

Berechnungen in der stabilen Homotopietheorie

U. Bunke *

25. Januar 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Homotopie und Stabilisierung	1
1.1 Einhängung und der Satz von Freudenthal	1
1.2 Stabile Homotopiemengen	3
2 Die Steenrod Algebren	4
2.1 Eilenberg MacLane Räume und Spektren	4
2.2 Die Struktur von \mathcal{A}_2	5
2.3 Die Berechnung von $H^*(K(\mathbb{F}_2, n))$	6
3 Stabile Homotopiegruppen von Sphären	9
3.1 Hopfababbildungen	9
3.2 Die Adams Spektralsequenz	10
3.3 Berechnung der zweiten Seite der Adams Spektralsequenz	16
4 The Thom spektrum MU	18
4.1 Kohomologie und Homologie von BU	18
4.2 Die Hopfalgebrastruktur	21
4.3 Die Homologie des Thom Spektrums MU	23
4.4 Die mod p -Steenrodalgebra	25
4.5 Die Homologie von MU mit \mathbb{F}_p -Koeffizienten	29
5 Die Homotopie von MU	31
5.1 $Cotor$	31
5.2 Berechnung von $Cotor$	34
5.3 Die Homotopiegruppen von MU	36

1 Homotopie und Stabilisierung

1.1 Einhängung und der Satz von Freudenthal

1.1.1 Sei \mathcal{T}_* die Kategorie der punktierten CW -Komplexe. Sei $S^1 := [0, 1]/\{0\} \sim \{1\} \in \mathcal{T}_*$ die basierte 1-Sphäre. Mit $\Sigma : \mathcal{T}_* \rightarrow \mathcal{T}_*$, $X \mapsto \Sigma X := S^1 \wedge X$ bezeichnen wir den Einhängungsfunktor. Wir haben eine natürliche Abbildung $S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1$ welche auf $S^n = S^1 \wedge S^{n-1}$ eine kommutative $co-H$ -Raumstruktur $S^n \vee S^n \rightarrow S^n$ induziert. Wir definieren $\pi_n(X) := [S^n, X]$ mit der von der $co-H$ -Raumstruktur induzierten Gruppenstruktur, wobei für $X, Y \in \mathcal{T}_*$ $[X, Y] := h\mathcal{T}(X, Y)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten des Raumes $\mathcal{T}(X, Y)$ bezeichnet.

*Mathematisches Institut, Universität Göttingen, Bunsenstr. 3-5, 37073 Göttingen, GERMANY, bunke@uni-math.gwdg.de

1.1.2

Definition 1.1 Eine Abbildung $f \in \mathcal{T}_*(X, Y)$ heißt n -zusammenhängend, wenn sie einen Isomorphismus $\pi_r(f) : \pi_r(X) \rightarrow \pi_r(Y)$ für $r \leq n$ und eine Surjektion $\pi_{n+1}(f) : \pi_{n+1}(X) \rightarrow \pi_{n+1}(Y)$ induziert.

Ein entsprechende Sprechweise werden wir auch für Abbildungen zwischen graduierten abelschen Gruppen benutzen.

Definition 1.2 Ein Raum $X \in \mathcal{T}_*$ heißt n -zusammenhängend, wenn die kanonische Abbildung $X \rightarrow *$ n -zusammenhängend ist.

Wir verwenden eine entsprechende Sprache auch für Paare und relative Homotopiegruppen.

1.1.3

Proposition 1.3 (Ausschneidung für Homotopiegruppen, Prop. 6.21, [9], Blakers-Massey) Sei (X, A, B) eine Triade in \mathcal{T} derart, daß $(A, A \cap B)$ n -zusammenhängend für $n \geq 1$ und $(B, A \cap B)$ m -zusammenhängend sind. Dann ist $(A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ $n + m$ -zusammenhängend.

In einer Triade von CW-Komplexen (X, A, B) sind sowohl A als auch B und damit $A \cap B$ Unterkomplexe. Der Beweis ist nicht ganz leicht. Hier ist eine Variante aus [3, Thm. 3.2.4]

Wir nehmen an, daß $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$. Wir ersetzen $i : A \rightarrow X$ durch eine Faserung $\rho : E(i) \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccc} E(i) & \longrightarrow & X^I \\ \downarrow & & \downarrow \text{ev}_0 \\ A & \longrightarrow & X \end{array} .$$

Sei $p : PX \rightarrow X$ der Wegraum. Die Faser von ρ über dem Basispunkt ist $p^{-1}(A) =: F$. Sei $E_B := \rho^{-1}(B)$.

1. Dann ist $p_* : \pi_*(PX, F) \rightarrow \pi_*(X, A)$ ein Isomorphismus.
2. $\partial : \pi_n(PX, F) \rightarrow \pi_{n+1}(F)$ ist ein Isomorphismus, da PX zusammenziehbar ist.
3. Die Ausschneidung $H_*(B, A \cap B) \rightarrow H_*(X, A)$ ist ein Isomorphismus.
4. Nach Hurewicz ist mit $(B, A \cap B)$ auch (X, A) m -zusammenhängend.
5. Es folgt, daß F $m - 1$ -zusammenhängend ist.
6. Nach Ausschneidung ist $H_*(A, A \cap B) \rightarrow H_*(X, B)$ ein Isomorphismus
7. Nach Hurewicz ist (X, B) n -zusammenhängend.
8. Wir betrachten die Serre-Spektralsequenz für die Faserung $\rho : (E(i), E_B) \rightarrow (X, B)$. Die Blockstruktur ergibt, daß ρ $(n + m)$ -zusammenhängend ist.
9. Sei $f : (A, A \cap B) \rightarrow (E(i), E_B)$ die kanonische Abbildung. Dann ist $\rho \circ f = j : (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ eine Ausschneidungsabbildung. Wir schließen, daß $f_* : H_*(A, A \cap B) \rightarrow H_*(E(i), E_B)$ $n + m$ -zusammenhängend ist.
10. Da $f : A \rightarrow E(i)$ eine Homotopieäquivalenz ist, schließen wir mit dem Fünferlemma, daß

$$f_* : H_*(A \cap B) \rightarrow H_*(E_B)$$

eine $n + m - 1$ -zusammenhängend ist.

11. Nach Whitehead ist $f_* : A \cap B \rightarrow E_B$ eine $n + m - 1$ -zusammenhängend.
12. Nach dem Fünferlemma ist $f : (A, A \cap B) \rightarrow (E(i), E_B)$ eine $n + m$ -zusammenhängend.

13. Nun gilt $\rho_* \circ f_* = j_*$. Da ρ und f $n + m$ -zusammenhängend sind, ist es auch j .

Wenn man voraussetzt, daß $X = A \cup B$ und $A \cap B = \partial A = \partial B$, dann nehmen wir an, daß ∂A ein starker Deformationsretrakt von $U \subset B$ (offen) ist. Dann ersetzen wir A durch $A \cup U$ und argumentieren wie oben. \square

1.1.4

Lemma 1.4 Sei $A \subset X$ und (X, A) n -zusammenhängend, $n \geq 1$ sowie A m zusammenhängend. Dann ist die Projektion $p : (X, A) \rightarrow (X/A, *)$ eine $m + n$ -zusammenhängende Abbildung.

Proof : Wir betrachten

$$\begin{array}{ccc} (X, A) & \xrightarrow{i} & (X \vee CA, CA) \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ (X/A, *) & \xrightarrow{\phi} & ((X \vee CA)/CA, *) \end{array} .$$

Da CA zusammenziehbar ist, ist q eine Homotopieäquivalenz. Die Abbildung ϕ ist ein Homeomorphismus. Mit Hilfe der langen exakten Sequenz des Paares (CA, A) und der Zusammenziehbarkeit von CA zeigt man, daß $(CA, X \cap CA) \cong (CA, A)$ $m + 1$ -zusammenhängend ist. Wir betrachten nun Ausschneidung 1.3 für die Triade $(X \vee CA, X, CA)$ mit der Aussage, daß $i : (X, A) \rightarrow (X \vee CA, CA)$ $n + m$ -zusammenhängend ist.

1.1.5

Theorem 1.5 (Freudenthal) Wenn X n zusammenhängend ist, $n \geq 1$, dann ist $\sigma_r : \pi_r(X) \rightarrow \pi_{r+1}(\Sigma X)$ $2n + 1$ -zusammenhängend.

cProof : Die lange exakte Sequenz des Paares $(C(X), X)$ in Homotopiegruppen und $\pi_*(C(X)) \cong 0$ zeigen, daß $\delta : \pi_{r+1}(C(X), X) \rightarrow \pi_r(X)$ ein Isomorphismus ist. Folglich ist $(C(X), X)$ $n + 1$ -zusammenhängend. Die Projektion $p : (C(X), X) \rightarrow \Sigma X$ ist nach Lemma 1.4 $2n + 1$ -zusammenhängend. Die Komposition $\pi_r(p) \circ \delta^{-1} : \pi_r(X) \rightarrow \pi_{r+1}(\Sigma X)$ ist also ein Isomorphismus für $r \leq 2n$ und surjektiv für $r \leq 2n + 1$. Die Behauptung folgt nun aus der Beobachtung, daß diese Komposition gerade die Einhängungsabbildung ist. \square

Siehe auch [9, Thm. 6.26]

Corollary 1.6 Ist X einfach zusammenhängend, so ist $\Sigma^n X$ $n + 1$ -zusammenhängend.

1.2 Stabile Homotopiemengen

1.2.1 In diesem Abschnitt wird der folgende Satz diskutiert.

Theorem 1.7 (vergl. Thm. 1.3.1. [1]) Sei $X \in \mathcal{T}_*$ $n - 1$ -zusammenhängend und $W \in \mathcal{T}_*$ d -dimensional. Dann ist die Einhängungsabbildung $\sigma : [W, X] \rightarrow [\Sigma W, \Sigma X]$ $2n - 1$ -zusammenhängend.

Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [W, X] & \xrightarrow{\sigma} & [\Sigma W, \Sigma X] \\ & \searrow i_* & \swarrow \cong \\ & [W, \Omega \Sigma X] & \end{array} .$$

wobei $i : X \rightarrow \Omega \Sigma X$ die kanonische Abbildung ist. Wir müssen die entsprechende Behauptung für i_* zeigen. Sei $W^r \subset W^{r+1}$ die Skelettfitration. Wir erhalten eine Kofasersequenz

$$W^r \xrightarrow{j} W^{r+1} \longrightarrow C(j) \longrightarrow \Sigma W^r$$

und eine induzierte Abbildung von exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc}
[\Sigma W^r, X] & \longrightarrow & [C(j), X] & \longrightarrow & [W^{r+1}, X] & \longrightarrow & [W^r, X] & \longrightarrow & * \\
\downarrow j_* & & \downarrow \bar{i}_*^{r+1} & & \downarrow i_*^{r+1} & & \downarrow i_*^r & & \parallel \\
[\Sigma W^r, \Omega \Sigma X] & \longrightarrow & [C(j), \Omega \Sigma X] & \longrightarrow & [W^{r+1}, \Omega \Sigma X] & \longrightarrow & [W^r, \Omega \Sigma X] & \longrightarrow & *
\end{array}$$

Der Kegel $C(j)$ ist homotopieäquivalent zu einem Strauß von $r + 1$ -Sphären. Nach 1.5 ist \bar{i}_*^{r+1} eine Bijektion für $r + 1 \leq 2n - 2$ und surjektiv für $r + 1 \leq 2n - 1$.

Wir argumentieren nun induktiv in r . Wenn $r + 1 \leq 2n - 1$ ist, kann man durch Diagrammjagd zeigen, daß die Surjektivität von i_*^r die Surjektivität von i_*^{r+1} impliziert. Eine zweite Diagrammjagd zeigt nun induktiv die Injektivität von i_*^{r+1} für $r \leq 2n - 2$ unter Benutzung der Surjektivität von j_* . \square

1.2.2 Sei $h\mathcal{S}$ die stabile Homotopiekategorie, d.h. die Homotopiekategorie der Kategorie der CW -Spektren \mathcal{S} . Die Kategorie $h\mathcal{S}$ ist eine triangulierte Kategorie, deren ausgezeichnete Dreiecke Fasersequenzen genannt werden.

Wir haben einen Funktor $\Sigma^\infty : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ welcher den Raum X in das Einhängungsspektrum Σ^∞ überführt. Kofasersequenzen in \mathcal{T} gehen dabei in Fasersequenzen über. Es gilt

$$h\mathcal{S}(\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y) = \operatorname{colim}_n [\Sigma^n X, \Sigma^n Y] .$$

Der Satz 1.7 hat folgende Konsequenz.

Corollary 1.8 *Ist $\dim(X) = d$, dann ist $h\mathcal{S}(\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y) \cong [\Sigma^n X, \Sigma^n Y]$ für $d \leq n - 4$ ein Isomorphismus.*

Definition 1.9 *Wir bezeichnen die stabilen Homotopiemengen mit $[X, Y]^s := h\mathcal{S}(\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y)$ und definieren die stabilen Homotopiegruppen $\pi_i^s(X) := [S^i, X]^s$.*

In dieser Vorlesung wollen wir uns mit algebraischen Berechnungsmethoden für die Gruppe $[X, Y]^s$ beschäftigen. Das Korollar 1.8 quantifiziert den Ort des Verlustes an Information unter der Stabilisierung

$$[X, Y] \longrightarrow [\Sigma^n X, \Sigma^n Y] \longrightarrow [X, Y]^s .$$

2 Die Steenrod Algebren

2.1 Eilenberg MacLane Räume und Spektren

2.1.1

Definition 2.1 *Sei π eine abelsche Gruppe. Der Homotopietyp $K(\pi, n)$ in $h\mathcal{T}_*$ wird durch $\pi_j(K(\pi, n)) \cong 0$ für $j \neq n$ und $\pi_n(K(\pi, n)) \cong \pi$ charakterisiert.*

Es ist leicht, Abbildung in Eilenberg-MacLane Räume zu kontrollieren.

Lemma 2.2 *Sei $X \in \mathcal{T}$ n -zusammenhängend und $\pi_n(X) \rightarrow \pi$ ein Homomorphismus. Dann gibt es genau eine Homotopieklasse von Abbildungen $X \rightarrow K(\pi, n)$, welche diesen Homomorphismus induziert.*

Proof : Ein Beweis geht mit Obstruktionstheorie. Dieses Lemma zeigt auch, daß zwei Modelle von $K(\pi, n)$ in $h\mathcal{T}_*$ kanonisch isomorph sind, wenn man nur den Isomorphismus auf dem Niveau von π_n fixiert.

2.1.2 Der Satz von Hurewicz zeigt, daß $H_n(K(\pi, n), \mathbb{Z}) \cong \pi$ gilt. Universelle Koeffizienten liefern einen Isomorphismus

$$H^n(K(\pi, n), \pi) \cong \operatorname{Hom}(H_n(K(\pi, n), \mathbb{Z}), \pi) \cong \operatorname{Hom}(\pi, \pi) .$$

Mit $\iota_n \in H^n(K(\pi, n), \pi)$ bezeichnen wird das Element, welches unter diesem Isomorphismus der Identität entspricht.

2.1.3

Lemma 2.3 Das Paar $(K(\pi, n), \iota_n)$ repräsentiert den Funktor $H^n(\dots, \pi)$ auf \mathcal{T}_*^{fin} .

