}) \geq L(\gamma)$, wenn man die Annahme, daß ϕ monoton ist, fallen läßt.

53 Punktweise Konvergenz

Sei X eine Menge und Y ein topologischer Raum. Wir betrachten eine Folge von Abbildungen (f_n), $f_n : X \to Y$. Wir untersuchen in dieser Vorlesung verschiedene Möglichkeiten, den Begriff der Konvergenz dieser Folge gegen eine Abbildung $f : X \to Y$ zu definieren.

Definition 53.1 *Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen f, falls für jedes $x \in X$ die Folge $(f_n(x))$ gegen $f(x)$ konvergiert.*

1. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \exp(-n|x|)$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$
$$\texttt{lim}_n f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} .$$
Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$f(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} .$$
Dann konvergiert (f_n) punktweise gegen f.
2. Wir betrachten Folge von Abbildungen $x^n : (0, 1] \to \mathbb{R}$. Diese Folge konvergiert punktweise gegen
$$(0, 1] \ni x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} .$$
3. Man kann die Kochkurve als punktweisen Grenzwert einer Folge von Kurven $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ beschreiben.

Wir machen es zu unserer Regel, daß jeder Konvergenzbegriff als Konvergenz in einer geeigneten Topologie verstanden werden soll. Das heißt, wir müssen auf der Menge Y^X eine Topologie einführen, so daß punktweise Konvergenz äquivalent zur Konvergenz in dieser Topologie ist. Im allgemeinen bestimmt ein Konvergenzbegriff die Topologie nicht vollständig.
Wir müssen also erklären, welche Teilmengen von Y^X wir als offen betrachten wollen. Um die Argumente kurz zu halten, machen die folgenden Vorbetrachtungen.

Sei A eine Menge.

Definition 53.2 *Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(A)$ heißt Basis für eine Topologie wenn für jede endliche Familie $(B_i)_{i \in I}$ von Elementen und jedes $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$ ein $B \in \mathcal{B}$ existiert mit $x \in B \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$.*

Beachte, daß der Durchschnitt einer leeren Familie von Teilmengen von A die Menge A ist. Folglich gilt für eine Basis für eine Topologie daß $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = A$ ist.

Sei (A, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $\mathcal{B}$ der Bälle in A eine Basis für eine Topologie. In der Tat, wenn $(x_i)_{i\in I}$ und $(r_i)_{i\in I}$ endliche Familien von Punkten in X bzw. positiven reellen Zahlen sind und $x \in \bigcap_{i\in I} B(x_i, r_i)$ gilt, dann setzen wir

$$r := \min\{r_i - d(x, x_i) | i \in I\} .$$

Mit der Dreiecksungleichung sieht man leicht ein, daß

$$B(x, r) \subseteq \bigcap_{i\in I} B(x_i, r_i)$$

gilt.

Lemma 53.3 *Wenn $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie auf einer Menge A ist, dann ist*

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) := \{U \in \mathcal{P}(X) : | (\forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B}\, |\, x \in B \subseteq U)\} .$$

eine Topologie auf A. Sie heißt die durch $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie.

Proof. Wir weisen die Axiome einer Topologie nach.

1. Aus trivialen Gründen gilt $\emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ und $A \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

2. Die Menge $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ ist abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen. Übungsaufgabe!

3. Wir zeigen, daß $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten ist. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie in $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Wir zeigen daß $U := \bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ gilt. Sei $x \in U$. Dann wählen wir für jedes $i \in I$ ein $B_i \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_i \subseteq U_i$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie ist, finden wir nun ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$. Es gilt $x \in B \subseteq U$. Dieses Argument zeigt, daß $U \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ ist.

□

Wir halten die folgenden Beobachtungen fest.

1. Wenn $\mathcal{B}$ die Menge der Bälle auf A bezüglich eines Abstandes d ist, dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ genau die unterliegende Topologie des metrischen Raumes (A, d) (Definition 31.5).

2. Es gilt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

3. Wenn $\mathcal{B}$ eine Topologie ist, dann gilt $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Übungsaufgabe.

4. Sei $x \in A$ und $V \subseteq A$ mit $x \in V$. Die Menge V ist eine Umgebung von x genau dann, wenn es ein Element $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B \subseteq V$.

Wir konstruieren nun eine Basis für die Topologie der punktweisen Konvergenz auf Y^X. Sei $W \subseteq X$ eine endliche Teilmenge und $\kappa : W \to \mathcal{T}_Y$ eine Abbildung. Dann setzen

$$U_\kappa := \{g \in Y^X \mid (\forall w \in W \mid g(w) \in \kappa(w))\} \ .$$

Sei $\mathcal{B}$ die Menge der Teilmengen der Form U_κ für alle endlichen Teilmengen $W \subseteq X$ und Abbildungen $\kappa : W \to \mathcal{T}_Y$.

Lemma 53.4 *Die Menge $\mathcal{B}$ ist eine Basis für eine Topologie auf Y^X.*

Proof. Sei $(U_{\kappa_i})_{i \in I}$ eine endliche Familie in $\mathcal{B}$ mit $\kappa_i : W_i \to \mathcal{T}_Y$. Sei $f \in \bigcap_{i \in I} U_{\kappa_i}$. Wir betrachten die endliche Teilmenge $W := \bigcup_{i \in I} W_i$ von X. Wir definieren $\kappa : W \to \mathcal{T}_Y$ durch

$$\kappa(x) := \bigcap_{\{i \in I \mid x \in W_i\}} \kappa_i \in \mathcal{T}_Y \ , \quad x \in W \ .$$

Dann gilt

$$U_\kappa \subseteq \bigcap_{i \in I} U_{\kappa_i} \ .$$

□

Definition 53.5 *Die Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ heißt Topologie der punktweisen Konvergenz.*

Wir verifizieren nun, daß die Topologie der punktweisen Konvergenz unsere ursprüngliches Problem löst.

Lemma 53.6 *Die Folge (f_n) konvergiert genau dann punktweise gegen f, wenn*

$$\mathtt{lim}_{n \to \infty} f_n = f$$

in der Topologie der punktweisen Konvergenz gilt.

Proof. Gelte

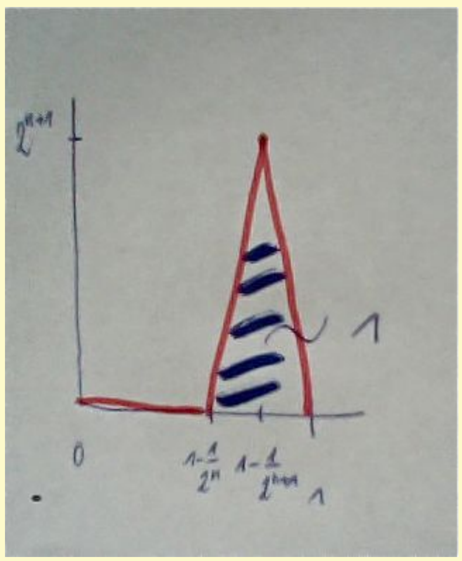
$$\mathtt{lim}_{n \to \infty} f_n = f$$

in der Topologie der punktweisen Konvergenz. Sei $x \in X$. Wir zeigen, daß $\mathtt{lim}_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ gilt. Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann betrachten wir $\kappa : \{x\} \mapsto \mathcal{T}_Y$, $\kappa(x) = V$. Es gilt $f \in U_\kappa$. Damit gilt $f_n \in U_\kappa$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Das bedeutet aber, daß $f_n(x) \in V$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Diese Argument zeigt, daß $\mathtt{lim}_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ gilt. Folglich konvergiert (f_n) punktweise gegen f.
Konvergiere nun umgekehrt (f_n) punktweise gegen f. Sei $U \in \mathcal{T}$ eine Umgebung von f in der Topologie der punktweisen Konvergenz. Dann existiert eine endliche Teilmenge $W \subseteq X$ und eine Abbildung $\kappa : W \to \mathcal{T}_Y$ mit $f : U_\kappa \subseteq U$. Für jedes $x \in W$ gilt $f_n(x) \in \kappa(x)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Da W endlich ist, gilt damit für fast alle $n \in \mathbb{N}$, daß $f_n(x) \in \kappa(x)$ für alle $x \in W$. Folglich gilt $f_n \in U_\kappa$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dieses Argument zeigt, daß $\mathtt{lim}_{n \to \infty} f_n = f$ in der Topologie der punktweisen Konvergenz gilt. □

1. Wir betrachten Y^X mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung $\mathtt{ev}_x : Y^X \to Y$, $f \mapsto f(x)$ eine stetige Abbildung.

2. Die Teilmenge $C(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (mit der Topologie der punktweisen Konvergenz) ist nicht abgeschlossen. Zum Beispiel gilt für $f_n := \exp(-n|x|)$ daß $f_n \in C(\mathbb{R})$, aber für $f := \mathtt{lim}_{n\to\infty} f_n$ gilt $f \notin C(\mathbb{R})$.

3. Die Abbildung $I : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $I(f) := \int_0^1 f(x)dx$ ist nicht stetig, wenn man auf $C([0,1])$ die von der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{[0,1]}$ induzierte Topologie betrachtet. Dazu betrachten wir $f_n \in C([0,1])$,
$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0, 1 - \frac{1}{2^n}] \\ 2^{n+1}(x - 1 + \frac{1}{2^n}) & x \in (1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}] \\ 2^{n+1}(1 - x - \frac{1}{2^{n+1}}) & \\ 0 & x \in (1 - \frac{1}{2^{n+1}}, 1] \end{cases}$$
Dann gilt $\mathtt{lim}_{n\to f_n} = 0$ punktweise, aber $I(f_n) = 1$ für alle n und $I(0) = 0$.



4. Die Topologie der punktweisen Konvergenz kommt im allgemeinen nicht von einer Metrik. Wir benutzen Lemma 34.9. Wir konstruieren dazu in einem Beispiel eine Teilmenge $A \subseteq Y^X$ und einen Punkt $f \in \overline{A}$, der nicht punktweiser Grenzwert einer Folge in A ist.

   Wir betrachten die Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ gegeben durch
   $$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\} \text{ ist abzählbar}\} .$$
   Es gilt $\overline{A} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. In der Tat, sei $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und U eine Umgebung von f. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}$ und eine Abbildung $\kappa : W \to \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ mit $f \in U_\kappa \subseteq U$. Wir definieren $g \in A$ durch
   $$g_{|\mathbb{R}\setminus W} := 0 \ , \quad g_{|W} := f_{|W} \ .$$

Dann gilt $g \in U_\kappa \subseteq U$. Also ist $U \cap A \neq \emptyset$. Da jede Umgebung von f die Menge A schneidet, gilt $f \in \overline{A}$.

Wir betrachten die konstante Funktion $\mathtt{const}_1 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Dann gibt es keine Folge (f_n) in A mit $\mathtt{lim}_{n\to\infty} f_n = \mathtt{const}_1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich $\mathtt{supp}(f_n)$ abzählbar. Damit ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathtt{supp}(f_n)$ abzählbar. Da $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, können wir ein $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathtt{supp}(f_n)$ finden. Dann gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere nicht $\mathtt{lim}_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. □

53.1 Aufgaben

1. Untersuchen Sie auf punktweise Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

   (a) $(\sin(\frac{x}{n+1}))$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

   (b) $(\exp(-nx))$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

   (c) $\left(\frac{1}{1+nx^2}\right)$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

54 Gleichmäßige Konvergenz

Wir haben gesehen, daß der punktweise Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen nicht wieder stetig sein muß. Desweiteren kann man im allgemeinen einen punktweisen Grenzwert, lax ausgedrückt, nicht unter das Integral ziehen. In diesem Kapitel betrachten wir einen schärferen Konvergenzbegriff, der diese Defekte behebt.

Sei X eine Menge und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Wir betrachten wieder eine Folge (f_n) in Y^X und führen den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz dieser Folge gegen eine Abbildung $f : X \to Y$ ein.

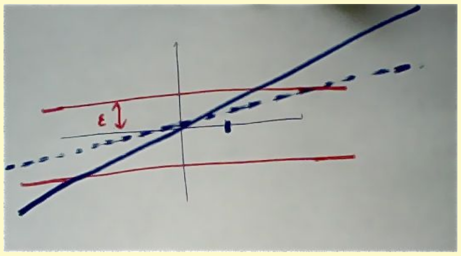
Definition 54.1 *Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f, falls für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$ und $x \in X$ gilt*

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \ .$$

1. Wenn (f_n) gegen f gleichmäßig konvergiert, dann auch punktweise. In der Tat folgt aus der Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz unmittelbar daß für jedes $x \in X$ gilt: $\mathtt{lim}_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

2. Die Folge von Abbildungen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n := \frac{1}{n+1}\, x$ konvergiert gleichmäßig gegen 0. In der Tat muß man für $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ die Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ nur so wählen, daß $\frac{1}{n_0+1} \leq \epsilon$ gilt.

3. Wir betrachten die Folge (f_n) in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_n(x) := \frac{x}{n+1}$. Diese Folge konvergiert punktweise gegen 0, nicht aber gleichmäßig.



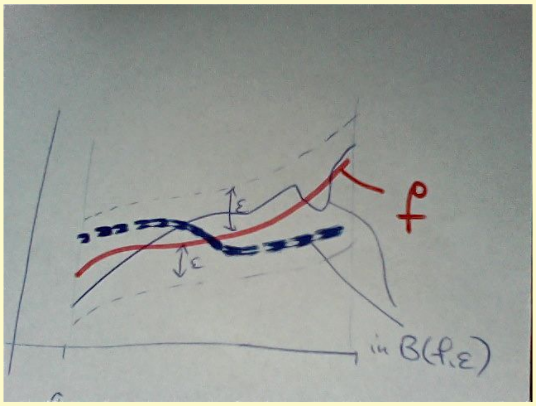
4. Sei $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \exp(-nx)$ gegeben. Auch diese Folge konvergiert gleichmäßig gegen 0. In der Tat ist für $x \in [0, \infty)$
$$f_n(x) = \exp(-n)\exp(-n(x-1)) \leq \exp(-n) \ .$$
Es gilt $\texttt{lim}_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$. Für gegebenes $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ müssen wir nur n_0 so groß wählen, daß $\exp(-n_0) \leq \epsilon$ gilt.

5. Betrachtet man $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \exp(-nx)$, dann konvergiert diese Folge nicht gleichmäßig. Diese Folge konvergiert punktweise gegen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,
$$f(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$
Sei $\epsilon = \frac{1}{2}$. Dann finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $x \in (0, \infty)$ mit $\frac{1}{2} \leq \exp(-nx)$.

6. Die Kochkurve wird durch eine gleichmäßig konvergierende Folge von Kurven $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ beschrieben.

Definition 54.2 *Auf Y^X definieren wir den Abstand*
$$d(f, g) := \sup_{x\in X} \min\{d_y f(x), g(x)), 1\} \ .$$
Die von diesem Abstand induzierte Topologie heißt Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

In folgendem Bild ist eine Abstandsball um f skizziert.



Lemma 54.3 *Der Abstand in 54.2 ist wohldefiniert.*

Proof. Die Abbildung $X \ni x \mapsto \min\{d_y f(x), g(x)), 1\}$ ist durch 1 beschränkt ist.

Wir weisen nun die Abstandsaxiome nach. Seien $f, g, h \in Y^X$. Die ersten beiden Aussagen sind offensichtlich.

1. Es gilt $0 \leq d(f,g)$ und $0 = d(f,g)$ genau dann, wenn $f = g$.

2. Es gilt $d(f,g) = f(g,f)$.

3. Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \sup_{x \in X} \min\{d_Y(f(x), h(x)), 1\} \\ &\leq \sup_{x \in X} \min\{(d_Y(f(x), g(x)) + d_Y(g(x), h(x)), 1\} \\ &\leq \sup_{x \in X} \min\{d_Y(f(x), g(x)), 1\} + \sup_{x \in X} \min\{d_Y(g(x), h(x)), 1\} \\ &= d(f,g) + d(g,h) \end{aligned}$$

Definition 54.4 *Die vom Abstand 54.2 auf Y^X induzierte Topologie heißt Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.*

1. Eine Folge (f_n) in Y^X konvergiert gleichmäßig gegen $f \in Y^X$ genau dann, wenn $\mathtt{lim}_{n\to\infty} f_n = f$ in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz gilt.

2. Wir betrachten $C([a,b])$ mit der Topologie der gleichmäßgen Konvergenz. Die Abbildung

$$I : C([a,b]) \to \mathbb{R} \ , \quad I(f) := \int_a^b f(x) dx$$

ist stetig. In der Tat gilt

$$|I(f) - I(g)| \leq (b-a) d(f,g) \ .$$

Das $\epsilon - \delta$-Kriterium für die Stetigkeit von I ist also mit $\delta := \frac{\epsilon}{b-a}$ erfüllt. In dieser Hinsicht ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz besser als die Topologie der punktweisen Konvergenz.

Sei jetzt X ein topologischer Raum.

Lemma 54.5 *Die Teilmenge $C(X,Y) \subseteq B(X,Y)$ ist abgeschlossen.*

Proof. Sei $f \in \overline{C(X,Y)}$. Wir müssen zeigen, daß f stetig ist.

Nach Lemma 34.9 gibt es eine Folge (f_n) in $C(X,Y)$ so daß $\mathtt{lim}_{n\to\infty} f_n = f$ in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Sei $x \in X$. Wir zeigen die Stetigkeit von f im Punkt x.

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir wählen zunächst $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $d(f, f_n) \leq \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Die Stetigkeit von f_n ausnutzend wählen wir eine Umgebung $V \subseteq X$ von x so daß für $x' \in V$ aus $d(x, x') \leq \delta$ folgt: $d_Y(f_n(x), f_n(x')) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Dann folgt für $x' \in X$ aus $d(x, x') \leq \delta$ daß

$$d_Y(f(x), f(x') \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x')) + d_Y(f_n(x'), f(x')) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

gilt. □

Lemma 54.6 *Wenn (Y, d_Y) vollständig ist, dann ist $(C(X, Y), d)$ vollständig.*

Proof. Wir zeigen zunächst, daß Y^X vollständig ist. Dann ist auch die Teilmenge $C(X, Y)$ vollständig, da sie abgeschlossen ist.

Sei (f_n) eine Cauchyfolge in Y^X. Dann ist für jedes $x \in X$ die Folge $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge. Wir definieren eine Abbildung $f : X \to Y$ durch

$$f(x) := \mathtt{lim}_{n\to\infty} f_n(x) \ .$$

Wir zeigen nun, daß $\mathtt{lim}_{b\to\infty} f_n = f$ gilt. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$ und $n_0 \leq m$ gilt $d(f_n, f_m) \leq \epsilon$. Dann gilt aber für alle $x \in X$, daß $d(f(x), f_m(x)) \leq \epsilon$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq m$ gilt also auch $d(f, f_m) \leq \epsilon$. □

1. Um die Kochkurve zu definieren, wird zunächst eine Folge von Kurven (γ_n), $\gamma_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definiert. Diese Folge konvergiert gleichmäßig gegen die Kochkurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$. Aus Lemma 54.5 folgt die Stetigkeit.

54.1 Aufgaben

1. Untersuche die Folgen (f_n) von auf $[0, 1]$ definierter Funktionen auf gleichmäßige Konvergenz:

   (a) $(1 - x)^n \exp(-nx)$.

   (b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2}$

   (c) $\sum_{n=0}^{k} x^k$

   (d) $\sum_{n=0}^{k} (-1)^k \frac{x^k}{\log(k)}$

2. Sei $f \in C([a,b] \times [c,d])$. Wir betrachten die Abbildung

$$\phi : [a,b] \to C([c,d]) \ , \quad x \mapsto (y \mapsto f(x,y)) \ .$$

Zeigen Sie, daß ϕ stetig ist (wobei wir $C([c,d])$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ausstatten). Folgern Sie weiter, daß die Abbildung

$$[a,b] \ni x \mapsto \int_c^d f(x,y)dx \in \mathbb{R}$$

stetig ist.

3. Zeigen Sie, daß die Γ-Funktion stetig ist. Verallgemeinern Sie das Argument und zeigen Sie, daß die Γ-Funktion glatt ist.

4. Sei $f \in C([0,1])$. Berechnen Sie

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty} \int_1^2 \sin(xn) f(x)dx \ .$$

55 Vollständigkeit, Banach und Hilberträume

Definition 55.1 *Sei V eine reeller (oder komplexer) Vektorraum. Eine Norm auf V ist eine Abbildung $\|\ldots\| : V \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *Für alle $v \in V$ gilt $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$ impliziert $v = 0$.*
2. *(Homogenität): Für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\lambda \in \mathbb{C}$) gilt $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$.*
3. *(Dreiecksungleichung) Für alle $v, w \in V$ gilt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$*

Lemma 55.2 *Eine Norm $\|\ldots\|$ auf V induziert einen Abstand $d_{\|\ldots\|}$ auf V durch*

$$d_{\|\ldots\|}(x,y) := \|x - y\| \ .$$

Proof. Es gilt für alle $v, w \in V$ daß $d_{\|\ldots\|}(v,w) \geq 0$ und $d(v,w) = 0$ genau dann, wenn $v = w$. Weiter gilt

$$d_{\|\ldots\|}(v,w) = \|v - w\| = \|w - v\| = d_{\|\ldots\|}(w,v) \ .$$

Schließlich gilt für alle $v, w, u \in V$ daß

$$d_{\|\ldots\|}(v,u) = \|v - u\| = \|v - w + w - u\| \leq \|v - w\| + \|w - u\| = d_{\|\ldots\|}(v,w) + d_{\|\ldots\|}(w,u) \ .$$

□

Ein normierter Vektorraum ist ein Paar $(V, \|\ldots\|)$ aus einem Vektorraum und einer Norm. Ein normierter Vektorraum hat einen underliegenden metrischen Raum $(V, d_{\|\ldots\|})$ und damit einen unterliegenden topologischen Raum $(V, \mathcal{T}_{d_{\|\ldots\|}})$. Wenn nichts anderes gesagt ist, werden wir immer diese Strukturen auf V verwenden, wenn wir über Stetigkeit, Konvergenz und ähnliches reden.

Definition 55.3 *1. Zwei Normen $\|\ldots\|$ und $\|\ldots\|'$ auf einem Vektorraum V sind äquivalent, wenn es Zahlen $c, C \in \mathbb{R}^{>}$ gibt so daß für alle $v \in V$ gilt*

$$c\|v\| \le \|v\|' \le C\|v\| \ .$$

2. Zwei Abstände d, d' auf einer Menge X sind äquivalent, wenn es Zahlen $c, C \in \mathbb{R}^{>}$ gibt so daß für alle $x, y \in X$ gilt

$$cd(x,y) \le d'(x,y) \le Cd(x,y) \ .$$

Lemma 55.4 *1. Die Äquivalenz von Normen und Abständen ist eine Äquivalenzrelation.*

2. Wenn $\|\ldots\|$ und $\|\ldots\|'$ äquivalent sind, dann auch $d_{\|\ldots\|}$ und $d_{\|\ldots\|'}$.

3. Wenn d und d' auf X äquivalent sind, dann gilt $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

Proof. Wir überlassen das als Übungsaufgabe. $\square$

Seien $(E, \|\ldots\|_E)$ und $(F, \|\ldots\|_F)$ normierte Vektorräume.

Definition 55.5 *Eine lineare Abbildung $A \in \mathtt{Hom}(E,F)$ heißt beschränkt, wenn die Abbildung*

$$B_{\|\ldots\|_E}(0,1) \ni e \mapsto \|Ae\|_F \in \mathbb{R}$$

beschränkt ist. Mit $L(E,F) \subset \mathtt{Hom}(E,F)$ bezeichnen wir die Teilmenge der beschränkten linearen Abbildungen. Wenn A beschränkt ist, dann setzen wir

$$\|A\|_{L(E,F)} := \sup_{e \in B_{\|\ldots\|_E}(0,1)} \|Ae\|_F \ .$$

Hier ist eine typische Konstruktion normierter Vektorräume. Sei X eine Menge und $(V, \|\ldots\|_V)$ ein normierter Vektorraum.

Definition 55.6 *Eine Abbildung $f : X \to V$ heißt beschränkt, wenn Abbildung $X \ni x \mapsto \|f(x)\|_V \in \mathbb{R}$ beschränkt ist. Sei $B(X,V) \subseteq V^X$ die Teilmenge der beschränkten Abbildungen. Wir definieren für $f \in B(X,V)$*

$$\|f\|_{B(X,V)} := \sup_{x \in X} \|f\|_V \ .$$

Lemma 55.7 *1. Das Paar $(B(X,V), \|\ldots\|_{B(X,V)})$ ist ein normierter Vektorraum.*

2. Die auf $B(X,V)$ induzierte Topologie ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

3. Wenn V vollständig ist, so es auch $B(X,V)$.

4. *Wenn X topologisch ist, dann ist $(C_b(X,V), \|\ldots\|_{B(X,V)})$ ein normierter Vektorraum wobei $C_b(X,V) = C(X,V) \cap B(X,V)$. Die Teilmenge $C_b(X,V) \subseteq B(X,V)$ ist abgeschlossen. Wenn V vollständig ist, so ist es $C_b(X,V)$.*

Proof. Übungsaufgabe $\square$

Es folgen einige abtrakte Tatsachen.

1. Die Abbildung $\|\ldots\|_{L(E,F)} : L(E,F) \to \mathbb{R}$ ist eine Norm. In der Tat haben wir eine Einbettung
$$\iota : L(E,F) \to C_b(B_{\|\ldots\|_E}(0,1), F)$$
und $\|\ldots\|_{L(E,F)}$ ist die induzierte Norm.

2. Für alle $e \in E$ gilt
$$\|Ae\|_F \le \|A\|_{L(E,F)} \|e\|_E \ .$$
In der Tat gilt für alle $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ daß
$$\|Ae\|_F = (\|e\|_E + \epsilon)\|A\frac{e}{\|e\|_E + \epsilon}\| \le (\|e\|_E + \epsilon)\|A\|_{L(E,F)}$$

3. Eine lineare Abbildung A ist stetig genau dann, wenn sie beschränkt ist. Wenn A beschränkt ist, dann kann man das ϵ-δ-Kriterium mit $\delta := \frac{\epsilon}{\|A\|+\epsilon}$ anwenden. Umgekehrt, wenn A stetig im Punkt 0 ist, dann dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^>$ derart, daß aus $\|Ax\| \le 1$ folgt. Dann gilt $\|A\| \le \delta^{-1}$.

Hier sind einige explizite Beispiele:

1. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist beschränkt. Es gilt zum Beispiel (das ist nicht optimal)
$$\|f\| \le \sqrt{\sum_{ij} f_{ij}^2} \ .$$
wobei (f_{ij}) die Matrix von f bezüglich der Standardbasen ist. In der Tat gilt
$$\|fx\|^2 = \sum_i (\sum_j f_{ij} x_j)^2 \le \sum_i (\sum_j f_{ij}^2)(\sum_j x_j^2) = \sum_{ij} f_{ij}^2 \|x\|^2 \ .$$

2. Wir betrachten den Raum $(C_b(X,\mathbb{R}), \|\ldots\|_{B(X,\mathbb{R})})$. Sei $f \in C_b(X,\mathbb{R})$. Dann ist die Multiplikation $M_f : C_b(X,\mathbb{R}) \to C_b(X,\mathbb{R})$ stetig und es gilt $\|M_f\|_{L(C_b(X,\mathbb{R}),C_b(X,\mathbb{R}))} = \|f\|_{B(X,\mathbb{R})}$.

3. Die Abbildung $\int_a^b \ldots dx : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist beschränkt. In der Tat ist die Norm dieser Abbildung $b-a$.

4. Wir betrachten $C^1([0,1],\mathbb{R})$ mit der induzierten Norm $\|\ldots\|_{B([0,1],\mathbb{R})}$. Dann ist die Abbildung $f \mapsto f'$ nicht stetig. So gilt etwa für $f_n := x^n$ daß

$$\|f_n\|_{B([0,1],\mathbb{R})} = 1 \ , \quad \|f'\|_{B([0,1],\mathbb{R})} = n \ .$$

Definition 55.8 *Ein normierter Vektorraum $(V, \|\ldots\|)$ ist ein Banachraum, wenn der unterliegende metrische Raum vollständig ist.*

1. Ist $(Y, \|\ldots\|_Y)$ ein Banachraum und $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann ist auch $C_b(X,Y)$ mit der Norm
$$\|f\| := \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y$$
ein Banachraum.

2. $(C_b(X,\mathbb{R}), \|\ldots\|_{B(X,\mathbb{R})})$ ist ein Banachraum, wobei $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$ gesetzt ist. Das ist ein Spezialfall des Beispiels 1.

3. Sei $(E, \|\ldots\|_E)$ ein normierter Vektorraum und $\iota : F \to E$ eine injektive Abbildung. Wir definieren $\|x\|_F := \|\iota(x)\|_E$. Dann ist $\|\ldots\|_F$ eine Norm auf F. Wenn $(E, \|\ldots\|_E)$ ein Banachraum und $\iota(F)$ abgeschlossen ist, dann ist $(F, \|\ldots\|_F)$ ein Banachraum.

4. Wenn $(E, \|\ldots\|_E)$ ein normierter Vektorraum und $(F, \|\ldots\|_F)$ ein Banachraum ist, dann ist $L(E,F)$ ein Banachraum. Dazu zeigen wir, daß das Bild von
$$\iota : L(E,F) \to C_b(B_{\|\ldots\|_E}(0,1), F)$$
eine abgeschlossene Teilmenge ist. Da wir Abgeschlossenheit in einem metrischen Raum zeigen wollen, reicht es aus, zu zeigen, daß für jede Folge $(A_n) \in B(E,F)$ für welche $(\iota(A_n))$ in $C_b(B_{\|\ldots\|_E}(0,1), F)$ gegen eine Abbildung F konvergiert, eine lineare Abbildung $A \in L(E,F)$ existiert, so daß $\iota(A) = F$ gilt. Sei $e \in E$. Wir definieren
$$Ae := \lambda F(\lambda^{-1} e) \ ,$$
wobei wir $\lambda \in \mathbb{R}^>$ so groß wählen, daß $\|\lambda^{-1} e\|_E < 1$ gilt. Man nutzt jetzt aus, daß F Grenzwert einer Folge von Einschränkungen linearer Abbildungen ist, um zu zeigen, daß A wohldefiniert und linear ist.

5. Sei (x_n) eine Folge in einem Banachraum $(E, \|\ldots\|)$. Wenn $\sum_{n=0}^\infty \|x_n\|$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=0}^\infty x_n$ in E. Es gilt der Umordnungssatz. In der Tat zeigt man zunächst, daß $(\sum_{k=0}^n x_n)$ eine Cauchyfolge ist und benutzt dann die Vollständigkeit des Banachraumes. $\square$

Sei V ein komplexer Vektorraum und $\langle \ldots, \ldots \rangle : V \times V \to V$ ein Skalarprodukt. Dann definieren wir für $x \in V$ die reelle Zahl

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \ .$$

Wir setzen die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \ , \quad x, y \in V$$

als bekannt voraus.

Lemma 55.9 *Durch $V \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ wir eine Norm definiert.*

Proof. Zunächst einmal ist $\langle x, x \rangle \geq 0$ und deshalb $\|x\|$ wohldefiniert. Wir weisen nun die Normeigenschaften nach:

1. Es gilt $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist. Folglich gilt $\|x\| = 0$ genau dann wenn $x = 0$ gilt.

2. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in V$ gilt

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\| \ .$$

3. Für $x, y \in V$ gilt

$$\|x + y\| = \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle} \ .$$

   Wir benutzen nun die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für den dritten Summenden unter der Wurzel

$$\|x + y\| \leq \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 |\operatorname{Re} \langle x, y \rangle|} \leq \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\|)} = \|x\| + \|y\| \ .$$

□

Folglich besitzt ein komplexer Vektorraum mir einem Skalarprodukt immer auch eine induzierte Norm, ist also ein normierter Raum.

Definition 55.10 *Ein Hilbertraum ist ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt, der als normierter Raum vollständig ist.*

Der Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist ein Hilbertraum. In Kapitel 59 werden wir weitere Hilberträume durch Vervollständigung konstruieren.

Sei jetzt $(E, \| \ldots \|)$ ein Banachraum und $A \in L(E, E)$. Wir nehmen an, daß A invertierbar ist und $A^{-1} \in L(E, E)$ gilt.

Lemma 55.11 *Ist $T \in L(E, E)$ und gilt $\|A - T\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, dann ist T invertierbar und es gilt $T^{-1} \in L(E, E)$.*

Proof. Es gilt

$$\|1 - A^{-1}T\| = \|A^{-1}(A-T)\| \le \|A^{-1}\|\|A-T\| < 1 \ .$$

Damit konvergiert $S := \sum_{n=0}^{\infty}(1-A^{-1}T)^n A^{-1}$. Es gilt

$$ST = \sum_{n=0}^{\infty}(1-A^{-1}T)^n A^{-1}T = -\sum_{n=0}^{\infty}(1-A^{-1}T)^n(1-A^{-1}T) + \sum_{n=0}^{\infty}(1-A^{-1}T)^n = 1 \ .$$

Damit ist T invertierbar und $\|S\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|A-T\|}$. Weiter gilt

$$\|S - A^{-1}\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|1-A^{-1}T\|^n\|A\|^{-1} \le \|A-T\|\frac{\|A^{-1}\|^2}{1-\|A\|^{-1}\|A-T\|} \ .$$

Insbesondere gilt

$$\mathtt{lim}_{T\to A}\|T^{-1} - A^{-1}\| = 0 \ .$$

Wir sehen, daß die Abbildung $A \to A^{-1}$ stetig ist. □

Wir setzen

$$GL(E) := \{A \in L(E,E) \mid A^{-1} \text{ existiert und } A^{-1} \in L(E,E)\}.$$

Corollary 55.12 *Die Teilmenge $GL(E) \subseteq L(E,E)$ ist offen und die Abbildung $GL(E) \ni A \mapsto A^{-1} \in L(E,E)$ ist stetig.*

Wir haben schon eingesehen, daß lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ automatisch stetig sind und daß der abgeschlossene Einheitsball in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Norm $\|\dots\|_\infty$ folgenkompakt ist. Wir zeigen, daß es auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum genau eine mit der Vektorraumstruktur verträgliche Topologie und eine Äquivalenzklasse von Normen gibt.

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum.

Lemma 55.13 *Es gibt auf V genau eine Topologie $\mathcal{T}_V$ derart, daß jeder lineare Isomorphismus $f : V \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus ist. Die Topologie $\mathcal{T}_V$ ist metrisierbar.*

Proof. Wir setzen $n := \dim(V)$. Dann können wir einen linearen Isomorphismus $f : V \to \mathbb{R}^n$ wählen. Die Topologie $\mathcal{T}_V := f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ ist metrisierbar und hat die Eigenschaft, daß $f : (V, \mathcal{T}_V) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ ein Homöomorphismus ist.

Sei nun $g : V \to \mathbb{R}^n$ ein anderer linearer Isomorphismus. Dann ist $g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus und damit ein Homöomorphismus. Es gilt also $(g \circ f^{-1})^{-1}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}) = \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. Folglich gilt auch

$$g^{-1}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}) = f^{-1}((g \circ f^{-1})^{-1}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})) = f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}) \ .$$

□

Wenn wir nichts anderes sagen, dann betrachten wir endlich-dimensionale reelle Vektorräume immer mit der natürlich durch Lemma 55.13 bestimmten Topologie. Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen reellen Vektorräumen, dann ist f automatisch stetig.

Lemma 55.14 *1. Sind $\|\ldots\|$ und $\|\ldots\|'$ zwei Normen auf V, dann gilt $\|\ldots\| \sim \|\ldots\|'$.*

2. Jede Norm auf V definiert die natürliche Topologie.

3. Ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum ist ein Banachraum.

Proof. Es reicht, die Aussagen im Fall $V = \mathbb{R}^n$ zu zeigen. Den allgemeinen Fall führt man auf diesen durch Transfer mit Hilfe eines linearen Isomorphismusses $V \cong \mathbb{R}^n$ zurück.

Sei $\|\ldots\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Es reicht zu zeigen, daß $\|\ldots\| \sim \|\ldots\|_\infty$ gilt. Dann sind zwei Normen untereinander wegen der Transitivität der Normäquivalenz auch untereinander äquivalent.

Sei

$$C := n \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\} \ .$$

Für $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in \mathbb{R}^n$ gilt dann mit der Dreicksungleichung für $\|\ldots\|$ die Ungleichung

$$\|x\| \le C \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\} = C\|x\|_\infty \ .$$

Die Abbildung $\|\ldots\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig. Die Topologie von $\mathbb{R}^n$ wird durch den Abstand $d_\infty(x, y) := \|x - y\|_\infty$ induziert. Wegen der Abschätzung

$$\|x\| - \|y\| \le \|x - y\| \le nC\|x - y\|_\infty \ , \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

ist das ϵ-δ-Kriterium mit $\delta := \frac{\epsilon}{C}$ erfüllt.
Die Einheitskugel $S_{d_\infty}(0, 1) =:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ is folgenkompakt. Folglich hat die stetige Funktion

$$\|\ldots\|_{|S_{d_\infty}(0,1)} : S_{d_\infty}(0, 1) \to \mathbb{R}$$

ein Minimum in einem Punkt $\xi \in S_{d_\infty}(0, 1)$. Es gilt $0 < \|\xi\|$. Wir setzen $c := \|\xi\|$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$c\|x\|_\infty \le \|x\| \ .$$

□

Lemma 55.15 *Wenn $(E, \|\ldots\|_E)$ endlich-dimensional ist, dann gilt $L(E, F) = \mathtt{Hom}(E, F)$.*

Proof. Sei $A \in L(E,F)$. Dann ist A stetig. Da $\overline{B_{\|\ldots\|_E}(0,1)}$ kompakt ist, ist die stetige Abbildung $e \mapsto \|Ae\|_F$ beschränkt. Also ist A beschränkt. □

Das Prinzip der offen Abbildung von **Banach-Schauder** gibt eine Verallgemeinerung von Lemma 55.14.

Proposition 55.16 *Ist $A : E \to F$ eine bijektive stetige lineare Abbildung zwischen Banachräumen, dann ist auch $A^{-1} : F \to E$ stetig.*

Wendet man das auf `id` an, so erhält man die Aussage, daß zwei vergleichbare Normen $\|\ldots\|, \|\ldots\|$ (d.h. es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ derart, daß $\|\ldots\| \leq c\|\ldots\|'$) schon äquivalent sind. Für mehr Information und Beweise sei auf [Rud91] verwiesen.

55.1 Aufgaben

1. Zeige Lemma 55.7.
2. Zeige Lemma 55.4.
3. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir $T_t : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ durch $T_t(f)(x) = f(x-t)$.
   (a) Zeige Sie, daß T_t den Unterraum $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ erhält.
   (b) Zeige, daß $\|T_t\|$ beschränkt ist und berechne $\|T_t\|$.
   (c) Berechne $\|T_t - \mathtt{id}\|$.
   (d) Ist $\mathbb{R} \ni t \mapsto T_t f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ stetig.
   (e) Ist $\mathbb{R} \ni t \mapsto T_t f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ stetig, wenn man zusätzlich annimmt, daß f periodisch ist.
4. Sei E ein Vektorraum und $A \in \mathtt{Hom}(E,E)$ invertierbar. Sei weiter $N \in \mathtt{Hom}(E,E)$ nilpotent. Zeige, daß dann $A+N$ auch invertierbar ist. Gibt ein explzite Formel für $(A+N)^{-1}$ an.
5. Sei $E := \mathbb{R}[x]$ mit der Norm $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen in $\mathtt{Hom}(E,E)$ auf Stetigkeit:
   (a) $f \mapsto f'$
   (b) $f \mapsto (y \mapsto \int_0^y f(x)dx)$
   (c) $f \mapsto (y \mapsto f(\lambda y)$.
6. Wir betrachten den Raum $(C_b(X), \|\ldots\|_{L^\infty}$. Sei $f \in C_b(X)$ und $M_f : C_b(X) \to C_b(X)$ die Multiplikation mit f. Zeige, daß $\|M_f\| = \|f\|_{L^\infty}$.
7. Wir betrachten die Abbildung
   $$\Phi : [a,b] \to \mathtt{Hom}(C([a,b]\times[c,d]), C([c,d])) \;, \quad x \mapsto (f \mapsto (y \mapsto f(x,y))) \;.$$
   Zeigen Sie, daß $\Phi(x)$ stetig ist, aber $\Phi : [a,b] \to L(C([a,b]\times[c,d]), C([c,d]))$ nicht stetig ist.

56 Kontraktionen und Fixpunkte

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ eine Teilmenge und $f : U \to X$ eine Abbildung.

Definition 56.1 *Die Abbildung f heißt Kontraktion wenn es eine Zahl $c \in [0,1)$ gibt, so daß*

$$d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x,y)$$

für alle $x, y \in U$ gilt.

Hier sind einige Beispiele.

1. Eine konstante Abbildung ist eine Kontraktion mit $c = 0$.

2. Die Identität ist genau dann eine Kontraktion, wenn X genau aus höchstens einem Punkt besteht.

3. Sei $(E, \|.\|)$ ein normierter Raum, $A \in L(E,E)$, $e_0 \in E$ und gelte $\|A\| < 1$. Dann ist die Abbildung

   $$E \ni e \mapsto f(e) := e_0 + Ae$$

   eine Kontraktion mit der Konstanten $\|A\|$. In der Tat ist

   $$d(f(e), f(e')) = \|A(e-e')\| \leq \|A\|\|e-e'\| = \|A\|d(e,e')\ .$$

Definition 56.2 *Ein Punkt $u \in U$ heißt Fixpunkt von f, wenn $f(u) = u$ gilt.*

Lemma 56.3 *Eine Kontraktion hat höchstens einen Fixpunkt.*

Proof. Sei c wie in 56.1. Wir nehmen an, daß $x, y \in U$ Fixpunkte der Kontraktion f sind. Dann gilt $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$. Diese Ungleichung kann aber nur gelten, wenn $d(x,y) = 0$ ist, im Fall daß $x = y$ gilt. □

Lemma 56.4 *Sei f eine Kontraktion. Wenn X vollständig und $\overline{f(U)} \subseteq U$ gilt, dann existiert ein Fixpunkt von f.*

Proof. Wir wählen $x_0 \in U$ und setzen $x_i := f^i(x_0)$. In der Tat ist wegen der Voraussetzung an f auch $x_i \in U$.

Wir zeigen, daß die Folge (x_i) eine Cauchyfolge in X ist. Es gilt.

$$d(x_i, x_{i+1}) = d(f(x_{i-1}), f(x_i)) \leq c \cdot d(x_{i-1}, x_i)\ .$$

Durch Iteration dieser Ungleichung bekommen wir für alle $i \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq c^i d(x_0, x_1).$$

Die geometrische Reihe
$$\sum_{i=0}^{\infty} c^i \cdot d(x_0, x_1)$$
mit $c \in [0,1)$ ist eine konvergente Majorante von
$$\sum_{i=0}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) \ .$$
Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Dann wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$, $n_0 \leq m$ gilt
$$\sum_{i=n+1}^{m} d(x_i, x_{i+1}) \leq \epsilon \ .$$
Mit der Dreicksungleichung schließen wir
$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n+1}^{m} d(x_i, x_{i+1}) \leq \epsilon \ .$$

Da X vollständig ist, gibt es den Grenzwert $\mathtt{lim}_{n\to\infty} x_n = x$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \in f(U)$ muß auch $x \in \overline{f(U)} \subseteq U$ gelten.

Nun ist
$$f(x) = \mathtt{lim}_{n\to\infty} f(x_n) = \mathtt{lim}_{n\to\infty} x_{n+1} = x \ .$$
Also ist x ein Fixpunkt von f. □

Wir betrachten einen topologischen Raum X und den Raum $C_b(X, \mathbb{R})$ mit der Norm $\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Lemma 56.5 *Sei $A \subseteq C_b(X, \mathbb{R})$ eine abgschlossene Unteralgebra mit $1 \in A$. Dann gelten:*

1. *Aus $f \in A$ und $f \geq 0$ folgt $\sqrt{f} \in A$.*
2. *Aus $f \in A$ folgt $|f| \in A$.*
3. *Aus $f, g \in A$ folgt $\min\{f, g\} \in A$ und $\max\{f, g\} \in A$.*

Proof. Sei $f \in A$ und $f \geq 0$. Wir nehmen zunächst an, daß $\|f - 1\| < 1 - 2\epsilon$ für ein $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$. Wir suchen eine Funktion $u \in A$ mit $(1-u)^2 = f$. Diese Gleichung ist äquivalent zu
$$u = \frac{1}{2}(1 - f + u^2) \ .$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : A \to A \ , \quad \Phi(v) = \frac{1}{2}(1 - f + v^2) \ .$$

Um die Existenz von u zu zeigen, genügt es, die Existenz eines Fixpunktes von Φ nachzuweisen. Dazu zeigen wir, daß $\overline{\Phi(B(0, 1-\epsilon) \cap A)} \subseteq B(0, 1-\epsilon) \cap A$ gilt und $\Phi_{|B(0,1-\epsilon)\cap A}$ eine Kontraktion ist. In der Tat gilt für $v \in B(0, 1-\epsilon) \cap A$

$$\|\Phi(v)\| \leq \frac{1}{2}\|1 - f\| + \frac{1}{2}\|v^2\| < \frac{1-2\epsilon}{2} + \frac{1-\epsilon}{2} = 1 - \frac{3}{2}\epsilon \ .$$

Wir schließen

$$\overline{\Phi(B(0, 1-\epsilon) \cap A)} \subseteq B(0, 1-\epsilon) \cap A \ .$$

Weiter ist für alle $x \in X$.

$$|\Phi(v_0)(x) - |\Phi(v_1)(x)| = \frac{1}{2}|v_0(x)^2 - v_1(x)^2| = \frac{1}{2}|v_0(x) + v_1(x)||v_0(x) - v_1(x)| \leq (1-\epsilon)|v_0(x) + v_1(x)|$$

Also gilt

$$\|\Phi(v_0) - \Phi(v_1)\| \leq (1-\epsilon)\|v_0 - v_1\|.$$

Als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes $C_b(X, \mathbb{R})$ ist A vollständig. Deshalb hat Φ einen Fixpunkt in $B(0, 1-\epsilon) \cap A$.

Sei $f \in A$ und $f \geq \epsilon$. Da f beschränkt ist, finden wir ein $\lambda \in \mathbb{R}^>$ mit $\lambda\epsilon \leq \lambda f \leq \frac{3}{2}$. Dann gilt $\sqrt{\lambda f} \in A$ und deshalb auch $\sqrt{f} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda f} \in A$.

Sei nun $f \in A$ und $f \geq 0$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ daß $\sqrt{f + \frac{1}{n}} \in A$. Weiter gilt

$$\sqrt{f} \leq \sqrt{f + \frac{1}{n}} \leq \sqrt{f} + \frac{1}{\sqrt{n}} \ ,$$

also $\|\sqrt{f + \frac{1}{n}} - \sqrt{f}\| \leq \frac{1}{n}$ und $\mathtt{lim}_{n\to\infty}\sqrt{f + \frac{1}{n}} = \sqrt{f}$. Da A abgeschlossen ist, gilt $\sqrt{f} \in A$.

Sei nun $f \in A$. Wegen $|f| = \sqrt{f^2}$ gilt $|f| \in A$. Weiter gilt

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f + g|}{2} \in A \ , \quad \min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2} \in A \ .$$

$\square$

56.1 Aufgaben

1. Sei $z \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Wir setzen $x_0 := 1$ und definieren rekursiv

$$x_n := \frac{1}{2}(1 - z + x_{n-1}^2) \ .$$

Zeigen Sie, daß $\mathtt{lim}_{n\to\infty} x_n = \sqrt{z}$ gilt. Wie groß muß man n wählen, daß $|x_n - \sqrt{z}| \leq 10^{-10}$ gilt.

57 Kompaktheit und Stone-Weierstraß

Wir betrachten einen topologischen Raum X.

Definition 57.1 *Eine offene Überdeckung von X ist eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Teilmengen mit $\bigcup_{i\in I} I_i = X$.*

1. Die Familie aller offenen Teilmengen von X ist eine Überdeckung.
2. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie von X, dann ist $\mathcal{B}$ eine offene Überdeckung.
3. Die Familie der euklidischen Bälle $(B(x,n))_{x\in\mathbb{Z}^n}$ ist eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n$.

Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X und $J \subseteq I$ eine Teilmenge derart, daß $\bigcup_{i\in J} U_i = X$, dann heißt $(U_i)_{i\in J}$ eine Teilüberdeckung. Wenn J endlich ist, dann spricht man von einer endlichen Teilüberdeckung.

Definition 57.2 *Der Raum X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält.*

Sei $x \in X$ ein Punkte in einem topologischen Raum. Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von X ist eine Umgebungsbasis von x, wenn für jedes $i \in I$ die Teilmenge U_i eine Umgebung von x ist und für jede Umgebung U von x ein Index $i \in I$ existiert, so daß $U_i \subseteq U$ gilt.

Definition 57.3 *Ein topologischer Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, wenn jeder Punkt von x eine höchstens abzählbare Umgebungsbasis besitzt.*

1. Ein metrischer Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. In der Tat ist die Familie der Bälle um einen Punkt mit rationalen Radien eine abzählbare Umgebungsbasis.
2. Das erste Abzählbarkeitsaxiom impliziert, daß die Begriffe Abschluß und Folgenabschluß zusammenfallen. Genauer gilt folgendes. Sei X ein topologischer Raum, $(U_i)_{i\in I}$ eine abzählbare Umgebungsbasis eines Punktes $x \in X$ und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

   Lemma 57.4 *Es gilt $x \in \bar{A}$ genau dann, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $x = \mathtt{lim}_{n\to\infty} a_n$ gibt.*

   Proof. Für die nichttriviale Richtung sei $x \in \bar{A}$. Indem wir U_i durch $\bigcap_{j=0}^{i} U_j$ ersetzen, bilden wir eine neue, nun absteigende Umgebungsbasis von x. Dann können in der Tat wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $a_n \in A \cap U_n$ wählen. □

3. Sei X ein topologischer Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine abzählbare Umgebungsbasis eines Punktes $x \in X$. Unten werden wir das folgende Argument benutzen.

   Lemma 57.5 *Ist x kein Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, dann existiert eine Umgebung U von x, welche nur endlich viele Glieder der Folge enthält.*

   Proof. Wir nehmen das Gegenteil an. Sei $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine absteigende abzählbare Umgebungsbasis.

   Wir setzen $x(0)_i := x_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir bilden nun induktiv Teilfolgen $(x(k)_i)_{i\in\mathbb{N}}$ für $k \in \mathbb{N}$ durch die Vorschrift, daß $(x(k+1)_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge derjenigen Glieder von $(x(k)_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist, welche in U_{k+1} liegen. Dies ist nach unserer Annahme möglich. Beachte, daß wir die Teilfolgen immer wieder durch $\mathbb{N}$ indizieren. Dann gilt aber $\texttt{lim}_{i\to\infty} x(i)_0 = x$. Widerspruch. □

Lemma 57.6 1. *Das erste Abzählbarkeitsaxiom in Kombination mit Kompaktkeit impliziert Folgenkompaktheit.*

2. *Für metrische Räume sind die Eigenschaften* folgenkompakt *und* kompakt *äquivalent.*

Proof. Sei X kompakt und $(x_i)_{n\in I}$ eine Folge. Wir nehmen an, daß diese Folge keine konvergente Teilfolge hat. Dann gibt es nach Lemma 57.5 für jeden Punkt $y \in X$ eine Umgebung U_y die höchstens endlich viele Glieder der Folge enthält. Die Familie $(U_y)_{y\in X}$ ist eine offene Überdeckung von X. Wir können nun eine endliche Familie $(y_i)_{i\in I}$ auswählen so daß $\bigcup_{i\in I} U_{y_i} = X$ gilt. Da in jedem U_{y_i} höchstens endlich viele Glieder der Folge enthalten sind, die Folge selbst aber unendlich viele Glieder hat, ist das unmöglich.

Die Aussage 1. kann insbesondere auf metrische Räume angewendet werden. Dies zeigt die erste Hälfte von 2.

Wir nehmen nun an, daß X nichtleer, metrisch und folgenkompakt ist. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren wir

$$A_n := \{x \in X \mid (\exists i \in I : \mid B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U_i)\} \ .$$

Wir setzen $A_0 := \emptyset$. Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist aufsteigend und es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$.
Wir zeigen nun, daß es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n = X$ gibt. Andernfalls könnten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ finden mit $x_n \notin A_n$. Nach Auswahl einer Teilfolge können wir annehmen, daß die (x_n) den Grenzwert x hat. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Es gibt weiter ein $r \in \mathbb{R}^{>}$ mit $B(x, 2r) \subseteq U_i$. Es gibt schließlich ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B(x, r)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq n$. Wenn $n \in \mathbb{N}$ die Bedingungen $n \geq n_0$ und $\frac{1}{n} < r$ erfüllt, dann gilt $x_n \in A_n$. Widerspruch.
Wir konstruieren nun rekursiv eine endliche Teilüberdeckung. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n = X$. Wir wählen $j_1 \in X$ und beginnen die die Rekursion.

Seien $j_i \in I$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ gewählt. Wenn $X = \bigcup_{i=1}^k U_{j_i} = X$ gilt, dann sind wir fertig. Andernfalls finden wir ein $x_k \in X \setminus \bigcup_{i=1}^k U_{j_i}$. Wir wählen $j_{k+1} \in I$ derart, daß $x \in B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U_{j_{k+1}}$ gilt und beginnen von vorn.
Wenn diese Rekursion nicht abbricht, dann erhalten wir eine Folge (x_i). Da $d(x_i, x_j) \geq \frac{1}{n}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$ hat diese Folge keine konvergente Teilfolge im Widerspruch zur Annahme der Folgenkompaktheit von X. $\square$

1. Eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

2. Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt (Übungsaufgabe).

3. Eine stetige $\mathbb{R}$-wertige Funktion auf einem kompakten Raum ist beschränkt.

4. Der Einheitsball in $C([0,1])$ ist nicht kompakt. In der Tat ist er nicht einmal folgenkompakt. Die Folge $(\sin(\pi n x))$ hat keine konvergente Teilfolge. In der Tat gilt für $n \neq m$ daß $\|\sin(\pi n x) - \sin(\pi m x)\| = 1$. Dazu müssen wir nur einen Punkt $x \in [0,1]$ finden mit $\pi n x \in \pi\mathbb{Z}$ und $\pi m x \in \pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$. Setze $x := \frac{1}{2(|n-m|)}$.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^X$.

1. A ist eine Algebra, wenn sie ein Untervektorraum und unter dem Produkt abgeschlossen ist.

2. A trennt die Punkte, wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein Element $f \in A$ existiert mit $f(x) \neq f(y)$.

1. $C(X, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^X$ ist eine Algebra.

2. Wenn X metrisch ist, dann trennt $C(X, \mathbb{R})$ die Punkte. In der Tat, seien $x, y \in X$ und $x \neq y$. Dann ist $z \mapsto d(x, z)$ stetig und es gilt $d(x, x) = 0$ und $d(x, y) \neq 0$.

3. Wenn X chaotisch ist und mehr als einen Punkt hat, dann trennt $C(X, \mathbb{R})$ die Punkte nicht.

Wir betrachten nun einen kompakten topologischen Raum X. Dann besteht der Raum $C(X, \mathbb{R})$ (der reell-wertigen stetigen Funktionen) aus beschränkten Funktionen und ist ein vollständiger normierter Raum mit der Norm $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Proposition 57.7 (Stone-Weierstraß) *Sei $A \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine Algebra, welche die Punkte trennt und 1 enthält. Dann gilt $\overline{A} = C(X, \mathbb{R})$.*

Proof. Wir sehen zunächst ein, daß $\overline{A}$ eine Algebra ist.

Seien $x, y \in X$ und $x \neq y$ sowie $s, t \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann finden wir eine Funktion $g \in \overline{A}$ mit $g(x) = s$ und $g(y) = t$. Dazu wählen wir zunächst $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann setzen wir

$$g = s\frac{f - f(y)}{f(x) - f(y)} + \beta\frac{f - f(x)}{f(y) - f(x)} \ .$$

Da A ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $1 \in A$ ist, gilt $g \in A \subseteq \overline{A}$.

Wir betrachten $f \in C(X, \mathbb{R})$. Sei nun $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wir konstruieren dann $h \in \overline{A}$ mit $\|f - h\| \leq \epsilon$.

Sei $x \in X$ zunächst fest. Für jedes $y \in X$ wählen wir $g_y \in \overline{A}$ mit $g_y(x) = f(x)$ und $g_y(y) = f(y)$.

Dann wählen wir für jedes $y \in X$ eine Umgebung $U(y)$ derart, daß für $z \in U_y$ gilt $g_y(z) < f(z) + \epsilon$. Da X kompakt ist, finden wir eine endliche Familie $(y_i)_{\in I}$ mit $\bigcup_{i \in I} U(y_i) = X$. Wir setzen

$$h_x := \min_{i \in I} g_{y_i} \in \overline{A} \ .$$

Dann gilt $h_x < f + \epsilon$. Nun gilt $h_x(x) = f(x)$. Wir finden eine Umgebung $V(x)$ derart, daß $f(z) - \epsilon < h_x(z)$ für alle $z \in V(x)$ gilt. Wir finden eine endliche Familie $(x_k)_{k \in K}$ derart, daß $\bigcup_{k \in K} V(x_k) = X$. Wir setzen $h := \max_{k \in K} h_{x_k} \in \overline{A}$. Dann gilt $\|f - h\| \leq \epsilon$. □

Hier ist die komplexe Version.

Lemma 57.8 *Sei X ein kompakter topologischer Raum und $A \subseteq C(X, \mathbb{C})$ eine Algebra mit*

1. $1 \in A$
2. *A trennt die Punkte*
3. *mit $f \in A$ ist $\bar{f} \in A$.*

Dann gilt $\bar{A} = C(X, \mathbb{C})$.

Proof. Aus $f \in A$ folgt $\mathrm{Re}(f) \in A$ und $\mathrm{Im}(f) \in A$. Wir sehen damit, daß $A_{\mathbb{R}} := A \cap C(X, \mathbb{R})$ die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß erfüllt. Sei jetzt $f \in C(X, \mathbb{C})$. Dann gilt $\mathrm{Im}(f), \mathrm{Re}(f) \in \overline{A_{\mathbb{R}}} \subseteq \overline{A}$ und folglich $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f) \in \overline{A}$. □

1. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist $\mathbb{R}[x]$ dicht in $C(X, \mathbb{R})$. In der Tat ist $\mathbb{R}[x]$ eine Algebra und $1 \in \mathbb{R}[x]$. Schon die linearen Polynome trennen die Punkte. Jede stetige Funktion auf X kann also gleichmäßig durch Polynome approximiert werden.

2. Ist $X \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und hat ein nicht-leeres Inneres, dann ist $\mathbb{C}[z]$ nicht dicht in $C(X, \mathbb{C})$. Die stetige Abbildung $X \ni z \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ kann nicht gleichmäßig approximiert werden (Beweis wird in der Funktionentheorie erbracht). Die Algebra $\mathbb{C}[z]$ ist nicht abgeschlossen unter komplexer Konjugation. Andererseits ist $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$ in $C(X, \mathbb{C})$ dicht.

3. Sei $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis, den wir durch $x \mapsto (\sin(x), \cos(x))$ parametrisieren. Wir betrachten die Algebra $A \subset C(S^1, \mathbb{C})$ der trigonometrischen Polynome (mit komplexen Koeffizienten) der Form

$$x \mapsto \sum_{n=-k}^{k} a_n e^{2\pi i n x} \ .$$

   In der Tat ist die Funktion $x \mapsto \exp(2\pi i x)$ eine stetige Funktion auf S^1, da sie in der Form $\cos(x) + i \sin(x)$ geschrieben werden kann. Damit sind alle trigonometrischen Polynome stetig.

   Die Teilmenge $A \subseteq C(S^1, \mathbb{C})$ ist eine Algebra mit Eins und mit $f \in A$ gilt $\bar{f} \in A$. Die trigonometrischen Polynome trennen die Punkte. In der Tat ist $x \mapsto \exp(2\pi i x)$ schon injektiv.

   Jede stetige Funktion auf S^1 kann also gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden.

57.1 Aufgaben

1. Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, daß die abgeschlossene Einheitskugel in $C_b(X, \mathbb{R})$ genau dann kompakt ist, wenn X endlich ist.

58 Vervollständigung

Wir betrachten einen metrischen Raum (X, d_X).

Definition 58.1 *Eine Vervollständigung von X besteht aus einem metrischen Raum $(\bar{X}, d_{\bar{X}})$ und einer Abbildung $\iota : X \to \bar{X}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$(\bar{X}, d_{\bar{X}})$ ist vollständig.*

2. *$\iota : X \to \bar{X}$ ist isometrisch.*

3. *$\iota(X) \subseteq \bar{X}$ ist eine dichte Teilmenge.*

Proposition 58.2 *Jeder metrische Raum (X, d_X) besitzt eine Vervollständigung.*

Proof.

1. Wir konstruieren zunächst die unterliegende Menge von $\bar{X}$. Sei $\tilde{X} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ die Teilmenge aller Cauchyfolgen in X. Für zwei Folgen $x := (x_n)$ und $y := (y_n)$ definieren die neue Folge $x * y$ durch

$$(x * y)_n := \begin{cases} x_{\frac{n}{2}} & n \text{ gerade} \\ y_{\frac{n-1}{2}} & n \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Wir definieren auf $\tilde{X}$ die Relation

$$x \sim y := (x * y \text{ is Cauchyfolge}) .$$

Lemma 58.3 *Die Relation $x \sim y$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Proof. Übungsaufgabe. □

Wir definieren

$$\bar{X} := \tilde{X} / \sim \ .$$

2. Wir definieren nun die Abbildung $\iota : X \to \bar{X}$ und eine Metrik $d_{\bar{X}}$. Wir setzen

$$\iota(x) := (x_n) \ , \quad \text{mit } x_n := x \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Seien nun $x, y \in \tilde{X}$. Wir beobachten zunächst, daß $\mathbb{N} \ni n \mapsto d_X(x_n, y_n) \in \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge ist. Wir setzen

$$d_{\tilde{X}}(x, y) := \texttt{lim}_{n \to \infty} d_X(x_n, y_n) \ .$$

Lemma 58.4 *Die Abbildung*

$$d_{\bar{X}} : \bar{X} \times \bar{X} \to \mathbb{R} \ , \quad d([x], [y]) := d(x, y)$$

ist wohldefiniert und eine Metrik auf $\bar{X}$.

Proof. Übungsaufgabe. □

Die Abbildung $\iota : X \to \bar{X}$ ist offensichtlich isometrisch.

3. Wir zeigen nun, daß $\bar{X}$ vollständig ist. Sei $(x(i)) := (x(i)_n)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Folgen derart, daß $([x(i)])$ eine Cauchyfolge in $\bar{X}$ ist. Wir wählen eine monoton wachsende Folge $(n_0(k))$ natürlicher Zahlen derart, daß $d_{\bar{X}}([x(i)], [x(j)]) \le \frac{1}{3k}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $n_0(k) \le i$ und $n_0(k) \le j$ gilt. Wir wählen dann ein $m_0(k)$ derart, daß $d_X(x(n_0(k))_r, x(n_0(k))_s) \le \frac{1}{3k}$ für alle $s, r \in \mathbb{N}$ mit $m_0(k) \le r$ und $m_0(k) \le s$ gilt. Dann setzen wir

$$y_k := x(n_0(k))_{m_0(k)} \ .$$

Lemma 58.5 *Es gilt dann für $k \le k'$ daß $d_{\bar{X}}(y_k, y_{k'}) \le \frac{1}{k}$ ist. Die Folge $y := (y_k)$ ist eine Cauchyfolge und es gilt*

$$\mathtt{lim}_{i\to\infty}[x(i)] = [y] \ .$$

Proof. Schätze ab

$$d(x(i)_k, x(n_0(k))_{m_0(k)}) \le d(x(i)_k, x(i)_m) + d(x(i)_m, x(n_0(k))_m) + d(x(n_0(k))_m, x(n_0(k))_{m_0(k)}) \ .$$

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Wähle zunächst $l \in \mathbb{N}$ derart, daß $l \ge \epsilon^{-1}$. Dann wählen wir:

(a) $i \ge n_0(l)$

(b) $k \ge l$ und so daß $d(x(i)_s, x(i)_t) \le \epsilon$ für $s, t \ge k$.

(c) $m \ge \max\{m_0(k), k\}$ so groß daß $d(x(i)_m, x(n_0(k))_m) \le \epsilon$.

Dann ist $d(x(i)_k, x(n_0(k))_{m_0(k)}) \le 3\epsilon$. Wir schließen, daß

$$\mathtt{lim}_{i\to\infty}\mathtt{lim}_{k\to\infty} d(x(i)_k, y_k) = 0 \ ,$$

also $\mathtt{lim}_{i\to\infty} x(i) = y$. □

4. Wir zeigen, daß $\iota(X) \subseteq \bar{X}$ dicht ist. Sei (x_n) eine Cauchyfolge in X und $[x] \in \bar{X}$. Wir betrachten die Folge $y_n := [\iota(x_n)]$ in $\bar{X}$. Dann gilt $\mathtt{lim}_{n\to\infty} y_n = [x]$.

In den folgenden Punkten erklären wir einige weitere Eigenschaften der Vervollständigung.

1. Wenn (X, d_X) vollständig ist, dann ist (X, d_X) mit $\mathtt{id}_X : X \to X$ seine Vervollständigung.

2. Wir betrachten ein Diagramm
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \bar{X} \arrow[d, dotted, "\bar{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$
in welchem die obere Zeile eine Vervollständigung ist und f gleichmäßig stetig ist.