Die Transformation $[X, K(\pi, n)] \rightarrow H^n(X, \pi)$ ordnet dabei der Klasse $[f] \in [X, K(\pi, n)]$ die Klasse $f^* \iota_n \in H^n(X, \pi)$ zu.

Proof : Wir fixieren eine Folge von Modellen $K(j, \pi)$, $j \geq 0$. Dann gibt es Isomorphismen $\sigma^j : \Sigma K(j, \pi) \cong K(j+1, \pi)$ welche nach Lemma 2.2 bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt sind. Wir erhalten somit ein schwaches Ω -Spektrum $H\pi := (K(\pi, j), \sigma^j)$. Dieses repräsentiert eine Kohomologietheorie. Die im Lemma angegebene Transformation vergleicht diese mit $H^*(\dots, \pi)$. Da die Koeffizienten übereinstimmen, stimmen beide auf \mathcal{T}_*^{fin} überein. \square

Definition 2.4 $H\pi$ heißt Eilenberg-MacLane-Spektrum zu π .

2.1.4 Wir fassen π als diskreten Raum auf. Dann haben wir $H\pi \cong \Sigma^\infty(\pi_+)$. Ist R ein Ring, dann erhalten wir einen Ring $HR := \Sigma^\infty R \in h\mathcal{S}$, also eine multiplikative Kohomologietheorie.

2.1.5 Sei K ein Spektrum. Dann ist $[K, K]$ ein nicht-kommutativer Ring. Die Summe kommt von der additiven Struktur von \mathcal{S} und das Produkt wird von der Komposition induziert.

Für ein Raum oder ein Spektrum X definieren wir die Kohomologiegruppen $K^*X := [X, K]_*$ und die Homologiegruppen $K_*X := [S, X \wedge K]$. Beide Gruppen sind in natürlicher Weise Moduln über dem Ring $[K, K]$. Diese zusätzliche Struktur ist sehr nützlich für Berechnungen.

2.1.6 Eine besonders wichtige Rolle spielt der Körper \mathbb{F}_p für Primzahlen $p \in \mathbb{N}$.

Definition 2.5 Die \mathbb{F}_p -Algebra $\mathcal{A}_p := [H\mathbb{F}_p, H\mathbb{F}_p]$ heißt Steenrod Algebra zu p .

Ist p klar, dann werden wir oft $\mathcal{A} := \mathcal{A}_p$ setzen. Es ergibt sich nun die Aufgabe, \mathcal{A}_p explizit zu beschreiben. Wir werden sie in 2.2 abstrakt durch Erzeuger und Relationen einführen. In 2.3 werden wir zeigen, daß die so beschriebene Algebra tatsächlich die oben definierte Steenrodalgebra ist. Wir werden besonders den Fall $p = 2$ betrachten, da er einfacher als die anderen ist.

2.2 Die Struktur von \mathcal{A}_2

2.2.1 In diesem Kapitel betrachten wir den Grundkörper \mathbb{F}_2 . Insbesondere ist auch Kohomologie mit \mathbb{F}_2 -Koeffizienten, also $H(X) := H(X, \mathbb{F}_2)$.

2.2.2

Definition 2.6 Wir definieren eine (nicht-kommutative) \mathbb{F}_2 -Algebra \mathcal{A}_2 durch Erzeuger Sq^i , $i = 0, \dots$ mit $\text{Sq}^0 := \text{id}$ und den Adem Relationen

$$\text{Sq}^a \text{Sq}^b = \sum_{j=0}^{\lfloor a/2 \rfloor} \binom{b-1-j}{a-2j} \text{Sq}^{a+b-j} \text{Sq}^j \quad 0 < a < 2b .$$

Die Algebra \mathcal{A}_2 ist graduiert durch $|\text{Sq}^i| := i$.

2.2.3 Wir setzen als bekannt voraus, daß die \mathcal{A}_2 durch stabile Operationen auf der Kohomologie mit Koeffizienten \mathbb{F}_2 wirkt. Dazu konstruiert man Operation Sq^i auf der Kohomologie direkt und weist die Ademrelationen nach. Wir werden weiter folgende Relationen benutzen:

1. $\text{Sq}^0 = 1$,
2. $\text{Sq}^n x = x^2$ für $x \in H^n(X)$
3. $\text{Sq}^i x = 0$ für $i > |x|$.

4. (Cartan-Formel)

$$\mathrm{Sq}^k(xy) = \sum_{i=0}^k \mathrm{Sq}^i x \mathrm{Sq}^{k-i} y .$$

5. Sq^1 ist der Bocksteinoperator zu der Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 .$$

6. Sq^i ist stabil, also kommutiert mit den Randoperatoren der langen exakten Sequenzen, Meyer-Vietoris Sequenz und dem Einhängungsisomorphismus.

Man kann zeigen, daß 6. aus 1 und 4 folgt ([8, Lemma 1.1]).

2.2.4 Wir wollen eine additive Basis dieser Algebra finden. Jedes Element ist Summe von Monomen $\mathrm{Sq}^I := \mathrm{Sq}^{i_1} \mathrm{Sq}^{i_2} \dots \mathrm{Sq}^{i_k}$, $I = (i_1, \dots, i_k)$.

Definition 2.7 Wir nennen $k := l(I)$ die Länge von I .

Die Zahl $m(I) := \sum_{s=1}^{l(I)} i_s$ nennen wir das Moment von I .

Wir machen nun folgende Beobachtung. Wenn wir auf Sq^I die Ademrelationen anwenden können, dann kann man Sq^I durch eine Summe von Termen mit kleineren Momenten darstellen.

Definition 2.8 Wir nennen I zulässig, wenn $i_s \geq 2i_{s+1}$ für $s = 1, \dots, l(I) - 1$ gilt.

Wenn I zulässig ist, dann kann man keine Ademrelationen anwenden. Hier sind einige zulässige Monome:

$$\mathrm{Sq}^5 \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^1, \quad \mathrm{Sq}^4 \mathrm{Sq}^2, \quad \mathrm{Sq}^8 \mathrm{Sq}^4 \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^1$$

und einige unzulässige:

$$\mathrm{Sq}^5 \mathrm{Sq}^3 \mathrm{Sq}^1, \quad \mathrm{Sq}^4 \mathrm{Sq}^3, \quad \mathrm{Sq}^8 \mathrm{Sq}^3 \mathrm{Sq}^2 \mathrm{Sq}^1 .$$

Proposition 2.9 Sie Monome Sq^I für alle zulässigen I bilden eine additive Basis von \mathcal{A}_2 .

Proof : Im Moment sehen wir nur, daß diese Menge erzeugt. Für die lineare Unabhängigkeit verweisen wir auf das Argument in [8, 1.3.2]

2.3 Die Berechnung von $H^*(K(\mathbb{F}_2, n))$

2.3.1 Wir kennen $K(\mathbb{F}_2, 1) \cong \mathbb{R}P^\infty$. Es gilt

$$H^*(K(\mathbb{F}_2, 1), \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\iota_1], \quad |\iota_1| = 1 .$$

2.3.2 Für die Berechnung von $H^*(K(\mathbb{F}_2, n), \mathbb{F}_2)$ gehen wir induktiv vor. Die entscheidende Idee ist es, die Faserung

$$K(\mathbb{F}_2, n-1) \rightarrow PK(\mathbb{F}_2, n) \rightarrow K(\mathbb{F}_2, n)$$

zu benutzen, wobei $PK(\mathbb{F}_2, n)$ der zusammenziehbare Wegerraum von $K(\mathbb{F}_2, n)$ ist. Wir setzen die Serre Spektralsequenz an, um $H^*(PK(\mathbb{F}_2, n)) \cong \mathbb{F}_2$ zu berechnen. Der E_2 -Term hat die Form (universelle Koeffizienten)

$$E_2^{r,s} := H^r(K(\mathbb{F}_2, n), H^s(K(\mathbb{F}_2, n))) \cong H^r(K(\mathbb{F}_2, n)) \otimes H^s(K(\mathbb{F}_2, n-1)) .$$

Hier benutzen wir, daß $H^s(K(\mathbb{F}_2, n))$ endlich erzeugt ist, und daß die Koeffizienten \mathbb{F}_2 einen Körper bilden.

2.3.3 Hier ist ein Bild eines Teils der E_2 -Seite für $n = 2$.

$$\begin{array}{cccccc} \iota_1^3 & 0 & \iota_2 \otimes \iota_1^3 & ?_3 \otimes \iota_1^3 & ?_4 \otimes \iota_1^3 & \\ \iota_1^2 & 0 & \iota_2 \otimes \iota_1^2 & ?_3 \otimes \iota_1^2 & ?_4 \otimes \iota_1^2 & \\ \iota_1 & 0 & \iota_2 \otimes \iota_1 & ?_3 \otimes \iota_1 & ?_4 \otimes \iota_1 & \\ 1 & 0 & \iota_2 & ?_3 & ?_4 & \end{array}$$

Wir sehen, daß $d_2 \iota_1 = \iota_2$ gelten muß. Damit ist $d_2 \iota_1^2 = 2\iota_2 \otimes \iota_1 = 0$. Deshalb gilt $?_4 = \iota_2^2 = d_2(\iota_2 \otimes \iota_1)$, weil dieses Element wegen $d_2 \iota_1^3 \neq 0$ sonst nicht getroffen werden kann. Die E_3 -Seite hat die Form

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & ? & ? & ? & \\ \iota_1^2 & 0 & 0 & ? & ? & \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & ?_3 & 0 & \end{array}$$

Wir sehen, daß $d_3 \iota_1^2 = ?_3$ gelten muß. Wir haben damit ausgerechnet:

i	0	1	2	3	4	...
$H^i(K(\mathbb{F}_2, 2))$	1	0	ι_2	$d_3 \iota_1^2$	ι_2^2	?

2.3.4

Definition 2.10 Wir definieren des Exzess eines zulässigen $I = (i_1, \dots, i_k)$ durch $e(I) := i_{l(I)} + \sum_{s=1}^{l(I)-1} (i_s - 2i_{s+1})$.

Hier sind die Exzesse von einige zulässigen Monomen:

<i>Monom</i>	$\text{Sq}^7 \text{Sq}^2 \text{Sq}^1$	$\text{Sq}^8 \text{Sq}^4 \text{Sq}^2 \text{Sq}^1$	$\text{Sq}^3 \text{Sq}^1$
<i>Exzess</i>	4	1	2

2.3.5

Theorem 2.11 (Serre) Der Ring $H^*(K(\mathbb{F}_2, n))$ is ein Polynomring in Erzeugern $\text{Sq}^I(\iota_n)$ im Grad $|I|$ für alle zulässigen Monome I mit $e(I) < n$.

Hierbei sind die $\text{Sq}^I(\iota_n)$ vorerst als formale Symbole aufzufassen, wobei $\text{Sq}^1(\iota_n) = \iota_n$ gesetzt werden kann.
2.3.6 Sei $F \rightarrow E \rightarrow B$ eine Faserung und B zusammenhängend. Dann gilt für den E_2 -Term der Serre Spektralsequenz

$$E_2^{0,*} \cong H^*(F) .$$

Definition 2.12 Ein Element $x \in H^r(F)$ heißt transgressiv, wenn $d_j x = 0$ für $j = 2, \dots, r-1$ gilt. Hierbei sind d_j die Differentiale der Spektralsequenz. Beachte, daß x bis zur r -ten Seite überlebt. Wir nennen einen Repräsentanten $\tau(x) \in H^{r+1}(B)$ von $d_r(x) \in E_r^{r+1,0}$ die Transgression von x .

Proof : 2.3.13

2.3.7

Theorem 2.13 (Borel) Sei $F \rightarrow E \rightarrow B$ eine Faserung mit kontrahierbarem X . Möge es weiter transgressive Elemente $x_i \in H^{|i|}(F)$ geben derart, daß die Produkte $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ (alle Indizes verschieden) eine Basis von $H^*(F)$ bilden. Dann ist $H^*(B)$ eine Polynomialgebra in den Erzeugern $\tau(x_i)$.

Wir werden eine Menge von Elementen x_i welche die Voraussetzung des Theorems (ohne transgressiv) erfüllen ein einfaches Erzeugendensystem nennen.

2.3.8 Da die Differentiale der Serre-Spektralsequenz aus Abbildungen der langen exakten Kohomologiesequenzen entstehen, kommutieren sie mit den Operationen Sq^i . Insbesondere repräsentieren $\tau(\text{Sq}^i(x))$ und $\text{Sq}^i(\tau(x))$ für ein transgressives x die gleiche Klasse.

2.3.9 Mit dem Satz von Borel können wir nun zum Beispiel $H^*(K(\mathbb{F}_2, 2))$ ausrechnen. Wir setzen $x_i := \iota_1^{2^i}$, $i = 0, 1, \dots$. Diese sind alle transgressiv. Folglich ist $H^*(K(\mathbb{F}_2, 2))$ eine Polynomalgebra in den Erzeugern $\iota_2, \tau(\iota_2^2), \tau(\iota_2^4), \dots, \tau(\iota_1^{2^i}), \dots$ in den Graden $2, 3, 5, 9, \dots, 2^i + 1, \dots$. Wir wollen das mit dem Satz von Serre vergleichen. Dazu brauchen wir eine Übersicht über alle Monome vom Exzess $e(I) < 2$, also $e(I) = 1$. Das sind aber gerade die Monome

$$\text{Sq}^1, \quad \text{Sq}^2\text{Sq}^1, \quad \text{Sq}^4\text{Sq}^2\text{Sq}^1, \quad \text{Sq}^8\text{Sq}^4\text{Sq}^2\text{Sq}^1, \quad \dots$$

Der Satz von Serre sagt Generatoren der Polynomalgebra in den Graden

$$2 = |\iota_2|, \quad 3 = |\text{Sq}^1(\iota_2)|, \quad 5 = |\text{Sq}^2\text{Sq}^1(\iota_2)|, \quad 9 = |\text{Sq}^4\text{Sq}^2\text{Sq}^1(\iota_2)|, \quad \dots, \quad 2^{i+1} + 1 = |\text{Sq}^{2^i} \dots \text{Sq}^1(\iota_2)|, \quad \dots$$

voraus. Paßt also.