Lemma 58.6 *Es existiert genau eine stetige Fortsetzung $\bar{f}$.*

Proof. Da $\iota(X)$ eine dichte Teilmenge von $\bar{X}$ und $\bar{f}$ auf dem Bild von ι schon bestimmt ist, ist eine Fortsetzung eindeutig, wenn sie existiert.

Wir konstruieren nun eine Fortsetzung. Dazu machen wir für jeden Punkt $x \in \bar{X}$ die folgende Konstruktion. Wir wählen eine Folge (x_n) in X mit $\mathtt{lim}_{n\to\infty}\iota(x_n) = x$. Wir setzen

$$\bar{f}(x) := \mathtt{lim}_{n\to\infty} f(x_n) \ .$$

Wir müssen zeigen, daß dieser Grenzwert existiert. Da f gleichmäßig stetig ist, schließt man leicht, daß $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge in Y ist. Da Y vollständig ist, konvergiert diese Folge.

Wir zeigen nun, daß diese Fortsetzung $\bar{f}$ gleichmäßig stetig ist. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben und $x, y \in \bar{X}$. Dann haben wir oben Folgen (x_n) und (y_n) in X gewählt. Wir wählen zunächst $\delta \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß aus $d_X(u,v) \le 3\delta$ folgt $d_Y(f(u), f(v)) \le \frac{\epsilon}{3}$. Wir wählen weiter ein n derart, daß $d_{\bar{X}}(\iota(x_n), x) \le \delta$, $d_Y(f(x_n), \bar{f}(x)) \le \frac{\epsilon}{3}$, $d_{\bar{X}}(\iota(y_n), y) \le \delta$ und $d_Y(f(y_n), \bar{f}(y)) \le \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Dann gilt

$$d_Y(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \le d_Y(\bar{f}(x), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(y_n)) + d_Y(f(y_n), \bar{f}(y)) \ .$$

Aus $d_{\bar{X}}(x,y) \le \delta$ folgt $d_X(x_n, y_n) \le 3\delta$ und damit $d_Y(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \le \epsilon$. □

3. In Lemma 58.6 kann man die Bedingung, daß f gleichmäßig stetig ist, nicht einfach weglassen. Als Beispiel betrachten wir die Abbildung $x \mapsto x^{-1} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Dann ist die Einbettung $\iota : (0,\infty) \to [0,\infty)$ eine Vervollständigung und $\mathbb{R}$ ist auch vollständig. Es gibt aber keine Fortsetzung der Abbildung.

58.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie Lemma 58.3.
2. Zeigen Sie Lemma 58.4.
3. Zeigen Sie Lemma 58.5.

59 L^2-Räume via Vervollständigung

Wir betrachten den Raum $C([0,1])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 \bar{f}(x) g(x) dx \ . \tag{16}$$

Dann ist

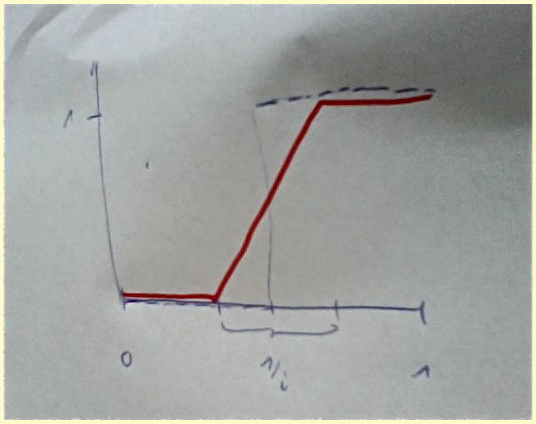
$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

eine Norm und

$$d_{L^2}(f,g) := \|f-g\|_{L^2}$$

eine Metrik. Der metrische Raum $(C([0,1]), d_{L^2})$ ist nicht vollständig. Hier ist ein Beispiel für eine Cauchyfolge (f_n) in $C([0,1])$, die keinen Grenzwert in $C([0,1])$ hat:

$$f_i(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2i}] \\ i(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2i})) & x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2i}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2i}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}, 1] \end{cases} \ . \tag{17}$$



Folglich ist $C([0,1])$ mit dem Skalarprodukt (16) auch kein Hilbertraum. Durch den Prozess der Vervollständigung können wir jedoch einen Hilbertraum konstruieren. Dazu definieren wir den metrischen Raum

$$(L^2([0,1]), d_{L^2})$$

als die Vervollständigung von $C([0,1])$. Letzteren verstehen wir von nun an als Teilmenge von $L^2([0,1])$.

Die Struktur eines $\mathbb{C}$-Vektorraumes und das Skalarprodukt erhalten wir eindeutig durch stetige Fortsetzung der entsprechenden Strukturen auf $C([0,1])$. Wir erklären das am Beispiel der Addition

$$+ : C([0,1]) \times C([0,1]) \to C([0,1]) \ .$$

Sei $f \in C([0,1])$. Wir schränken diese Abbildung zuächst ein zu $\{f\} \times C([0,1]) \to C([0,1])$, $g \mapsto f+g$. Diese Abbildung ist gleichmäßig stetig und setzt sich fort zu $L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$, $g \mapsto f+g$. Diese setzen wir nun für festes g weiter fort zu einer Abbildung

$$+ : L^2([0,1]) \times L^2([0,1]) \to L^2([0,1]) \ .$$

Nach Konstruktion ist $(L^2([0,1]), \|\dots\|_{L^2})$ ein Banachraum. Ein Punkt in $L^2([0,1])$ ist nach dieser Konstruktion eine Äquivalenzklasse von Cauchyfolgen in $C([a,b])$.

Wir betrachten nun $c, d \in [a,b)$ mit $c < d$. Wir wollen die einfache Funktion $\chi_{[c,d)}$ mit einem Element in $L^2([a,b])$ identifizierem. Dazu approximieren wir $\chi_{[c,d)}$ durch stetige Funktionen wie folgt:

$$f_n(x) := \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x \in [0, c - \frac{1}{n}) \\ n(x - c + \frac{1}{n}) & x \in [c - \frac{1}{n}, c) \\ 1 & x \in [c, d - \frac{1}{n}) \\ 1 - n(x - d + \frac{1}{n}) & x \in [d - \frac{1}{n}, d) \\ 0 & x \geq d \end{array} \right. \}$$

Es gilt

$$\texttt{lim}_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-\phi(x)|^2dx = 0 \ .$$

Die Folge (f_n) ist eine Cauchyfolge in $C([a,b])$ und representiert $\chi_{[c,d)}$ in $L^2([a,b])$. Wir dehnen diese Konstruktion zu einer linearen Abbildung $\mathcal{E}([a,b])\to L^2([a,b])$ aus.

Der Raum $L^2([0,1])$ bildet den adäquaten Rahmen für die Theorie der Fourierreihen, welche wir im folgenden kurz skizzieren.

Wir betrachten die Funktionen

$$e_n:[0,1]\to\mathbb{C}\ ,\quad e_n(x):=\exp(2\pi inx)\ .$$

Lemma 59.1 *Funktionen $(e_n)_{n\in Z}$ bilden ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1])$.*

Proof. Wir rechnen für $m\neq n$

$$\int_0^1 \bar{e}_n(x)e_m(x)dx = \int_0^1 \exp(2\pi i(m-n)x)dx = \frac{\exp(2\pi i(m-n)x)}{2\pi i(m-n)}|_0^1 = 0$$

und

$$\int_0^1 \bar{e}_n(x)e_n(x)dx = \int_0^1 1dx = 1\ .$$

Definition 59.2 *Für $f\in L^1([0,1])$ heißt*

$$a_n(f):=\langle e_n,f\rangle\in\mathbb{C}$$

der n-te Fourierkoefficient und die Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f)e_n$$

in $L^2([0,1])$ ist die Fourierreihe von f.

Wenn f stetig ist, dann gilt

$$a_n(f)=\int_0^1\exp(-2\pi inx)f(x)dx\ .$$

Lemma 59.3 *Die Fourierreihe von $f\in L^2([0,1])$ konvergiert.*

Proof. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\| \sum_{n=-k}^{k} a_n(f)e_n - f\|^2_{L^2} &= \langle \sum_{n=-k}^{k} a_n(f)e_n - f, \sum_{n=-k}^{k} a_n(f)e_n - f\rangle \\
&= \|f\|^2_{L^2} - \sum_{n=-k}^{k} |a_n(f)|^2
\end{aligned}$$

und für $k \le k'$

$$\| \sum_{n=-k}^{k} a_n(f)e_n - \sum_{n=-k'}^{k'} a_n(f)e_n\|^2_{L^2} = \sum_{|n|\in\{k+1,\dots,k'\}} |a_n(f)|^2 \ .$$

Die erste Gleichung zeigt, daß die monoton wachsende Folge $k \mapsto \sum_{n=-k}^{k} |a_n(f)|^2$ durch $\|f\|^2$ beschränkt und damit konvergent ist. Die zweite Gleichung zeigt dann, daß die Partialsummen der Fourierreihe eine Cauchyfolge bilden. Damit konvergiert die Fourierreihe in $L^2([0,1])$. □

Es ergibt sich nun die Frage, gegen welches Element von $L^2([0,1])$ die Fourierreihe von f konvergiert.

Proposition 59.4 *Es gilt* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f)e_n = f$

Proof. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\Phi : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]) \ , \quad f \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f)e_n \ .$$

Es gilt

$$\|\Phi(f)\|^2_{L^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n(f)|^2 \le \|f\|^2_{L^2} \ .$$

Damit ist Φ stetig.

Sei $A \subseteq L^2([0,1])$ die lineare Hülle der Familie $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Dann gilt

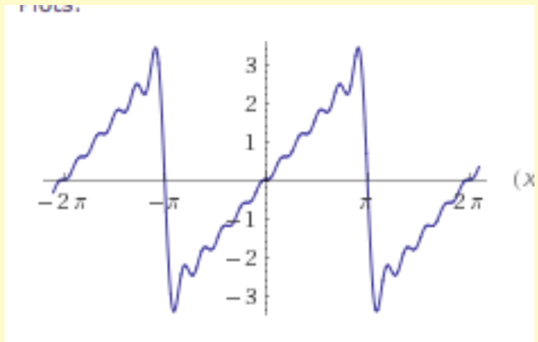
$$A \subseteq C_{per}([0,1],\mathbb{C}) := \{f \in C([0,1];\mathbb{C}) \mid f(0) = f(1)\} \subseteq L^2([0,1]) \ .$$

Es gilt $\Phi_{|A} = \mathtt{id}_A$. Wenn A dicht in $L^2([0,1])$ ist, dann folgt daraus $\Phi = \mathtt{id}$, also die behauptung.

Sei $f \in L^2([0,1])$ fixiert. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Dann finden wir nach Definition von $L^2([0,1])$ durch Vervollständigung ein $\phi \in C([0,1])$ mit $\|\phi - f\|_{L^2} \le \frac{\epsilon}{3}$. Wir finden nun weiter ein $\psi \in C_{per}([0,1])$ mit $\|\psi - \phi\|_{L^2} \le \frac{\epsilon}{3}$. Dazu multiplizieren wir ϕ mit einer geeigneten Funktion $\chi \in C([0,1])$ deren Träger in $(0,1)$ enthalten ist. Schließlich finden wir ein

Element $\kappa \in A$ mit $\|\psi - \kappa\|_{L^\infty} \leq \frac{\epsilon}{3}$ (Stone-Weierstraß). Dann gilt auch $\|\psi - \kappa\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{3}$. Alles in allem gilt $\|f - \kappa\|_{L^2} \leq \epsilon$. $\square$

Im folgenden Bild ist die 10te Fourierapproximation der Funktion x auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ dargestellt.



Corollary 59.5 *Wenn $f \in L^2([0,1])$ und $\langle f, e_n \rangle = 0$ für alle $n \in Z$ gilt, dann gilt $f = 0$.*

Corollary 59.6 *Für $f \in L^2([0,1])$ gilt die Parsevalsche Gleichung $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n(f)|^2$.*

Im folgenden benutzen wir die Parsevalsche Gleichung für die Berechnung der Werte einiger interessanter Reihen.

Wir wenden die Parsevalsche Gleichung zunächst auf die Funktion x an. Es gilt für $n \neq 0$

$$a_n(x) = \int_0^1 x e^{-2\pi i n x} dx = -\frac{1}{2\pi i n}$$

und $a_0(x) = \frac{1}{2}$. Damit gilt

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ ,$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad .$$

Wir wenden die Parsevalsche Gleichung auf $f = \chi_{[0,x]}$ an. Es gilt für $n \neq 0$

$$a_n(f) = \int_0^x \exp(-2\pi i n y) dy = \frac{1 - \exp(-2\pi i n x)}{2\pi i n} \ .$$

und $a_0(f) = x$. Wir rechnen für $n \neq 0$.

$$|a_n|^2 = \frac{1 - \cos(2\pi n x)}{2\pi^2 n^2}.$$

Die Parsevalsche Gleichung liefert die Identität

$$x = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi n x)}{\pi^2 n^2} \ .$$

Wir setzen $x = \frac{1}{2}$ ein und erhalten

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2}$$

oder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

Weiter erhalten wir für $x \in [0,1]$ die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^2} = \pi^2 (x^2 - x + \frac{1}{6}) \ .$$

Wir haben gesehen, daß die Fourierreihe von $f \in L^2([0,1])$ in der Norm $\|\ldots\|_{L^2}$ gegen f konvergiert. Ist f regulärer, dann kann man die Konvergenzaussage verbessern. Die Bedingungen im folgenden Satz sind nicht optimal, erlauben aber einen einfachen Beweis.

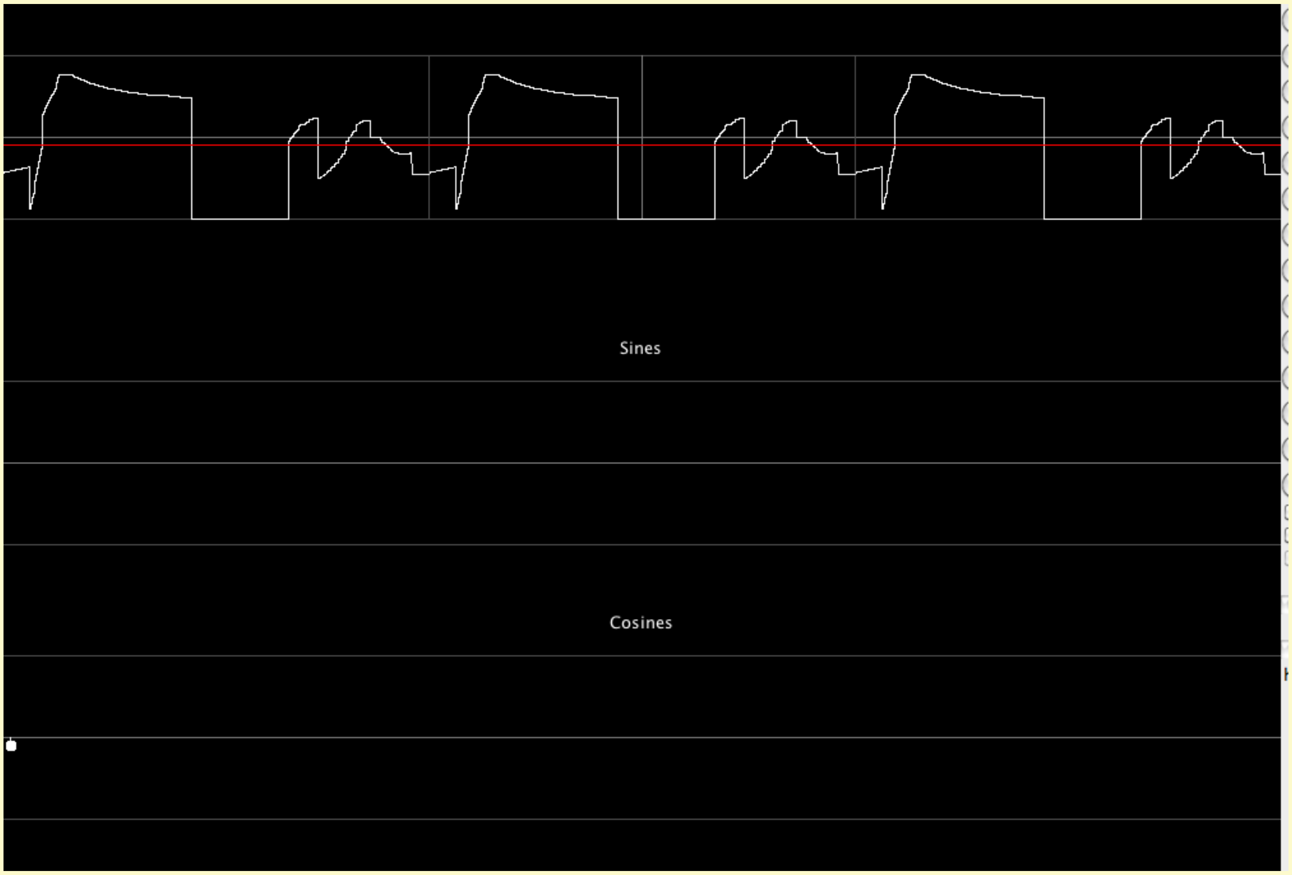
Proposition 59.7 *Wenn $f \in C^2(\mathbb{R})$ periodisch mit der Periode 1 ist, dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f.*

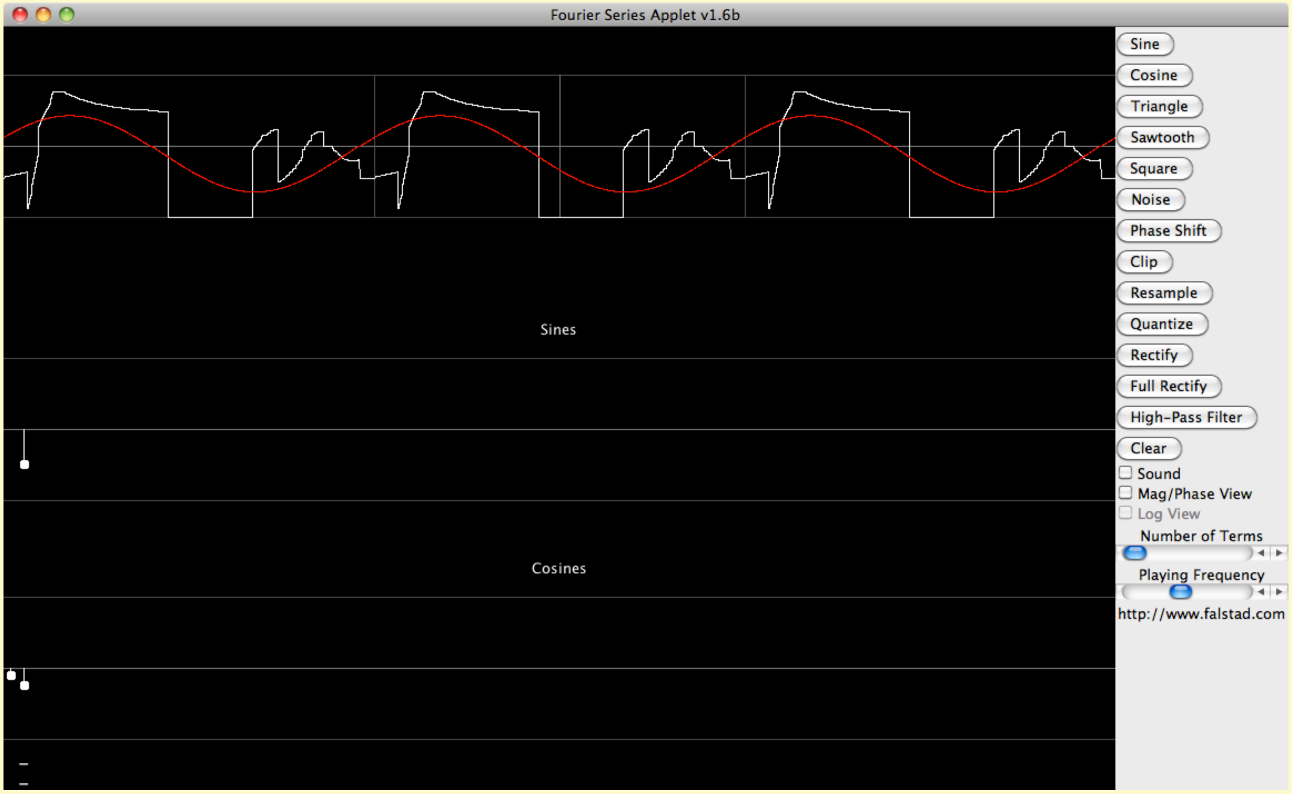
Proof. Wir rechnen mittels partieller Integration

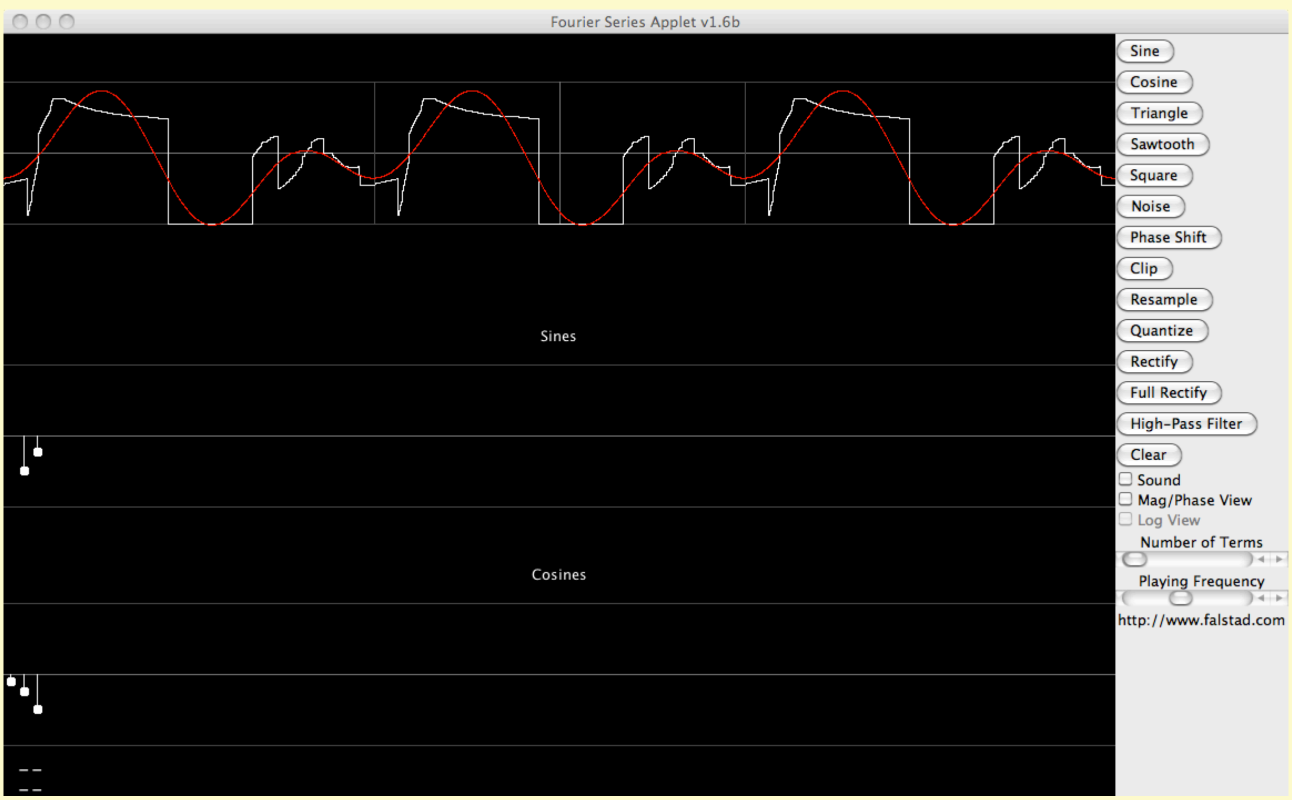
$$a_n(f) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 f'(x) e^{-2\pi i n x} dx = -\frac{1}{4\pi^2 n^2} \int_0^1 f''(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

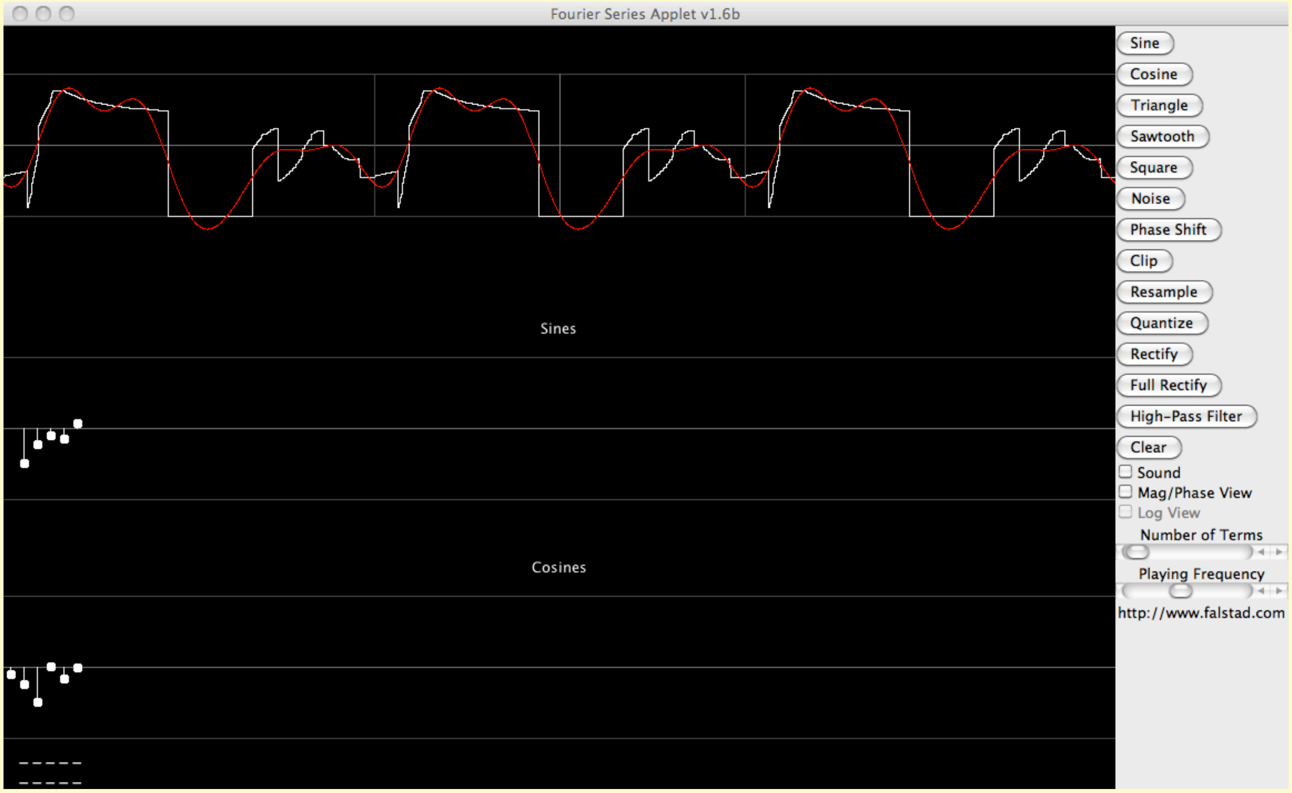
Es gilt also $|a_n(f)| \le \frac{C}{n^2}$ für $C := \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{4\pi^2}$. Damit konvergiert $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) e^{2\pi i n x}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $\tilde{f}$. Es gilt weiter $a_n(f) = a_n(\tilde{f})$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und folglich $f = \tilde{f}$. □

Die folgenden Bilder zeigen eine Folge von Fourierapproximationen, welche mit der App `http://www.falstad.com/fourier/` erzeugt wurden. Man beachte die gleichmäßie Approximation in stetigen Bereichen und das Verhalten an den Sprungstellen (Gibbssches Phänomen). Mit dieser App kann man den Effekt der Approximation auch hören.


Sines
Cosines

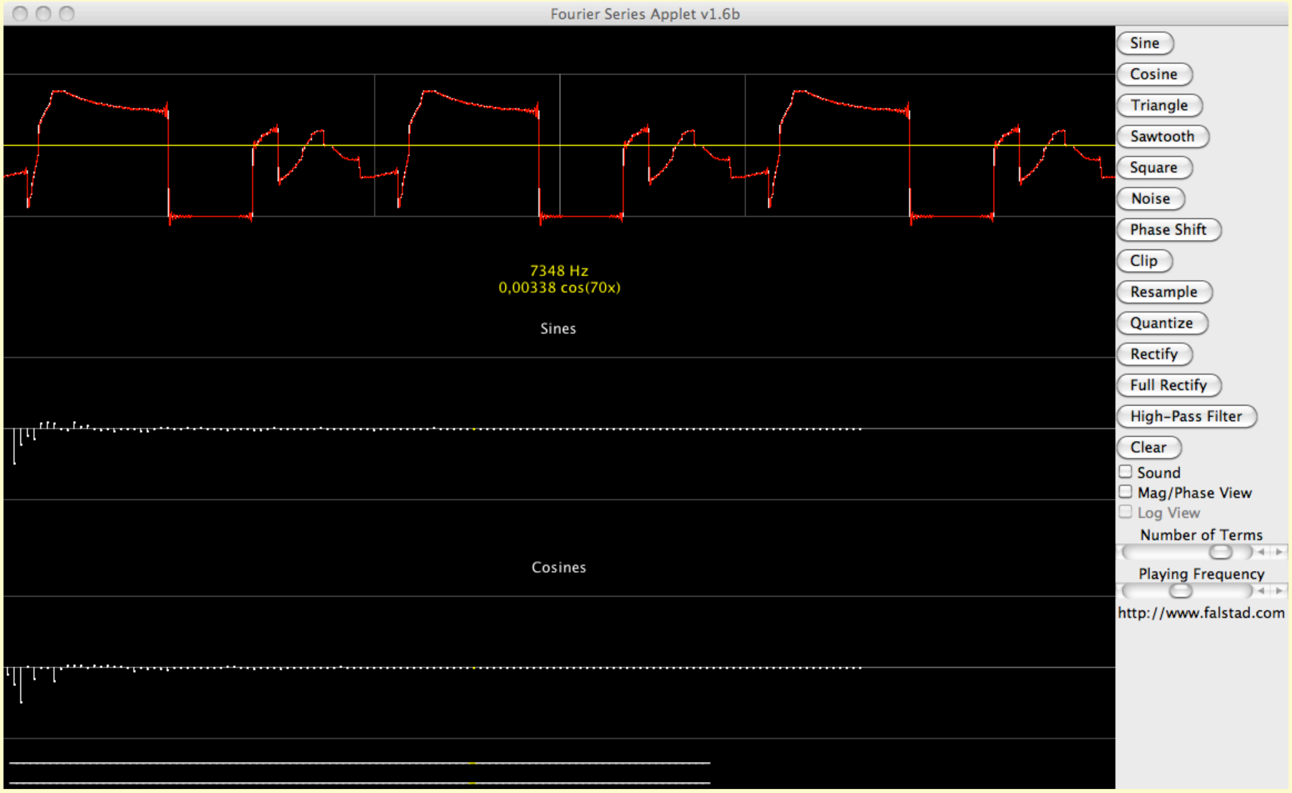

Fourier Series Applet v1.6b
Sines
Cosines
Sine
Cosine
Triangle
Sawtooth
Square
Noise
Phase Shift
Clip
Resample
Quantize
Rectify
Full Rectify
High-Pass Filter
Clear
Sound
Mag/Phase View
Log View
Number of Terms
Playing Frequency
http://www.falstad.com


Fourier Series Applet v1.6b
Sines
Cosines
Sine
Cosine
Triangle
Sawtooth
Square
Noise
Phase Shift
Clip
Resample
Quantize
Rectify
Full Rectify
High-Pass Filter
Clear
Sound
Mag/Phase View
Log View
Number of Terms
Playing Frequency
http://www.falstad.com


Fourier Series Applet v1.6b
Sines
Cosines
Sine
Cosine
Triangle
Sawtooth
Square
Noise
Phase Shift
Clip
Resample
Quantize
Rectify
Full Rectify
High-Pass Filter
Clear
Sound
Mag/Phase View
Log View
Number of Terms
Playing Frequency
http://www.falstad.com


Fourier Series Applet v1.6b
Sines
Cosines
Sine
Cosine
Triangle
Sawtooth
Square
Noise
Phase Shift
Clip
Resample
Quantize
Rectify
Full Rectify
High-Pass Filter
Clear
Sound
Mag/Phase View
Log View
Number of Terms
Playing Frequency
http://www.falstad.com


Fourier Series Applet v1.6b
Sines
Cosines
Sine
Cosine
Triangle
Sawtooth
Square
Noise
Phase Shift
Clip
Resample
Quantize
Rectify
Full Rectify
High-Pass Filter
Clear
Sound
Mag/Phase View
Log View
Number of Terms
Playing Frequency
http://www.falstad.com


Fourier Series Applet v1.6b
7348 Hz
0,00338 cos(70x)
Sines
Cosines
Sine
Cosine
Triangle
Sawtooth
Square
Noise
Phase Shift
Clip
Resample
Quantize
Rectify
Full Rectify
High-Pass Filter
Clear
Sound
Mag/Phase View
Log View
Number of Terms
Playing Frequency
http://www.falstad.com

59.1 Aufgaben

1. Zeige, daß die in (17) definierte Folge eine Cauchyfolge ist, aber keinen Grenzwert in $(C([0,1]), d_{L^2})$ hat.

2. Sei $f \in C([0,1])$ und gelte $\int_0^1 e^{2\pi inx} f(x)dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Zeige, daß dann $f = 0$ gilt.

3. Berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Betrachte dazu die Parsevalsche Gleichung für Funktionen x^k für $k = 0, 1, 2$.

60 Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

Seien E, F normierte reelle Vektorräume. Sei $U \subseteq E$ eine offene Teilmenge, $u \in U$ und $f : U \to F$ eine Abbildung. Wir wollen diese Abbildung in der Nähe von u in der folgenden Weise zerlegen:

$$f(x) = \text{Konstante} \;+\; \begin{array}{c}\text{lineare}\\ \text{Abbildung}\\ \text{in } x-u\end{array} \;+\; \text{Rest}\ .$$

Dabei soll der Rest für $x \to u$ kleiner sein als jede lineare Abbildung. Diese Idee wird durch den Begriff der Ableitung präziese gemacht.

Definition 60.1 *Die Abbildung f ist im Punkt u differenzierbar, wenn es eine beschränkte lineare Abbildung $A \in L(E,F)$ und eine Abbildung $r : U \to F$ gibt derart, daß für alle $x \in U$*

$$f(x) = f(u) + A(x-u) + r(x)$$

und

$$\mathtt{lim}_{x\to u} \frac{r(x)}{\|x-u\|} = 0$$

gilt.

Lemma 60.2 *Die beschränkte lineare Abbildung $A \in L(E,F)$ ist eindeutig bestimmt.*

Proof. Seien $A, A' \in L(E,F)$ zwei verschiedene beschränkte lineare Abbildungen, so daß

$$f(x) = f(u) + A(x-u) + r(x)\ , \quad f(x) = f(u) + A'(x-u) + r'(x)$$

und

$$\mathtt{lim}_{x\to u} \frac{r(x)}{\|x-u\|} = 0\ , \quad \mathtt{lim}_{x\to u} \frac{r'(x)}{\|x-u\|}$$

gelten. Dann gilt

$$(A - A')(x-u) = r(x) - r'(x)\ .$$

Es gibt ein $\xi \in E$ mit $(A - A')\xi \neq 0$. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Umgebung von 0 derart, daß $u + t\xi \in U$ für alle $t \in X$ gilt. Für $t \in X$ gilt dann

$$t(A - A')(\xi) = r(u + t\xi) - r'(u + t\xi) \ .$$

Wir dividieren diese Gleichung durch $\|t\xi\|$ und betrachten den Grenzwert für $t \to 0$. Für die rechte Seite gilt

$$\mathtt{lim}_{t\to 0}\frac{1}{|t|\|\xi\|}(r(u + t\xi) - r'(u + t\xi)) = 0 \ .$$

Die linke Seite hat die Form

$$\mathtt{sign}(t)\|\xi\|^{-1}(A - A')(\xi)$$

und sicher keinen Grenzwert für $t \to 0$. Wir erhalten also einen Widerspruch. □

Definition 60.3 *Wenn die Abbildung f im Punkt u differenzierbar ist, dann heißt die lineare Abbildung A die Ableitung von f im Punkt u und wird mit $df(u) := A$ bezeichnet.*

1. Wir beobachten, daß die Eigenschaft differenzierbar zu sein und die Ableitung selbst nur von den Äquivalenzklassen der Normen auf E und F abhängen.

2. Sei
$$f : E \to F$$
eine beschränkte lineare Abbildung und $u \in E$. Dann ist f im Punkt u differenzierbar und es gilt $df(u)(\xi) = f(\xi)$ für alle $\xi \in E$. In der Tat gilt
$$f(x) = f(u) + f(x - u) \ .$$
Insbesondere verschwindet der Restterm.

3. Sei $\langle \dots, \dots \rangle$ ein Skalarprodukt auf E. Wir betrachten die Abbildung
$$f : E \to \mathbb{R} \ , \quad f(x) := \langle x, x \rangle \ .$$
Sei $u \in E$. Es gilt
$$\langle x, x \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, (x - u)\rangle + \langle x - u, x - u \rangle \ .$$
Daraus lesen wir ab, daß f im Punkt u differenzierbar ist und
$$df(u)(\xi) = 2\langle u, \xi \rangle$$
gilt. In der Tat ist die Abbildung $E \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto 2\langle u, \xi \rangle$ linear und es gilt
$$\mathtt{lim}_{x\to u}\frac{\langle x - u, x - u \rangle}{\|x - u\|} = \mathtt{lim}_{x\to u}\|x - u\| = 0 \ ,$$
wenn wir für $\| \dots \|$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm nehmen.

4. Sind $f_0, f_1 : U \to F$ im Punkt u differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $f_0 + \lambda f_1$ in u differenzierbar und es gilt $d(f_0 + \lambda f_1)(u) = df_0(u) + \lambda df_1(u)$. Übungsaufgabe!

5. Wir betrachten die Abbildung $I : GL(E) \ni A \mapsto A^{-1} \in GL(E)$. Es gilt
$$dI(S) = -A^{-1}SA^{-1} \ .$$
Wir benutzen dazu die Identitität $I(A+S) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(A^{-1}S)^nA^{-1}$ für solche $S \in L(E,E)$ mit $\|E\| < \|A^{-1}\|^{-1}$.

Lemma 60.4 *Wenn f im Punkt u differenzierbar ist, dann ist f in u stetig.*

Proof. Es gilt
$$\mathtt{lim}_{x\to u} f(v) = \mathtt{lim}_{x\to u}(f(u) + df(u)(x-u) + r(x)) = f(u) \ .$$
Wir verwenden hier, daß $df(u)$ als beschränkte lineare Abbildung stetig ist und $\mathtt{lim}_{x\to 0} r(x) = 0$ gilt. □

Wir nehmen an, daß f im Punkt u differenzierbar ist. Wir betrachten jetzt einen weiteren normierten Vektorraum G. Sei $V \subseteq F$ offen derart, daß $f(U) \subseteq V$ gilt und $g : V \to G$ eine im Punkt $f(u)$ differenzierbare Abbildung.

Lemma 60.5 (Kettenregel) *Die Abbildung $g \circ f : U \to G$ ist im Punkt u differenzierbar und es gilt die Kettenregel*
$$d(g\circ f)(u) = dg(f(u)) \circ df(u) \ .$$

Proof. Wir schreiben
$$f(x) = f(u) + df(u)(x-u) + r(x) \ , \quad g(w) = g(f(u)) - dg(f(u))(w - f(u)) + s(w) \ .$$
Dann gilt
$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(u)) - dg(f(u))(f(x) - f(u)) + s(f(x)) \\ &= g(f(u)) - dg(f(u))(f(u) + df(u)(x-u) + r(x) - f(u)) + s(f(x)) \\ &= g(f(u)) + dg(f(u)) \circ df(u)(x-u) + [dg(f(u))(r(x)) + s(f(x))] \ . \end{aligned}$$
Nun gilt
$$\frac{\|dg(f(u))r(x) + s(f(x))\|_G}{\|x-u\|_E} \leq \|dg(f(u))\|_{L(F,G)} \frac{\|r(x)\|_F}{\|x-u\|_E} + \frac{\|s(f(x))\|_G}{\|x-u\|_E}$$
Nun gilt
$$\mathtt{lim}_{x\to u} \|dg(f(u)\|_{L(F,G)} \frac{\|r(x)\|_F}{\|x-u\|_E} = 0 \ .$$

Wir schreiben

$$\frac{\|s(f(x))\|_G}{\|x-u\|_E} = \begin{cases} \frac{\|s(f(x))\|_G}{\|f(x)-f(u)\|_F} \frac{\|f(x)-f(u)\|_F}{\|x-u\|_E} & f(x) \neq f(u) \\ 0 & f(x) = f(u) \end{cases}$$

Für $x \to u$ bleibt $\frac{\|f(x)-f(u)\|_F}{\|x-u\|_E}$ beschränkt, es gilt $f(v) \to f(u)$ und damit

$$\frac{\|s(f(x))\|_G}{\|x-u\|_E} \to 0 \ .$$

Diese Abschätzungen zeigen, daß $g \circ f$ im Punkt u differenzierbar ist und die Ableitung $dg(f(u)) \circ df(u)$ hat. □

Sei $v \in E$. Die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto u + tv \in E$ ist stetig. Es gibt also eine Umgebung X um $0 \in \mathbb{R}$ derart, daß $u + tv \in U$ für $t \in X$.

Definition 60.6 *Die Funktion f ist im Punkt u in die Richtung v differenzierbar, wenn die Abbildung $X \ni t \mapsto f(u+tv) \in F$ im Punkt 0 differenzierbar ist. Die Ableitung*

$$d_v f(u) := \frac{d}{dt}_{|t=0} f(u+tv)$$

heißt Richtungsableitung im Punkt u in Richtung v.

Lemma 60.7 *Wenn f im Punkt u differenzierbar ist, dann ist f im Punkt u in die Richtung v differenzierbar und es gilt*

$$d_v f(u) = df(u)(v) \ .$$

Proof. Wir wenden die Kettenregel auf die Komposition

$$X \xrightarrow{t \mapsto u+tv} U \xrightarrow{f} F$$

an. □

Wir nehmen nun an, daß $E = \mathbb{R}^n$ ist. Mit $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ bezeichnen wir die Standardbasis.

Definition 60.8 *Wir definieren die $i$te partielle Ableitung von f im Punkt u durch $\partial_i f(u) := d_{e_i} f(u)$.*

Wir nehmen nun an, daß weiter $F = \mathbb{R}^m$ und

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^m \end{pmatrix}$$

die Koordinatendarstellung von f ist. Wir nehmen an, daß f im Punkt u alle partiellen Ableitungen besitzt.

Definition 60.9 (Jacobimatrix) *Wir definieren die Jacobimatrix von f im Punkt u durch*

$$J(f)(u) := \begin{pmatrix} \partial_1 f^1(u) & \dots & \partial_n f^1(u) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^m(u) & \dots & \partial_n f^m(u) \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Jacobimatrix kann die Ableitung darstellen:

Lemma 60.10 *Wenn f im Punkt u differenzierbar ist, dann gilt*

$$df(u)(\xi) = J(f)(u) \cdot \xi \ , \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

Proof. Sei $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$ die Basisdarstellung von ξ. Dann gilt

$$\begin{aligned} df(u)(\xi) &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n df(u)(e_i)^k \xi^i e_k \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \partial_i f^k(u) \xi^i e_k \\ &= J(f)(u) \cdot \xi \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe der Jacobimatrix können wir also Ableitungen explizit angeben.

1. Die Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ werden durch die Abbildung

$$P : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ , \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} \tag{18}$$

gegeben. Die Jacobimatrix dieser Abbildung erfüllt

$$J(P)(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix} \ .$$

Insbesondere gilt $\det J(P)(r, \phi) = r$.

2. Die Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ werden durch die Abbildung

$$P : (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ , \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Jacobimatrix dieser Abbildung erfüllt

$$J(P)(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -r\sin(\phi)\cos(\theta) & -r\cos(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & r\cos(\phi)\cos(\theta) & -r\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \ .$$

Man kann nachrechnen, daß $\det J(P)(r, \phi, \theta) = r^2 \cos(\theta)$.

3. Wir betrachten ein ideales Gas und die Größen Volumen V, Druck p und Temperatur T. Das Gasgesetz besagt, daß
$$p = c\frac{T}{V}$$
für eine gewisse Konstante $c \in (0, \infty)$ gilt. Wir können also den Druck als Funktion der Temperatur und des Volumes ausdrücken. Insbesondere beschreiben die partielle Ableitungen
$$\partial_T p = \frac{c}{V} \ , \quad \partial_V p = -\frac{cT}{V^2}$$
die lineare Antwort des Druckes auf kleine Änderungen von Temperatur bzw. des Volumens wenn die jeweils andere Größe konstant gehalten wird.

Wir haben folgende Implikationen gesehen

$$\begin{array}{c} f \text{ ist in } u \\ \text{differenzierbar} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} f \text{ besitzt in } u \text{ alle} \\ \text{Richtungsableitungen} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} f \text{ besitzt in } u \text{ alle} \\ \text{partiellen Ableitungen} \end{array}$$

In den folgenden Beispielen zeigen wir, daß die Umkehrungen jeweils nicht gelten.

1. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x|y|}{x^2+y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$$
besitzt beide partielle Ableitungen. In der Tat gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ daß $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$. Für $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt
$$f(t(a, b)) = \frac{t|t|ab}{t^2(a^2 + b^2)} = \mathtt{sign}(t)\frac{ab}{(a^2 + b^2)} \ .$$
Folglich besitzt f außer den Richtungsableitungen in die Koordinatenrichtungen keine weiteren.

2. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$$
besitzt alle Richtungsableitungen in 0, ist aber nicht differenzierbar. In der Tat gilt $f(t(a, b)) = t\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}$ und damit $d_{(a,b)}f(0) = \frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}$. Die Abbildung f ist in $(0, 0)$ nicht differenzierbar, da die Abbildung $(a, b) \mapsto d_{(a,b)}f(0)$ nicht linear ist.

Sei nun f auf ganz U differenzierbar. Wir können die Ableitung von f als eine Abbildung $df : U \to L(E, F)$ verstehen. Wir nehmen an, daß $E = \mathbb{R}^n$ und F endlich-dimensional ist.

Lemma 60.11 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die Abbildung f ist in allen Punkten $u \in U$ differenzierbar und die Ableitung $df : U \to L(E,F)$ ist stetig.*
2. *Für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ und $u \in U$ existiert die partielle Ableitung $\partial_i f(u)$ und die Abbildung $U \ni u \mapsto \partial_i f(u) \in F$ ist stetig.*

Proof. Wir zeigen zunächst, daß aus 1. die Aussage 2. folgt. Sei $i \in \{1,\ldots,n\}$ und $u \in U$. Dann gilt

$$\partial_i f(u) = df(u)(e_i) \ .$$

Die Abbildung $u \mapsto \partial_i f(u)$ ist stetig, da sie als Komposition stetiger Abbildung (die zweite Abbildung ist linear)

$$U \stackrel{df}{\to} L(E,F) \stackrel{\mathtt{ev}_{e_i}}{\to} F$$

geschrieben werden kann.

Wir zeigen nun, daß aus 2. die Aussage 1. folgt. Es reicht, die Implikation für den Fall zu zeigen, daß $F = \mathbb{R}$ ist. Den allgemeinen Fall erhält man durch Betrachtung der Komponenten von f bezüglich einer Basis von F. Der Grund für die Einschränkung auf $F = \mathbb{R}$ ist, daß wir im Beweis den Mittelwertsatz anwenden wollen.

Sei nun f stetig partiell differenzierbar. Wir nehmen an, daß f alle partiellen Ableitungen besitzt und daß diese stetig sind. Sei $u \in U$. Da U offen ist finden wir ein $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß $B_{\|\ldots\|_\infty}(u,\epsilon) \subseteq U$ gilt. Im Folgenden ist $v \in B_{\|\ldots\|_\infty}(u,\epsilon)$.
Nach dem Mittelwertsatz existieren $y_i \in [u_i, v_i]$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ derart, daß

$$\begin{aligned}
f(v) &= f(v_1,\ldots,v_{n-1},u_n) + (v_n - u_n)(\partial_n f)(v_1,\ldots,v_{n-1},y_n) \\
&= f(v_1,\ldots,v_{n-2},u_{n-1},u_n) + (v_{n-1}-u_{n-1})\partial_{n-1} f(v_1,\ldots,v_{n-2},y_{n-1},u_n) \\
&\quad +(v_n - u_n)(\partial_n f)(v_1,\ldots,v_{n-1},y_n) \\
&= f(u) + \sum_{i=1}^n (v_i - u_i)\partial_i f(v_1,\ldots,v_{i-1},y_i,\ldots,y_n) \\
&= f(u) + \sum_{i=1}^n (v_i - u_i)\partial_i f(u_1,\ldots,u_n) + R(v)
\end{aligned}$$

mit

$$R(v) := \sum_{i=1}^n (v_i - u_i)\left(\partial_i f(v_1,\ldots,v_{i-1},y_i,\ldots,y_n) - \partial_i f(u_1,\ldots,u_n)\right) \ .$$

gilt. Es gilt

$$\frac{|R(v)|}{\|u-v\|_\infty} \le n \max_i |\partial_i f(v_1,\ldots,v_{i-1},y_i,\ldots,y_n) - \partial_i f(u_1,\ldots,u_n)| \ .$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind, gilt

$$\mathtt{lim}_{v \to u} \frac{R(v)}{\|v-u\|_\infty} = 0 \ .$$

Damit ist f im Punkt u differenzierbar.

Es bleibt die Stetigkeit der Abbildung $u \mapsto df(u)$ zu zeigen. Wir schreiben diese wieder als Komposition der stetigen Abbildung

$$U \mapsto F^{\times n} , \quad u \mapsto (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$$

und der linearen Abbildung

$$F^{\times n} \to L(E, F) , \quad (w_1, \dots, w_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes e^i .$$

$\square$

60.1 Aufgaben

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Ableitungen.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := x \exp(z \sin(xyz))$
2. $GL(E) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathtt{End}(R)$.
3. $\mathtt{End}(V) \ni A \mapsto \det(A) \in \mathbb{R}$

61 Höhere Ableitungen

Wir betrachten normierte reelle Vektorräume E, F, eine offene Teilmenge $U \subseteq E$ und eine Abbildung $f : U \to F$. Sei nun f auf ganz U differenzierbar. Wir können die Ableitung von f als eine Abbildung $df : U \to L(E, F)$ verstehen. Nun ist $L(E, F)$ wieder ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Folglich können wir die zweite Ableitung

$$d(df)(u) \in L(E, L(E, F))$$

betrachten. Dies kann man rekursiv fortsetzen.

Definition 61.1 *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $k > 0$. Die Abbildung $f : U \to F$ ist k-mal differenzierbar, wenn sie $k-1$-mal differenzierbar ist und die $k-1$-te-Ableitung*

$$d^{(k-1)} f : U \to L(E, \dots, L(E, F) \dots)$$

($k-1$ Kopien von E) für alle $u \in U$ differenzierbar ist. Die k-te Ableitung ist dann die Abbildung f im Punkt u durch

$$d^{(k)} f(u) := d(d^{(k-1)} f)(u) : U \to L(E, \dots, L(E, F) \dots)$$

(k Kopien von E) definiert.

Sei E endlich-dimensional. Mit Hilfe des Tensorproduktes von Vektorräumen können wir die beiden Kopien von E in $L(E, L(E, F))$ in symmetrischer Weise betrachten. In der Tat gibt es eine kanonische Identifikation

$$L(E, L(E, F)) \cong L(E \otimes E, F) \ .$$

Es ist diese Stelle, an welcher wir die Endlichdimensionalität von E benutzen. Die linke Seite ist für normierte Vektorräume definiert. Man kann hier verallgemeinern, wenn man diese Gleichung als Definition von $E \otimes E$ ansieht. Dieser Punkt wird in der Theorie der topologischen Vektorräume weiter verfolgt [Gro73].

Für $\phi \in L(E, L(E, F))$ und $x, y \in E$ schreiben wir für die Auswertung von $\phi(x)$ auf y auch

$$\phi(x, y) := \phi(x \otimes y) = \phi(x)(y) \ .$$

Wir setzen

$$T^k(E) := \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{k\,\text{Faktoren}} \ .$$

Verabredungsgemäß sei $T^0(E) := \mathbb{R}$. Es gilt rekursiv für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ daß

$$L(E, L(T^{k-1}(E), F)) \cong L(T^k(E), F) \ .$$

Als Beispiel wiederholen wir folgende Tatsache aus der linearen Algbera. Entsprechend der Definition des Tensorproduktes ist eine Bilinearform $b : E \times E \to \mathbb{R}$ dasselbe wie ein Element von $L(E \otimes E, \mathbb{R})$. Wir können eine Bilinearform als Abbildung

$$E \to L(E, \mathbb{R}) \ , \quad x \mapsto (y \mapsto b(x, y)) \in \mathbb{R}$$

verstehen.

Wenn E endlich-dimensional ist, dann werden wir normalerweise $d^{(k)} f(u) \in L(T^k(E), F)$ betrachten.

1. Sei $P : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatenabbildung. Dann gilt

$$d^{(2)}(P)(\partial_r, \partial_\phi) = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \ .$$

Dazu werten wir $\partial_r J(P)(r, \phi)$ auf $(0, 1)$ aus. Wir berechnen weiter, daß

$$d^{(2)}(P)(\partial_\phi, \partial_r) = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \ .$$

2. Im Beispiel der Zustandsgleichung des idealen Gases berechnen wir

$$d^{(2)}p(V,T)(\partial_V,\partial_T) = d^{(2)}p(V,T)(\partial_T,\partial_V) = -\frac{c}{V^2} \ .$$

Die in diesen beiden Beispielen beobachtete Symmetrie ist kein Zufall. Sei $x \in E$ fest. Dann können wir die Richtungsableitung als Funktion $U \ni u \mapsto d_x f(u) \in F$ verstehen.

Lemma 61.2 *Seien $x, y \in E$ und existieren die Ableitungen $d_x f$, $d_y f$, $d_x(d_y f)$ als stetige Abbildungen $U \to F$. Dann existiert auch $d_y(d_x f)$ und es gilt $d_x(d_y f) = d_y(d_x f)$.*

Proof. Sei $u \in U$. Die Abbildung

$$(s,t) \mapsto F(s,t) := f(u + tx + sy)$$

ist auf einer Umgebung von $(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ definiert. Die partiellen Ableitungen $\partial_1 F$, $\partial_2 F$, $\partial_2\partial_1 F$ existieren und sind stetig. Wir müssen zeigen, daß $\partial_1\partial_2 F(0,0)$ existiert und mit $\partial_2\partial_1 F(0,0)$ übereinstimmt.
Nach dem Mittelwertwertsatz existieren $\xi \in [0,s]$ und $\eta \in [0,t]$ derart, daß

$$\begin{aligned} \Delta(s,t) &:= F(s,t) - F(0,t) - F(s,0) + F(0,0) \\ &= (F(s,t) - F(s,0)) - (F(0,t) - F(0,0)) \\ &= s(\partial_1 F(\xi,t) - \partial_1 F(\xi,0)) \\ &= st\partial_2\partial_1 F(\xi,\eta) \end{aligned} \qquad (19)$$

gilt. Aus dem gleichen Grund gibt es ein $\gamma \in [0,t]$, so daß

$$\begin{aligned} \Delta(s,t) &:= F(s,t) - F(0,t) - F(s,0) + F(0,0) \\ &= (F(s,t) - F(0,t)) - (F(s,0) - F(0,0)) \\ &= t(\partial_2 F(s,\gamma) - \partial_2 F(0,\gamma)) \end{aligned}$$

gilt. Wir wollen nun zeigen, daß

$$\mathtt{lim}_{s\to 0}\frac{\partial_2 F(s,0) - \partial_2 F(0,0)}{s} = \partial_2\partial_1 F(0,0)$$

gilt. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ gegeben. Da $\partial_2\partial_1 F$ stetig ist, finden wir wegen (19) ein $\delta \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß für alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $|s| \le \delta$ und $|t| \le \delta$ gilt

$$|\frac{\Delta(s,t)}{st} - \partial_2\partial_1 F(0,0)| \le \epsilon \ .$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} & |\frac{\Delta(s,t)}{st} - \partial_2\partial_1 F(0,0)| &\le \epsilon \\ \Rightarrow \quad & |\frac{\partial_2 F(s,\gamma) - \partial_2 F(0,\gamma))}{s} - \partial_2\partial_1 F(0,0)| &\le \epsilon \\ \Rightarrow \quad & \mathtt{lim}_{t\to 0}|\frac{\partial_2 F(s,\gamma) - \partial_2 F(0,\gamma))}{s} - \partial_2\partial_1 F(0,0)| &\le \epsilon \\ \Rightarrow \quad & |\frac{\partial_2 F(s,0) - \partial_2 F(0,0))}{s} - \partial_2\partial_1 F(0,0)| &\le \epsilon \end{aligned}$$

Da $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ beliebig gewählt werden kann, gilt

$$\mathtt{lim}_{s\to 0}|\frac{\partial_2 F(s,0) - \partial_2 F(0,0))}{s} - \partial_2\partial_1 F(0,0)| = 0 \ .$$

Folglich existiert $\partial_1\partial_2 F(0,0)$ und es gilt $\partial_1\partial_2 F(0,0) = \partial_2\partial_1 F(0,0)$. □

Corollary 61.3 *Ist f zweimal stetig differenzierbar, dann gilt folgende Symmetrie:*

$$df(u)(x)(y) = df(u)(y)(x) \ .$$

Eine Abbildung $\phi : T^k(V) \to W$ ist symmetrisch, wenn für jede Permutation $\sigma \in \Sigma_k$ gilt

$$\phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \phi(x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(k)}) \ .$$

Wenn wir $S^k(E)$ als den Quotienten von $T^k(E)$ nach dem durch die Vektoren der Form $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(k)}$ erzeugten Vektorraum definieren, dann kann man den Unterraum

$$L(S^k(E), F) \subseteq L(T^k(E), F)$$

mit dem Raum der symmetrischen multilinearen Abbildungen $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{k\times} \to F$ identifizieren.

Eine symmetrische Bilinearform auf E ist damit dasselbe wie ein Element von $L(S^2(E), \mathbb{R})$.

Sei E endlich-dimensional.

Corollary 61.4 *Wenn $f : U \to W$ k-mal stetig differenzierbar ist, dann gilt für alle $u \in U$ daß*

$$d^{(k)}f(u) \in L(S^k(E), F) \ .$$

1. Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Abbildung, dann ist

   $$d^{(2)}f(u) \in L(S^2(E), \mathbb{R})$$

   eine symmetrische Bilinearform, welche oft auch als die Hessische $\mathrm{Hess}(f)(u)$ von f bezeichnet wird.

2. Eine symmetrische Bilinearform B auf $\mathbb{R}^n$ kann durch eine symmetrische $n \times n$-Matrix B_{ij} beschrieben werden so daß

   $$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} x^i y^i$$

   gilt. Die symmetrische Matrix, welche $\mathrm{Hess}(f)$ beschreibt, ist dann durch

   $$B_{ij} := \partial_i \partial_j f(u)$$

   gegeben.

3. Die Hessische der Abbildung $(V,T) \to p(V,T)$ des idealen Gasgesetzes wird in der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{2cT}{V^3} & -\frac{c}{V} \\ -\frac{c}{V} & 0 \end{pmatrix}$$

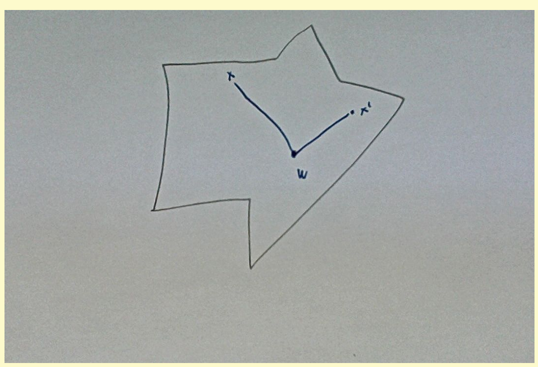
gegeben.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir verwenden häufig folgende Notation:

1. Elemente $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ heißen Multiindizes (der Länge n). Wir schreiben $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
2. $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
3. $\alpha! := \prod_{i=1}^n \alpha_i!$
4. $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$
5. $\partial_\alpha f := f^{(\alpha)} := \partial_{\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_n} f$.

Sei $U \subseteq E$ eine Teilmenge eines Vektorraumes und $u \in U$.

Definition 61.5 *Die Menge U heißt sternförmig bezüglich u, wenn für jedes $x \in U$ und $\lambda \in [0,1]$ auch $u + \lambda(x-u) \in U$ gilt.*



Ist $\|\ldots\|$ eine Norm auf E und $r \in \mathbb{R}^>$, dann ist der Ball $B_{\|\ldots\|}(u,r)$ sternförmig bezüglich u.

Proposition 61.6 (Taylorformel) *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sternförmig bezüglich 0 und $f : U \to \mathbb{R}$ eine $k+1$-mal differenzierbare Abbildung. Dann existiert eine Abbildung $\eta : U \to [0,1]$ derart, daß*

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \le k} \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = k+1} \frac{f^{(\alpha)}(\eta(x)x)}{\alpha!} x^\alpha$$

gilt.

Proof. Sei $u \in U$. Dann existiert $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß $\gamma : (-\epsilon, 1+\epsilon) \to E$, $\gamma(\lambda) = \lambda x$ Werte in U hat. Die Funktion $F := \gamma^* f$ ist auf dem Intervall $(-\epsilon, 1+\epsilon)$ $k+1$-mal differenzierbar. Die Taylorformel für F gibt

$$F(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{F^{(j)}(0)}{j!} + \frac{F^{(k+1)}(\eta(x))}{(k+1)!}$$

für ein geeignetes $\eta(x) \in [0,1]$. Wir berechnen nun induktiv

$$\frac{F^{(j)}(\lambda)}{j!} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=j} \frac{f^{(\alpha)}(\lambda x)}{\alpha!} x^\alpha \ .$$

In der Tat gilt

$$F^{(0)}(\lambda) = f^{(0)}(\lambda x) \ .$$

Wenn wir die Formel schon für $j-1$ gezeigt haben, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{F^{(j)}(\lambda)}{j!} &= \frac{1}{j}\partial_\lambda \frac{F^{(j-1)}(\lambda)}{(j-1)!} \\
&= \frac{1}{j}\partial_\lambda \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=j-1} \frac{f^{(\alpha)}(\lambda x)}{\alpha!} x^\alpha \\
&= \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=j-1} \frac{\partial_i f^{(\alpha)}(\lambda x)}{\alpha!} x^\alpha x_i \\
&= \frac{1}{j} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=j} f^{(\alpha)}(\lambda x) x^\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_1! \dots (\alpha_i - 1)! \dots \alpha_n!} \\
&= \frac{1}{j} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=j} \frac{f^{(\alpha)}(\lambda x)}{\alpha!} x^\alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=j} \frac{f^{(\alpha)}(\lambda x)}{\alpha!} x^\alpha \ .
\end{aligned}$$

□

Wir halten den folgenden Spezialfall fest. Wenn $f : U \to \mathbb{R}$ eine 3-mal stetig differenzierbare Funktion ist, dann haben wir eine Entwicklung

$$f(x) = f(u) + df(u)(x-u) + \frac{1}{2}\mathrm{Hess}(f)(u)(x-u, x-u) + r(x)$$

wobei

$$\mathtt{lim}_{x \to u} \frac{r(x)}{\|x-u\|^2} = 0$$

gilt. Beachte, daß die Potenz hier im Unterschied zur Definition der Ableitung nicht 1 sondern 2 ist. Die Funktion

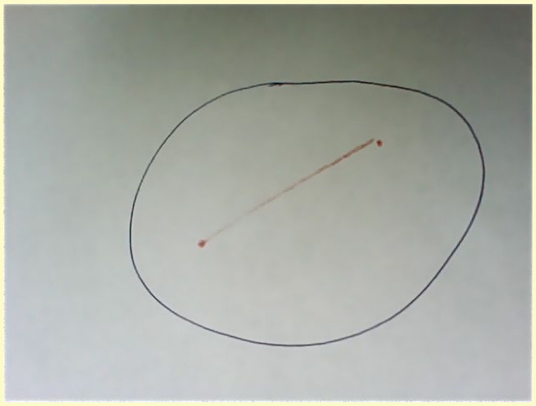
$$x \mapsto f(u) + df(u)(x-u) + \frac{1}{2}\mathrm{Hess}(f)(u)(x-u, x-u)$$

ist also eine Approximation der Funktion f im Punkt u bis zur Ordnung 2.

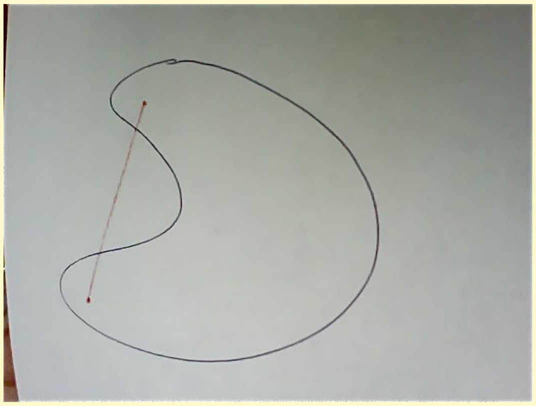
Mit Hilfe der Ableitung kann man die Variation einer Funktion abschätzen. Dazu brauchen wir den Begriff eine konvexen Menge.

Definition 61.7 *Sei E ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq E$ heißt* ***konvex****, wenn für je zwei Punkte $x, y \in U$ auch $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$ für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt.*

konvex



nicht konvex



Hier sind einige Beispiele:

1. E selbst ist konvex.

2. Einpunktige Mengen sind konvex.

3. Konvexität ist äquivalent zu sternförmig bezüglich aller Punkte.

4. Ist $\|.\|$ eine Norm auf E, dann ist der Ball $B(z,r)$ für jedes $z \in E$ und $r > 0$ konvex. Das folgt aus der Dreiecksungleichung. Sei $x, y \in B(z,r)$ und $\lambda \in [0,1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y - z\| &= \|\lambda(x-z) + (1-\lambda)(y-z)\| \\ &\leq \|\lambda(x-z)\| + \|(1-\lambda)(y-z)\| \\ &= \lambda\|x-z\| + (1-\lambda)\|y-z\| \\ &< \lambda r + (1-\lambda)r \\ &= r \end{aligned}$$

5. Sind $U, V \subseteq E$ konvex, so auch $U \cap V$, nicht aber im allgemeinen $U \cup V$.

Lemma 61.8 *Sei $U \subseteq E$ offen und konvex, $f : U \to F$ auf U differenzierbar und*

$$M := \sup_{u \in U} \|df(u)\| < \infty \ .$$

Dann gilt für alle $x, y \in U$ die Ungleichung $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$.

Proof. Wir betrachten $\gamma : [0,1] \to E$, $\gamma(t) = (1-t)x+ty$. Dann ist $\gamma^* f : [0,1] \to F$ definiert, $(\gamma^* f)'(t) = df(\gamma(t))(y - x)$, also $\|(\gamma^* f)'(t)\| \leq M\|x - y\|$. Daraus folgt $\|f(x) - f(y)\| = \|(\gamma^* f)(0) - (\gamma^* f)(1)\| \leq M\|x - y\|$. □

Insbesondere ist eine Funktion mit verschwindender Ableitung auf einer konvexen Menge konstant.

61.1 Aufgaben

1. Gibt es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\partial_x f(x, y) = y$ und $\partial_y f(x, y) = 2x$?

2. Warum kann man den Mittelwertsatz nicht für differenzierbare Abbildungen $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ anwenden?

62 Produkte topologischer Räume

Sei X eine Menge und $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ in topologische Räume. Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X so daß f_i für alle $i \in \mathbb{R}$ stetig ist. Diese Aussage ist dann auch für jede $\mathcal{T}$ umfassende Topologie richtig. Es ist deshalb eine sinnvolle Frage, die kleinste Topologie auf X zu suchen, so daß f_i für alle i stetig ist.

Um diese Topologie zu finden, sehen wir zunächst, daß sie die Mengen $f_i^{-1}(U)$ für alle $i \in I$ und $U \in \mathcal{T}_{Y_i}$ enthalten muß. Wir setzen

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{V \in \mathcal{P}(X) \mid (\exists i \in I \ \exists U \in \mathcal{T}_{Y_i} \mid V = f_i^{-1}(U))\} \ .$$

Die Teilmenge $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist im allgemeinen keine Basis für eine Topologie af X. Wir erhalten eine Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ aus $\tilde{\mathcal{B}}$ durch Hinzunahme aller endlichen Durchschnitte von Elementen. Alle Elemente von $\mathcal{B}$ müssen in der gesuchten Topologie enthalten sein. Die von dieser Basis erzeugte Topologie ist nach Konstruktion die kleinste Topologie auf X für welche die Abbildungen f_i für alle $i \in I$ stetig sind.

Definition 62.1 *Wir nennen die durch die obige Konstruktion entstandene Topologie die von der Familie (f_i) induzierte Topologie auf X.*

Lemma 62.2 *Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *$\mathcal{T}$ ist die von der Familie (f_i) induzierte Topologie auf X.*

2. *Es gilt: Eine Abbildung $f : Z \to X$ von einem topologischen Raum Z ist genau dann stetig wenn wenn Kompositionen $f_i \circ g : Z \to X \to X_i$ für alle $i \in I$ stetig sind.*

Proof. $1 \Rightarrow 2$: Wenn $f : Z \to X$ stetig ist, dann sind die Kompositionen $\mathtt{pr}_i \circ f : Z \to X_i$ stetig. Wenn andererseits diese Kompositionen stetig, dann dann ist $f^{-1}(V)$ für jedes $V \in \tilde{\mathcal{B}}$ offen in Z. Daraus folgt die Stetigkeit von f.

$2 \Rightarrow 1$: Sei $\mathcal{T}'$ die auf X durch die Familie induzierte Topologie. Wir benutzen 2. mit $(Z, \mathcal{T}_Z) = (X, \mathcal{T}')$. Wir sehen, daß $\mathtt{id} : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ stetig ist woraus $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ folgt. Andererseits folgt aus 2. angewendet auf $(Z, \mathcal{T}_Z) = (X, \mathcal{T})$ und $\mathtt{id}_X$, daß die Abbildung $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ für alle $i \in I$ stetig sind. Damit gilt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. □

Sei $(X_i)_{\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Dann können wir das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ bilden. Wir haben die Familie von Projektionen $(\pi_i)_{i \in I}$ auf die Komponenten.

Definition 62.3 *Der Raum $\prod_{i \in I} X_i$ mit der durch die Familie $(\pi_i)_{i \in I}$ induzierten Topologie ist das Produkt der Familie von topologischen Räume $(X_i)_{i \in I}$*

1. Eine Abbildung $Z \to \prod_{i \in I} X_i$ ist also genau dann stetig, wenn die Komponenten $Z \to \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ für alle $i \in I$ stetig sind.

2. Der topologische Raum $\mathbb{R}^n$ ist das Produkt von n Kopien des Raumes $\mathbb{R}$.

3. Der Raum $\mathbb{R}^X$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist genau das Produkt einer durch X indizierten Familie von Kopien von $\mathbb{R}$.

4. Sind X und Y metrische Räume mit Meriken d_X und d_Y. Dann können wir auf $X \times Y$ die Metrik $d((x, y), (x', y')) := d_X(x, x') + d_Y(y, y')$ definieren. Die von dieser Metrik auf $X \times Y$ induzierte Topologie ist die Produkttopologie. Sind X und Y vollständig, dann ist auch $X \times Y$ vollständig.

5. Seien X, Y topologische Räume. Dann ist $\{U \times V \,|\, U \in \mathcal{T}_X \,\text{und}\, V \in \mathcal{T}_Y\} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ eine Basis für die Topologie von $X \times Y$.

Lemma 62.4 *Seien X, Y topologische Räume, Y kompakt und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $X \ni x \mapsto h(x) := \inf_{y \in Y} f(x)$ stetig.*

Proof. Die Abbildung $\inf_Y : C(Y) \to \mathbb{R}$ ist stetig. In der Tat gilt

$$|\inf_Y g' - \inf_Y g| \leq \|g' - g\| \ .$$

Die Funktion f bestimmt eine Abbildung $F : X \to C(Y)$ durch $F(x)(y) := f(x, y)$ und es gilt $h(x) = \inf_Y \circ F$. Es reicht also aus zu zeigen, daß F stetig ist. Wir zeigen die Stetigkeit in $x \in X$.

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ vorgegeben Da f stetig ist, existiert für jedes $y \in Y$ eine Umgebung $U_y \times V_y \subseteq X \times Y$ von (x, y) derart, daß für alle $(x', y') \in U_y \times V_y$ gilt $|f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon$ gilt. Hierbei sind $U_x \subseteq X$ und $V_y \subseteq Y$ offen. Da Y kompakt ist, kann man eine endliche Folge $y_1, \ldots, y_n$ in Y finden, so daß $\bigcup_{i=1}^n V_{y_i} = Y$. Dann ist $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ eine offene Umgebung von x in X. Es gilt für alle $z \in U$, daß $\|F(z) - F(x)\| < \epsilon$. $\square$

Seien X, Y, Z topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \times Y \to Z$ heißt separat stetig, wenn für jedes $y \in Y$ die Abbildung $x \mapsto f(x, y)$ und für jedes $x \in X$ die Abbildung $y \mapsto f(x, y)$ stetig ist. Separate Stetigkeit ist schwächer als Stetigkeit. In der Tat ist für $y \in Y$ die Abbildung $i_y : X \to X \times Y$, $i_y(x) := (x, y)$ stetig. Die Abbildung $x \mapsto f(x, y)$ kann als Komposition $f \circ i_y$ geschrieben werden, welche stetig ist, wenn f stetig ist.

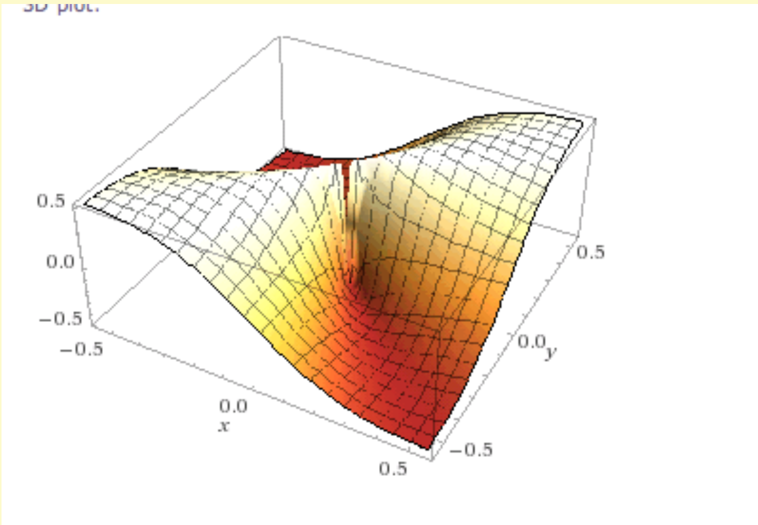
Um zu zeigen, daß separate Stetigigkeit echt schwächer als Stetigkeit ist, betrachten wir die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$$

Es gilt $f(x, 0) \equiv 0$ und $f(0, y) \equiv 0$. Folglich ist f separat stetig. Diese Abbildung ist aber nicht stetig, da

$$f(t, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

gilt.



62.1 Augaben

1. Verifizieren Sie alle in diesem Kapitel gemachten aber nicht bewiesenen Aussagen.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß die Abbildung
$$h : R \to \mathbb{R} \ , \quad h(x) := \sup_{y \in [x-1, x+1]} f(x, y)$$
stetig ist.

3. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß man in Lemma 62.4 die Voraussetzung der Kompaktheit von Y nicht weglassen kann.

4. Zeigen Sie, daß das Produkt einer Familie von Hausdorffräumen ein Hausdorffraum ist.

5. Zeigen Sie, daß das Produkt zweier kompakter Räume wieder kompakt ist (Diese Aussage gilt sogar für beliebige Familien: Satz von Tychonoff. Dazu braucht man dann das Auswahlaxiom).

63 Extremwerte

Wir erinnern an die Definition 37.1 des Begriffes "lokales Extremum". In diesem Kapitel wollen wir mit Hilfe der Differentialrechnung notwendige und hinreichende Kriterien für für lokale Extrema finden.

Sei nun $(E, \|.\|)$ ein normierter Raum und $U \subseteq E$ offen, $u \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$.

Lemma 63.1 *Sei f in u differenzierbar und habe dort ein lokales Extremum. Dann gilt $df(u) = 0$.*

Proof. Sei $x \in E$. Dann wählen wir $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to E$, $\gamma(\lambda) := u + \lambda x$ Werte in U hat. Die Funktion $\gamma^* f$ hat in 0 ein lokales Extremum. Nach Lemma 40.2 ist
$$0 = (\gamma^* f)'(0) = df(u)(x) \ .$$
Da $x \in E$ beliebig war, gilt $df(u) = 0$. □

Sei f differenzierbar.

Definition 63.2 *Der Punkt u heißt kritischer Punkt von f, wenn $df(u) = 0$ gilt.*

Corollary 63.3 *Wenn f in u ein lokales Extremum hat, dann ist u ein kritischer Punkt von f.*

Wir erklären jetzt, wie man mit Hilfe der zweiten Ableitungen entscheiden kann, ob in einem kritischen Punkt ein lokales Maximum oder lokales Minimum vorliegt.
Zur Erinnerung aus der Algebra, eine reelle symmetrische Bilinearform B auf E ist positiv oder negativ definit, wenn $B(x, x) > 0$ oder $B(x, x) < 0$ gilt für alle $x \in E$ mit $x \neq 0$ gilt. Die Bilinearform ist indefinit, wenn es Punkte $x, y \in E$ mit $B(x, x) > 0$ und $B(y, y) < 0$ gibt.

Wir nehmen an, daß E normiert und endlich-dimensional ist.

Lemma 63.4 *Wenn B positiv definit ist, dann existiert eine Konstante $C > 0$ derart, daß*

$$B(x,x) \geq C\|x\|^2$$

für alle $x \in E$ gilt.

Proof. Man kann $C := \inf_{\xi \in S(E)} B(\xi,\xi)$ wählen. Da die Einheitssphäre $S(E)$ von E kompakt (da $\dim(E) < \infty$) und $E \ni x \mapsto B(x,x)$ stetig ist, gilt $C > 0$. □

Proposition 63.5 *Sei f zwei mal stetig differenzierbar, u ein kritischer Punkt und* $\mathrm{Hess}(f)(u)$ *positiv (negativ) definit. Dann hat f im Punkt u ein lokales Minimum (Maximum). Ist* $\mathrm{Hess}(f)(u)$ *indefinit, dann hat f im Punkt u kein Extremum.*

Proof. Die Taylorformel für f im Punkt u kann in der Form

$$f(v) = f(u) + df(u)(v-u) + \frac{1}{2}\mathrm{Hess}(f)(u + \eta(v)(v-u))(f)(v-u, v-u)$$

für geeignetes $\eta(v) \in [0,1]$ geschrieben werden. Wir nehmen an, daß $\mathrm{Hess}(f)(u)$ positiv definit ist. Wir definieren

$$h(x) := \inf_{\xi \in S(E)} \mathrm{Hess}(f)(u)(\xi,\xi) \ .$$

Diese Funktion ist stetig. Um dies einzusehen, benutzen wir Lemma 62.4.

Es gilt $h(u) > 0$. Wir wählen $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ derart, daß $B(u,\epsilon) \subseteq U$ und $h_{|B(u,\epsilon)} > 0$ gilt. Mit der Taylorformel erhalten wir für $v \in B(u,\epsilon)$ wegen $df(u) = 0$

$$f(v) = f(u) + \frac{1}{2}\mathrm{Hess}(f)(u + \eta(v)(v-u))(v-u, v-u) > f(u) \ .$$

Also hat f im Punkt u ein lokales Minimum.

Wenn $\mathrm{Hess}(f)(u)$ indefinit ist, dann kann man mit analogen Argumenten $v_\pm$ beliebig nahe an u finden, so daß

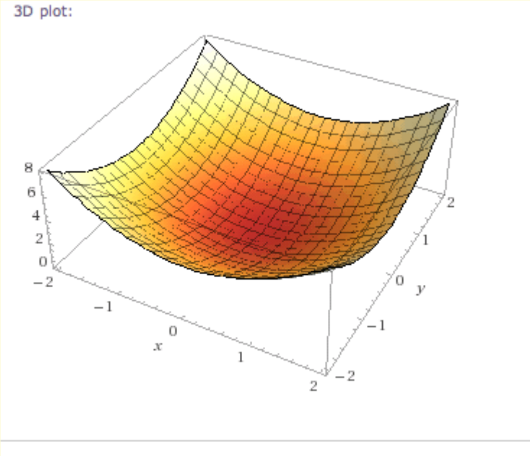
$$\pm\mathrm{Hess}(f)(u + \eta(v_\pm)(v_\pm - u))(f)(v_\pm - u, v_\pm - u) > 0$$

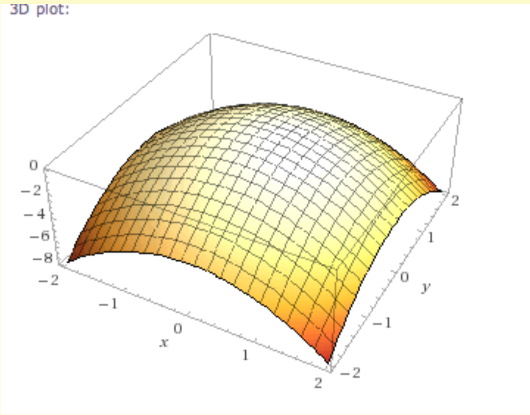
ist. Also hat dann f in u kein lokales Extremum. □

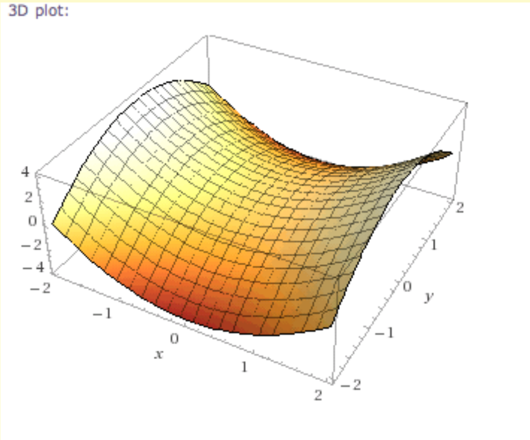
In den folgenden Bildern werden die Abbildungen

$$x^2 + y^2, \quad -x^2 - y^2 \ , \quad x^2 - y^2$$

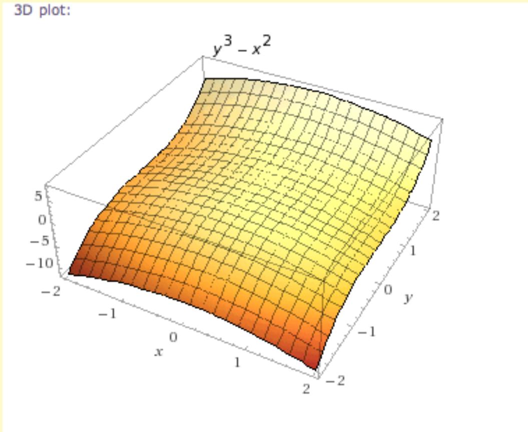
skizziert. Dies sind die drei Möglichkeiten des Verhaltens einer reellen Funktion in zwei reellen Veränderlichen in einem kritischen Punkt, wenn die Hessische nicht entartet ist.







Wenn die Hessische entartet ist dann kann das Verhalten komplizierter sein. Hier eine Skizze von $-x^2 + y^3$.



Hier ist ein explizites Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y \ .$$

Dann gilt

$$\partial_x f(x, y) = 3x^2 - 12 \ , \quad \partial_y f(x, y) = 3y^2 - 3 \ .$$

Die folgenden Punkte sind kritisch:

$$(2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1) \ .$$

Die Hessische Matrix ist durch

$$\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Diskussion der kritischen Punkte gibt:

$$\begin{array}{lll} (2, 1) & \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} & \text{Minumum} \\ (-2, 1) & \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} & \text{kein Extremum} \\ (2, -1) & \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} & \text{kein Extremum} \\ (-2, -1) & \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} & \text{Maximum} \ . \end{array}$$

63.1 Aufgaben

Bestimmen Sie lokale Extremwerte für:

1. $\exp(xyz)$
2. $\exp(xy)$
3. $\log(3x^2 + 3y^2 + 4)$
4. $x + y$ auf $\{0 \leq x, y \leq 1\}$.

64 Satz über implizite Funktionen

Wir betrachten zwei Banachräume E und F, eine offene Teilmenge $U \subseteq E$, einen Punkt $u \in U$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to F$.

Proposition 64.1 (Satz über die Umkehrfunktion) *Wenn die lineare Abbildung*

$$df(u) : E \to F$$

invertierbar und $df(u)^{-1}$ stetig[4] ist, dann existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ von u derart, daß $W := f(V)$ offen, ${}_{W|}f_{|V} : V \to W$ bijektiv und die inverse Abbildung $({}_{W|}f_{|V})^{-1} : W \to V$ stetig differenzierbar ist.

Proof. Der Beweis besteht aus folgenden Schritten bzw. Nachweisen.

1. Konstruktion von V.
2. $f_{|V}$ ist injektiv.
3. $W := f(V)$ ist offen, $g := (f_{|V})^{-1}$.
4. g ist stetig differenzierbar.

Wir kommen nun zur Durchführung.

1. Wir setzen $A := df(u)$ und $\lambda := \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$.

   Wir nutzen zunächst aus, daß $U \ni u \mapsto df(u) \in L(E, F)$ stetig ist. Wir wählen $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ so klein, daß für $x \in U$ aus $\|x - u\| \leq \epsilon$ folgt $\|df(u) - df(x)\| \leq \lambda$. Wir können zusätzlich weiter annehmen, daß $B(u, \epsilon) \subseteq U$ gilt.

   $$V := B(u, \epsilon) \ .$$

2. Für $y \in F$ definieren wir die Abbildung $\phi_y : V \to E$ durch

   $$\phi_y(x) := x + A^{-1}(y - f(x)) \ .$$

   Es gilt $d\phi_y(x) = 1 - A^{-1}df(x)$ und deshalb für $x \in V$

   $$\|d\phi_y(x)\| = \|1 - A^{-1}df(x)\| = \|A^{-1}(A - df(x))\| \leq \|A^{-1}\|\|A - df(x)\| \leq \frac{1}{2} \ .$$

   Der Ball V ist konvex. Nach dem Mittelwertsatz ist für $x, x' \in V$

   $$\|\phi_y(x) - \phi_y(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\| \ .$$

   Folglich ist ϕ_y eine Kontraktion mit Konstante $\frac{1}{2}$. Diese Kontraktion hat höchstens einen Fixpunkt in V.

   Wir zeigen nun, daß f injektiv ist. Seien $x, x' \in V$ mit $f(x) = f(x') = y$. Damit ist $\phi_y(x) = x$ und $\phi_y(x') = x'$. Folglich ist $x = x'$.

[4] Nach Satz 55.16 ist das automatisch.

3. Sei $W := f(V)$ und $y \in W$, $y = f(x)$ für ein $x \in V$. Da V offen ist, können wir ein $\delta \in \mathbb{R}^{>}$ derart wählen, daß $B(x, \delta) \subseteq V$ gilt. Wir zeigen, daß $B(y, \frac{\lambda\delta}{2}) \subseteq W$ gilt. Sei $z \in B(y, \frac{\lambda\delta}{2})$. Wir müssen ein $w \in V$ mit $z = f(w)$ finden. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\phi_z(x) - x\| &= \|A^{-1}(z-y)\| \\ &\leq \|A^{-1}\|\|z-y\| \\ &= \frac{1}{2\lambda}\|z-y\| \\ &< \frac{\delta}{4} \ . \end{aligned}$$

und für $v \in B(x, \delta)$, daß

$$\begin{aligned} \|\phi_z(v) - x\| &\leq \|\phi_z(v) - \phi_z(x)\| + \|\phi_z(x) - x\| \\ &< \frac{1}{2}\|v - x\| + \frac{\delta}{4} \\ &\leq \frac{3\delta}{4} \ , \end{aligned}$$

also $\phi_z(B(x,\delta)) \subseteq B(x, \frac{3\delta}{4})$ und $\overline{\phi_z(B(x,\delta))} \subseteq B(x, \delta)$. Die Kontraktion ϕ_z besitzt damit einen Fixpunkt $w \in B(x, \delta) \subseteq V$, d.h. es gilt $w + A^{-1}(z - f(w)) = w$, also $z = f(w)$.

Wir definieren jetzt

$$g := ({}_{W|}f_{|V})^{-1} : W \to V \ .$$

4. Sei $x \in V$ und $f(x) = y \in W$. Dann ist $\|df(x) - A\| \leq \lambda < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Folglich existiert $df(x)^{-1}$ und $V \ni x \mapsto df(x)^{-1} \in B(F, E)$ ist stetig. Wir schreiben

$$g(z) = g(y) + df(x)^{-1}(z - y) + s(z) \ .$$

Wir müssen zeigen, daß

$$\mathtt{lim}_{z \to y} \frac{s(z)}{\|z - y\|} = 0$$

gilt. Wir setzen $v := g(z)$ und betrachten

$$\phi_y(v) - \phi_y(x) = v + A^{-1}(y - f(v)) - x - A^{-1}(y - f(x)) = v - x + A^{-1}(y - z) \ ,$$

also $A^{-1}(y - z) = x - v + \phi_y(v) - \phi_y(x)$. Daraus folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|\|y - z\| &\geq \|x - v\| - \|\phi_y(v) - \phi_y(x)\| \\ &\geq \|x - v\| - \frac{1}{2}\|x - v\| \\ &= \frac{1}{2}\|x - v\| \ . \end{aligned}$$

Also gilt

$$\|y-z\| \geq \frac{1}{2\|A^{-1}\|}\|x-v\| = \lambda\|x-v\| \ . \tag{20}$$

Daraus schließen wir unter Verwendung von

$$z-y = f(v) - f(x) = df(x)(v-x) + r(v) \ ,$$

daß

$$\begin{aligned}
\frac{s(z)}{\|z-y\|} &\leq \frac{\|v-x-df(x)^{-1}(z-y)\|}{\lambda\|x-v\|} \\
&= \frac{\|v-x-df(x)^{-1}(df(x)(v-x)+r(v))\|}{\lambda\|x-v\|} \\
&= \frac{\|df(x)^{-1}(s(v))\|}{\lambda\|x-v\|} \\
&\leq \frac{\|df(x)^{-1}\|}{\lambda}\frac{\|r(v)\|}{\|x-v\|}
\end{aligned}$$

Wegen (20) gilt für $z \to y$ auch $v \to x$. Da nach Voraussetzung $\mathtt{lim}_{v\to x}\frac{\|r(v)\|}{\|x-v\|} = 0$ gilt, folgt $\mathtt{lim}_{z\to y}\frac{s(z)}{\|z-y\|} = 0$. Damit ist g im Punkt y differenzierbar und $dg(y) = df(x)^{-1}$. Insbesondere ist g in diesem Punkt stetig (das folgt auch unmittelbar aus (20)). Die Abbildung $y \to dg(y) = df(g(x))^{-1}$ ist als Komposition stetiger Abbildungen stetig.

□

Definition 64.2 *Wenn $f : U \to F$ die Voraussetzungen des Satzes über die Umkehrfunktion in jedem Punkt von U erfüllt, dann nennen wir f einen lokalen Diffeomorphismus.*

1. Wenn $E = \mathbb{R} = F$ gilt, dann folgt aus $df(u) \neq 0$, daß f auf einer Umgebung von U streng monoton ist. In diesem Spezialfall reduziert sich der Satz über die Umkehrfunktion auf Lemma 39.8.

2. Ist $f : U \to F$ ein lokaler Diffeomorphsmus, dann ist für jedes $x \in F$ das Urbild $f^{-1}(x)$ eine diskrete Teilmenge von U. In der Tat, wenn $y \in f^{-1}(x)$ ist, dann gibt es eine Umgebung $V \subseteq U$ mit $V \cap f^{-1}(x) = \{y\}$.

3. Ist $f : U \to F$ ein lokaler Diffeomorphismus, dann ist $f(U)$ offen. Eine Abbildung $g : f(U) \to \mathbb{R}$ ist stetig (differenzierbar) genau dann, wenn f^*g differenzierbar ist.

4. Die Polarkoordinaten $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (siehe (18)) schränken sich zu einem lokalen Diffeomorphismus $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit dem Bild $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein. Man kann also die Differenzierbarkeit und die Stetigkeit einer Funktion auf $\mathbb{R}^2$ außerhalb des Ursprunges in Polarkoordinaten prüfen.

(a) Die Funktion $(x,y) \mapsto \arctan(x/y)$ für $y \neq 0$ hat in Polarkoordinaten die Form $(r,\phi) \mapsto \frac{\pi}{2} - \phi$. Folglich hat sie ein differenzierbare Ausdehnung auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.

(b) Die Funktion $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}^{-1}(x,y)$ hat in Polarkoordinaten die Form $(r,\phi) \mapsto (1,\phi)$. Auch diese ist differenzierbar.

Wir kommen nun zum Satz über implizite Funktionen. Wir beginnen zunächst mit einem Beispiel.

Wir betrachten das ideal Gas im Zustand mit den Parametern p_0, V_0, T_0 so daß $p_0 = \frac{cT_0}{V_0}$ gilt. Wir wollen nun die Temperatur ändern und fragen, wie man das Volumen einstellen muß, damit der Druck konstant bleibt. Wir suchen also eine Funktion $V(T)$, welche der Gleichung

$$p(V(T),T) - p_0 = \frac{cT}{V(T)} - p_0 = 0$$

genügt. In diesem Fall finden wir $V(T)$ durch Auflösen:

$$V(T) = \frac{cT}{p_0}\ .$$

Im Allgemeinen wollen wir eine Gleichung der Form $F(x) = 0$ lösen, die von einem Parameter λ abhängt. Wir schreiben die Abhängigkeit als weitere Variable und erhalten $F(x,\lambda) = 0$. In guten Fällen wird die Lösung x eine Funktion des Parameters sein, daß heißt, wir suchen eine Funktion $x(\lambda)$ derart, daß $F(x(\lambda),\lambda) = 0$ für alle λ gilt. Der Satz über implizite Funktionen ist ein technisches Hilfmittel der Differentialrechnung in dieser Frage.

Seien E, F, G Banachräume. Die Summe $E \oplus F$ hat eine induzierte Banachraumstruktur. Als Norm kann man zum Beispiel eine der beiden äquivalenten Normen

$$\|(e,f)\| := \|e\| + \|f\|\ , \quad \text{oder} \quad \|(e,f)\| := \max\{\|e\|, \|f\|\}$$

nehmen. Der unterliegende topologische Raum des Banachraumes $E \oplus F$ ist das Produkt der topologischen Räume $E \times F$.

Sei $U \subseteq E \times F$ offen, $F : U \to G$ stetig differenzierbar, $(e,f) \in U$ und $F(e,f) = 0$. Für $f \in F$ sei $i_f : E \to E \times F$ durch $i_f(e) := (e,f)$ gegeben. Diese Abbildung ist stetig. Sei $V := i_f^{-1}(U) \subseteq E$. Diese Menge ist offen. Wir setzen

$$d_1F(e,f) := d(i_f^*F)(e) \in L(E,G)\ .$$

Analog defineren wir für $e \in E$ die Abbildung $j_e : F \to E \times F$, $j_e(f) := (e,f)$ und setzen

$$d_2p(e,f) := d(j_e^*p)(f) \in L(F,G)\ .$$

Proposition 64.3 (Satz über implizite Funktionen) *Wenn $d_1F(e,f)$ invertierbar ist, dann gibt es offene Umgebungen $e \in \tilde{V} \subseteq V$ und $f \in W \subseteq F$ derart, daß für jedes $y \in W$ genau ein $x \in \tilde{V}$ existiert mit $F(x,y) = 0$. Die so durch $F(g(y),y) \equiv 0$ eindeutig bestimmte Abbildung $g : W \to \tilde{V}$ ist in f stetig differenzierbar und es gilt $dg(e) = -d_1F(e,f)^{-1} \circ d_2F(x,y)$.*

Proof. Sei $\Phi : U \to G \times F$ durch $\Phi(x,y) := (F(x,y),y)$ gegeben. Diese Funktion ist stetig differenzierbar und es gilt

$$d\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} d_1F(x,y) & d_2F(x,y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} .$$

Offensichtlich ist $d\Phi(e,f)$ invertierbar und es gilt

$$d\Phi(e,f)^{-1} = \begin{pmatrix} d_1F(e,f)^{-1} & -d_1F(e,f)^{-1} \circ d_2F(e,f) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Also gibt es nach dem Satz über Umkehrfunktionen Umgebungen $(e,f) \in \tilde{U} \subseteq U$ und $(0,f) \in \tilde{W} \subseteq G \times F$ und eine Umkehrfunktion $\Psi : \tilde{W} \to \tilde{U}$ von $\Phi_{|\tilde{U}}$. Wir schreiben $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$, $\Psi_1 : \tilde{W} \to E$ und $\Psi_2 : \tilde{W} \to F$. Es gilt

$$(z,y) = (\Phi \circ \Psi)(z,y) = (F(\Psi_1(z,y), \Psi_2(z,y)), \Psi_2(z,y)) ,$$

also

$$F(\Psi_1(z,y), \Psi_2(z,y)) = z , \quad \Psi_2(z,y) = y ,$$

woraus $F(\Psi_1(z,y),y) = z$ folgt.