2.3.10 Wir führen nun die Induktion im allgemeinen durch. Wir nehmen den Satz von Serre für $K(\mathbb{F}_2, n - 1)$ an. Wir zeigen, daß die Voraussetzungen des Satzes von Borel erfüllt sind. Ein einfaches Erzeugendensystem von $H^*(K(\mathbb{F}_2, n - 1))$ ist die Menge

$$\{\text{Sq}^I(\iota_{n-1})^{2^j} \mid e(I) < n - 2, \quad j = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Lemma 2.14 *Alle diese Elemente sind transgressiv.*

Proof : Es ist klar, daß ι_{n-1} transgressiv ist (die Basis hat keine Kohomologie in kleinen Dimensionen). Da Sq^I mit Differentialen vertauscht, sind die $\text{Sq}^I(\iota_{n-1})$ transgressiv. Schließlich sind Produkte transgressiver Elemente transgressiv wegen der derivativen Eigenschaft der Differentiale. \square

Damit ist $H^*(K(\mathbb{F}_2, n))$ eine Polynomalgebra in den Erzeugern

$$\tau(\text{Sq}^I(\iota_{n-1})^{2^j}), \quad e(I) < n, \quad j = 1, 2, 3.$$

Dem Paar (I, j) mit $e(I) < n - 1$ ordnen wir den Multiindex

$$J(I, j) := \underbrace{(2^{j-1}r, \dots, r)}_{j \text{ terms}}, i_1, \dots, i_{l(I)}$$

zu, wobei $r := 2i_1 + n - 1 - e(I)$ ist. Dann gilt $I = J$ falls $j = 0$ und $e(J) = n - 1$ falls $j > 0$. Man überzeugt sich leicht, daß man (I, j) aus $J = J(I, j)$ zurückgewinnen kann. Fall $e(J) < n - 1$ ist, dann ist $I = J$. Wenn $e(J) = n - 1$ gilt, dann muß man genau die ersten j Einträge streichen, damit der Rest I der Bedingung $e(I) < n - 1$ genügt. Weiter gilt (einfach nachrechnen mit $|I| = 2i_1 - e(E)$) $|J(I, j)| + n = 2^j(|I| + (n - 1)) + 1$. Wir erhalten also einen Isomorphismus, wenn wir dem Erzeugern $\tau(\text{Sq}^I(\iota_{n-1})^{2^j})$ den Erzeuger $\text{Sq}^{J(I, j)}(\iota_n)$ zuordnen. \square

2.3.11 Die Transgressivität der Elemente des einfachen Erzeugendensystems von $H^*(K(\mathbb{F}_2, n - 1), \mathbb{F}_2)$ zeigt, daß das erste nicht-verschwindende Differential d_r ist. Damit liefert die Transgression τ wohldefinierte Klassen. In der Tat ist die Transgression dann der Suspensionsisomorphismus

$$\tau : H^*(K(\mathbb{F}_2, n - 1)) \xrightarrow{\sim} H_{red}^{*+1}(\Sigma K(\mathbb{F}_2, n - 1)) \cong H_{red}^{*+1}(K(\mathbb{F}_2, n)).$$

Die Kohomologie $H^{<2(n-1)}(K(\mathbb{F}_2, n - 1))$ hat eine Basis aus Klassen der Form $\text{Sq}^I(\iota_{n-1})$ (man braucht keine Potenzen). Wir sehen weiter, daß die Transgression

$$\tau : H^{2(n-1)}(K(\mathbb{F}_2, n - 1)) \rightarrow H^{2n-1}(K(\mathbb{F}_2, n))$$

ein Isomorphismus ist.

2.3.12 Die Operationen \mathbf{Sq}^I kann man als Elemente $\mathbf{Sq}^I \in [H\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2]^{|I|}$ verstehen. Nun gilt nach Definition

$$[H\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2]^m = \operatorname{colim}_n [K(\mathbb{F}_2, n), K(\mathbb{F}_2, n)]^m = \operatorname{colim}_n H^{n+m}(K(\mathbb{F}_2, n)) .$$

Dieser Kolimes stabilisiert für $m < n$. Wir sehen, daß eine additive Basis von $[H\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2]^m$ durch die Operationen \mathbf{Sq}^I mit zulässigem I und $|I| = m$ gegeben wird.

Es ist weiter klar, daß $\mathbf{Sq}^I \mathbf{Sq}^J$ durch die Komposition der entsprechenden Abbildungen dargestellt wird. Wir haben also einen Homomorphismus $\mathcal{A}_2 \rightarrow [H\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2]$ von Algebren. Die Rechnungen zeigen:

Theorem 2.15 *Die natürliche Abbildung $\mathcal{A}_2 \rightarrow [H\mathbb{F}_2, H\mathbb{F}_2]$ ist ein Isomorphismus.*

2.3.13 In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Borel. Der Beweis basiert auf einem Spektralsequenzvergleichssatz. Wir benutzen die Bezeichnungen aus dem Theorem. Für i betrachten wir eine Spektralsequenz $\bar{E}(i)$ mit $\bar{E}_2 = \Lambda(\bar{x}_i) \otimes S(\bar{y}_i)$, $|\bar{x}_i| = |x_i|$, $|\bar{y}_i| = |x_i| + 1$ (äußere und symmetrische Algebra) mit dem einzigen nichttrivialen Differential $d_r(\bar{x}_i) = \bar{y}_i$ (und für Produkte durch die derivative Eigenschaft bestimmt. Man rechnet nach, daß $E_\infty^{p,q} \cong 0$ außer $E_\infty^{0,0} \cong \mathbb{F}_2$. Wir definieren eine Abbildung von Spektralsequenzen

$$\bigotimes_i \bar{E}(i) \rightarrow E$$

welche auf dem E_2 -term \bar{x}_i auf x_i und \bar{y}_i auf $\tau(x_i)$ abbildet.

Nun gilt unter dieser Abbildung $\bar{E}_2^{0,*} \cong E_2^{0,*}$ und $\bar{E}_\infty \cong E_\infty$. Der folgende Satz impliziert das Theorem von Borel.

Theorem 2.16 (Spektralsequenzvergleichssatz) *Sei $\bar{E} \rightarrow E$ eine Abbildung von Spektralsequenzen. Dann implizieren zwei der folgenden Bedingungen die dritte.*

1. $\bar{E}_2^{0,*} \cong E_2^{0,*}$
2. $\bar{E}_2^{*,0} \cong E_2^{*,0}$
3. $\bar{E}_\infty \cong E_\infty$

Proof : [2, Thm. 1.36]

3 Stabile Homotopiegruppen von Sphären

3.1 Hopfabbildungen

3.1.1 Elementare Differentialgeometrie liefert die Hopfabbildungen

1. $\eta : S^3 \rightarrow S^2$
2. $\nu : S^7 \rightarrow S^4$
3. $\sigma : S^{15} \rightarrow S^7$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß diese Abbildungen nichttriviale stabile Abbildungen induzieren.

3.1.2 Wir rechnen über \mathbb{F}_2 . Die Abbildung η ist die Verklebeabbildung für $S^2 \cup_\eta D^4 \cong \mathbb{C}P^2 =: X$. Sei $x \in H^2(X) \cong \mathbb{F}_2$ der Erzeuger. Dann gilt wegen Poincaré Dualität $x^2 \neq 0$. Also

$$0 \neq x^2 = \mathbf{Sq}^2(x) .$$

Wir betrachten nun

$$\Sigma^n X := S^{2+n} \cup_{\Sigma^n \eta} D^{4+n} .$$

Sei s^n der Suspensionsisomorphismus in Kohomologie. Dann gilt

$$\mathbf{Sq}^2(s^n x) = s^n(\mathbf{Sq}^2 x) = s^n(x^2) \neq 0 .$$

Wir nehmen nun an, daß $\Sigma^n \eta$ trivial ist. Dann wäre $\Sigma^n X \cong S^{2+n} \vee S^{4+n}$ und es gäbe die Projektion $p : \Sigma^n X \rightarrow S^{2+n}$ mit $s^n x = p^* y$. Dann wäre aber $\mathbf{Sq}^2(y) = 0$. Widerspruch.

3.1.3 Analog kann man zeigen, daß ν und σ stabil nichttrivial sind. Dazu ersetzt man $\mathbb{C}P^2$ durch $\mathbb{H}P^2$ oder $\mathbf{Ca}P^2$.

3.2 Die Adams Spektralsequenz

3.2.1 Ziel der Adams Spektralsequenz ist die Berechnung der Gruppe $[Y, X]$ für Spektren $X, Y \in \mathcal{S}$. Der Ausgangspunkt ist die Wahl einer geeigneten Kohomologietheorie E . Die Daten sind dann die Gruppen E^*X und E^*Y als Moduln über der Algebra E^*E . Klar ist, daß man im allgemeinen mit E -Theorie nur E -lokale Effekte sehen wird, also zu Beispiel $[Y_E, X_E]$ oder was ähnliches herausbekommt, wobei $X \rightarrow X_E$ die E -Lokalisierung ist.

3.2.2 In diesem Kapitel werden wir mit der Kohomologie $H\mathbb{F}_p$ (und bei expliziten Rechnungen mit $H\mathbb{F}_2$ arbeiten). Zuerst konstruieren wir eine Auflösung

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K_0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & \dots \\
 & \nearrow^{\alpha_0} & & \searrow & \nearrow^{\alpha_1} & \searrow & \nearrow^{\alpha_2} & \searrow & \\
 X & & & & X_1 & & X_2 & & \\
 & \longleftarrow \dots & & \longleftarrow \dots & & \longleftarrow \dots & & &
 \end{array}$$

Wir nehmen an, daß X zusammenhängend ist. Wir wählen Erzeuger $\alpha_{0,i}$ von $H\mathbb{F}_p^*X$ als Modul über \mathcal{A}_p . Dann ist $K_0 := \prod_i H\mathbb{F}_p[[\alpha_{0,i}]]$ und α_0 von den $\alpha_{0,i}$ induziert. Sei X_1 die Kofaser von α_0 . Wir wiederholen diese Konstruktion mit X_1, X_2 und so weiter. Die gepunkteten Pfeile sind Abbildungen vom Grad 1, welche die Kofaserungen zu Kofasersequenzen in der Kategorie der Spektren fortsetzen.

Nach links können wir diese Auflösung wie folgt fortsetzen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & * & \longrightarrow & * & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & \dots \\
 & \nearrow^{\alpha_0} & & \searrow & \nearrow^{\alpha_1} & \searrow & \nearrow^{\alpha_2} & \searrow & \\
 X[-2] & & & & X[-1] & & X & & X_1 \\
 & \longleftarrow \dots & & \longleftarrow \dots & & \longleftarrow \dots & & &
 \end{array}$$

3.2.3 Wir setzen $Y_t X := [\Sigma^t Y, X]$. Dann erhalten wir folgende lange exakte Sequenz der Fasersequenz (X_s, K_s, X_{s+1})

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y_{t+1} K_s & \longrightarrow & Y_{t+1} X_{s+1} & & & & \dots \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & Y_t X_s & \longrightarrow & Y_t K_s & \longrightarrow & Y_t X_{s+1} \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & Y_{t-1} X_s & \longrightarrow &
 \end{array}$$

Diese Fasersequenzen können wir zusammensetzen zu einem Treppendiagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y_{t+1} K_s & \longrightarrow & Y_{t+1} X_{s+1} & \longrightarrow & Y_{t+1} K_{s+1} & \longrightarrow & Y_{t+1} X_{s+2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 Y_t K_{s-1} & \longrightarrow & Y_t X_s & \longrightarrow & Y_t K_s & \longrightarrow & Y_t X_{s+1} & \longrightarrow & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 Y_{t-1} K_{s-2} & \longrightarrow & Y_{t-1} X_{s-1} & \longrightarrow & Y_{t-1} K_{s-1} & \longrightarrow & Y_{t-1} X_s & \longrightarrow &
 \end{array}$$

3.2.4 Wir betrachten folgende Ummumerierung:

$$X^s := \Sigma^{-s} X_s, \quad K_s := \Sigma^{-s} K_s.$$

Dann kann man die Auflösung als Turm schreiben:

$$\begin{array}{ccc}
 X^3 & \xrightarrow{\alpha_3} & K_3 \\
 \downarrow & \swarrow \text{dotted} & \\
 X^2 & \xrightarrow{\alpha_2} & K_2 \\
 \downarrow & \swarrow \text{dotted} & \\
 X^1 & \xrightarrow{\alpha_1} & K_1 \\
 \downarrow & \swarrow \text{dotted} & \\
 X & \xrightarrow{\alpha_0} & K_0
 \end{array}$$

Nun haben die gestrichelten Pfeile Grad 1.

Dann hat das Treppendiagramm die folgende Form:

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y_{t-s+1}K^s & \longrightarrow & Y_{t-s}X^{s+1} & \longrightarrow & Y_{t-s}K^{s+1} & \longrightarrow & Y_{t-s-1}X^{s+2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 Y_{t-s+1}K^{s-1} & \longrightarrow & Y_{t-s}X^s & \longrightarrow & Y_{t-s}K^s & \longrightarrow & Y_{t-s-1}X^{s+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 Y_{t-s+1}K^{s-2} & \longrightarrow & Y_{t-s}X^{s-1} & \longrightarrow & Y_{t-s}K^{s-1} & \longrightarrow & Y_{t-s-1}X^s & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

3.2.5 Ein Treppendiagramm ist äquivalent zu einem exaktem Dreieck und liefert eine Spektralsequenz. Wir erklären jetzt deren Funktionsweise. Wir betrachten die Struktur

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y_{t+1}E_1^{t+1,s} & \longrightarrow & A_1^{t+1,s+1} & \longrightarrow & E_1^{t+1,s+1} & \longrightarrow & A_1^{t+1,s+2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow i_{t+1} & & & & \downarrow & & \\
 E_1^{t,s-1} & \longrightarrow & A_1^{t,s} & \xrightarrow{\delta_1} & E_1^{t,s} & \longrightarrow & A_1^{t,s+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow i_t & \nearrow \delta_2 & & & \downarrow & & \\
 E_1^{t-1,s-2} & \xrightarrow{\beta} & A_1^{t-1,s-1} & \xrightarrow{\delta_1} & E_1^{t-1,s-1} & \longrightarrow & A_1^{t-1,s} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Die Spektralsequenz wandelt die Abbildungen i_t schrittweise in Surjektionen um. Im Schritt zur zweiten Seite wird $A_1^{t-1,s-1}$ durch das Bild $A_2^{t-1,s-1}$ von i_t ersetzt, oder gleichbedeutend durch den Kern von δ_1 . Leider wird i_t dadurch nicht nicht surjektiv, da wir im gleichen Schritt $A_1^{t,s}$ durch das Bild von i_{t+1} ersetzt und damit eventuell verkleinert haben. Im nächsten Schritt müssen wir $A_2^{t-1,s-1}$ durch den Kern einer von α induzierten Abbildung $\delta_2 : A_2^{t-1,s-1} \rightarrow E_2^{t,s}$ ersetzen. Der Übergang von $E_r^{*,*}$ nach $E_{r+1}^{*,*}$ wird durch die Differentiale d_r bestimmt.

3.2.6 In der r -ten Stufe haben wir folgende Struktur:

$$\begin{array}{c}
 E_r^{t+r-1,s+r-1} \xrightarrow{\gamma} A_r^{t+r-1,s+r} \\
 \searrow \delta_r \quad \downarrow i_{t+r-1} \\
 E_r^{t+r-2,s+r-2} \xrightarrow{\gamma} A_r^{t+r-2,s+r-1} \\
 \searrow \delta_r \quad \downarrow i_{t+r} \\
 A_r^{t+1,s+1} \\
 \downarrow d_r \\
 E_r^{t,s-1} \xrightarrow{\beta} A_r^{t,s} \\
 \downarrow i_{t+1} \\
 A_r^{t-1,s-1} \\
 \downarrow i_t \\
 E_r^{t-1,s-2} \xrightarrow{\beta} A_r^{t-1,s-1} \\
 \downarrow \delta_r \\
 A_r^{t-r+1,s-r}
 \end{array}$$

Das r -te Differential d_r geht einen Schritt nach rechts und $r - 1$ -Schritte nach oben.

Wir ersetzen $A_r^{t,s}$ durch $\ker(\delta_r)$ und die E_r -Terme durch die d_r -Kohomologie.