Wir wählen nun Umgebungen $e \in \tilde{V} \subseteq E$ und $f \in W \subseteq F$ derart, daß $\tilde{V} \times W \subseteq \tilde{U}$. Im folgenden werden wir W noch verkleinern. Wir ersetzen W durch $W \cap j_0^{-1}(\tilde{W})$ Beachte, daß $j_0(f) \in W$, so daß W wirklich eine Umgebung von f ist. Durch diese Wahl ist

$$g : W \to E , \quad g(y) := \Psi_1(0,y)$$

definiert. Diese Abbildung ist stetig und erfüllt $g(f) = e$. In der Tat ist $\Phi(e,f) = (F(e,f),f) = (0,f)$ und damit $\Psi_1(0,f) = (e,f)$, also $g(f) = \Psi_1(0,f) = e$. Wir ersetzen nun W durch $g^{-1}(\tilde{V})$. Durch diese Wahl erreichen wir, daß $g : W \to \tilde{V}$.

Sei jetzt $y \in W$ und $x \in \tilde{V}$ derart, daß $p(x,y) = 0$. Wegen $(x,y) \in \tilde{V} \times W \subseteq \tilde{W}$ gilt $\Phi(x,y) = (0,y)$ und deshalb $(x,y) = \Psi(0,y) = (g(x),y)$. Folglich ist $x = F(y)$ die einzige Lösung von $F(x,y) = 0$ mit $(x,y) \in \tilde{V} \times W$.

Die Abbildung g ist in f stetig differenzierbar und es gilt

$$dg(f) = d_2\Psi_1(0,f) = -d_1F(e,f)^{-1} \circ d_2F(e,f) .$$

□

64.1 Aufgaben

1. Wir betrachten $F(x, y, z) := 2x^4 + x\cos(y) + \sin(z)$. Zeige, daß für hinreichend kleine (x, y, z) diese Gleichung nach $z = z(x, y)$ aufgelöst werden kann. Bestimme $\partial_x z$ und $\partial_y z$.

2. Zeige, daß die Abbildung $\exp : \mathtt{Mat}(n, n, \mathbb{R}) \to \mathtt{Mat}(n, n, \mathbb{R})$, $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ in einer Umgebung von 0 ein lokaler Diffeomorphismus ist.

65 Tricks

Seien E, F endlich-dimensionale Vektorräume und $U \subseteq E$ offen. Wenn $f : U \to F$ differenzierbar ist, dann können wir die Abbildung

$$J^1(f) := (f, df) : U \oplus E \to F \oplus F$$

bilden. Wenn f einmal stetig differenzierbar ist, dann ist $J^1(f)$ stetig.
Sei G ein weiterer endlich-dimensionaler Vektorraum, $V \subseteq F$, $f(U) \subseteq V$ und $g : V \to G$ einmal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$J^1(g \circ f) = J^1(g) \circ J^1(f) \ .$$

Wenn f^{-1} existiert und differenzierbar ist, dann gilt $J^1(f^{-1}) = J^1(f)^{-1}$.

Wenn f zweimal stetig differenzierbar ist, dann gilt

$$dJ^1(f)(u, \xi)(\eta, \lambda) = df(u)(\eta) \oplus (d^{(2)}f)(u)(\eta, \xi) + df(u)(\lambda)) \ .$$

In Matrixschreibweise

$$dJ^1(f)(u, \xi) = \begin{pmatrix} df(u) & 0 \\ \dots & df(u) \end{pmatrix}$$

Wenn $df(u)$ invertierbar ist, dann ist auch $dJ^1(f)(u, \xi)$ invertierbar.

Wir wählen eine Norm $\|\dots\|$ auf E. Sei $B \subseteq E$ der Einheitsball. Sei $D^1(U) := U \oplus B$ und $J^1(E, F) := E \oplus F$. Wir definieren rekursiv für $k \geq 1$

$$D^k(U) := D^1(D^{k-1}(U) \ , \quad J^k(E, F) := J^1(J^{k-1}(E, F)) \ .$$

Ist die Abbildung f k-mal stetig differenzierbar, dann ist

$$J^k(f) := J^1(J^{k-1}(f)) : D^k(U) \to J^k(E, F)$$

stetig.
Sei nun $\|\dots\|$ eine Norm auf F. Wir erhalten eine Norm auf $J^1(E, F)$ und damit rekursiv Normen auf $J^k(E, F)$.

Definition 65.1 *Wir definieren den Raum*

$$C_b^1(U,F) := \{f : C^1(U,F) \mid J^1(f) \in C_b(D^1(U), J^1(E,F))\}.$$

mit der Norm

$$\|f\|_{C^1} := \sup_{w\in D^1(U)} \|J^1(f)(w)\| \ .$$

Wir erhalten also eine Abbildung

$$J^1 : C_b^1(U,F) \to C_b(D^1(U), J^1(E,F)) \ .$$

Diese Abbildung ist injektiv.

Lemma 65.2 *Das Bild von $J^1 : C_b^1(U,F) \to C_b(D^1(U), J^1(E,F))$ ist abgeschlossen. Insbesondere ist $(C_b^1(U,F), \|\ldots\|_{C^1})$ ein Banachraum.*

Wir definieren nun rekursiv die Banachräume

$$C_b^k(U,F) := \{f \in C^k(U,F) \mid J^k(f) \in C_b(D^k(U), J^k(E,F))\} \ .$$

Corollary 65.3 *Unter den Voraussetzung des Satzes über die Umkehrfunktion sei f zusätzlich k-mal stetig differenzierbar. Dann ist auch f^{-1} k-mal stetig differenzierbar.*

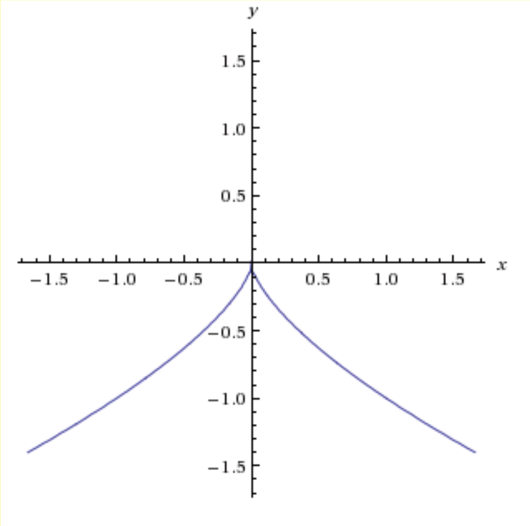
Proof. Wir wenden den Satz über die Umkehrfunktion auf $J^{k-1}(f)$ an. Diese Funktion ist stetig differenzierbar. Weiter ist $dJ^{k-1}(f)(u,0)$ invertierbar. Damit existiert $J^{k-1}(f)^{-1}$ in der Nähe von $(f(u),0)$ und ist einmal stetig differenzierbar. Wegen $J^{k-1}(f)^{-1} = J^{k-1}(f^{-1})$ ist damit f^{-1} k-mal stetig differenzierbar. □

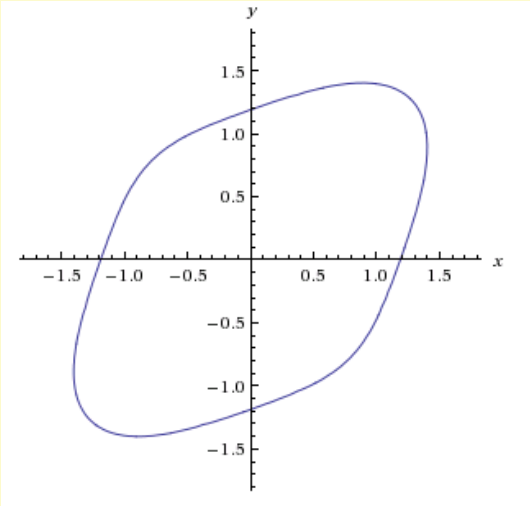
66 Untermannigfaltigkeiten

Die folgende Bilder stellen die Lösungen der Gleichungen

$$x^2 + y^3 = 0 \ , \quad x^4 - 2xy + y^4 = 0$$

dar. Der qualitative Unterschied zwischen ihnen ist, daß das linke Bild in $(0,0)$ eine "Spitze" hat, während das rechte Bild in überall "glatt" aussieht. In diesem Kapitel werden wir diese Beobachtung in präziese Begriffe fassen.





Seien E, F Banachräume, $U \subseteq E$ offen und $f : U \to F$ stetig differenzierbar.

Definition 66.1 *Die Funktion f ist in $u \in U$ regulär, wenn $df(u) : E \to F$ surjektiv ist.*

1. Eine Funktion $U \to \mathbb{R}$ ist in $u \in U$ genau dann regulär, wenn u nicht kritisch ist.

2. Die Abbildung $f(x, y) := x^2+y^3$ ist im Punkt $(0, 0)$ nicht regulär. Es gilt $df(0, 0) = 0$.

3. Wenn E endlich dimensional und $\dim(E) < \dim(F)$ gilt, dann ist f in keinem Punkt regulär.

Ab jetzt sei E endlich dimensional.

Definition 66.2 *Eine Teilmenge $M \subseteq E$ heißt Untermannigfaltigkeit (der Kodimension k), wenn es für jeden Punkt $m \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq E$ und eine Abbildung $f : U \to F$ in einen (k-dimensionalen) Vektorraum F gibt, so daß $\{f = 0\} = M \cap U$ gilt und f in allen Punkten von $M \cap U$ regulär ist. Wir nennen das Paar (U, f) eine lokale definierende Funktion von M bei m.*

1. Eine offene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0. Das Paar $(M, 0)$ ist eine definierende Funktion.

2. Der Punkt $M := \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension n. Das Paar $(\mathbb{R}^n, \mathtt{id})$ ist eine definierende Funktion.

3. Die Einheitskugel $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Untermannifgaltigkeit der Kodimension 1. Das Paar
$$(\mathbb{R}^n, x \mapsto f(x) := \|x\|^2 - 1)$$
ist eine definierende Funktion. In der Tat ist
$$df(x)(\xi) = 2 < x, \xi > ,$$

also $df(x) = 0$ genau für $x = 0$. Da dieser Punkt nicht in S^{n-1} liegt, ist f in allen Punkten von S^{n-1} regulär. Das Paar $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \|x\|)$ wäre eine andere Wahl einer definierenden Funktion von S^{n-1}.

4. Der Schnitt A der **Einheitskugel** S^{n-1} mit der affinen Hyperebene $\{\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{2}\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 2. Das Paar

$$(\mathbb{R}^n, f(x) = (\|x\|^2 - 1, \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2}))$$

ist eine definierende Funktion. Dazu berechnen wir

$$df(x)(\xi) = (2 < x, \xi >, \sum_{i=1}^n \xi_i) \ .$$

Es gilt $\dim \mathtt{im}(df(x)) < 2$ genau dann, wenn $x \sim (1, \ldots, 1)^t$ gilt. Die einzigen solchen Punkte mit $\|x\| = 1$ wären $x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)^t$. Dann gilt aber $\sum_{i=1}^n x_i = \pm\sqrt{n} \neq \frac{1}{2}$, also sind diese Punkte nicht in der Hyperebene und damit nicht in A.

5. Sei $U \subset E$ offen und $f : U \to F$ eine stetig-differenzierbare Abbildung in einen k-dimensionalen Vektorraum. Dann ist der Graph

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subseteq E \oplus F$$

eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension k. Wir setzen $V := \{(x, y) \mid x \in U\} \subseteq E \oplus F$ und definieren $\phi : V \to \mathbb{R}^k$ durch $\phi(x, y) := y - f(x)$. Es gilt $\Gamma(f) = \{\phi = 0\}$. Weiterhin ist $d\phi = (d_1\phi, d_2\phi)$ und $d_2\phi = \mathtt{id}$. Also ist $d\phi$ in allen Punkten von V surjektiv. Das Paar (V, ϕ) definiert $\Gamma(f)$.

6. Das Paar $(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)$ ist nicht definierend für $\{0\} \subset \mathbb{R}$.

7. Die Teilmenge

$$\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

ist keine Untermannigfaltigkeit. In der Tat, wäre f bei 0 definierend, dann wäre $f'(0) = \mathtt{lim}_{n\to\infty}\frac{f(1/n)-f(0)}{1/n} = 0$, was im Widerspruch zur geforderten Regularität von f im Punkt 0 steht.

Andererseits ist die Teilmenge

$$\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

ist eine Untermannigfaltigkeit. Das Paar $((0, \infty), f(x) := \sin(\frac{\pi}{x}))$ ist definierend.

8. Die Teilmenge $\{x^2 = y^3\} \subset \mathbb{R}^2$ ist keine Untermannigfaltigkeit. Jedenfalls ist $f(x, y) = x^2 - y^3$ nicht definierend, da nicht regulär im Punkt 0. Es gibt auch keine andere definierende Funktion wie das folgende Argument zeigt.

   Wäre g eine definierende Funktion bei 0, dann gäbe es eine in einer Umgebung von 0 definerte stetige Funktion $\phi(x, y)$ derart, daß

   $$\phi(x, y)(\partial_x g(x, y), \partial_y g(x, y) = (2x, 3y^2)$$

   gilt. Wenn $\partial_x g(0, 0)) \neq 0$ ist, dann gilt $\phi(x, y) = \frac{2x}{\partial_x g(x,y)}$ und damit für $(x, y) \neq 0$ $\frac{2x\partial_y g(x,y)}{\partial_x g(x,y)} = 3y^2$. Wir setzen $x := t^5$ und $y := t$. Dann würde

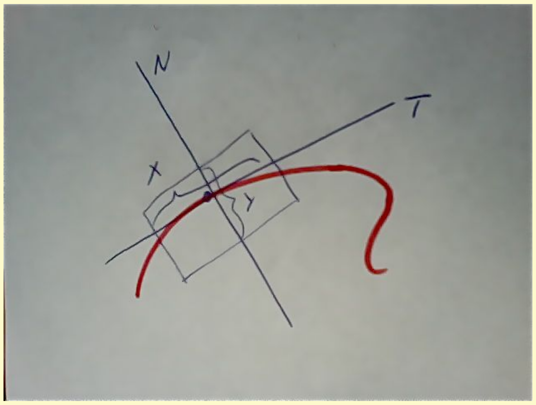
   $$\partial_y g(t^5, t) = \frac{3\partial_x g(t^5, t)}{2t^3}$$

   gelten. Der Grenzwert $\mathtt{lim}_{t\to 0}$ der rechten Seite existiert nicht. Folglich gilt $\partial_x g(0, 0)) = 0$ und damit notwendiger Weise $\partial_y g(0, 0) \neq 0$. Wir schließen in diesem Fall $\phi(x, y) = \frac{3y^2}{\partial_y g(x,y)}$ und $2x = \frac{3y^2\partial_x g(x,y)}{\partial_y g(x,y)}$. Mit $x = y := t$ gilt

   $$\partial_x g(t, t) = \frac{2\partial_y g(t, t)}{3t} \ .$$

   Der Grenzwert $\mathtt{lim}_{t\to 0}$ der rechten Seite existiert wiederum nicht.

In folgendem Lemma zeigen wir, daß eine Untermannigfaltigkeit lokal als Graph einer differenzierbaren Abbildung dargestellt werden kann.



Lemma 66.3 *Sei $M \subset E$ eine Untermannnigfaltigkeit und $0 \in M$. Dann gibt es eine Aufspaltung $E \cong T \oplus N$, offene Umgebungen $X \subseteq T$ und $Y \subseteq N$ von 0 und eine Abbildung $f : X \to Y$ derart, daß $M \cap (X \times Y) = \Gamma(f)$ ist.*

Proof. Sei (U, ϕ) eine lokale definierende Funktion von M bei 0. Wir setzen

$$T := \mathtt{ker}(d\phi(0))$$

und wählen einen komplementären Unterraum $N \subseteq E$ derart, daß $E \cong T \oplus N$. Wir können nun ϕ als Funktion in zwei Variablen auffassen, d.h. es gilt $\phi(x) = \phi(t, n)$ mit $t \in T$ und $n \in N$ und $x = t + n$. Es gilt $d_1\phi(0) = 0$. Da ϕ in 0 regulär ist, muß also $d_2\phi(0)$ surjektiv sein. Aus Dimensionsgründen ist $d_2\phi(0)$ ein Isomorphismus. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren Umgebungen $X \subseteq T$, und $Y \subseteq N$ von $(0, 0)$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ derart, daß $X \times Y \subseteq U$, und $\Gamma(f) = \{\phi = 0\} \cap (X \times Y)$ gilt. □

Die in diesem Beweis konstruierte Abbildung f erfüllt noch die spezielle Bedingung

$$df(0) = -d_2\phi(0)^{-1} d_1\phi(0) = 0 \ .$$

Dies werden wir weiter unten ausnutzen. Die Identität

$$df(x) = -d_2\phi(x)^{-1} \circ d_1\phi(x)$$

für $x \in X$ zeigt, daß aus der k-fachen stetigen Differenzierbarkeit der definierenden Funktion die k-fache stetige Differenzierbarkeit von f folgt.

Definition 66.4 *Eine Untermannigfaltigkeit ist von der Klasse C^k mit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ (bzw. glatt oder C^∞), wenn sie lokal durch k-fach stetig differenzierbare (glatte) Funktionen definiert werden kann.*

Eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^k kann also lokal als Graph einer C^k-Funktion geschrieben werden.

Sei $M \subseteq E$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension k und $m_0 \in M$. Dann können wir M um m_0 verschieben: Die Teilmenge $M - m_0 := \{m - m_0 \mid m \in M\}$ ist wieder eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension k. Ist (U, ϕ) lokal definierend für M bei m_0, dann ist $(U - m_0, \psi(x) := \phi(x + m_0))$ lokal definierend für $M - m_0$ bei 0. In vielen Argumenten werden wir o.B.d.A annehmen, daß der untersuchte Punkt der Nullpunkt ist. Dies werden wir immer durch Verschieben erreichen.

Sei $M \subseteq E$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension k und $m \in M$.

Lemma 66.5 *Sind (U, ϕ) und (V, ψ) definierende Funktionen von M bei m, dann gilt $\mathtt{ker}(d\phi(m)) = \mathtt{ker}(d\psi(m))$.*

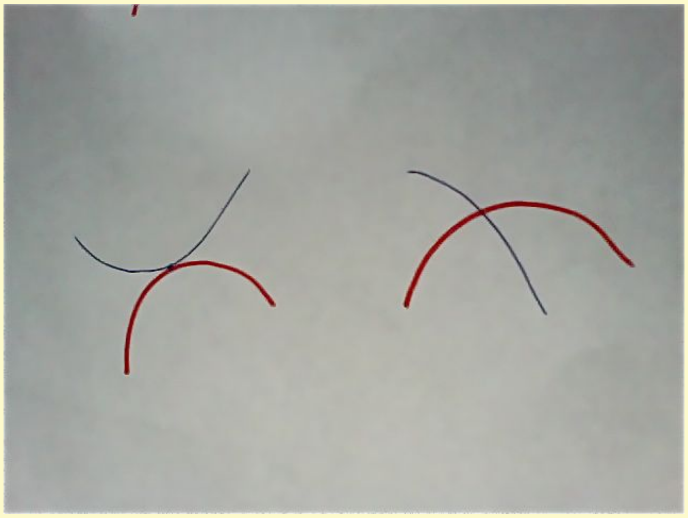
Proof. O.B.d.A können wir annehmen, daß $m = 0$ gilt. Wir verwenden (U, ϕ) wie im Beweis von Lemma 66.3 und finden eine Aufspaltung $E \cong T \oplus N$ mit $T = \mathtt{ker}(d\phi(0))$, $X \subseteq T$ und $Y \subseteq N$ offen und $f : X \to Y$ derart, daß $M \cap (X \times Y) = \Gamma(f)$ und $df(0) = 0$. Es gilt $\psi(t, f(t)) \equiv 0$ für $t \in (X \times Y) \cap V$, also wegen $df(0) = 0$ auch $d_1\psi(0) = 0$. Das bedeutet $\mathtt{ker}(d\psi(0)) \subseteq \mathtt{ker}(d\phi(0))$.
Durch Vertauschen der Rollen von ϕ und ψ erhält man die umgekehrte Inklusion. □

Definition 66.6 *Sei $M \subseteq E$ eine Untermannigfaltigkeit und $m \in M$. Der Raum $T_m M := \mathtt{ker}(\phi(m))$ heißt Tangentialraum von M an m.*

Wegen Lemma 66.5 ist der Tangentialraum wohldefiniert.

1. Sei $E = T \oplus N$, $X \subseteq T$ eine Umgebung von 0 und $g : X \to N$ stetig differenzierbar mit $dg(0) = 0$ und $M = \Gamma(g)$. Dann gilt $T_{(0,g(0))}M = T$.
2. Zwei Untermannigfaltigkeiten M, N berühren sich in einem Punkt $x \in M \cap N$, wenn $T_x M = T_x N$ gilt.
3. Die Ebene $\{x^n = 1\}$ und die Sphäre S^{n-1} in $\mathbb{R}^n$ berühren sich im Punkt $(0, \ldots, 0, 1)^t$.

Transversalität (rechts) ist das Gegenteil von Berühren (links).



Definition 66.7 *Zwei lineare Unterräume $V, W \subseteq E$ eines endlich dimensionalen Vektorraumes heißen transversal (wir schreiben $V \pitchfork W$), wenn*

$$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(E)$$

gilt.
Zwei Untermannigfaltigkeiten $M, N \subseteq E$ sind zueinander transversal, wenn für jeden Punkt $x \in M \cap N$ gilt $T_x M \pitchfork T_x N$.

Seien $M, N \subseteq E$ Untermannigfaltigkeiten der Kodimensionen m und n

Lemma 66.8 *Wenn $M \pitchfork N$, dann ist $M \cap N$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension $n + m$.*

Proof. Sei $x \in M \cap N$ und (U, f) sowie (V, g) definierend für M bzw. N bei x. Wir setzen $W := U \cap V$ und $h := (f, g) : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$. Dann ist (W, h) definierend für $M \cap N$ bei x. In der Tat ist $W \cap M \cap N = \{h = 0\}$ und für $y \in W \cap M \cap N$ gilt

$$\begin{aligned}
\dim \mathtt{im}(dh(y)) &= \dim(E) - \dim \mathtt{ker}(h) \\
&= \dim(E) - \dim \mathtt{ker}(df(y)) \cap \dim \mathtt{ker}(dg(y)) \\
&= \dim(E) + \dim(E) - \dim \mathtt{ker}(df(y)) - \dim \mathtt{ker}(dg(y)) \\
&= n + m \ .
\end{aligned}$$

Damit ist y ein regulärer Punkt von h. □

Sei $U \subseteq F$ eine offene Teilmenge eines m-dimensionalen Vektorraumes, $f : U \to E$ stetig differenzierbar.

Definition 66.9 *f ist eine Immersion, wenn $df(u)$ für alle $u \in U$ injektiv ist. Die Abbildung f ist eine Einbettung, wenn f eine Immersion und $f : U \to f(U)$ ein Homöomorphismus ist.*

1. Seien $(e_i)_{i=1}^k$ eine Familie in E. Dann ist $f : \mathbb{R}^k \to E$, $f(x) = \sum_{l=1}^k x_k e_k$ genau dann eine Einbettung, wenn $(e_i)_{i=1}^k$ linear unabhängig ist.

2. Die Abbildung $f : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) = (x, \sin(x^{-1}))$ für $x \in (0,1)$ und $f(x) := (0, 5 - 10(x-2))$ für $x \in (2,3)$ ist eine Immersion, aber keine Einbettung. In der Tat ist nämlich $\mathtt{im}(f)$ zusammenhängend, nicht aber der Definitionsbereich.

3. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto f(x) := (x^2, x^3)$ ist keine Immersion, da $df(0)$ nicht injektiv ist.

4. Sei $E = F \oplus N$. Ist $g : U \to N$ stetig differenzierbar, dann ist $f : U \to F \oplus N \cong E$ gegeben durch $f(x) := (x, g(x))$ eine Einbettung mit dem Bild $\Gamma(g)$.

Lemma 66.10 *Ist $f : U \to E$ eine Einbettung, dann ist $f(U) \subseteq E$ eine Untermannigfaltigkeit. Es gilt $T_{f(u)} f(U) = \mathtt{im} df(u)$.*

Proof. Sei $u \in U$ und $x = f(u) \in f(U)$. Nach Verschieben können wir annehmen, daß $x = 0$ ist. Wir setzen $T := \mathtt{im} df(u)$ und wählen ein Komplement $N \subseteq E$ derart, daß $E \cong T \oplus N$ gilt. Wir betrachten die Projektion $P : E \to T$. Das Differential $d(P \circ f)(u) = P \circ df(u)$ ist ein Isomorphismus. Folglich existieren Umgebungen $V \subseteq U$ und $W \subset T$ von u und 0 derart, daß $P \circ f : V \to W$ eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $h : W \to V$ besitzt.
Wir finden nun eine Umgebung $X \subseteq E$ von x derart, daß $P(X) \subseteq W$ und $f^{-1}(X) \subseteq V$ ist (da f eine Einbettung ist).

Wir definieren $\phi : X \to N$ durch $\phi(y) := y - f(h(P(y)))$. In der Tat ist

$$P(\phi(y)) = P(y) - P(f(h(P(y)))) = P(y) - P(y) = 0 \ .$$

Für $y \in X$ sind $\phi(y) = 0$ und $y = f(h(P(y)))$ und $y \in f(U) \cap X$ äquivalent. Folglich ist $f(U) \cap X = \{\phi = 0\}$.
Weiterhin ist $d\phi(y)_{|N} = \mathtt{id}_N$ und deshalb ϕ regulär in y. Damit definiert (X, ϕ) die Teilmenge $f(U)$ bei y. □

1. Die Spirale $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(x) := e^x(\sin(x), \cos(x))$ ist eine Untermannigfaltigkeit.

2. Das Paraboloid $g(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$, $g(x, y) := (x, y, x^2 + y^2)$ ist eine Untermannigfaltigkeit.

3. Die Kurve $g \circ f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$ (f aus 1. und g aus 2.) ist eine Untermannigfaltigkeit.

Wir identifizieren $\mathtt{Mat}(n, n) := \mathtt{Mat}(n, n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

1. Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathtt{Mat}(n, n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0. In der Tat ist diese eine offene Teilmenge.

2. Die Gruppe $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Eine Matrix $A \in \mathtt{Mat}(n, n)$ ist genau dann in $O(n)$, wenn $AA^t = \mathtt{id}$ gilt. Also ist $O(n) = \{f = 0\}$ für $f(A) = AA^t - \mathtt{id}$. Nun ist $f(A) = f(A)^t$. Es gilt weiter $df(A)(B) = AB^t + BA^t$. Insbesondere ist $df(1)(B) = B + B^t$ immer symmetrisch. Damit kann $df(1)$ nicht surjektiv sein, wenn man f mit Werten in allen Matrizen betrachtet. Sei $Sym(n) := \{B \in \mathtt{Mat}(n, n) | B = B^t\} \subset \mathtt{Mat}(n, n)$ der lineare Teilraum der symmetrischen Matrizen. Eine symmetrische Matrix B ist durch ihre Einträge B_{ij} mit $i \leq j$ bestimmt. Folglich gilt $\dim Sym(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Wir betrachten nun $f : \mathtt{Mat}(n, n) \to Sym(n)$. Dann ist $df(1) : \mathtt{Mat}(n, n) \to Sym(n)$, $B \mapsto B + B^t$ sicher surjektiv. Es gilt weiter für $A \in O(n)$, daß $df(A)(BA) = B^t + B$, also für $C \in Sym(n)$ auch $df(A)(\frac{1}{2}CA) = C$. Damit ist auch $df(A)$ surjektiv. Das Paar $(\mathtt{Mat}(n, n), f : \mathtt{Mat}(n, n) \to Sym(n))$ definiert $O(n)$.

3. Die Untergruppe $SO(n) \subset O(n)$ ist eine Umtermannigfaltigkeit der Kodimension $\frac{n(n+1)}{2}$. In der Tat, die Menge $U := \{\det(A) > 0\} \subset \mathtt{Mat}(n, n)$ ist offen, und $(U, f_{|U})$ definiert $SO(n)$.

66.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß $U(n) \subset \mathtt{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

2. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 mit einer globalen definierenden Funktion. Zeigen Sie, daß es eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ gibt dererat, daß $\|\nu\| \equiv 1$ und $\nu(m) \perp T_m M$ für alle $m \in M$.

67 Extremwerte mit Nebenbedingungen

Sei E ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $M \subseteq E$ eine Untermannigfaltigkeit, $U \subseteq E$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $m \in U \cap M$.

Definition 67.1 *Die Funktion f hat in m ein lokales Extremum mit Nebenbedingung M, falls $f_{|M \cap U}$ ein in m ein lokales Extremum hat.*

Proposition 67.2 *Wenn f in $m \in M$ ein lokales Extremum mit Nebenbedingung M hat, dann gilt $df(m)(T_m M) = 0$.*

Proof. Wir können zur Vereinfachung der Notation annehmen daß $m = 0$ gilt. Wir wählen einen Unterraum $N \subseteq E$ derart, daß $E = T_0 M \oplus N$ gilt. Wir wählen weiter Umgebungen $V \subseteq T_0 M$ und $W \subseteq N$ sowie eine Abbildung $g : V \to W$ derart, daß $M \cap (V \times W) = \Gamma(g)$ und $dg(0) = 0$ gilt. Dann ist $\psi : V \to M \cap (V \times W)$, $\psi(x) := (x, g(x))$ eine Einbettung. Die Abbildung $\psi^* f$ hat in 0 ein lokales Extremum. Also gilt $0 = d(\psi^* f) = df(0) \circ d\psi(0)$. Die Behauptung folgt nun aus $\mathtt{im}(d\psi(0)) = T_0 M$. □

Wir erinnern an folgenden Fakt aus der linearen Algebra. Sei $A : E \to F$ eine (surjektive) lineare Abbildung und $h \in E'$. Wenn $h_{|\mathtt{ker}(A)} = 0$ gilt, dann existiert (genau) ein $\lambda \in F'$ derart, daß $h = \lambda \circ A$. Umgekehrt, wenn $\lambda \in F'$ existiert mit $h = \lambda \circ A$, dann ist $h_{|\mathtt{ker}(A)} = 0$.

Wir können mit dieser Beobachtung die Bedingung $df(m)_{|T_m M} = 0$ umformulieren. Sei $(U, \phi : U \to F)$ eine definierende Funktion für $M \subseteq E$ bei m.

Corollary 67.3 *Wenn die Funktion f in $m \in M$ ein lokales Extremum mit Nebenbedingung in M hat, dann existiert ein $\lambda \in F'$ derart, daß $\lambda \circ d\phi(m) = df(m)$.*

Die Linearform λ heißt Langrangescher Multiplikator. Um also die lokalen Extremwerte mit Nebenbedingung in $M = \{\phi = 0\}$ zu finden, müssen wir insbesondere das im allgemeinen nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 0 \\ df(x) &= \lambda \circ d\phi(x) \end{aligned}$$

für $(x, \lambda) \in U \times F'$ lösen.

Dieses Gleichungssystem liefert allerdings nur eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum.. Wir brauchen zweite Ableitungen, um zu entscheiden, ob in einem Punkt $m \in M$ mit $df(m)(T_m M) = 0$ ein lokales Extremum vorliegt. Wir nehmen deshalb an, daß M von der Klasse C^2 ist.

Wir arbeiten weiter mit der Notation wie im Beweis von Satz 67.2.

Proposition 67.4 *Wenn $df(0)(T_0M) = 0$ und die quadratische Form*

$$Q := \mathrm{Hess}(f)(0) + df(0) \circ \mathrm{Hess}(g)(0)$$

auf T_0M positiv (negativ) definit ist, dann hat f in m ein lokales Minimum (Maximum) mit Nebenbedingung in M.