3.2.7 Wir betrachten nun das Konvergenzverhalten. Dazu betrachten wir die um r nach unten verschobene Struktur

$$\begin{array}{c}
 E_r^{t-1,s-1} \xrightarrow{\gamma} A_r^{t-1,s} \\
 \searrow \delta_r \quad \downarrow i_{t-1} \\
 E_r^{t-2,s-2} \xrightarrow{\gamma} A_r^{t-2,s-1} \\
 \searrow \delta_r \quad \downarrow i_{t-r+1} \\
 A_r^{t-r+1,s-r+1} \\
 \downarrow d_r \\
 E_r^{t-r,s-r-1} \xrightarrow{\beta} A_r^{t-r,s-r} \\
 \downarrow i_{t-r+1} \\
 A_r^{t-r-1,s-r-1} \\
 \downarrow i_{t-r} \\
 E_r^{t-r-1,s-r-2} \xrightarrow{\beta} A_r^{t-r-1,s-r-1} \\
 \downarrow \delta_r \\
 A_r^{t-2r+1,s-2r}
 \end{array}$$

Da $K_r = *$ für negative r ist, gilt $E_r^{*,s} = 0$ für $s < 0$. Folglich wird für $s \leq 0$ die Gruppe $A_r^{t-1,s-1}$ einfach durch $A_r^{t,s}$ ersetzt. Wir sehen ein, daß für $r \geq s$

$$A_r^{t-r,s-r} = \operatorname{im}(Y_{t-s}X^{s-1} \rightarrow Y_{t-s}X) .$$

Auf $Y_{t-1}X$ betrachten wir die Filtration

$$F^{s,t} = \operatorname{im}(Y_{t-s}X^s \rightarrow Y_{t-s}X) .$$

Dann sehen wir weiter, daß

$$F^{s,t}X/F^{s+1,t+1}X \cong \text{im } \delta_r \subset E_r^{t,s} .$$

Wir brauchen noch ein Argument, daß $\text{im}(\delta_r) = E_r^{t,s}$ gilt für große r . Dies ist äquivalent dazu daß $\gamma = 0$ oder i_{t-1} injektiv ist. Das wird in unserem Fall daraus folgen, daß sich die Reihe

$$A_r^{t,s} \subset A_{r-1}^{t,s} \subset \dots \subset A_1^{t,s}$$

stabilisieren muß weil die $E_r^{t,s}$ \mathbb{F}_p -Vektorräume sind und die p -Torsion von $A_1^{t,s}$ endlich ist.

3.2.8 Wir haben eine natürliche Abbildung

$$Y_t K_s = [\Sigma^t Y, K_s] \xrightarrow{a} \text{Hom}_{\mathcal{A}_p}(H\mathbb{F}_p^* K_s, H\mathbb{F}_p^* \Sigma^t Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}_p}(H\mathbb{F}_p^* K_s, H\mathbb{F}_p^* Y)^t =: E_1^{s,t} .$$

Wir zeigen, daß a ein Isomorphismus ist. Wegen $\mathcal{A}_p \cong H\mathbb{F}_p^* H\mathbb{F}_p$ gilt für jedes Spektrum Y

$$[Y, H\mathbb{F}_p]^* \stackrel{\text{def}}{=} H\mathbb{F}_p^* Y \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}_p}^*(\mathcal{A}_p, H\mathbb{F}_p^* Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}_p}^*(H\mathbb{F}_p^* H\mathbb{F}_p, H\mathbb{F}_p^* Y) . \quad (1)$$

Daraus folgt, daß $Y_t K_s \cong E_1^{s,t}$. Die Abbildung a kann mit einem Produkt derartiger Isomorphismen identifiziert werden.

3.2.9 Wir diskutieren nun die Konvergenzeigenschaften. Wir schreiben $\pi_n^Y(X) := [\Sigma^n Y, X]$. Wir nehmen an, daß Y, X -1 -zusammenhängend und vom endlichen Typ sind.

Auf $Y_{t-1}X$ betrachten wir die Filtration

$$F^{s,t} := \text{im}(Y_{t-s}X^s \rightarrow Y_{t-s}X) .$$

Proposition 3.1 *Wir fixieren (s, t) .*

1. Für große r ist $E_r^{s,t}$ unabhängig von r und $E_\infty^{s,t} \cong F^{s,t}/F^{s+1,t+1}$.
2. Wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \bigcap_n F^{s+n,t+n} \rightarrow Y_{t-s}X_{tors} \rightarrow Y_{t-s}X_{(p)} .$$

Proof :

Die Lokalisierung einer Torsionsgruppe bei p und q verschwindet. Folglich müssen wir einsehen, daß $(\bigcap_n F^{s+n,t+n})_{(q)} = (Y_{t-s}X_{tors})_{(q)}$ gilt. Die Gruppen $E_r^{s,t}$ sind Vektorräume über \mathbb{F}_p und damit p -Torsionsgruppen. Die Abbildung i_t ist also ein Isomorphismus nach Lokalisieren bei $q \neq p$. Damit ist $(\bigcap_n F^{s+n,t+n})_{(q)} = (Y_{t-s}X)_{(q)}$. Weiter unten werden wir einsehen, daß $(\bigcap_n F^{s+n,t+n})$ eine Torsionsgruppe ist.

Wir betrachten nun die Lokalisierung bei p . In diesem Fall ist $(Y_{t-s}X_{tors})_{(p)} \rightarrow Y_{t-s}X_{(p)}$ injektiv und wir müssen zeigen, daß $(\bigcap_n F^{s+n,t+n})_{(p)} \cong 0$ gilt. In der Tat folgt daraus auch, daß $(\bigcap_n F^{s+n,t+n})_{(p)}$ eine Torsionsgruppe ist.

3.2.10 Wir zeigen, daß $(\bigcap_n F^{s+n,r+n})_{(p)} = \{0\}$ gilt.

Wir nehmen zuerst an, daß $\pi_*(X)$ reine p -Torsion ist. Wir konstruieren einen Eilenberg-MacLane Komplex

$$X \rightarrow L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow$$

wie folgt. Wir setzen $X =: Z_0$. Wir nehmen an, Z_r sei konstruiert und $n-1$ -zusammenhängend. Dann wählen wir eine \mathbb{F}_p -Basis (α_i) von $H\mathbb{F}_p^n Z_r$. Mit dieser konstruieren wir eine Abbildung $\alpha : Z_r \rightarrow \prod_i H\mathbb{F}_p[n] =: L_r$. Diese induziert einen Isomorphismus $H\mathbb{F}_p^n Z_r \cong H\mathbb{F}_p^n L_r$ und damit nach Hurewicz auf Homotopiegruppen die Abbildung $\pi_n(Z_r) \rightarrow \pi_n(Z_r) \otimes \mathbb{F}_p \cong \pi_n(L_r)$. Sei Z_{r+1} die Kofaser von α . Dann gilt $\pi_n(Z_{r+1}) = 0$ und $|\pi_{n+1}(Z_{r+1})| < |\pi_n(L_r)|$ (es werden alle p -Torsionselemente annulliert).

Wir wandeln die Auflösung in einen Turm um. Wir setzen $Z^r := \Sigma^{-r} Z_r$ und erhalten

$$Z^r \rightarrow \dots \rightarrow Z^1 \rightarrow X .$$

Die Abbildung $Z^r \rightarrow Z^{r-1}$ induziert einen Isomorphismus auf π_i für $i \neq n$ und die Einbettung einer echten Untergruppe $\pi_n(Z^{r+1}) \rightarrow \pi_n(Z^r)$. Hält man n -fest und vergrößert r schrittweise, dann erhält man eine echt absteigende Familie von Untergruppen $\text{im}(\pi_n(Z^r) \rightarrow \pi_n(X))$ solange bis dieses Bild trivial wird. Das passiert tatsächlich, weil X von endlichem Typ und damit $\pi_n(X)$ endlich ist. Dann muß man n vergrößern und des Verhalten wiederholt sich.

Wir haben nun eine induzierte Abbildung von einer Adamsauflösung von X in den Eilenberg MacLane komplex

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & K_2 \quad . \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_2 \end{array}$$

Eine Diagrammjagt (vergleich mit 3.2.13) ergibt eine induzierte Abbildung von Türmen

$$\begin{array}{ccccccc} X^2 & \longrightarrow & X^1 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & X \quad . \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ Z^2 & \longrightarrow & Z^1 & \longrightarrow & Z^0 & \longrightarrow & X \end{array}$$

Wir sehen, daß für festes n die Untergruppen

$$\text{im}(\pi_n(X^r) \rightarrow \pi_n(X)) \subseteq \text{im}(\pi_n(Z^r) \rightarrow \pi_n(X))$$

für große r trivial werden. Das gilt auch für $\text{im}(\pi_n^Y(X^r) \rightarrow \pi_n^Y(X))$. Hierbei ist $\pi_n^Y(X) := [\Sigma^n Y, X]$. Wir verwenden Induktion nach der Dimension von Y . Das Ankleben der l -Zellen führt zu einer Kofasersequenz $Y^{l-1} \rightarrow Y^l \rightarrow \vee_J S^n$. Wir erhalten die Abbildung von langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \prod_J \pi_{n+l}(X^r) & \longrightarrow & \pi_n^{Y^l}(X^r) & \longrightarrow & \pi_n^{Y^{l-1}}(X^r) & \longrightarrow & \prod_J \pi_{n+l-1}(X^r) \quad . \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_J \pi_{n+l}(X) & \longrightarrow & \pi_n^{Y^l}(X) & \longrightarrow & \pi_n^{Y^{l-1}}(X) & \longrightarrow & \prod_J \pi_{n+l-1}(X) \end{array}$$

Nun ist der Induktionsschluß klar.

3.2.11 Damit wäre die Behauptung unter der Voraussetzung, daß $\pi_*(X)$ reine p -Torsion ist, gezeigt. Für jedes $k > 0$ betrachten wir nun die Fasersequenz

$$X \xrightarrow{p^k} X \longrightarrow C \quad .$$

Nun ist $\pi_*(C)$ reine p -Torsion.

Wir wählen einen Adamsturm $C \leftarrow D^1 \leftarrow D^2$ und betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} & \longrightarrow & X^2 & \longrightarrow & X^1 & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow q \\ & \longrightarrow & D^2 & \longrightarrow & D^1 & \longrightarrow & C \end{array}$$

auf π_n^Y -Niveau. Wir sehen, daß $q(\cap_r \text{im}(\pi_n^Y(X^r) \rightarrow \pi_n^Y(X))) = 0$ ist. Daraus schließen wir, daß alle Elemente aus $\cap_r \text{im}(\pi_n^Y(X^r) \rightarrow \pi_n^Y(X))$ durch p^k für beliebiges k teilbar sind. Da X vom endlichen Typ ist, gibt es aber keine solchen unendlich p -divisiblen Elemente nach Lokalisieren bei p .

3.2.12 Wir zeigen nun 1. Wir behaupten, daß i_r für große r injektiv ist. Das ist klar nach Lokalisierung bei $q \neq p$. Für die Lokalisierung bei p folgt die Behauptung aus folgender Beobachtung: Für große r hat $A_r^{s,t}$ keine p -Torsion. Jedes p -Torsionselement wäre nämlich im Bild der Komposition von $r-1$ vertikalen Abbildungen $i_t \circ i_{t+1} \circ \dots \circ i_{t+r-1}$. Wir hatten aber schon gesehen, daß sich jedes Element nur endlich weit liften läßt, und die p -Torsion ist endlich erzeugt. Der Kern von i_t muß aber p -Torsion sein, weil $E_r^{*,*}$ eine p -Torsionsgruppe ist. \square

3.2.13 In diesem Beweis haben wir folgendes Lemma benutzt. Sei

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & K_2 \end{array}$$

ein Diagramm, wobei die untere Zeile ein Eilenberg-MacLane Komplex (die K_i sind Produkte von Eilenberg-MacLane Spektren, zwei aufeinanderfolgende Abbildungen sind Nullhomotop) und die obere Zeile ist eine Auflösung (Komplex und exakt auf Kohomologieniveau) ist. Dann kann man die Pfeile einfügen. Wir ergänzen:

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_2 \\ \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & K_2 \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & & L_0/Z & & L_1/(L_0/Z) & \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & & & K_0/X & & K_1/(K_0(X)) \end{array}$$

Die Abbildung f_0 gibt es, weil $[L_0, K_0] \rightarrow [Z, K_0]$ surjektiv ist. Man argumentiert so analog weiter. Im nächsten Schritt benutzt man, daß $L_0/Z \rightarrow L_1$ eine Surjektion in Kohomologie induziert.

3.2.14 Wir identifizieren nun den E_2 -Term der Adams Spektralsequenz. Wir schreiben jetzt nur den E -Term des Treppendiagramms auf.

$$\begin{array}{ccccccc} Y_{t+1}K_1 & \longrightarrow & Y_{t+1}K_2 & \longrightarrow & Y_{t+1}K_3 & \longrightarrow & Y_{t+1}K_4 \\ & & & & & & \\ Y_tK_0 & \longrightarrow & Y_tK_1 & \longrightarrow & Y_tK_2 & \longrightarrow & Y_tK_3 \\ & & & & & & \\ 0 & & Y_{t-1}K_0 & \longrightarrow & Y_{t-1}K_1 & \longrightarrow & Y_{t-1}K_2 \end{array}$$

Wir bemerken zuerst, daß

$$H\mathbb{F}_p^*X \longrightarrow H\mathbb{F}_p^*K_0 \longrightarrow H\mathbb{F}_p^*K_1 \longrightarrow$$

eine freie Auflösung von $H\mathbb{F}_p^*X$ als \mathcal{A}_p -Modul ist.

Mit (1) sieht man, daß die Kohomologie dieser Zeilen die folgende Form hat.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^1(H\mathbb{F}_p^*X, H\mathbb{F}_p^*Y_{t+1}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^2(H\mathbb{F}_p^*X, H\mathbb{F}_p^*Y_{t+1}) & \longrightarrow & & & \\ & \searrow & & \searrow & & & \\ \text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^0(H\mathbb{F}_p^*X, H\mathbb{F}_p^*Y_t) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^1(H\mathbb{F}_p^*X, H\mathbb{F}_p^*Y_t) & \longrightarrow & & & \\ & & & & & & \\ 0 & & \text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^0(H\mathbb{F}_p^*X, H\mathbb{F}_p^*Y_{t-1}) & \longrightarrow & & & \end{array}$$

Wir haben gleich das nächste Differential mit eingezeichnet.

3.3 Berechnung der zweiten Seite der Adams Spektralsequenz

3.3.1 Die zweite Seite der Adams Spektralsequenz ist aus den Gruppen $\text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^*(H\mathbb{F}_p^*X, H\mathbb{F}_p^*Y)$ aufgebaut. Wir werden $Y = S^0$ setzen. Dann ist $H\mathbb{F}_p^*Y \cong \mathbb{Z}_p$ (im Grad 0).

3.3.2 Sei M ein Modul über \mathcal{A}_p . Wir müssen $\text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^*(M, \mathbb{Z}_p)$ berechnen. Dazu wählen wir eine projektive Auflöfung

$$\cdots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

von M , wenden $\text{Hom}_{\mathcal{A}_p}(\dots, \mathbb{Z}_p)$ an und berechnen die Kohomologie von $\text{Hom}_{\mathcal{A}_p}(F, \mathbb{Z}_p)$.

3.3.3 Anstelle von projektiven Auflösungen kann man mit freien Auflösungen arbeiten.

Definition 3.2 Eine freie Auflöfung

$$\cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0$$

heißt minimal, wenn die Anzahl der Erzeuger von F_i minimal in jedem Grad ist.

Die Existenz minimaler Auflösungen für Moduln M welche in jedem Grad endliche \mathbb{Z}_p -Dimension haben, kann man durch Induktion zeigen.

Lemma 3.3 Für eine minimale Auflöfung verschwinden die Differentiale von $\text{Hom}(F_i, \mathbb{Z}_p)$ und es gilt

$$\text{Ext}^i(M, \mathbb{Z}_p) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F_i, \mathbb{Z}_p) .$$

Proof : Wir sehen zuerst ein, daß $\ker(\phi_i) \subset \mathcal{A}_p^+ F_i$ gilt, wobei $\mathcal{A}_p^+ \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{F}_p$ die Augmentation und die Einbettung des Augmentationsideals ist. Sei $x = \sum_{j=0}^{n_i} a_j x_{j,i} \in \ker(\phi_i)$, wobei $x_{j,i}$ die Erzeuger von F_i , also $\phi_i(x_{j,i})$ die Erzeuger von $\ker(\phi_{i-1})$ sind. Möge $a_0 \notin \mathcal{A}_p^+$ gelten. Dann gilt

$$a_0 \phi_i(x_{0,i}) = - \sum_{j=1}^{n_i} a_j \phi_i(x_{j,i}) .$$

Wir zerlegen nun $a_0 = b + c$ mit $b \in \mathbb{F}_p$ und $c \in \mathcal{A}_p^+$. Dann gilt

$$\phi_i(x_{0,i}) = -b^{-1} c \phi_i(x_{0,i}) - \sum_{j=1}^{n_i} a_j \phi_i(x_{j,i}) .$$

Dies widerspricht aber der Minimalität der Auflöfung, da man wegen dieser Gleichung den Generator $x_{0,i}$ im Grad $|x_{0,i}|$ nicht benötigt (dafür natürlich Generatoren in höheren Graden).

Sei nun $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}_p}(F_i, \mathbb{F}_p)$. Dann gilt $df(x) = f(\phi_{i+1}(x))$. Da aber $\phi_{i+1}(x) \in \ker(\phi_i) \subset \mathcal{A}_p^+ F_i$ ist und $\mathcal{A}_p^+ \mathbb{F}_p = 0$ gilt, muß $df(x) \in \mathcal{A}_p^+ \mathbb{F}_p = \{0\}$ gelten. \square

3.3.4 Wir erklären hier einen mechanischen Weg, eine minimale freie Auflöfung von \mathbb{F}_2 als \mathcal{A}_2 -Modul zu finden. Wir ordnen die Elemente von F in einem quadratischen Schema derart, daß an der Stelle (i, j) die Elemente von F_j im Grad $i - j$ stehen.

Wir beginnen nun die Konstruktion. Wir bestimmen die Zeilen. Wir brauchen einen Generator ι von F_0 im Grad 0, welcher auf $1 \in \mathbb{F}_2$ abgebildet wird. Wir bestimmen nun die 0-te Zeile.

Wir brauchen einen Generator α_1 von F_1 mit $\alpha_1 \mapsto \text{Sq}^1 \iota$. Nun gilt $\text{Sq}^1 \alpha_1 \mapsto \text{Sq}^1 \text{Sq}^1 \iota = 0$ (Adem Relation). Wir brauchen also einen Generator $\beta_2 \in F_2$ mit $\beta_2 \mapsto \text{Sq}^1 \alpha_1$. Wir erhalten also das folgende Bild der 0-ten Zeile.

deg $-j \setminus j$	0	1	2	3	4	5
0	ι	α_1	β_2	γ_3	δ_4	ϵ_5

Wir berechnen nun die zweite Zeile. Die vorhandenen Generatoren liefern die folgenden Elemente die alle im Bild sind.

deg $-j \setminus j$	0	1	2	3	4	5
0	ι	α_1	β_2	γ_3	δ_4	ϵ_5
1	$\text{Sq}^1 \iota$	$\text{Sq}^1 \alpha_1$	$\text{Sq}^1 \beta_2$	$\text{Sq}^1 \gamma_3$	$\text{Sq}^1 \delta_4$	$\text{Sq}^1 \epsilon_5$

Wir schreiben nun alle schon bekannten Elemente in der zweiten Zeile dazu.

deg $-j \setminus j$	0	1	2	3	4	5
0	ι	α_1	β_2	γ_3	δ_4	ϵ_5
1	$\text{Sq}^1 \iota$	$\text{Sq}^1 \alpha_1$	$\text{Sq}^1 \beta_2$	$\text{Sq}^1 \gamma_3$	$\text{Sq}^1 \delta_4$	$\text{Sq}^1 \epsilon_5$
2	$\text{Sq}^2 \iota$	$\text{Sq}^2 \alpha_1$	$\text{Sq}^2 \beta_2$	$\text{Sq}^2 \gamma_3$	$\text{Sq}^2 \delta_4$	$\text{Sq}^2 \epsilon_5$

Nun gilt $\text{Sq}^2 \iota \mapsto 0$, $\text{Sq}^2 \alpha_1 \mapsto \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \iota$, $\text{Sq}^2 \beta_2 \mapsto \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \alpha_1$, $\text{Sq}^2 \gamma_3 \mapsto \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \beta_2$, $\text{Sq}^2 \delta_4 \mapsto \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \beta_3$ und $\text{Sq}^2 \epsilon_5 \mapsto \text{Sq}^2 \text{Sq}^1 \delta_4$. Wir benötigen also einen Generator $\alpha_2 \mapsto \text{Sq}^2 \iota$ in $(1, 1)$. Die komplettierte erste Zeile hat also die Form

deg $-j \setminus j$	0	1	2	3	4	5
0	ι	α_1	β_2	γ_3	δ_4	ϵ_5
1	$\text{Sq}^1 \iota$	$\text{Sq}^1 \alpha_1 / \alpha_2$	$\text{Sq}^1 \beta_2$	$\text{Sq}^1 \gamma_3$	$\text{Sq}^1 \delta_4$	$\text{Sq}^1 \epsilon_5$
2	$\text{Sq}^2 \iota$	$\text{Sq}^2 \alpha_1$	$\text{Sq}^2 \beta_2$	$\text{Sq}^2 \gamma_3$	$\text{Sq}^2 \delta_4$	$\text{Sq}^2 \epsilon_5$

Wir komplettieren nun die zweite Zeile zu

deg $-j \setminus j$	0	1	2	3	4	5
0	ι	α_1	β_2	γ_3	δ_4	ϵ_5
1	$\text{Sq}^1 \iota$	$\text{Sq}^1 \alpha_1 / \alpha_2$	$\text{Sq}^1 \beta_2$	$\text{Sq}^1 \gamma_3$	$\text{Sq}^1 \delta_4$	$\text{Sq}^1 \epsilon_5$
2	$\text{Sq}^2 \iota$	$\text{Sq}^2 \alpha_1 / \text{Sq}^1 \alpha_2$	$\text{Sq}^2 \beta_2$	$\text{Sq}^2 \gamma_3$	$\text{Sq}^2 \delta_4$	$\text{Sq}^2 \epsilon_5$

Wir schreiben nun alle bisher bekannten Elemente der dritten Zeile hin

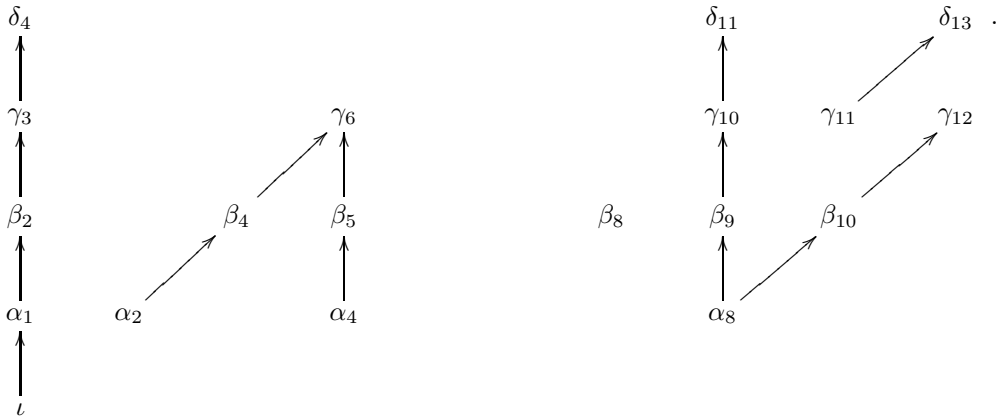
deg $-j \setminus j$	0	1	2	3	4	5
0	ι	α_1	β_2	γ_3	δ_4	ϵ_5
1	$\text{Sq}^1 \iota$	$\text{Sq}^1 \alpha_1 / \alpha_2$	$\text{Sq}^1 \beta_2$	$\text{Sq}^1 \gamma_3$	$\text{Sq}^1 \delta_4$	$\text{Sq}^1 \epsilon_5$
2	$\text{Sq}^2 \iota$	$\text{Sq}^2 \alpha_1 / \text{Sq}^1 \alpha_2$	$\text{Sq}^2 \beta_2$	$\text{Sq}^2 \gamma_3$	$\text{Sq}^2 \delta_4$	$\text{Sq}^2 \epsilon_5$
3	$\text{Sq}^3 \iota / \text{Sq}^{2,1} \iota$	$\text{Sq}^3 \alpha_1 / \text{Sq}^{2,1} \alpha_1 / \text{Sq}^2 \alpha_2$	$\text{Sq}^3 \beta_2 / \text{Sq}^{2,1} \beta_2$	$\text{Sq}^3 \gamma_3 / \text{Sq}^{2,1} \gamma_3$	$\text{Sq}^3 \delta_4 / \text{Sq}^{2,1} \delta_4$	$\text{Sq}^3 \epsilon_5 / \text{Sq}^{2,1} \epsilon_2$

Wir berechnen nun die Differentiale dieser Elemente und die Differentiale der Elemente aus der ersten Zeile. Es gilt beispielsweise $\text{Sq}^3 \beta_2 \mapsto \text{Sq}^{3,1} \alpha_1$, $\text{Sq}^2 \gamma_3 \mapsto \text{Sq}^{2,1} \beta_2 \mapsto 0$. Es ergibt sich, daß wir in $(2, 2)$ einen neuen Generator β_4 benötigen. Dazu rechnen wir $\text{Sq}^3 \alpha_1 \mapsto \text{Sq}^{3,1} \iota$, $\text{Sq}^2 \beta_2 \mapsto \text{Sq}^{2,1} \alpha_1 \mapsto 0$, $\text{Sq}^2 \alpha_2 \mapsto \text{Sq}^{3,1} \iota$ (Adem Relation). Wir brauchen also einen neuen Generator $\beta_4 \mapsto \text{Sq}^3 \alpha_1 + \text{Sq}^2 \alpha_2$. Hier ist also die komplette zweite Zeile.

deg $-j \setminus j$	0	1	2	3	4	5
0	ι	α_1	β_2	γ_3	δ_4	ϵ_5
1	$\text{Sq}^1 \iota$	$\text{Sq}^1 \alpha_1 / \alpha_2$	$\text{Sq}^1 \beta_2$	$\text{Sq}^1 \gamma_3$	$\text{Sq}^1 \delta_4$	$\text{Sq}^1 \epsilon_5$
2	$\text{Sq}^2 \iota$	$\text{Sq}^2 \alpha_1 / \text{Sq}^1 \alpha_2$	$\text{Sq}^2 \beta_2 / \beta_4$	$\text{Sq}^2 \gamma_3$	$\text{Sq}^2 \delta_4$	$\text{Sq}^2 \epsilon_5$
3						

In dieser Weise fahren wir fort und bestimmen die Generatoren von F_j^{i-j} .

3.3.5 Wir erhalten das folgende Bild des E_2 -Terms der Adams Spektralsequenz:



Am Punkt (p, q) (p ist horizontal) steht hier $\text{Ext}^q(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)^p$. Das Differential d_r geht in diesem Bild einen Schritt nach links und r -Schritte nach oben. Die p -te Spalten berechnet den 2-Anteil von π_p^s .

3.3.6 Die senkrechten Pfeile stehen für die Multiplikation mit α_1 , und die schrägen Pfeile für die Multiplikation mit α_2 . Potentiell könnte $d_2(\alpha_2)$ und $d_2(\beta_{10})$ nicht verschwinden. Es gilt $d_2(\beta_{10}) = d_2(\alpha_2\alpha_8) = \alpha_2d_2(\alpha_8) + \alpha_8d_2(\alpha_2) = \alpha_8d_2(\alpha_2)$. Wir zeigen, daß $d_2(\alpha_2) = 0$ gelten muß. Es gilt $0 = d_2(\beta_4) = \alpha_1d_2(\alpha_2)$. Wenn $d_2(\alpha_2) = \gamma_3$ gelten würde, dann wäre $0 = \alpha_1\gamma_3 = \delta_4$.

Die multiplikative Struktur kann man nicht mit der minimalen Auflösung einsehen. Die relevanten Methoden sind etwa die Betrachtung der Λ -Algebra und die May Spektralsequenz [3, Kap. 5]

3.3.7 Wir lesen etwa ab $\nu_2(|\pi_i^s|)$:

0	1	2	3	0	0
∞	1	1	3	0	0

In der Tat kann man mit der multiplikativen Struktur auch etwas über das Extensionsproblem sagen: $(\pi_3^s)_2 \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

4 The Thom spektrum MU

4.1 Kohomologie und Homologie von BU

4.1.1 In diesem Kapitel betrachten wir in der Regel die Kohomologie und die Homologie mit Koeffizienten in \mathbb{Z} . Wir schreiben $H^*(X) := H^*(X, \mathbb{Z})$ und $H_*(X) := H_*(X, \mathbb{Z})$.

4.1.2 Wir berechnen zuerst die Kohomologie von $BU(n)$. Die kanonischen Einbettungen $J_{m,n} : U(m) \rightarrow U(n)$, $m < n$, induzieren Abbildungen $J_{m,n}^* : H^*(BU(n)) \rightarrow H^*(BU(m))$.

Theorem 4.1 1. Es gibt Klassen $c_k \in H^{2k}(BU(n))$, $k = 1, \dots, n$ (die universellen Chernklassen) derart, daß $H^*(BU(n)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k]$ als graduierter Ring.