Proof. Wir müssen zeigen, daß $\psi^* f : V \to \mathbb{R}$ in 0 ein lokales Minimum (Maximum) hat. Es gilt $d\psi^* f(t) = df(\psi(t)) \circ d\psi(t)$ und insbesondere wegen $\mathtt{im}(d\psi)(0) = T_0M$, daß $d\psi^* f(0) = 0$. Wir berechnen nun $\mathrm{Hess}(\psi^* f)(0)$. Dazu leiten wir für $\xi \in T_0M$ die Abbildung $t \mapsto df(\psi(t)) \circ d\psi(t)(\xi)$ noch einmal in die Richtung ξ ab. Mit der Produktregel erhalten wir für $t = 0$

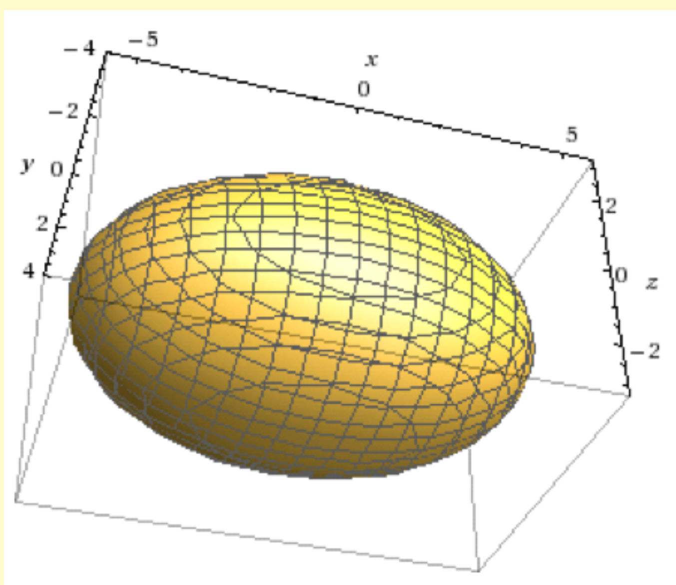
$$d^{(2)} f(0)(d\psi(0)(\xi))(d\psi(0)(\xi)) + df(0) \circ d^2\phi(0)(\xi)(\xi) = Q(\xi) \ .$$

Wir wenden nun auf $\psi^* f$ den entsprechenden Satz 63.5 für den Fall ohne Nebenbedingungen an. □

Hier ist ein Beispiel: Sei $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 30$$

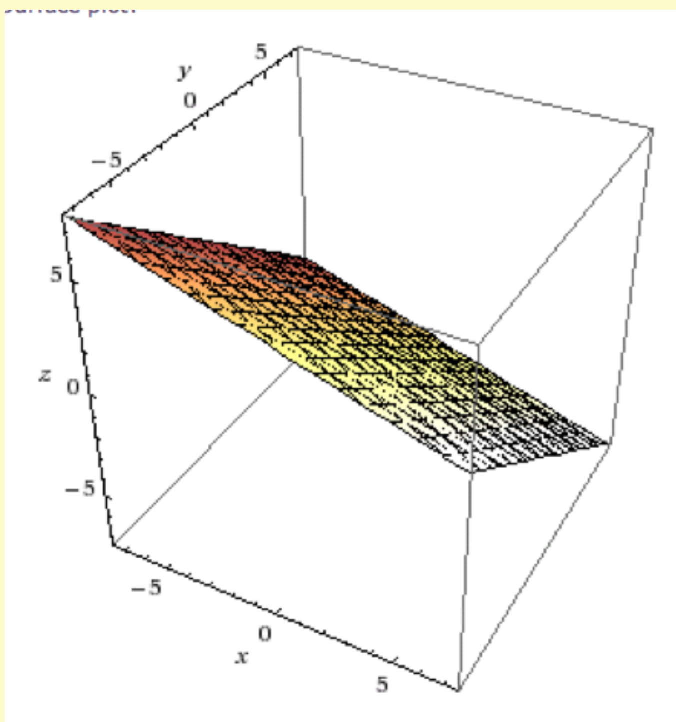
gegeben. Dann ist $M := \{f_1 = 0\}$ ein Ellipsoid.



Sei weiter

$$f_2(x, y, z) := x + 2y + 3z \ .$$

Dann ist $N := \{f_2 = 0\}$ eine Hyperebene.



Wir betrachten $L := N \cap M$ und behaupten, daß L eine Untermannigfaltigkeit ist. Wir müssen zeigen, daß $N \pitchfork M$ gilt, oder alternativ, daß $f := (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ in allen Nullstellen regulär ist. Es gilt

$$J(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 6z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Aus $\mathtt{rk}(J(f)(x,y,z)) < 2$ folgt $x = y = z$. Der einzige solche Punkt in N ist $(x,y,z) = 0$. Dieser liegt aber nicht in M.

Wir betrachten jetzt die Höhenfunktion $h(x,y,z) := z$ und suchen deren lokale Extrema mit Nebenbedingung in L. Es gilt $J(h)(x,y,z) = (1,0,0)$. Wir suchen nun alle Punkte $l \in L$ mit $(1,0,0)(T_l L) = 0$. Wir verwenden die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

Wir suchen also alle diejnigen Punkte $(x,y,z) \in L$, für welche es eine Linearform $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}^2)'$ derart gibt, daß

$$\lambda \cdot J(f)(x,y,z) = (1,0,0)$$

gilt. Wir müssen also die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystem studieren.

$$\lambda_1 2x + \lambda_2 = 1 \ , \quad \lambda_1 4y + 2\lambda_2 = 0 \ , \quad \lambda_1 6z + 3\lambda_2 = 0 \ .$$

Die zweite Gleichung gibt $\lambda_2 = -\lambda_1 2y$. Die dritte Gleichung liefert dann $\lambda_1(6z - 6y) = 0$, also $y = z$. Die erste Gleichung liefert $(2x - 2y)\lambda_1 = 1$, also $x \neq y$. Wir suchen also diejenigen Punkte in L, welche $y = z$ und $x \neq y$ erfüllen. Wir müssen also die Gleichungen

$$x + 5y = 0 \ , \quad x^2 + 5y^2 = 30$$

lösen. Die erste gibt $x = -5y$, und dies in die zweite eingesetzt, $30y^2 = 30$, also $y^2 = 1$. Wir schließen, daß $y = z = \pm 1$ und $x = \pm 5$ die kritischen Punkte sind. Potentielle Extrema liegen in den Punkten $l_+ := (-5, 1, 1)$ und $l_- := (5, -1, -1)$ vor.

Da L kompakt ist, muß $h_{|L}$ globale Minima und Maxima besitzen. Schon aus dieser Überlegung heraus wird klar, daß l_+ ein Maximum und l_- ein Minimum sein muß.

Zur Illustration überprüfen wir daß aber mit Hilfe unsere Bedingung an die zweiten Ableitungen.
Wir bestimmen nun den Tangentialraum

$$T_{l_\pm} L := \mathtt{ker} \begin{pmatrix} \mp 10 & \pm 4 & \pm 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Es gilt

$$T_{l_\pm} L = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wir wählen als Komplement

$$N := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen L lokal als Graph einer Funktion $g = l_\pm + (g_1, 0, g_2) : T_{l_\pm} L \to N$ darstellen. Die Funktionen g_1, g_2 bestimmt man durch Lösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} (\mp 5 + g_1(t))^2 + 2(\pm 1 + 3t)^2 + 3(\pm 1 + g_2(t) - 2t)^2 - 30 &= 0 \\ \pm 5 + g_1(t) + 2(\pm 1 + 3t) + 3(\pm 1 + g_2(t) - 2t) &= 0 . \end{aligned}$$

Wir sind gar nicht an g selbst sondern an der zweiten Ableitungen $d^{(2)} g(0)$ interessiert. Diese kann man direkt wie folgt berechnen. Wir wissen, daß $g(0) = 0$ und $dg(0) = 0$ gilt und müssen $d^2 g(0)$ berechnen. Dazu leiten wir die erste Gleichung einmal ab und erhalten

$$2(\mp 5 + g_1(t)) g_1'(t) + 12t(\pm 1 + 3t) + 6(\pm 1 + g_2(t) - 2t)(g_2'(t) - 2) = 0 .$$

Wir leiten zum zweiten Mal ab und setzen $t = 0$ ein.

$$\mp 10 g_1''(0) + \pm 12 + 24 + \pm 6 g_2''(0) = 0 .$$

Die zweite Ableitung der zweiten Gleichung liefert

$$g_1'' + 3 g_2'' = 0 .$$

Wir setzen dies in die erste Gleichung ein und erhalten

$$\pm 36 g_2''(0) + 24 + \pm 12 ,$$

also

$$g_2''(0) = \begin{cases} -1 & + \\ \frac{1}{3} & - \end{cases}$$

Da $\mathrm{Hess}(h) = 0$ gilt, ist die zu untersuchende quadratische Form $T_{l_\pm} \ni \xi \mapsto Q(\xi) = g_2''(0)\xi^2$ gegeben. In der Tat ist diese Form in l_+ negativ und in l_- positiv definit.

Folglich hat die Höhenfunktion h im Punkt $(-5, 1, 1)$ ein lokales Maximum und im Punkt $(5, -1, -1)$ ein lokales Minimum mit Nebenbedingung in L vor.

67.1 Aufgaben

1. Sei B eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Charakterisieren Sie die lokalen Extremwerte von $B_{|S^{n-1}}$.

2. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und A eine affine Hyperebene. Charakterisieren Sie die Punkte von M, welche den Abstand zu A lokal minimieren.

68 Differentialgleichungen - Beispiele

Sei $x(t)$ die Bahnkurve eines Massenpunktes im Raum $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Masse m in einem Kraftfeld $F : U \to \mathbb{R}^3$. Das Newtonsche Gesetz stellt eine Beziehung zwischen der Beschleunigung $x^{(2)}$ des Massenpunktes und der auf ihn wirkenden Kraft $F \in \mathbb{R}^3$ her:

$$x^{(2)}(t) = m^{-1}F(x(t)) \ .$$

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung in der Schwerkraft in der Nähe der Erdoberfäche welche wir hier als die durch die ersten beiden Koordinaten des $\mathbb{R}^3$ modellieren. Die dritte Koordinate ist die Höhe über der Oberfläche. Das Schwerkraftfeld wird durch die in diesem Fall konstante Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \quad F(x) := (0, 0, -mg_{Erd})$$

gegeben, wobei g_{Erd} die Erdbeschleunigung ist. Wir erhalten die Differentialgleichung

$$x^{(2)} = (0, 0, -g_{Erd}) \ .$$

Die Bahn einer im Winkel α nach oben im Punkt 0 in der x, z-Ebene abgeschossene Kanonenkugel mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 erfüllt diese Gleichung mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = 0 \ , \quad x'(0) = v_0(\cos(\alpha), 0, \sin(\alpha)) \ .$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$x(t) := (v_0 \cos(\alpha)t, 0, v_0 \sin(\alpha)t - \frac{g_{Erd}}{2}t^2) \ .$$

Das prüft man durch Einsetzen nach. Die Kugel schlägt zur Zeit

$$t := \frac{2\sin(\alpha)v_0}{g_{Erd}}$$

auf. Die x-Koordinate des Einschlages ist

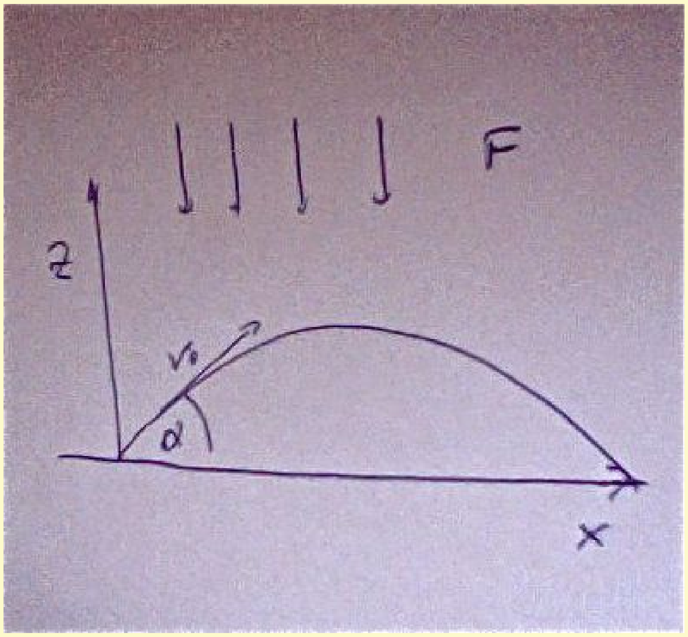
$$\frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)v_0^2}{g_{Erd}} = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g_{Erd}} \ .$$

Die maximale Schußweite wird also bei einem Winke $\alpha = \frac{\pi}{4}$ erreicht und beträgt

$$\frac{v_0^2}{g_{Erd}} \ .$$

Wir betrachten ein realistisches Besipiel. Es gilt $g_{Erd} = 9,80665ms^{-2}$. Ist $v_0 = 400Km/h$, dann ist die maximale Schußweite

$$1260m \ .$$



•

Wir betrachten nun die Gleichung, welche die Planetenbahnen bestimmt. Die Anziehungskraft der Sonne (im Ursprung des Koodinatensystems) auf die Erde im Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ wird nach dem Gravitationsgesetz durch

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \ , \quad F(x) := -\frac{\gamma m_{Sonne} m_{Erde} x}{\|x\|^3}$$

gegeben. Folglich genügt die Erdbahn $x(t)$ der Differentialgleichung

$$x^{(2)} = -\frac{\gamma m_{Sonne}}{\|x\|^3} x \ .$$

Wir sehen, daß die Masse der Erde nicht eingeht, sich also ein leichter Satellit nach der gleichen Regel bewegen würde. Diese Gleichung bestimmt die von Kepler gefundenen elliptischen Planetenbahnen, welche wir weiter unten genauer diskutieren werden.

In beiden Fällen wird die Kraft durch ein Vektorfeld beschrieben:

$$F(x) = (0, 0, -mg_{Erd}) \ , \qquad F(x) = -\frac{\gamma m_{Sonne} m_{Erde} x}{\|x\|^3} \ .$$

Wir erhalten Differentialgleichung zweiter Ordnung. Für theoretische Betrachtungen ist es wichtig zu sehen, daß man solche Gleichungen auch als Gleichungen erster Ordnung schreiben kann. Dazu nehmen wir die Geschwindigkeit v als eine zweite Koordinate hinzu. Die Bahnkurve des Massenpunktes ist jetzt eine Abbildung $(x, v) : \mathbb{R} \to U \times \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^6$. Die Bewegungsgleichung hat nun die Form

$$x' = v \ , \quad v' = m^{-1} F(x) \ ,$$

also

$$\begin{pmatrix} x' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ m^{-1} F(x) \end{pmatrix} \ . \tag{21}$$

Oft ist eine Reibungskraft propertional zur Geschwindigkeit, $F_{Reib} = -\epsilon v$ mit im Spiel. Mit Reibung hätte die Gleichung die Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ m^{-1} F(x) - \epsilon v \end{pmatrix} \ .$$

Für die Diskussion des Verhaltens von Lösungen derartiger Gleichungen spielen Erhaltungsgrößen eine wichtige Rolle. Wir nehmen an, daß die Kraft (21) durch ein Potential $P : U \to \mathbb{R}$ gegeben wird:

$$F := -(\partial_1 P, \partial_2 P, \partial_3 P) \ .$$

Im Fall des Schwerefeldes ist etwa

$$P(x) = m g_{Erd} x_3 \ ,$$

und im Fall des Gravitationsfeldes der Sonne ist

$$P(x) = \frac{\gamma m_{Sonne} m_{Erde}}{\|x\|} \ .$$

In diesem Fall ist die Energie

$$E(x, v) : U \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , \quad E(x, v) = \frac{m\|v\|^2}{2} + P(x)$$

eine Erhaltungsgröße. In der Tat gilt

$$\frac{d}{dt}E(x(t), v(t)) = d(P(x(t))(v) + m\langle v, v'\rangle = -Fv + vF = 0 \ .$$

Ist die Anfangsenergie $E_0 := E(x(0), v(0))$ vorgegeben, dann weiß man, daß sich die Bahnkurve auf der Hyperfläche $\{E = E_0\} \subset U \times \mathbb{R}^3$ bewegt.

Ist Reibung vorhanden, dann ist E nicht mehr konstant, aber es gilt

$$\frac{d}{dt}E(x(t)) = -m\epsilon\|v\|^2 \leq 0 \ .$$

Diese Ungleichung beschreibt den Energieverlust in Verlaufe der Zeit und liefert damit eine wichtige Aussage über das Langzeitverhalten.

•

Wir betrachten die Bewegung im Gravitationsfeld. Die Bahnkurve ist also durch

$$E_0 := m_{Erde}\frac{\|v\|^2}{2} - \frac{\gamma m_{Sonne} m_{Erde}}{\|x\|}$$

eingeschränkt. Ist $E_0 > 0$, dann ist die Energiefläche $\{E = E_0\}$ in der x-Richtung unbeschränkt. Die Geschwindigkeit

$$v_0 := \sqrt{\frac{2\gamma m_{Sonne}}{\|x\|}}$$

entspricht $E_0 = 0$ und heißt Entweichgeschwindigkeit. Startet man bei x radial von Zentrum weg mit $v > v_0$, dann entweicht die Bahn nach unendlich. Ist $v < v_0$, d.h. $E_0 < 0$, dann ist der maximale Abstand, den man bei einem solchen Start erreichen kann,

$$x_{max} = \frac{\gamma m_{Sonne}}{E_0} \ .$$

Mit $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 Kg^{-1} s^2$ und der Erdmasse $5,9736 \cdot 10^{24} Kg$ und dem Erdradius $6.371 \cdot 10^6 m$ ergibt sich eine Entweichgeschwindigkeit von der Erde

$$v_0 = 11.1 Km/s \ .$$

Wir diskutieren nun die Bewegung im Gravitationsfeld der Sonne in nicht radialer Richtung. Diese wird durch die Keplergesetze beschrieben. Um die Keplerbahnen herauszubekommen, muß man weitere Erhaltungsgrößen hinzuziehen, nämlich die Drehimpulse. Wenn die Bahn in der (x_1, x_2) Ebene startet und v_0 in der (x_1, x_2)-Ebene liegt, dann gilt $x_3(t) \equiv 0$. In der Tat erfüllt $x_3(t)$ das Anfangswertproblem

$$x_3(t) = -\gamma m_{Sonne}\frac{x_3(t)}{r(t)^3} \ , \quad x_3(0) = 0 \ , \quad x_3'(0) = 0 \ .$$

Die Funktion $x_3 \equiv 0$ ist eine Lösung und wir Argumentieren mit der Eindeutigkeit.

Wir betrachten nun die Funktion

$$M : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \quad M(x,v) := x \times v \ ,$$

wobei $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Kreuzprodukt bezeichnet. Es gilt

$$\frac{d}{dt}M(x(t),v(t)) = x'(t) \times v(t) + x(t) \times v'(t) = v(t) \times v(t) - \gamma m_{Sonne} m_{Erde} \frac{x(t) \times x(t)}{r(t)^3} = 0 \ .$$

Die Komponenten von M sind Erhaltungsgrößen. Wenn $x_3 \equiv 0$ gilt, dann ist nur die dritte Komponente

$$M_3 = x_1 v_2 - x_2 v_1$$

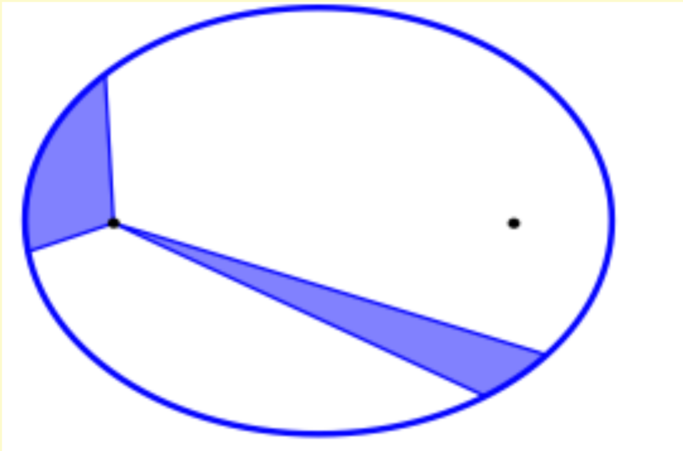
interessant. Die Aussage, daß M_3 konstant ist, ist die infinitesimale Version des Flächensatz:

Proposition 68.1 *Sei $h \in \mathbb{R}$ fix. Dann ist die Fläche $A(t)$, welche von der Stecke von der Sonne zur Erde im Zeitintervall $[t, t+h]$ überstrichen wird, unabhängig von t.*

In der Tat gilt

$$A(t) = \int_t^{t+h} |x(t) \times v(t)| dt = \int_t^{t+h} M_3(x(t),v(t)) dt \ .$$

Einen Beweis dieser Formel können wir hier nicht geben, da wir den Begriff der Fläche noch nicht allgemein genug definiert haben.



Wir betrachten jetzt die Bewegung in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ mit der Energie E_0 und dem Drehimpuls M_3. Wir beschreiben die Bahn in Polarkoordinaten (r, ϕ). Es gilt

$$v = r'(\cos(\phi), \sin(\phi)) + r\phi'(-\sin(\phi), \cos(\phi)) \ ,$$

also

$$\|v\|^2 = (r')^2 + r^2(\phi')^2$$

und damit

$$M_3 = r'r\sin(\phi)\cos(\phi) + r^2\phi'\cos(\phi)^2 - rr'\sin(\phi)\cos(\phi) + r^2\phi'\sin(\phi)^2 = r^2\phi'$$

und

$$E_0 = m_{Erde}\frac{(r')^2 + r^2(\phi')^2}{2} - \gamma r^{-1} m_{Sonne} m_{Erde} = m_{Erde}\frac{(r')^2 + \frac{M_3^2}{r^2}}{2} - \gamma r^{-1} m_{Sonne} m_{Erde} \ .$$

Wenn $M_3 \neq 0$ ist, dann können wir nach dem Satz über die Umkehrfunktion lokal t als Funktion des Winkels ϕ und damit r als Funktion von ϕ betrachten. Wir schreiben $R(\phi) = r(t(\phi))$. Es gilt

$$R'(\phi) = r'(t(\phi))(\phi'(t(\phi))^{-1} \ ,$$

also

$$r'(t(\phi))^2 = R'(\phi)^2\phi'(t(\phi))^2 = R'(\phi)^2\frac{M_3^2}{R^4(\phi)} \ .$$

Wir erhalten

$$(R')^2 = \frac{R^4}{M_3^2}\left(\frac{2E_0}{m_{Erde}} - \frac{M_3^2}{R^2} + 2\gamma m_{Sonne}R^{-1}\right) \ .$$

Diese Gleichung kann man durch den Ansatz

$$R(\phi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\phi)}$$

lösen. In der Tat gilt

$$R'(\phi) = \frac{\epsilon\sin(\phi)}{p}R(\phi)^2 \ .$$

Wir setzen dies ein und erhalten die Bedingungen

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon^2\sin(\phi)^2}{p^2}R^4 &= \frac{R^4}{M_3^2}\left(\frac{2E_0}{m_{Erde}} - \frac{M_3^2}{R^2} + 2\gamma m_{Sonne}R^{-1}\right) \\
\frac{\epsilon^2(1-\cos(\phi)^2)}{p^2} &= \frac{1}{M_3^2}\left(\frac{2E_0}{m_{Erde}} - \frac{M_3^2(1+2\epsilon\cos(\phi)+\epsilon^2\cos(\phi)^2)}{p^2} + 2\gamma m_{Sonne}\frac{1+\epsilon\cos(\phi)}{p}\right)
\end{aligned}$$

und durch Koeffizientenvergleich der Potenzen $\cos(\phi)^k$

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon^2}{p^2} &= \frac{2E_0}{m_{Erde}M_3^2} - \frac{1}{p^2} + \frac{2\gamma m_{Sonne}}{M_3^2 p} \\
0 &= -\frac{2\epsilon}{p^2} + \frac{2\gamma m_{Sonne}\epsilon}{M_3^2 p} \\
-\frac{\epsilon^2}{p^2} &= -\frac{\epsilon^2}{p^2}
\end{aligned}$$

Wir bestimmen also ϵ und p aus den ersten beiden Gleichungen:

$$p = \frac{M_3^2}{\gamma m_{Sonne}} \ .$$

$$\epsilon^2 = \frac{M_3^4}{\gamma^2 m_{Sonne}^2} \frac{2E_0}{m_{Erde} M_3^2} - 1 + \frac{2\gamma m_{Sonne}}{M_3^2} \frac{M_3^2}{\gamma m_{Sonne}} = 1 + \frac{2E_0 M_3^2}{\gamma^2 m_{Sonne}^2 m_{Erde}}$$

Die Kurve

$$\phi \mapsto R(\phi)(\cos(\phi), \sin(\phi))$$

parametrisiert eine Ellipse, wenn $\epsilon < 1$, also $E_0 < 0$ gilt. Dazu zeigen wir, daß wir die Gleichung

$$e(R(\phi)\cos(\phi) - a)^2 + (R(\phi)\sin(\phi) - b)^2 \equiv c^2$$

bei geeigneter Wahl von e, a, b, c erfüllen können. Wir setzen die Lösung $R(\phi)$ ein und multiplizieren mit $(1 + \epsilon\cos(\phi))^2$ durch. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & p^2 e\cos(\phi)^2 - 2ep\cos(\phi)a(1+\epsilon\cos(\phi)) + ea^2(1+\epsilon\cos(\phi))^2 \\ + \ \ & p^2\sin(\phi)^2 - 2p\sin(\phi)b(1+\epsilon\cos(\phi)) + b^2(1+\epsilon\cos(\phi))^2 \\ = \ \ & c(1+\epsilon\cos(\phi))^2 \ . \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zeigt zunächst durch Betrachtung des in $\sin(\phi)$ linearen Terms, daß $b = 0$ gelten muß. Wir erhalten

$$p^2 e\cos(\phi)^2 - 2pe\cos(\phi)a(1+\epsilon\cos(\phi)) + ea^2(1+\epsilon\cos(\phi))^2 + p^2 - p^2\cos(\phi)^2 = c(1+\epsilon\cos(\phi))^2 \ .$$

Daraus folgt durch Vergleich der konstanten Terme

$$c = ea^2 + p^2.$$

Wir vergleichen die Koeffizienten vor $\cos(\phi)$ und $\cos(\phi)^2$

$$p^2 e - 2ea\epsilon p + ea^2\epsilon^2 - p^2 = (ea^2 + p^2)\epsilon^2 \ , \quad e = \frac{p^2\epsilon^2 + p^2}{p^2 - 2a\epsilon p}$$

$$-2eap + 2ea^2\epsilon = 2\epsilon(ea^2 + p^2) \ .$$

Die zweite Gleichung liefert

$$a = -\frac{p\epsilon}{e} \ .$$

Die erste Gleichung reduziert sich dann zu

$$e = \frac{p^2\epsilon^2 + p^2}{p^2 + \frac{2p^2\epsilon^2}{e}} \ ,$$

also

$$e = 1 - \epsilon^2$$

Wir sehen, daß $e > 0$ gilt.
Wir haben damit das erste Keplersche Gesetz gezeigt:

Proposition 68.2 *Die Bahnkurve der Erde wird durch eine Ellipse beschrieben wird.*

•

In der Populationsdynamik ist die logistische Gleichung ein beliebtes Modell. Eine Spezies mit der Individuenzahl x vermehrt sich mit der Rate c. Dies wird durch die Differentialgleichung

$$x'(t) = cx(t)$$

beschrieben und führt auf ein exponentielles Wachstum

$$x(t) = e^{ct}x(0) \ .$$

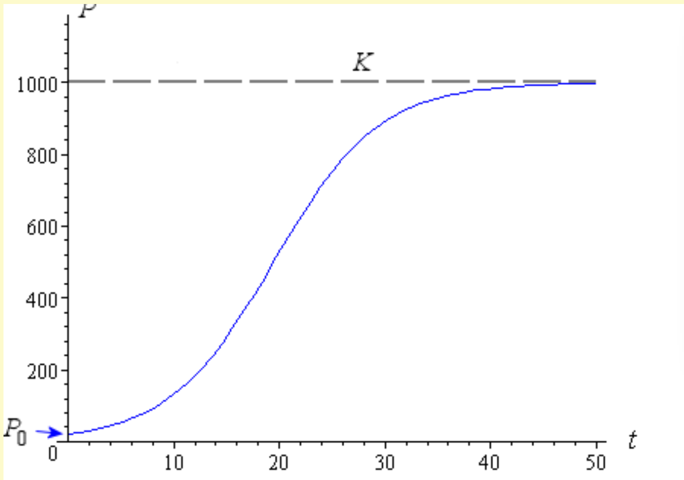
Sind die Ressourcen begrenzt, kann das zum Beispiel durch eine populationsabhängige Vermehrungsrate

$$c(x) = c(1 - Ax)$$

beschrieben werden. In diesem Fall wird eine kleine Population entsprechend

$$x'(t) = cx(t)(1 - Ax(t))$$

erst exponentiell wachsen und sich dann der Zahl A^{-1} von unten annähern. Dies folgt aus einer qualitativen Diskussion. Für kleine x und $x(0)$ ist $x' \approx cx$ und $x(t) \approx e^{ct}x(0)$. Wenn sich $x(t)$ der Grenze A^{-1} nähert, dann gilt $(A^{-1} - x)' \approx c(A^{-1} - x)$, also $x \approx A^{-1} - e^{-ct}$.



Man kann die logistische Gleichung mir der Methode der **Trennung der Variablen** explizit lösen. Dazu schreiben wir sie in der Form

$$\frac{x'(t)}{cx(t)(1 - Ax(t))} = 1 \ .$$

Integration liefert die Bedingung

$$\int_0^t \frac{x'(t)}{cx(t)(1 - Ax(t))} = t \ .$$

Die Substitutionsregel liefert

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dz}{cz(1-Az)} = t \ .$$

Nun gilt

$$\frac{1}{cz(1-Az)} = \frac{1}{c}(\frac{1}{z} + \frac{A}{1-Az}) \ .$$

Folglich ist

$$\frac{1}{c}(\log(z) - \log(1-Az)) = \frac{1}{c}\log(\frac{z}{1-Az})$$

eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{cz(1-Az)} \ .$$

Wir lösen die Gleichung

$$u = \frac{1}{c}\log(\frac{z}{1-Az})$$

nach z auf und erhalten

$$z = \frac{e^{cu}}{1+Ae^{cu}} \ .$$

Wir erhalten

$$x(t) = \frac{e^{c(t-p)}}{1+Ae^{c(t-p)}} \ , \quad p := \frac{1}{c}\log(\frac{x(0)}{1-Ax(0)}) \ .$$

•

Wir erweitern das Modell um eine weitere Art mit der Individuezahl $y(t)$ gibt, welche sich von x ernährt und sich mit eine Rate proportional zum Nahrungsangebot vermehrt und mit konstanter Rate stirbt. Die gemeinsame Entwicklung beider Populationen wird dann durch ein System von Differentialgleichungen beschrieben:

$$x' = cx(1-Ax) - fy \ , \quad y' = gxy - sy$$

beschrieben, also

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx(1-Ax) - fxy \\ gxy - sy \end{pmatrix} \ . \tag{22}$$

68.1 Aufgaben

1. Zeigen Sie, daß für die Bewegung eines Massenpunktes in einem Kraftfeld, welches nur vom Abstand zum Ursprung abhängt, der Drehimpuls

   $$M(x,v) := x \times v$$

   eine Erhaltungsgröße ist.

2. Lösen das Anfangswertproblem

$$x' = 3x^2 \ , \quad x(0) = 1$$

durch Separation der Variablen.

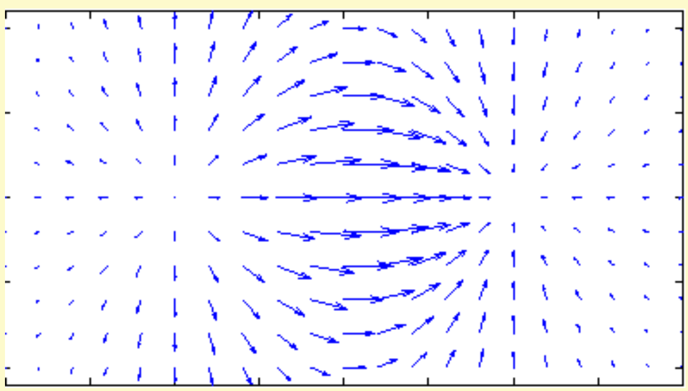
3. Zeige das dritte Keplersche Gesetz.

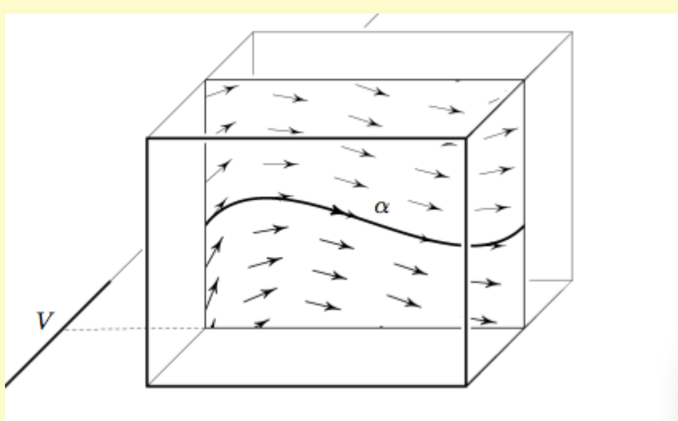
4. Finden Sie die konstanten Lösungen von (22)

69 Vektorfelder und Integralkurven

Sei $(E, \|.\|)$ ein reeller Banachraum und $U \subseteq E$ offen. Sei weiter $I \subseteq \mathbb{R}$ eine zusammenhängende offene Teilmenge.

Definition 69.1 *Ein Vektorfeld X auf U ist eine Abbildung $X : U \to E$. Eine auf I definierte Integralkurve von X ist eine differenzierbare Abbildung $f : I \to U$, welche der Gleichung $f' = f^*X$ genügt.*





Hier sind einige Beispiele.