2. Es gilt

$$J_{m,n}^*(c_k) = \begin{cases} c_k & 1 \leq k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} .$$

Proof : Wir beweisen dieses Theorem durch Induktion nach n unter Verwendung der Faserungen

$$S^{2n-1} \rightarrow BU(n-1) \rightarrow BU(n) .$$

Die Faserung ergibt sich aus $BU(n-1) \cong EU(n)/U(n-1)$, und $U(n)/U(n-1) \cong S^{2n-1}$. Wir betrachten die Serre Spektralsequenz dieser Faserung.

$$E_2^{*,*} \cong H^*(BU(n)) \otimes H^*(S^{2n-1}) .$$

Wir identifizieren die $2n - 1$ te Zeile der zweiten Seite mit $H^*(BU(n))$. Es gibt nur ein Differential $d_{2n} : H^*(BU(n)) \rightarrow H^{*+2n}(BU(n))$, welches durch die Multiplikation mit einer Klasse c_n gegeben ist. Der Anfang der Induktion wird durch $BU(1) \cong \mathbb{C}P^\infty$ und der Kenntnis $H^*(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}[c_1]$ geliefert. Da die Kohomologie von $BU(n-1)$ in geraden Graden konzentriert ist, erhalten wir zuerst Sequenzen

$$H^{2k-2}(BU(n-1)) \rightarrow H^{2k-2n-1}(BU(n)) \xrightarrow{c_n} H^{2k-1}(BU(n)) \xrightarrow{J_{n,n-1}^*} 0.$$

Wir sehen induktiv ein, daß auch $H^*(BU(n))$ in geraden Graden konzentriert ist. Für die geraden Grade erhalten wir

$$0 \rightarrow H^{2k-2n}(BU(n)) \xrightarrow{c_n} H^{2k}(BU(n)) \xrightarrow{J_{n,n-1}^*} H^{2k}(BU(n-1)) \rightarrow 0.$$

Da $H^*(BU(n-1))$ eine freie kommutative \mathbb{Z} -Algebra ist, splittet diese Sequenz. Wir sehen, daß

$$H^*(BU(n)) \cong H^*(BU(n-1)) \otimes \mathbb{Z}[c_n]$$

gelten muß, und daß $J_{n,n-1}^*$ durch $c_n \mapsto 0$ induziert wird.

4.1.3 Sei $\mu_n : BT(n) \rightarrow BU(n)$ durch die Einbettung des maximalen Torus der Diagonalmatrizen induziert. Wir haben $T(n) \cong U(1)^n$ und damit $BT(n) \cong BU(1)^n$. Beachte, daß $H^*(BU(1)) \cong \mathbb{Z}[c_1]$ ist. Wir setzen

$$x_i := \underbrace{1 \times \cdots \times 1}_{i-1} \times c_1 \times \underbrace{1 \times \cdots \times 1}_{n-i} \in H^2(BT(n)).$$

Dann ist nach der Künnethformel

$$H^*(BT(n)) \cong \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n].$$

Seien $\sigma_k(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ die elementaren symmetrischen Funktionen.

Lemma 4.2 *Es gilt*

$$\mu_n^*(c_k) \cong \sigma_k(x_1, \dots, x_n).$$

Proof : Wir sehen zuerst ein, daß μ_n^* injektiv ist. Dazu betrachten wir die Faserung

$$F(n) \rightarrow BT(n) \rightarrow BU(n)$$

mit $F(n) \cong U(n)/T(n)$. Dies ist eine komplexe Mannigfaltigkeit und damit orientiert. Für die Eulercharakteristik gilt $\chi(F(n)) = |W(U(n), T(n))| = n! \neq 0$. Sei $\mu_{n,!} : H^*(BT(n)) \rightarrow H^*(BU(n))$ der Transfer. Dann ist $\mu_{n,!} \circ \mu_n^* = \chi(F(n))$. Da $H^*(BU(n))$ torsionsfrei ist, ist die Multiplikation mit $\chi(F(n))$ injektiv. Wir gehen nun induktiv vor. Die Einschränkung $x_n \mapsto 0$ induziert einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_{n-1}(x_1, \dots, x_n)] \rightarrow \mathbb{Z}[\sigma_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, \sigma_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})].$$

Wir betrachten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^*(BT(n)) & \xrightarrow{\mu_n^*} & H^*(BU(n)) \\ \downarrow x_n \mapsto 0 & & \downarrow J_{n,n-1}^* \\ H^*(BT(n-1)) & \xrightarrow{\mu_{n-1}^*} & H^*(BU(n-1)) \end{array}.$$

Wir sehen nach Induktionsannahme, daß $\mu_n^*(c_k) = \sigma_k(x_1, \dots, x_n)$ für $1 \leq k < n$ gelten muß. Weiter sehen wir, daß $x_n | \mu_n^*(c_n)$. Aus Symmetriegründen gilt $x_i | \mu_n^*(c_n)$ für alle $i = 1, \dots, n$ und damit aus Gradgründen $\mu_n^*(c_n) = \lambda x_1 \dots x_n$.

Um zu zeigen, daß $\lambda = \pm 1$ gelten muß, verbessern wir das Argument für die Injektivität von μ^* . Man kann nämlich zeigen, daß

$$\mu_n^* : H^*(BU(n), \mathbb{F}_p) \rightarrow H^*(BT(n), \mathbb{F}_p)$$

für alle Primzahlen p injektiv ist. Daraus folgt $\lambda = \pm 1$. Wir erreichen $\lambda = 1$ durch Umdefinition von c_n . Für die Injektivität von μ_n^* in Kohomologie mit \mathbb{F}_p -Koeffizienten haben wir die folgenden zwei Argumente. Im ersten verwenden wir folgende algebraische Tatsache:

Theorem 4.3 (Cohen-Macaulay, [3], 2.3.2) *Sei K ein Körper,*

$$f : R := K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S := K[y_1, \dots, y_n]$$

ein Homomorphismus von zusammenhängenden K -Algebren so daß S ein endlich-erzeugter R -Modul ist. Dann ist f injektiv und S ein freier R -Modul.

In unserem Fall wenden wir das Theorem auf $R := H^*(BU(n), \mathbb{F}_p)$, $S := H^*(BT(n), \mathbb{F}_p)$ und $f := \mu_n^*$ an. Wir betrachten die Serre Spektralsequenz von $F(n) \rightarrow BT(n) \rightarrow BU(n)$. Da $F(n)$ eine endlich-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, ist $H^*(F(n), \mathbb{F}_p)$ ein endlich-dimensionaler \mathbb{F}_p -Vektorraum. Damit ist $E_2^{*,*} \cong H^*(F(n), \mathbb{F}_p) \otimes H^*(BU(n), \mathbb{F}_p)$ ein endlich erzeugter $H^*(BU(n), \mathbb{F}_p)$ -Modul. Damit aber auch der E_∞ -Term endlich erzeugt (die Differentiale sind $H^*(BU(n), \mathbb{F}_p)$ -linear).

In der Tat entartet die Spektralsequenz in diesem Fall sogar. Dies liefert ein alternatives Argument ohne das algebraische Resultat. Wir sehen dazu ein, daß die Kohomologie aller beteiligten Räume in geraden Graden konzentriert ist. Wir wissen dies schon für $H^*(BU(n), \mathbb{F}_p)$ und $H^*(BT(n), \mathbb{F}_p)$ (universelle Koeffizienten und die Tatsache, daß $H^*(BU(n))$ und $H^*(BT(n))$ freie \mathbb{Z} -Moduln sind). Die Flaggenmannigfaltigkeiten sind über Faserungen

$$F(n-1) \rightarrow F(n) \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

miteinander verbunden. Dies folgt aus $F(n) \cong U(n)/T(n)$, $\mathbb{C}P^n \cong U(n)/(U(1) \times U(n-1))$ und $(U(1) \times U(n-1))/\cong (U(1) \times U(n-1))/(U(1) \times T(n-1)) \cong U(n-1)/T(n-1) \cong F(n-1)$. Wir schließen nun induktiv wieder mit den Serre-Spektralsequenzen. Diese entarten alle, da jeweils die Basis und die Faser (Induktionsannahme) nur gerade Kohomologie besitzen.

4.1.4 Wir betrachten die kanonische Einbettung $U(n) \times U(m) \rightarrow U(n+m)$ und die induzierte Abbildung

$$\mu_{n,m} : BU(n) \times BU(m) \rightarrow BU(n+m) .$$

Lemma 4.4 *Es gilt $\mu_{n,m}^*(c_k) = \sum_{i+j=k} c_i \times c_j$.*

Proof : Wir vergleichen mit dem Torus.

$$\begin{array}{ccc} H^*(BU(n+m)) & \xrightarrow{\mu_{n,m}^*} & H^*(BU(n)) \otimes H^*(BU(m)) \\ \downarrow \mu_{n+m}^* & & \downarrow \mu_n^* \otimes \mu_m^* \\ H^*(BT(n)) & \xrightarrow{\cong} & H^*(BT(n)) \otimes H^*(BT(m)) \end{array}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mu_{n+m}^*(c_k) &= \sigma_k(x_1, \dots, x_{n+m}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} \\ &= \sum_{r=0}^k \sum_{i_1 < \dots < i_r \leq n < i_{r+1} < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} \\ &= \sum_{r=0}^k \sigma_r(x_1, \dots, x_n) \sigma_{k-r}(x_{n+1}, \dots, x_m) \\ &= \sum_{r=0}^k \mu_n^*(c_r) \times \mu_m^*(c_{k-r}) \end{aligned}$$

□

4.1.5 Wir erinnern an das universielle Koeffiziententheorem für die Homologie. Sei X ein Raum und $H^*(X)$ vom endlichen Typ (endlich erzeugt in jedem Grad). Dann gibt es für jede abelsche Gruppe G eine natürliche exakte Sequenz (vergl. [7, Thm. 5.6.12])

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H^{*+1}(X), G) \rightarrow H_*(X, G) \rightarrow \text{Hom}(H^*(X), G) \rightarrow 0.$$

Wir sehen damit

$$H_*(BU(1)) \cong \mathbb{Z}[a_0, a_1, \dots, a_k, \dots]$$

mit $|a_k| = 2k$ und $a_k(c_1^k) = 1$. Wir berechnen $H_*(BT(n))$ mit der Künnethformel. $H_*(BT(n))$ ist der freie \mathbb{Z} -Modul über den Erzeugenden $a_{k_1} \times \dots \times a_{k_n}$. Wir betrachten die Abbildung $\mu_{n,*} : H_*(BT(n)) \rightarrow H_*(BU(n))$ und setzen $a_{k_1} \dots a_{k_n} := \mu_{n,*}(a_{k_1} \times \dots \times a_{k_n})$. Dies ist als ein Symbol zu verstehen und nicht als Produkt (zumindest vorerst).

Proposition 4.5 $H_*(BU(n))$ ist der freie \mathbb{Z} -Modul über den Klassen $a_{k_1} \dots a_{k_n}$ mit $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0$.

Proof : $H^*(BU(n)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$ ist frei und vom endlichen Typ als graduerter \mathbb{Z} -Modul. Also ist $H_*(BU(n)) \cong \text{Hom}(H^*(BU(n)), \mathbb{Z})$ auch frei. Ein offensichtliches Erzeugendensystem besteht aus den Monomen $(c_1^{e_1} \dots c_n^{e_n})^*$, $e_i \in \mathbb{N}_0$. Wir ordnen die Multiindizes $(k_1 \geq \dots \geq k_n)$ lexikographisch. Via der Bijektion

$$(e_1, \dots, e_n) \mapsto (e_1 + \dots + e_n \geq e_2 + \dots + e_n \geq \dots \geq e_n)$$

induziert dies eine Ordnung auf den Multiindizes $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{N}^n$. Es gilt

$$\langle c_1^{e_1} \dots c_n^{e_n}, a_{k_1} \dots a_{k_n} \rangle = \langle \mu_n^*(c_1)^{e_1} \dots \mu_n^*(c_n)^{e_n}, a_{k_1} \times \dots \times a_{k_n} \rangle$$

Wir haben $\mu_n^*(c_i) = \sigma_i(x_1, \dots, x_n)$. Die höchste Potenz von x_1 in $\mu_n^*(c_1)^{e_1} \dots \mu_n^*(c_n)^{e_n}$ ist $x_1^{e_1 + \dots + e_n}$. In diesen Termen ist die höchste Potenz von x_2 gleich $x_2^{e_2 + \dots + e_n}$. Wir schließen so weiter und sehen, daß $a_{e_1 + \dots + e_n} a_{e_2 + \dots + e_n} \dots a_{e_n}$ das maximale potentielle Basiselement, welches sich nicht-trivial (in der Tat zu 1) mit $c_1^{e_1} \dots c_n^{e_n}$ paart. Die Matrix der Koeffizienten der $a_{k_1} \dots a_{k_n}$ bezüglich der Basis $(c_1^{e_1} \dots c_n^{e_n})^*$ ist also eine obere Dreiecksmatrix mit endlicher Ausbreitung und 1en auf der Diagonalen. Die Elemente $a_{k_1} \dots a_{k_n}$ mit $k_1 \geq \dots \geq k_n \geq 0$ bilden also auch eine \mathbb{Z} -Basis von $H_*(BU(n))$.

4.2 Die Hopfalgebrastruktur

4.2.1

Definition 4.6 Sei k ein kommutativer Ring. Eine Hopfalgebra über k ist eine graduierte k -Algebra (H, μ, η) mit einem Koproduct

$$\psi : H \rightarrow H \otimes_k H$$

und einer Koeins $\epsilon : H \rightarrow k$ mit folgenden Eigenschaften:

1. ψ ist koassoziativ:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\psi} & H \otimes_k H \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \otimes 1 \\ H \otimes_k H & \xrightarrow{1 \otimes \psi} & H \otimes_k H \otimes_k H \end{array}$$

2. Es gilt die Koeinseigenschaft:

$$\begin{array}{ccccc} H & \xleftarrow{1} & H & \xrightarrow{1} & H \\ & \swarrow 1 \otimes \epsilon & \downarrow \psi & \searrow \epsilon \otimes 1 & \\ & & H \otimes_k H & & \end{array} .$$

3. ψ is an Algebrhomomorphismus:

$$\begin{array}{ccc}
 H \otimes_k H & \xrightarrow{\psi \otimes \psi} & H \otimes_k H \otimes_k H \otimes_k H \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} H \otimes_k H \otimes_k H \otimes_k H \\
 \downarrow \mu & & \downarrow \mu \otimes \mu \\
 H & \xrightarrow{\psi} & H \otimes H
 \end{array}$$

Dabei ist T die symmetrische Struktur auf der Tensorategorie der graduierten k -Vektorräume. Wenn $H_k = 0$ für $k < 0$ gilt, dann heißt H zusammenhängend. Wenn $\dim(H_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, dann heißt H vom endlichen Typ. Schließlich ist H kokommutativ, wenn

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\psi} & H \otimes_k H \\
 & \searrow \psi & \downarrow T \\
 & & H \otimes_k H
 \end{array}$$

Ein Morphismus zwischen Hopfalgebren ist eine strukturerhaltende Abbildung.

Wenn $(H, \mu, \psi, \eta, \epsilon)$ eine Hopfalgebra auf einem freien k -Modul vom endlichen Typ ist, dann ist $H^* := \text{Hom}(H, k)$ eine Hopfalgebra mit dem Produkt ψ^* , der Eins ϵ^* , dem Koprodukt μ^* und der Koeins η^* .

4.2.2 Sei k ein Körper oder \mathbb{Z} . Sei X ein H -Raum. Sei $H_*(X, k)$ vom endlichen Typ und frei im Fall $k = \mathbb{Z}$. Dann ist $H^*(X, k)$ eine Hopfalgebra. Das Produkt ist die Ringstruktur der Kohomologie. Das Koprodukt ist $m^* : H^*(X, k) \rightarrow H^*(X \times X, k) \cong H^*(X, k) \times_k H^*(X, k)$ (unter unseren Annahmen gilt die Künnethformel). Die Koeins ist die Auswertung am Basispunkt. $\epsilon : H^*(X, k) \rightarrow k$. Weiter ist $H_*(X, k)$ die zu $H^*(X, k)$ duale Hopfalgebra. Das Produkt ist durch $m_* : H_*(X, k) \otimes_k H_*(X, k) \cong H_*(X \times X, k) \rightarrow H_*(X, k)$ gegeben. Das Koprodukt ergibt sich durch Dualisieren des Produktes der Kohomologie. Konkret ist es wiederum durch den Künnethisomorphismus gegeben:

$$H_*(X, k) \xrightarrow{\Delta_*} H_*(X \times X, k) \cong H_*(X, k) \otimes_k H_*(X, k)$$

gegeben, wobei $\Delta : X \rightarrow X \times X$ die Diagonalabbildung ist.

4.2.3 Sei \mathcal{U} ein komplexes Universum, also ein unendlich-dimensionaler hermitescher Vektorraum. Für einen endlich-dimensionalen $V \subset \mathcal{U}$ ist $U(V)$ und damit $BU(V)$ definiert. Für $V \subset V'$ haben wir einen natürliche Einbettung $BU(V) \rightarrow BU(V')$. Wir definieren

$$BU(\mathcal{U}) := \text{colim}_{V \subset \mathcal{U}} BU(V) .$$

Wir haben weiter ein externes Produkt

$$\mu : BU(\mathcal{U}) \times BU(\mathcal{U}) \rightarrow BU(\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}) ,$$

welches von den Abbildungen

$$BU(V) \times BU(W) \rightarrow BU(V \oplus W)$$

induziert wird. Dieses Produkt ist in der offensichtlichen Weise assoziativ

$$\mu \circ (\mu \times \text{id}) = \mu \circ (\text{id} \times \mu) : BU(\mathcal{U}) \rightarrow BU(\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}) .$$

Nun wirkt $\text{Aut}(\mathcal{U})$ auf $BU(\mathcal{U})$. Wir betrachten den Flip $F \in \text{Aut}(\mathcal{U} \oplus \mathcal{U})$. Dann gilt $\mu \circ T = F \circ \mu$. Die H -Raumstruktur ergibt sich durch Internalisierung des Produktes unter Verwendung einer Isometrie $\mathcal{U} \cong \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$. Der Raum solcher Isometrien ist zusammenziehbar. Daraus folgt sowohl die Assoziativität als auch die Kommutativität. Wir schreiben $BU := BU(\mathcal{U})$.

4.2.4 Sei $\dim(V) = n$. Der Raum der Isometrien $\mathbb{C}^n \rightarrow V$ ist zusammenhängend. Deshalb ist die Identifikation $BU(n) \cong BU(V)$ eindeutig bis auf Homotopie. Insbesondere sind die Klassen $c_i \in H^*(BU(V))$ und $a_{k_1} \dots a_{k_n} \in H_*(BU(V))$ wohldefiniert.

4.2.5 Wir haben $a_n := a_n a_0 \dots a_0 = (c_1^n)^*$. Es gilt weiter $a_{k_1} \dots a_{k_n} = \mu(a_{k_1}, \dots, a_{k_n})$. Da Homologie (singuläre) mit einem Kolimes vertauscht, sieht man, daß

$$H_*(BU) \cong \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_k, \dots].$$

Für die Kohomologie muß dann aus Dualität folgen:

$$H^*(BU) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_j, \dots].$$

Das Koproduct ist nach Lemma 4.4 durch

$$\mu^*(c_k) = \sum_{i+j=k} c_i \otimes c_j$$

gegeben. Wir berechnen nun das Koproduct auf der Homologie: Es gilt mit $c^e := c_1^{e_1} \dots c_n^{e_n}$ für geeignetes n

$$\langle \Delta_*(a_n), c^e \otimes c^{e'} \rangle = \langle a_n, c^{e+e'} \rangle.$$

Die rechte Seite ist gleich Null für alle (e, e') für welche nicht $e + e' = (n, 0, \dots)$ gilt; wenn doch, dann kommt 1 heraus. Folglich gilt

$$\Delta_*(a_n) = \sum_{i+j=n} a_i \otimes a_j.$$

4.3 Die Homologie des Thom Spektrums MU

4.3.1 Wir beschreiben zuerst das Thomspektrum MU in koordinateninvarianter Form. Sei \mathcal{U} ein komplexes Universum und bezeichne $V, V', \dots \subset \mathcal{U}$ endlich-dimensionale Unterräume.

Ist $\xi \rightarrow X$ ein Vektorbündel, dann ist X^ξ der zugehörige Thomraum. Ist $V \subset \mathcal{U}$, dann gilt $X^{\xi \oplus V} \cong \Sigma^V X^\xi$. Für ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \eta & \xrightarrow{\Phi} & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

in welchem Φ eine faserweise Einbettung ist, haben wir ein induziertes Diagramm $Y^\eta \rightarrow X^\xi$.

Für Bündel $\eta \rightarrow Y$ und $\xi \rightarrow X$ gilt $(X \times Y)^{\xi \boxplus \eta} \cong X^\xi \wedge Y^\eta$.

4.3.2 Sei $\xi(V) \rightarrow BU(V)$ das universelle Vektorbündel. Für $V \subset V'$ gilt $\xi(V')|_{BU(V)} \cong \xi(V) \oplus (V' \ominus V)$. Folglich haben wir eine Abbildung $\Sigma^{V' \ominus V} BU(V) \rightarrow BU(V')$. Diese Abbildungen definieren auf $V \rightarrow BU(V)^V$ die Struktur eines Spektrums.

Definition 4.7 Das Spektrum $V \rightarrow MU(V) := BU(V)^V$ ist das Thomspektrum der komplexen Bordismustheorie.

Die Ringspektrumstruktur wird durch

$$\begin{aligned} MU(V) \wedge MU(W) &\cong BU(V)^{\xi(V)} \wedge BU(W)^{\xi(W)} \\ &\cong (BU(V) \times BU(W))^{\xi(V) \boxplus \xi(W)} \\ &\rightarrow BU(V \oplus W)^{\xi(V \oplus W)} \\ &\cong MU(V \oplus W) \end{aligned}$$

gegeben (wobei $V \oplus W \subset \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$) und Internalisierung gegeben.

4.3.3 Die Homologie $H_*(X) := H_*(X, \mathbb{Z})$ eines Spektrums X kann durch $H_n(X) \cong [S^n, X \wedge H\mathbb{Z}^0]$ ausgerechnet werden. Hierbei ist $H\mathbb{Z}^0$ ein unendlicher Schleifenraum, nämlich der nullte Raum eines Ω -Spektrums vom Typ $H\mathbb{Z}$. Für MU konkret ausgeschrieben bedeutet das

$$\begin{aligned} H_n(MU) &= \text{colim}_V [\Sigma^V S^n, MU(V) \wedge H\mathbb{Z}^0] \\ &= \text{colim}_V [\Sigma^V S^n, MU(V) \wedge H\mathbb{Z}^0] \\ &= \text{colim}_V [\Sigma^V S^n, BU(V)^{\xi(V)} \wedge H\mathbb{Z}^0] \\ &= \text{colim}_V H_{n+V}(BU(V)^{\xi(V)}) \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die Verbindungsabbildungen durch

$$H_{n+V}(BU(V)^{\xi(V)}) \cong H_{n+V'}(\Sigma^{V' \ominus V} BU(V)^{\xi(V)}) \rightarrow H_{n+V'}(BU(V')^{\xi(V')})$$

gegeben werden (erste Abbildung ist der Einhängungsisomorphismus und die zweite Abbildung benutzt die Strukturabbildung des Spektrums).

4.3.4 Wir haben folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(BU(V)) & \longrightarrow & H_{n+V}(BU(V)^{\xi(V)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & H_{n+V'}(\Sigma^{V' \ominus V} BU(V)^{\xi(V)}) \\ & & \downarrow \\ H_n(BU(V')) & \longrightarrow & H_{n+V'}(BU(V')^{\xi(V')}) \end{array} .$$

Die horizontalen Abbildungen sind durch den Thomisomorphismus gegeben. Die Kommutativität folgt aus der Übereinstimmung des Thomisomorphismus und des Einhängungsisomorphismus für triviale Vektorbündel. Wir schließen, daß

$$\begin{array}{ccc} H_*(MU) & \longrightarrow & H_*(BU) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k, \dots] & \xrightarrow{y_k \mapsto a_k} & \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_k, \dots] \end{array} .$$

Das folgende Diagramm zeigt, daß diese Identifikation sogar die Ringstruktur erhält.

$$\begin{array}{ccc} H_*(BU(V)) \times H_*(BU(W)) & \longrightarrow & H_{*+V}(BU(V)^{\xi(V)}) \otimes H_{*+W}(BU(W)^{\xi(W)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & H_{*+V \oplus W}(BU(V)^{\xi(V)} \times BU(W)^{\xi(W)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(BU(V \oplus W)) & \longrightarrow & H_{*+V \oplus W}(BU(V \oplus W)^{\xi(V \oplus W)}) \end{array}$$

Proposition 4.8 *Wir haben eine natürliche Isomorphie von Ringen*

$$H_*(MU) \cong \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k, \dots] .$$

4.4 Die mod p -Steenrodalgebra

4.4.1 Wir beschreiben hier die mod- p Steenrodalgebra \mathcal{A}_p als assoziative graduierte Algebra durch Erzeuger und Relationen:

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_p = \langle (P^n)_{n \geq 1}, \beta | \text{Ademrelationen} \rangle .$$

Hierbei ist $|P^n| = 2n(p-1)$ und $|\beta| = 1$ Die Ademrelationen haben die Gestalt

1.

$$P^h P^k = \sum_{i=0}^{[h/p]} (-1)^{h+i} \binom{(p-1)(k-i)-1}{h-pi} P^{h+k-i} P^i \quad 0 < h < pk$$

2.

$$\begin{aligned} P^h \beta P^k &= \sum_{i=0}^{[h/p]} (-1)^{h+i} \binom{(p-1)(k-i)}{h-pi} \beta P^{h+k-i} P^i \\ &+ \sum_{i=0}^{[(h-1)/p]} (-1)^{h+i+1} \binom{(p-1)(k-i)-1}{h-pi-1} P^{h+k-i} \beta P^i \quad 0 < h < pk \end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathcal{A} \cong [H\mathbb{F}_p, H\mathbb{F}_p] .$$

Die Algebrastruktur kommt von der Komposition der Operationen.

4.4.2 Die Ringspektrumstruktur $H\mathbb{F}_p \wedge H\mathbb{F}_p \rightarrow H\mathbb{F}_p$ induziert eine kommutative Hopfalgebrastruktur

$$\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} ,$$

welche in Termen der Erzeuger durch

$$\psi(P^n) = \sum_{k=0}^n P^k \otimes P^{n-k} , \quad \psi(\beta) = \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta$$

gegeben wird. Diese Formel ist äquivalent zur Cartanformel

$$P^n(x \cup y) = \sum_{i=0}^n P^i(x) \cup P^{n-i}(y) ,$$

welche die Verträglichkeit der Operationen mit dem \cup -Produkt auf der Kohomologie ausdrückt.

Die Koeins wird durch die Eins der Ringspektrumstruktur $S \rightarrow H\mathbb{F}_p$ induziert.

4.4.3 Wir betrachten die Indexmenge von endlichen Folgen $I := \{\epsilon_0, r_1, \epsilon_1, r_1, \epsilon_2, r_2, \dots\}$ mit $\epsilon_i \in \{1, -1\}$ und $r_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Für so einen Multiindex definieren wir $s_k := \sum_{i=k}^{\infty} (\epsilon_i + r_i) p^{i-k}$, $k \geq 1$ und setzen

$$\theta(I) := \beta^{\epsilon_0} P^{s_1} \beta^{\epsilon_1} P^{s_2} \dots \in \mathcal{A} .$$

Diese Elemente bilden eine \mathbb{F}_p -Basis von \mathcal{A} .

4.4.4 Für einen Raum oder ein Spektrum X ist $H_*(X, \mathbb{F}_p)$ ein Rechtsmodul über \mathcal{A} mit der Wirkung

$$\lambda : H_*(X, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{A} \rightarrow H_*(X, \mathbb{F}_p) .$$

Diese Struktur wird von

$$[S, X \wedge H\mathbb{F}_p] \otimes [H\mathbb{F}_p, H\mathbb{F}_p] \rightarrow [H\mathbb{F}_p, X \wedge H\mathbb{F}_p \wedge H\mathbb{F}_p] \xrightarrow{mult} [H\mathbb{F}_p, X \wedge H\mathbb{F}_p] \xrightarrow{Eins} [S, X \wedge H\mathbb{F}_p]$$

induziert.

β ist der Bockstein Operator. Es gilt weiter $P^n x = x^p$ für $|x| = 2n$ und $P^n x = 0$ für $2n > |x|$.

Sei \mathcal{A}^* die duale Hopfalgebra (man dualisiert Gradweise und nimmt dann die Summe der Komponenten). Diese ist eine kommutative Algebra mit einem nicht-kommutativen Koprodukt. Durch Dualisieren erhält man eine Komodulstruktur

$$\lambda^* : H^*(X, \mathbb{F}_p) \rightarrow H^*(X, \mathbb{F}_p) \otimes \mathcal{A}^* .$$

Im folgenden wollen wir die Struktur \mathcal{A}^* bestimmen (nach [6]).

4.4.5 Sei $X := K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 1)$. Es gilt

$$H^*(X, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[a, b]/(a^2) , |a| = 1, |b| = 2 .$$

Es gilt $\beta(a) = b$. Um dies einzusehen, betrachten wir das Diagramm von Koeffizientengruppen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array} .$$

Da $H^1(K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Z}) \cong 0$ ist, bildet der Bocksteinoperator der oberen Sequenz den Generator $a \in H^1(K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Z})$ auf den Generator von $H^2(K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Z})$ ab. Letzterer liefert nach p -Reduktion die Klasse b . Aus der Natürlichkeit der Bocksteinoperatoren folgt $\beta(a) = b$.