1. Wir betrachten das Vektorfeld $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X(x) := 1$ auf $\mathbb{R}^1$. Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist
$$f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^1 \ , \quad f_c(t) := c + t$$
eine Integralkurve. In der Tat gilt
$$f_c'(t) = 1 = X \circ f(t) = (f^*X)(t) \ .$$

2. Wir betrachten das Vektorfeld $X(x) := x$ auf $\mathbb{R}^1$. Für alle $c \in \mathbb{R}^1$ ist
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^1 \ , \quad f_c(t) := ce^t$$
eine Integralkurve von X. In der Tat gilt
$$f_c'(t) = ce^t = f(t) = X(f(t)) = (f^*X)(t) \ .$$

3. Wir betrachten das Vektorfeld $X(x) := x^2$ auf $\mathbb{R}^1$. Für jedes $c \in \mathbb{R}^1$ ist
$$f_c : I_c \to \mathbb{R}^1 \ , \quad f_c(t) := \frac{c}{1 - ct}$$
eine Integralkurve, wobei
$$I_c := \begin{cases} (-\infty, \frac{1}{c}) & c > 0 \\ (\frac{1}{c}, \infty) & c < 0 \\ \mathbb{R} & c = 0 \end{cases} \ .$$
In der Tat gilt
$$f'(t) = (\frac{c}{1 - ct})^2 = f(t)^2 = f^*X(t) \ .$$

4. Wir betrachten das Vektorfeld
$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \quad X(x, y) := \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \ .$$
Wir definieren die Matrix
$$D := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
und erhalten $X(v) = Dv$. Für $t \in \mathbb{R}$ setzen wir
$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \ . \tag{23}$$
Für jedes $c \in \mathbb{R}^2$ ist die Kurve
$$f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ , \quad f_c(t) := A(t)c$$

eine Integralkurve von X. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
f_c'(t) &= A'(t)c \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} c \\
f^*X(t) &= X(f(t)) \\
&= DA(t)c \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} c \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} c
\end{aligned}$$

5. Hier ist ein Beispiel, in welchem es mehrere Integralkurven mit dem gleichen Anfang gibt. Sei $X : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ durch $X(x) := \sqrt{|x|}$ gegeben. X ist nicht Lipschitzstetig. Die Kurven $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^1$, $i = 0, 1$, $f_0 \equiv 0$ und

$$f_1(t) := \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{4}t^2 & t > 0 \end{cases}$$

sind beides Integralkurven mit $f_i(0) = 0$, $i = 0, 1$.

Das Problem, eine Integralkurve f eines Vektorfeldes X mit vorgegeben $x_0 := f(t_0)$ zu finden ist das **Anfangswertproblem für ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung**

$$f' = X \circ f \ , \quad f(t_0) = x_0 \ .$$

Mit dem folgenden Trick kann man Differentialgleichungssysteme höherer Ordnung auf solche erster Ordnung zurückführen. Wir betrachten der Einfachheit skalare Probleme.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $R : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

Definition 69.2 *Eine n-mal differenzierbare Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung*

$$h^{(n)} = R(t, h, h', \ldots, h^{(n-1)}) \ ,$$

falls für die Abbildung $I \ni t \mapsto f(t) := (t, h(t), h'(t), \ldots, h^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt

1. $f(I) \subseteq U$
2. $h^{(n)} = f^*R$,

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist.

Wir betrachten das Vektorfeld auf U, welches durch $X(x) := (1, x_3, \ldots, x_{n+1}, R(x))$ gegeben wird.

Lemma 69.3 *Eine n-mal differenzierbare Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung*

$$h^{(n)} = R(t, h, h', \dots, h^{(n-1)}) \ ,$$

wenn $f : I \to U$, $f(t) := (t, h(t), h'(t), \dots, h^{(n-1)}(t))$ eine Integralkurve von X ist.

Proof. Ist h Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung, so ist offensichtlich f eine Integralkurve. Umgekehrt, ist f eine Integralkurve von X, so setzen wir $h(t) := f_2(t)$. Es gelten die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} f_1(t) & = & t \\ h'(t) & = & X_2(f(t)) = f_3(t) \\ h''(t) & = & f_3'(t) = X_3(f(t)) = f_4(t) \\ & \dots & \\ h^{(n-1)}(t) & = & f_n'(t) = X_n(f(t)) = f_{n+1}(t) \\ h^{(n)}(t) & = & f_{n+1}'(t) = X_{n+1}(t) = (f^*R)(t) \ , \end{array}$$

aus denen ersichtlich wird, daß h n-mal differenzierbar ist und die gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung erfüllt. □

69.1 Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Integralkurven des Vektorfeldes $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X(x) := 1 + x^2$.
2. Bestimmen Sie die Integralkurven von $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $X(x, y) = (y, x)$.
3. Reduzieren Sie zu einem System 1. Ordnung.

$$f''(t) = tf^2(t)g'(t) + 1 \ , \quad g''(t) = f(t)g(t) + f'(t) + t^2 \ .$$

70 Integration Banachraumwertiger Funktionen

Weiter vorne im Kapitel 47 hatten wir das Integral reeller Funktionen über die Integration einfacher Ober- und Unterfunktionen eingeführt. Diese Methode basiert wesentlich auf der Ordnungsrelation im Wertebereich $\mathbb{R}$. Folglich funktioniert diese Methode nicht für Banachraumwertige Funktionen. In diesem Kapitel erklären wir, wie man stetige Banachraumwertige Funktionen integriert.

Sei $(E, \|.\|)$ ein Banachraum und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Ein Partition P von $[a, b]$ ist eine endliche monotone Folge $(t_i)_{i=0}^n$ reeller Zahlen mit

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b \ .$$

Die Zahl $w(P) := \max\{t_i - t_{i-1} | i = 1, \ldots, n\}$ heißt Weite der Partition. Sind P und Q Partitionen, dann kann man eine gemeinsame Verfeinerung $P\sharp Q$ bilden, indem man die Vereinigung der Glieder von P und Q der Größe nach ordnet. Es gilt $w(P\sharp Q) \leq \min\{w(P), w(Q)\}$.

Wir betrachten eine Abbildung $f : [a,b] \to E$ und bilden die Summe

$$S_P(f) := \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) f(t_i) \ .$$

Definition 70.1 *Wir sagen, daß das Integral $\int_a^b f(t)dt$ existiert und gleich $x \in E$ ist, wenn für jede Folge (P_n) von Partitionen von $[a,b]$ mit $w(P_n) \to 0$ gilt*

$$\mathtt{lim}_{n\to\infty} S_{P_n}(f) = x \ .$$

Lemma 70.2 *Wenn $f : [a,b] \to E$ stetig ist, dann existiert $\int_a^b f(t)dt$.*

Proof. In der Tat ist f gleichmäßig stetig, da das Intervall $[a,b]$ kompakt ist. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ gegeben. Dann finden wir ein $\delta \in \mathbb{R}^>$ derart, daß aus $t, s \in [a,b]$ und $|t-s| \leq \delta$ die Ungleichung

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

folgt.
Seien nun $P = (t_0, \ldots, t_n)$ eine Partition mit $w(P) \leq \delta$ und $Q = (s_0 \leq \cdots \leq s_m)$ eine weitere Partition. Dann ist $|S_{P\sharp Q}(f) - S_P(f)| = \epsilon$. In der Tat ersetzt man in der Summe $S_{P\sharp Q}(f)$ in den Summanden mit dem Faktor $f(s_i)$ mit $t_{j-1} \leq s_i \leq t_j$ diesen Faktor durch $f(t_j)$. Es gilt $|s_i - t_j| \leq \delta$ und somit $\|f(s_i) - f(t_j)\| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$. Die Summe verändert man damit höchstens um einen Vektor der Länge ϵ. Durch diese Ersetzung erhält man jedoch den Wert von $S_P(f)$.

Sei nun (P_n) ein Folge von Partitionen mit $w(P_n) \to 0$. Dann ist $S_{P_n}(f)$ eine Cauchyfolge. In der Tat, wenn nur $w(P_n) \leq \delta$ und $w(P_m) \leq \delta$ ist, dann ist

$$\|S_{P_n}(f) - S_{P_m}(f)\| \leq \|S_{P_n}(f) - S_{P_n\sharp P_m}(f)\| + \|S_{P_n\sharp P_m}(f) - S_{P_m}(f)\| \leq 2\epsilon \ .$$

Da ein Banachraum vollständig ist, existiert $x := \mathtt{lim}_{n\to\infty} S_{P_n}(f)$.

Ist (Q_n) eine weitere Folge von Partitionen mit $w(Q_n) \to 0$, dann bilden wir die Folge (R_n) durch $R_{2n} := P_n$ und $R_{2n+1} := Q_n$. Da $\mathtt{lim}_{n\to\infty} S_{R_n}(f)$ existiert, müssen auch die beiden Teilfolgen $(S_{P_n}(f))$ und $(S_{Q_n}(f))$ den gleichen Grenzwert, nämlich x haben. □

Lemma 70.3 *Das Integral ist eine stetige lineare Abbildung $\int_a^b \ldots dt : C([a,b], E) \to E$. Es gilt*

$$\| \int_a^b f(t)dt \| \leq (b-a)\|f\| \ .$$

Proof. Sei P eine Partition von $[a,b]$. Dann gilt sicherlich für $f,g \in C([a,b],E)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, daß

$$S_P(f+\lambda g) = S_P(f) + \lambda S_P(g) \ .$$

Wendet man dies für eine Folge von Partitionen (P_n) mit $w(P_n) \to 0$ an, so erhält im Grenzwert die Linearität des Integrals. Weiterhin gilt sicher für jede Partition P

$$\|S_P(f)\| \leq \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\|f(t_i)\| \leq \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\| \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = \|f\|(b-a) \ .$$

Daraus folgt

$$\| \int_a^b f(t)dt\| \leq \|f\|(b-a) \ .$$

$\square$

Sei $f : [a,b] \to E$ stetig und $c \in (a,b)$.

Lemma 70.4 *Es gilt*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \ .$$

Proof. Sei P eine Partition von $[a,c]$ und Q eine Partition von $[c,b]$. Dann bilden wir die Vereinigung $P \cup Q$, eine Partition von $[a,b]$. Es gilt offensichtlich

$$S_P(f_{|[a,c]}) + S_Q(f_{|[c,b]}) = S_{P\cup Q}(f) \ .$$

Weiterhin ist $w(P\cup Q) \leq \max\{w(P), w(Q)\}$. Wenden wir dies auf Folgen (P_n) und (Q_n) mit $w(P_n) \to 0$ und $w(Q_n) \to 0$, dann erhalten wir im Grenzwert das gewünschte Ergebnis. $\square$

Sei $f : [a,b] \to V$ stetig und $c \in (a,b)$. Wir definieren $F : (a,b) \to V$ durch

$$F(t) := \begin{cases} \int_c^t f(s)ds & t > c \\ 0 & t = c \\ \int_t^c f(s)ds & t < c \end{cases} \ .$$

Lemma 70.5 *Die Abbildung F ist differenzierbar und es gilt $f'(t) = f(t)$.*

Proof. Analog zum Beweis von Satz 48.4. $\square$

70.1 Aufgaben

1. Sei $A \in L(E, E)$. Berechne $\int_0^1 \exp(tA)dt$.
2. Sei $f : [0, 1] \to E$ eine stetige Abbildung in einen Banachraum und $v \in E^* = L(E, \mathbb{R})$ eine stetige lineare Abbildung. Zeige, daß
$$v(\int_0^1 f(x)dx) = \int_0^1 v(f(x))dx$$
gilt.

71 Existenz und Eindeutigkeit von Integralkurven

Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume.

Definition 71.1 *Eine Abbildung $X : M \to N$ heißt L lipschitzstetig, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $a, b \in M$ gilt*
$$d_N(X(a), X(b)) \leq C d_M(a, b) \ .$$
Ist X lipschitzstetig, dann heißt die Zahl
$$\mathrm{Lip}(X) := \inf\{C \in \mathbb{R} \mid (\forall a, b \in X \mid d_N(X(a), X(b)) \leq C d_M(a, b))\}$$
Lipschitzkonstante von X.

Eine Lipsschitzstetige Abbildung ist stetig. In der Tat kann man im ϵ-δ-Kriterium $\delta = \mathrm{Lip}(X)^{-1}\epsilon$ setzen.

Sei $(V, \|.\|)$ ein reeller Banachraum und $U \subseteq V$ offen, $X : U \to V$ ein Vektorfeld und $x \in U$.

Theorem 71.2 (Existenz und Eindeutigkeit) *Wir nehmen an, daß X lipschitzstetig ist. Dann existiert ein $\epsilon_0 \in \mathbb{R}^>$ derart, daß es für jedes $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ genau eine Integralkurve $f : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ von X mit $f(0) = x$ gibt.*

Proof. Die Zahl $\epsilon > 0$ wird später im Beweis festgelegt. Wir setzen $I := (-\epsilon, \epsilon)$. Wir betrachten den Banachraum $E := C_b(I, V)$ und die Teilmenge $E_U := \{f \in E | f(I) \subseteq U\}$. Die Teilmenge $E_U \subseteq E$ ist nicht leer, da sie zum Beispiel die konstanten Abbildungen mit Werten in U enthält. Auf E_U können wir die Abbildung
$$A : E_U \to E \ , \quad A(f)(t) := x + \int_0^t X(f(s))ds \ .$$
definieren. In der Tat ist $Af : I \to V$ beschränkt. Erstens ist nämlich $f : I \to U \to V$ beschränkt, da I und damit $I \ni t \mapsto X(f(t)) \in V$ beschränkt ist wegen der Lipschitzstetigkeit von X. Daraus folgt die Beschränktheit von Af.

Lemma 71.3 *$f \in E_U$ ist genau dann Integralkurve von X mit $f(0) = x$, wenn $A(f) = f$ gilt.*

Proof. Sei f eine derartige Integralkurve. Dann gilt

$$\begin{aligned} A(f)(t) &= x + \int_0^t X(f(s))ds \\ &= x + \int_0^t f'(s)ds \\ &= x + f(t) - f(0) \\ &= f(t) \ . \end{aligned}$$

Wenn $A(f) = f$ gilt, so ist offensichtlich f differenzierbar, $f(0) = x$, und

$$f'(t) = (\int_0^{\dots} X(f(s))ds)'(t) = X(f(t)) \ .$$

□

Für das Theorem genügt es zu zeigen, daß für ein geeignetes $\epsilon > 0$ die Abbildung A genau einen Fixpunkt in E_U besitzt.

Lemma 71.4 *Die Abbildung A ist lipschitzstetig mit einer Lipschitzkonstanten $\epsilon \mathrm{Lip}(X)$.*

Proof. Für $f, g \in E_U$ und $t \in I$ gilt

$$\begin{aligned} \|A(f)(t) - A(g)(t)\| &= \|\int_0^t [X(f(s)) - X(g(s))]ds\| \\ &\leq |t| \sup_{s \in [0,t]} \|X(f(s)) - X(g(s))\| \\ &\leq \epsilon \mathrm{Lip}(X) \sup_{s \in I} \|f(s) - g(s)\| \\ &= \epsilon \mathrm{Lip}(X) \|f - g\| \ . \end{aligned}$$

Also

$$\|A(f) - A(g)\| = \sup_{t \in I} \|A(f)(t) - A(g)(t)\| \leq \epsilon \mathrm{Lip}(X) \|f - g\| \ .$$

□

Wenn wir also $\epsilon > 0$ so klein wählen, daß $\epsilon \mathrm{Lip}(X) < 1$ gilt, dann ist A eine Kontraktion und besitzt höchstens einen Fixpunkt.

Sei nun $f_0 \in E_U$ die konstante Abbildung mit Wert x. Sei $r \in \mathbb{R}^>$ so gewählt, daß $\overline{B(x,r)} \subset U$ gilt. Wir setzen $U_1 := B(f_0, r)$. Dann gilt $U_1 \subseteq E_U$. Sei weiterhin $C_1 := \sup_{v \in B(x,r)} \|X(v)\|$. Es gilt $C_1 \leq r \mathrm{Lip}(X) + \|X(x)\|$.

Lemma 71.5 *Wenn $\epsilon \in \mathbb{R}^>$ so klein gewählt wird, daß $\epsilon C_1 < r/2$ gilt, dann gilt $\overline{A(U_1)} \subset U_1$.*

Proof. Sei $f \in U_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|A(f) - f_0\| &= \sup_{t \in I} \| \int_0^t X(f(s)) ds \| \\ &\leq t \sup_{s \in [0,t]} \|X(f(s))\| \\ &\leq \epsilon C_1 \ . \end{aligned}$$

Folglich, $A(U_1) \subseteq \overline{B(f_0, \epsilon C_1)} \subseteq B(f_0, r/2)$ und damit $\overline{A(U_1)} \subseteq B(f_0, r)$. □

Ist also $\epsilon_0 \in \mathbb{R}^>$ so klein, daß gleichzeitig $\epsilon_0 C_1 < r/2$ und $\epsilon_0 \mathrm{Lip}(X) < 1$ gelten, und ist $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, dann besitzt A genau einen Fixpunkt f in U_1.
Damit ist die Existenzaussage bewiesen. Wir beenden nun den Beweis der Eindeutigkeit. Die Eindeutigkeit von Integralkurven, die in E_U liegen ist schon gezeigt. Wir müssen ausschließen, daß es noch weitere Integralkurven gibt, die nicht in E_U liegen. Sei $g : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ eine solche, notwendiger Weise unbeschränkte Integralkurve. Dann ist für jedes $\delta \in (0, \epsilon)$ die Zahl $\sup_{|t| \leq \epsilon - \delta} \|X(g(t))\| =: C_2(\delta)$ endlich. Es gilt für $|t| \leq \epsilon - \delta$, daß

$$\|g(t) - x\| \leq \epsilon C_2(\delta) \ .$$

Damit ist $g_{|(-\epsilon+\delta, \epsilon-\delta)}$ beschränkt und folglich gleich der Einschränkung $f_{|(-\epsilon+\delta, \epsilon-\delta)}$. Da δ beliebig klein sein darf, gilt $f = g$. Damit ist g beschränkt. Widerspruch! □

Ein zeitabhängiges Vektorfeld auf $U \subseteq V$ ist eine Abbildung $X : T \times U \to V$ für ein offenes Intervall $T \subseteq \mathbb{R}$, welches die Null enthält. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz gilt auch für zeitabhängige Vektorfelder, wenn man Lipschitzstetigkeit in der Ortsvariablen voraussetzt. Der Punkt ist, daß man Lipschitzstetigkeit in der Zeit nicht annehmen muß. Ansonsten könnte man das Problem in ein autonomes verwandeln und obigen Satz 71.2 anwenden. Diese Verallgemeinerung betrifft etwa eine Gleichung der Form

$$f'(t) = t^{1/3} f(t) \ , \quad f(0) = f_0 \ .$$

Unter einer Integralkurve mit Anfang in $x \in U$ versteht man eine Kurve $f : I \to U$ mit $f(0) = x$ und $f'(t) = X(t, f(t))$.

Theorem 71.6 *Wir nehmen an, daß X stetig ist, und daß es eine Konstante C gibt derart, daß $X(t, \dots) : U \to V$ lipschitzstetig mit $\mathrm{Lip}(X(t, \dots)) \leq C$ für alle $t \in T$ ist. Dann existiert ein $\epsilon_0 > 0$ derart, daß $(-\epsilon_0, \epsilon_0) \subseteq T$ gilt und es für jedes $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ genau eine auf $I := (-\epsilon, \epsilon)$ definierte Integralkurve $f : I \to U$ mit $f(0) = x$ gibt.*

Proof. Der Beweis ist wie in 71.2. Man setzt

$$Af(t) = x + \int_0^t X(s, f(s)) ds \ .$$

□

71.1 Aufgaben

1. Sei $U \subseteq E$ offen, $X : U \to E$ differenzierbar, und $\sup_{u \in U} \|dX(u)\| =: M$ endlich. Kann man schließen, daß X lipschitzstetig ist?

2. Ein Vektorfeld $X : U \to E$ heißt lokal lipschitzstetig, wenn jeder Punkt $x \in U$ eine Umgebung $x \in V \subseteq U$ besitzt so daß $X_{|V}$ lipschitzstetig ist. Zeigen Sie, daß ein stetig differenzierbares Vektorfeld lokal Lipschitzstetig ist.

72 Maximale Integralkurven und Vollständigkeit

Sei $U \subseteq V$ offen, $x \in U$ und $X : U \to V$ ein Vektorfeld. Sei $0 \in J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Ist $g : J \to U$ eine Integralkurve des Vektorfeldes und $I \subseteq J$ ein offenes Teilintervall mit $0 \in I$, dann ist $g_{|I} : I \to U$ auch eine Integralkurve. Wir betrachten auf der Menge der Integralkurven IK_x des Vektorfeldes X mit Anfang x die folgende partielle Ordnung: Es gilt

$$(f : I \to U) \leq (g : J \to U) \ ,$$

falls

$$I \subseteq J \quad \text{und} \quad f = g_{|I}$$

ist.

Theorem 72.1 *Unter den Voraussetzungen von Satz 71.2 gibt es genau eine maximale Integralkurve $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = x$.*

Proof. Die Existenz maximaler Integralkurven folgt aus folgender Betrachtung. Ist ist $(f_\alpha : I_\alpha \to U)_{\alpha \in L}$ eine Kette in IK_x von Integralkurven, dann ist $g : \bigcup_{\alpha \in L} I_\alpha \to U$, $g(t) := f_\alpha(t)$ für geeignetes $\alpha \in L$ so daß $t \in I_\alpha$, eine obere Schranke der Kette. Nach dem Lemma von Zorn folgt daraus die Existenz maximaler Integralkurven.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit. Seien $(g : J \to U)$ und $(f : I \to U)$ beides maximale Integralkurven mit $g(0) = f(0) = x$. Wir betrachten die Menge

$$E := \{t \in \mathbb{R} \mid (\forall s \in [0, t) \mid s \in I \cap J \text{ und } g(s) = f(s))\} \ .$$

Sei $T := \sup E$ und $S := \inf E$, wobei wir $T = \infty$ und $S = -\infty$ zulassen. Wegen der lokalen Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurven gilt offensichtlich $T > 0 > S$.
Wir zeigen, daß $J = I = (S, T)$. Klar ist daß $(S, T) \subseteq J \cap I$. Wäre diese Inklusion echt, dann können wir etwa annehmen, daß $T \in I \cap J$. Sei $y := f(T) = g(T)$, wobei die zweite Gleichheit aus der Stetigkeit der Integralkurven folgt. Dann gilt für alle genügend kleinen $\epsilon > 0$, daß $f_T(t) := f(t + T)$ und $g_T(t) := g(t + T)$ zwei verschiedene Integralkurven von X auf $(-\epsilon, \epsilon)$ mit $g_T(0) = f_T(0) = y$ definieren. Dies steht im Widerspruch zur lokalen Eindeutigkeit nach Satz 71.2.

Auf analoge Weise führt man $S \in I \cap J$ zum Widerspruch. Wir haben damit indirekt gezeigt, daß $I \cap J = (S, T)$. Wäre $I \neq J$, dann würde $I \subset I \cup J$ oder $J \subset I \cup J$ gelten. Wir definieren $h : I \cup J \to U$ durch

$$h(t) := \begin{cases} f(t) & t \in I \\ g(t) & t \in J \end{cases} .$$

Dann ist nach obiger Diskussion h wohldefiniert und eine Integralkurve von X mit Anfang in x. Diese setzt aber mindestens eine von f oder g echt fort, ein Widerspruch zur Maximalität von f und g. □

Für diesen Satz haben wir nur die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Integralkurven benutzt. Deshalb gilt er unter etwas allgemeineren Voraussetzungen, etwa wenn das Vektorfeld durch Umwandlung eines nicht-autonomen in ein autonomes System entsteht, und das nicht-autonome nur in der Ortsrichtung lipschitzstetig (lokal gleichmäßig in der Zeit) ist.

Sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge eines Banachraums und X ein lipschitzstetiges Vektorfeld auf U.

Definition 72.2 *1. Das Vektorfeld X heißt vollständig, falls für jedes $x \in U$ und die maximale Integralkurve $f : I \to U$ von X mit $f(0) = x$ gilt : $I = \mathbb{R}$.*

2. Das Vektorfeld X heißt halbvollständig, falls für jedes $x \in U$ und die maximale Integralkurve $f : I \to U$ von X mit $f(0) = x$ gilt : $\sup I = \infty$.

Ist $I \subset \mathbb{R}$, dann sei $I_+ := [0, \infty) \cap I$. Analog definieren I_- als den negativen Teil von I.

Proposition 72.3 *Sei $f : I \to U$ eine maximale Integralkurve und $t_\infty := \sup I < \infty$. Dann ist $\overline{f(I_+)} \cap U$ nicht kompakt.*

Proof. Wir nehmen an, daß $\overline{f(I_+)} \cap U$ kompakt sei.

Lemma 72.4 *f setzt sich stetig auf $\bar{I}_+$ fort.*

Proof. Da $v \mapsto \|X(v)\|$ stetig und $\overline{f(I_+)} \cap U$ kompakt ist, ist $M := \sup_{v \in \overline{f(I_+)} \cap U} \|X(v)\|$ eine wohldefinierte reelle Zahl. Sei (t_n) eine Folge in I_+ mit $t_n \to t_\infty$. Sei $y \in \overline{f(I_+)} \cap U$ ein Häufungspunkt von $(f(t_n))$. Wir müssen zeigen, daß $\mathtt{lim}_{t \to t_\infty} f(t) = y$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} \|f(t) - y\| &\leq \|f(t) - f(t_n)\| + \|f(t_n) - y)\| \\ &= \|\int_{t_n}^{t} X(f(s))ds\| + \|f(t_n) - y)\| \\ &\leq M|t - t_n| + \|f(t_n) - y)\| . \end{aligned}$$

Für gegebenes $\epsilon \in \mathbb{R}^{>}$ wählen wir $n \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$M|t_\infty - t_n| + \|f(t_n) - y)\| < \epsilon$$

gilt. Dann gilt $\|f(t)-y\| < \epsilon$, falls nur $t \in (t_n, t_\infty)$. $\square$

Sei $g : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ eine Integralkurve von X mit $g(0) = y$. Wir definieren

$$h : I \cup [0, t_\infty + \epsilon) \to U$$

durch $h(t) := f(t)$ für $t \in I$ und $h(t) := g(t - t_\infty)$ für $t \in [t_\infty, t_\infty + \epsilon)$. Die Abbildung h ist stetig und auf $t \neq t_\infty$ differenzierbar und dort auch Integralkurve von X. Es gilt

$$\mathtt{lim}_{s \downarrow t_\infty} \frac{h(s) - h(t_\infty)}{s - t_\infty} = X(y) \; .$$

Auf der anderen Seite ist für $0 < s < t < t_\infty$

$$f(t) - f(s) = \int_s^t X(f(u))du \; .$$

Wir schließen daraus

$$f(t_\infty) - f(s) = \int_s^{t_\infty} X(f(u))du$$

und folglich

$$\mathtt{lim}_{s \uparrow t_\infty} \frac{h(s) - h(t_\infty)}{s - t_\infty} = \mathtt{lim}_{s \uparrow t_\infty} \frac{\int_s^{t_\infty} X(f(u))du}{s - t_\infty} = X(y) \; .$$

Also gilt $h'(t_\infty) = X(y)$. Damit ist h eine Integralkurve von X mit Anfang in x, welche $f : I \to U$ echt fortsetzt. Das steht im Widerspruch zur Maximalität von $f : I \to U$. $\square$

1. Wir betrachten das konstante Vektorfeld $X : V \to V$ mit dem Wert $\xi \in V$. Dieses ist vollständig. In der Tat ist $f(t) = x + t\xi$, $t \in \mathbb{R}$, die eindeutige maximale Integralkurve mit Anfang in $x \in V$.

2. Sei $U := V \setminus \{0\}$. Die Einschränkung von X auf U ist nicht mehr vollständig. So ist etwa die maximale Integralkurve $f(t) = -\xi + t\xi$ mit Anfang in $x := -\xi$ nur noch auf $(-\infty, 1)$ definert.

3. Das Vektorfeld $X(x,y) = (1, y^2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist nicht vollständig. Die Integralkurve mit Anfang in $(0, c)$ ist durch $f(t) = (t, \frac{c}{1-ct})$ gegeben. Für $c > 0$ ist diese maximal auf dem Intervall $(-\infty, c^{-1})$ definiert.

4. Schränkt man das Vektorfeld aus der vorherigen Aufgabe auf $\{y < 0\}$ ein, so ist es immer noch halbvollständig. Die Lösung mit Anfang in (s, c) ist $f(t) := (t - s, \frac{c}{1-c(t-s)})$ und auf $(c^{-1}(1 + sc), \infty)$ definiert.

Eine Methode, die Vollständigkeit von Vektorfeldern einzusehen, beruht auf Ljapunov-funktionen

Definition 72.5 *Ein Abbildung $L : M \to N$ zwischen topologischen Räumen M und N heißt eigentlich, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq N$ das Urbild $f^{-1}(K) \subseteq M$ kompakt ist.*

1. Die Konstante Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht eigentlich.

2. Die Abbildung $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2$ ist eigentlich.

Sei $\bar{\mathbb{R}}_- := [-\infty, \infty)$. Sie $X : U \to V$ ein lipschitzstetiges Vektorfeld auf V.

Definition 72.6 *Eine Ljapunovfunktion für X ist eine differenzierbare Abbildung $L : U \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften.*

1. *Für alle $x \in U$ gilt die Ungleichung $dL(x)(X(x)) \leq 0$.*

2. *$L : U \to \bar{\mathbb{R}}_-$ ist eigentlich.*

Theorem 72.7 *Existiert für X eine Ljapunovfunktion, so ist X halbvollständig.*

Proof. Sei $x \in U$ und $f : I \to U$ die maximale Integralkurve mit $f(0) = x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (f^*L)'(t) &= dL(f(t))(f'(t)) \\ &= dL(f(t))(X(f(t))) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Wir schließen, daß $L(f(t)) \leq L(x)$. Also ist $f(I_+) \subseteq L^{-1}([-\infty, L(x))$, woraus die Kompaktheit von $\overline{f(I_+)} \cap U$ folgt. Also ist $\sup I_+ = \infty$. □

Hier sind einige Beispiele.

1. Sei $(V, < ., . >)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, $U \subset V$ offen und $L : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit lipschitzstetiger Ableitung und so, daß $L : U \to \bar{\mathbb{R}}_-$ eigentlich ist. Wir betrachten das Vektorfeld $\mathrm{grad}(L) : U \to V$ welches durch

   $$\langle \mathrm{grad}(L)(x), \xi \rangle = dL(x)(\xi) \quad \forall x \in U \ , \quad \xi \in V$$

   characterisiert ist. Wir betrachten $X := -\mathrm{grad}(L)$. Dieses Vektorfeld ist halbvollständig. In der Tat ist L eine Ljapunovfunktion für X, da

   $$dL(x)(X(x)) = -\langle \mathrm{grad}(L)(x), \mathrm{grad}(L)(x) \rangle \leq 0$$

   gilt.

2. Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $L(x) = \|x\|^2$. Dann ist $X(x) = -2x$. Dieses Feld ist halbvollständig. In der Tat sind die Teilmengen $\{L(x) \leq R\} = \{\|x\|^2 \leq R\}$ kompakt. Man kann die Lösung hier sogar explizit finden. Es gilt für die Integralkurve mit Anfang in x:

   $$f(t) = e^{-2t}x \ .$$

   Diese Formel zeigt sogar die Vollständigkeit.

3. Sei L wie in 1. und $Y : U \to V$ ein weiteres Lipschitz-stetiges Feld mit der Eigenschaft $< X, Y > \geq 0$. Dann ist für jede Lipschitz-stetige Funktion $\phi : U \to [0, \infty)$ das Feld $Z := \phi X + Y$ halbvollständig. L ist Ljapunovfunktion von Z.

4. Sei $V := \mathbb{R}^2$ und
$$D := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
und ϕ wie in 3. Dann ist $Z(x) := -\phi(x)x + Dx$ halbvollständig.

73 Ausblicke

Die folgenden Themen gehören natürlicher Weise zum Abschnitt über gewöhnliche Differentialgleichungen, wurden aber aus Zeitgründen nicht mehr behandelt.

1. Wachstumsabschätzungen und Gronwall Ungleichung
2. allgemeine Lösung linearer Differentialgleichungssysteme
3. Diskussion von Resonanz für die angeregte Schwingungsgleichung
4. stetige und differenzierbare Abhängigkeit der Lösung von Anfangsbedingungen und Parametern
5. Flüsse
6. Hamiltonsche Systeme, Erhaltungsgrößen, klassische Mechanik
7. Verhalten in der Nähe stationärer Punkte
8. Globale qualitative Diskussion von Vektorfeldern auf $\mathbb{R}^2$.
9. Attraktoren und Chaos

Desweiteren sind mehrdimensionale Integrale (iterierte Riemannintegrale) nicht behandelt worden.

Literatur

[Gro73] A. Grothendieck. *Topological vector spaces.* Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1973. Translated from the French by Orlando Chaljub, Notes on Mathematics and its Applications.

[Heu09] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Vieweg + Teubner, Wiesbaden, revised edition, 2009.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.