Wir betrachten insbesondere die folgenden Elemente unserer additiven Basis:

$$M_k := P^{p^{k-1}} P^{p^{k-2}} \dots P^p P^1 .$$

Lemma 4.9 *Es gilt $M_k b = b^{p^k}$ und $\theta(I)b = 0$ für alle anderen Basiselemente. Es gilt weiter $M_k \beta a = b^{p^k}$ und $\theta(I) = 0$ für alle anderen Basiselemente.*

Proof : Sei $P := 1 + P + P^2 + \dots$. Aus der Cartan-Formel $P^n(x \cup y) = \sum_{i=0}^n P^i x \cup P^{n-i} y$ folgt, daß P ein Ringhomomorphismus ist:

$$\begin{aligned} P(x \cup y) &= \sum_{i=0}^{\infty} P^i(x \cup y) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j+k=i} P^j(x) \cup P^k(y) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} P^j(x) \right) \cup \left(\sum_{k=0}^{\infty} P^k(y) \right) \\ &= P(x) \cup P(y) . \end{aligned}$$

Dann gilt $Pb = b + b^p$ und $Pb^i = (b + b^p)^i$ (da $P^i(b) = 0$ für $i \geq 2$, 4.4.4). Insbesondere $Pb^{p^r} = b^{p^r} + b^{p^{r+1}}$. Also ist

$$P^j b^{p^r} = \begin{cases} b^{p^r} & j = 0 \\ b^{p^{r+1}} & j = p^r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Es gilt weiter $\beta b^i = i b^{i-1} \beta(b) = i b^{i-1} \beta(\beta(a)) = 0$. Also wirkt nur P^{p^r} nichttrivial auf b^{p^r} . Mit $P^i a = 0$ folgt die Behauptung. \square

4.4.6 Wir berechnen nun $\lambda^*(a) \in H^*(X, \mathbb{F}_p) \otimes \mathcal{A}^*$.

Lemma 4.10 *Es gilt*

$$\lambda^*(a) = a \otimes 1 + b \otimes \tau_0 + b^p \otimes \tau_1 + \cdots + b^{p^r} \otimes \tau_r + \dots$$

wodurch die Elemente $\tau_r \in \mathcal{A}_{2p^k-1}^*$ definiert werden. Analog gilt

$$\lambda^*(b) = b \otimes 1 + b^p \otimes \xi_1 + \cdots + b^{p^r} \otimes \xi_r + \dots$$

mit wohldefinierten $\xi_r \in \mathcal{A}_{2p^r-2}^*$.

Proof : Für $x \in H^*(X, \mathbb{F}_p)$ schreiben wir $\lambda^*(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(x)$ mit $\lambda^i(x) \in H^{*+i}(X, \mathbb{F}_p) \otimes \mathcal{A}_i^*$. Sei weiter $\lambda^i(x) = \sum_j x_j \otimes \alpha_j$ für eine Basis (x_j) . Dann gilt für $\theta \in \mathcal{A}_i$, daß $\theta(x) = \sum_j (-1)^{|x_j||\alpha_j|} \langle \theta, \alpha_j \rangle x_j$.

Sei $\theta \in \mathcal{A}_i$ nicht ein Monom M_k . Dann gilt nach Lemma 4.9 $\theta(b) = 0 = \sum_j (-1)^{|x_j||\alpha_j|} \langle \theta, \alpha_j \rangle x_j$. Durch Variation von θ schließen wir nun, daß $\lambda^i(b) = 0$ außer wenn $i = 2(p^k - 2)$. Also

$$\lambda^*(b) = \lambda^0(b) + \lambda^p(b) + \cdots + \lambda^{p^r}(b) + \dots$$

Es gilt also $\lambda^{p^r}(b) = b^{p^r} \otimes \xi_r$ für ein wohldefiniertes ξ_r . Analog beweist man die andere Behauptung. \square

4.4.7

Theorem 4.11 *Es gilt folgender Ringisomorphismus*

$$\mathcal{A}^* \cong \mathbb{F}_p[\xi_1, \dots, \xi_n, \dots] \otimes E[\tau_0, \dots, \tau_n, \dots],$$

wobei E für eine äußere Algebra steht.

Proof : Wir benutzen folgendes Lemma.

Lemma 4.12 *Es gilt $\langle M_k, \xi_k \rangle = 1$ und $\langle \theta(I), \xi_k \rangle$ für jedes andere Monom $\theta(I)$. Weiter gilt $\langle M_k, \beta, \tau_k \rangle = 1$ und $\langle \theta(I), \tau_k \rangle$ für jedes andere Monom.*

Proof : Nach Lemma 4.9 gilt $b^{p^k} = M_k(b) = \langle M_k, \xi_k \rangle b^{p^k}$ und $0 = \theta(I)(b) = \langle \theta(I), \xi_k \rangle b^{p^k}$. Analog zeigt man den zweiten Teil. \square

Wir beenden nun den Beweis des Theorems. Für eine endliche Folge $I = (\epsilon_0, r_1, \epsilon_1, \dots)$ definieren wir $\omega(I) := \tau_0^{\epsilon_0} \xi_1^{r_1} \tau_1^{\epsilon_1} \xi_2^{r_2} \dots$. Wir zeigen, daß die $\omega(I)$ eine additive Basis von \mathcal{A}^* bilden. Wir ordnen die Indizes I lexikographisch von rechts, so daß zum Beispiel $(1, 2, 0) < (0, 0, 1)$ gilt.

Lemma 4.13 *Es gilt $\langle \theta(I), \omega(J) \rangle = \pm 1$ für $I = J$ und $\langle \theta(I), \omega(J) \rangle = 0$ für $I < J$.*

Es ist klar, daß dieses Lemma das Theorem impliziert.

Proof : Im Beweis sind mehrere Fälle abzuarbeiten. Wir erklären die Beweisidee an einem dieser Fälle. Wir benutzen Induktion nach dem Grad. Sei r_k das letzte nichtverschwindende Element in I . Wir setzen $I' := (\epsilon_0, r_1, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, r_k - 1, 0, \dots)$. Dann ist $\omega(I') \xi_k = \omega(I)$. Es gilt mit dem Produkt $\psi : \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$

$$\begin{aligned} \langle \theta(I), \omega(I) \rangle &= \langle \theta(I), \psi(\omega(I') \otimes \xi_k) \rangle \\ &= \langle \psi^* \theta(I), \omega(I') \otimes \xi_k \rangle \\ &= \langle \sum (\pm 1) \beta^{\epsilon'_0} \dots P^{s'_k} \otimes \beta^{\epsilon''_0} \dots P^{s''_k}, \omega(I') \otimes \xi_k \rangle \\ &= \sum (\pm 1) \langle \beta^{\epsilon'_0} \dots P^{s'_k}, \omega(I') \rangle \langle \beta^{\epsilon''_0} \dots P^{s''_k}, \xi_k \rangle \\ &= (\pm 1), \end{aligned}$$

wobei die Summe über alle Zerlegungen $\epsilon_i = \epsilon'_i + \epsilon''_i$ und $r_i = r'_i + r''_i$ geht (Cartanformel). Die Reduktion im letzten Schritt benutzt, daß $\langle \beta^{\epsilon''_0} \dots P^{s''_k}, \xi_k \rangle$ Null ist außer für $\beta^{\epsilon''_0} \dots P^{s''_k} = M_k$. Dann ist aber $\beta^{\epsilon'_0} \dots P^{s'_k} = \theta(I')$ und wir wenden die Induktionsvoraussetzung an. \square

4.4.8 Wir halten noch einmal fest, daß

$$\xi_n := (P^{p^{n-1}} \dots P^p P^1)^*$$

und

$$\tau_n := (P^{p^{n-1}} \dots P^p P^1 \beta)^*$$

gilt.

Lemma 4.14 [6, Thm. 3] *Das Koprodukt dieser Elemente wird durch*

$$\psi(\xi_n) = \sum_{k=0}^n \xi_{n-k}^{p^k} \otimes \xi_k$$

und

$$\psi(\tau_n) = \tau_n \otimes 1 + \sum_{k=0}^n \xi_{n-k}^{p^k} \otimes \tau_k$$

gegeben.

Proof : Wir starten mit der Gleichung

$$\lambda^*(b) = \sum_{i=1}^{\infty} b^{p^i} \otimes \xi_i .$$

Wir erheben diese Gleichung in die p^j -te Potenz und erhalten (λ^* ist ein Ringhomomorphismus)

$$\lambda^*(b^{p^j}) = \sum_{k=1}^{\infty} b^{p^{j+k}} \otimes \xi_k^{p^j} .$$

Wir berechnen nun

$$(\lambda^* \otimes 1) \circ \lambda^*(b) = \sum_{i,k=1}^{\infty} b^{p^{i+k}} \otimes \xi_i^{p^k} \otimes \xi_k .$$

Wir vergleichen (Koassoziativität) mit

$$(1 \otimes \psi) \circ \lambda^*(b) = \sum_{\alpha, \beta, l} b^{p^l} \otimes \psi_{\alpha}(\xi_l) \otimes \psi_{\beta}(\xi_l) .$$

Es ergibt sich

$$\psi(\xi_k) = \sum_{i+j=k} \xi_i^{p^j} \otimes \xi_j .$$

Die zweite Formel beweist man analog. □

Für $p = 2$ sei

$$\xi_n := (\mathbf{Sq}^{2^{n-1}} \mathbf{Sq}^{2^{n-2}} \dots \mathbf{Sq}^2 \mathbf{Sq}^1)^* \in \mathcal{A}_{2^n-1}^*$$

und es gilt

$$\mathcal{A}^* \cong \mathbb{F}_2[\xi_1, \dots, \xi_n, \dots] .$$

4.5 Die Homologie von MU mit \mathbb{F}_p -Koeffizienten

4.5.1 Wir bestimmen zuerst die Homologie $H_*(BU(1), \mathbb{F}_p)$ als \mathcal{A}^* -Komodul. Dazu dualisieren wir den \mathcal{A} -Modul $H^*(BU(1), \mathbb{F}_p)$. Da $H_*(BU(1), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \langle a_1, a_2, \dots \rangle$ frei als \mathbb{Z} -Modul ist, gilt nach der universellen Koeffizientenformel $H^*(BU(1), \mathbb{F}_p) \cong H^*(BU(1), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p[c_1]$. Da $H^{odd}(BU, \mathbb{F}_p) \cong 0$ gilt, muß das Bocksteinelement $\beta \in \mathcal{A}$ trivial wirken. Durch Dualisieren der Wirkung $\mathcal{A}/(\beta) \otimes H^*(BU(1), \mathbb{F}_p) \rightarrow H^*(BU(1), \mathbb{F}_p)$ erhalten wir

$$\psi : H_*(BU(1), \mathbb{F}_p) \rightarrow [\mathcal{A}/(\beta)]^* \otimes H_*(BU(1), \mathbb{F}_p) .$$

Wir betrachten $[\mathcal{A}/\beta]^* \subset \mathcal{A}^*$ als Unterhopfalgebra.

Lemma 4.15

$$\mathcal{B} := [\mathcal{A}/\beta]^* = \begin{cases} \mathbb{F}_2[\xi_1^2, \xi_2^2, \dots] & p = 2 \\ \mathbb{F}_p[\xi_1, \xi_2, \dots] & p \neq 2 \end{cases} .$$

Proof : Wir betrachten hier den Fall $p \neq 2$. Es ist klar, daß $\mathbb{F}_p[\xi_1, \xi_2, \dots] \subset [\mathcal{A}/(\beta)]^*$ (die ξ_i verschwinden auf allen Monomen in den Erzeugenden von \mathcal{A} , welche β enthalten. Auf der anderen Seite, wenn $Y \in \mathcal{A}^* \setminus [\mathcal{A}/(\beta)]^*$, dann gilt nach Lemma 4.13 daß $\langle \theta(I), Y \rangle \neq 0$ für ein geeignetes Monom $\theta(I)$ welches β enthält und damit zu (β) gehört. \square

Lemma 4.16 Die Komponente in $\mathcal{A}_{k-2}^* \otimes H_2(BU(1), \mathbb{F}_p)$ von $\psi(a_k)$ wird durch

$$\begin{cases} \xi_n^2 \otimes a_1 & p = 2 \text{ und } k = 2^n \\ \xi_n \otimes a_1 & p \neq 2 \text{ und } k = p^n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

gegeben.

Proof : Wir betrachten wieder den Fall $p \neq 2$.

Wir berechnen $P^I(c_1)$ (hier ist $I = (i_n, \dots, i_0)$, $i_j \geq pi_{j-1}$ und $P^I = P^{i_n} P^{i_{n-1}} \dots P^{i_1}$). Wenn $P^I(c_1) \neq 0$ gilt, dann ist $I = (p^n, p^{n-1}, \dots, p, 1)$ für ein geeignetes n (wir benutzen 4.4.4).

Wir zeigen nun induktiv nach dem Grad, daß

$$P^{p^{n-1}} P^{p^{n-2}} \dots P^p P^1(c_1) = c_1^{p^n} .$$

Tatsächlich gilt der Fall $n = 1$. $Pc_1 = c_1^p$. Möge die Behauptung bis $n - 1$ richtig sein. Dann ist $P^I(c_1) = P^J P^1(c_1) = P^J(c_1^p)$. Wir sehen mit der Cartanformel, daß $P^p(c_1^p) = P^p(c_1 c_1^{p-1}) = P(c_1) P^{p-1}(c_1^{p-1}) = \dots = P(c_1)^p$ ist. Weiter gilt mit dem gleichen Argument $P^{p^2}(P(c_1)^p) = (P^p P(c_1))^p$. Wir fahren so fort und erhalten $P^J(c_1^p) = P^{J'}(c_1)^p = (c_1^{p^{n-1}})^p = c_1^{p^n}$ mit $pJ' = J$ und der Induktionsvoraussetzung. Wir rechnen nun

$$\begin{aligned} \langle \psi(a_k), P^I \otimes c_1 \rangle &= \langle a_k, P^I(c_1) \rangle \\ &= \begin{cases} \langle a_k, c_1^{p^n} \rangle & I = (p^{n-1}, p^{n-2}, \dots, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & I = (p^{n-1}, p^{n-2}, \dots, 1) \text{ und } k = p^n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Ein analoge Rechnung liefert $\langle \psi(a_k), 1 \otimes c_1^k \rangle = 1$, so daß $\psi(a_k) = 1 \otimes a_k + \mathcal{A}_{\geq 2}^* \otimes H_*(BU(1), \mathbb{F}_p)$ gilt.

4.5.2 Wir berechnen jetzt $H_*(MU, \mathbb{F}_p)$ als \mathcal{A}^* -Komodul. Da $H_*(MU, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k, \dots]$, $|y_k| = 2k$, ein freier \mathbb{Z} -Modul ist, gilt nach universellen Koeffizienten $H_*(MU, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_k, \dots]$ als \mathbb{F}_p -Algebra. Es bleibt die Bestimmung der Komodulstruktur.

Definition 4.17 Sei $\psi : M \rightarrow \mathcal{A} \otimes M$ ein Komodul über einer Hopfalgebra \mathcal{A} . Ein Element $x \in M$ heißt primitiv, wenn $\psi(x) = 1 \otimes x$ gilt. Mit $PM \subseteq M$ bezeichnen wir den Unterraum der primitiven Elemente.

Ist M die Homologiealgebra eines H -Raumes, dann ist PM eine Unteralgebra.

Lemma 4.18 Es gilt

$$H_*(MU; \mathbb{F}_p) \cong \mathcal{B} \otimes PH_*(MU; \mathbb{F}_p)$$

als \mathbb{F}_p -Algebra und als \mathcal{A}^* -Komodul (von der Komodulstruktur von \mathcal{B} induziert).

Proof : Sei $S \subset D$ das Sphären- und das Scheibenbündel des universellen \mathbb{C} -Bündels über $BU(1)$. Dann ist $S \cong EU(1)$ zusammenziehbar. Wir erhalten eine Homotopieäquivalenz e .

$$MU(1) \cong D/S \cong D \cong BU(1) .$$

Sei

$$\tau : H_*(BU(1); \mathbb{F}_p) \xrightarrow{e} H_*(MU(1); \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\text{stabilisieren}} H_{*-2}(MU; \mathbb{F}_p)$$

der induzierte Isomorphismus. Dann gilt $\tau(a_1) = 1$. Dazu muß man einsehen, daß $\langle Th, e(a_1) \rangle = 1$ ist, wobei $Th \in \tilde{H}^2(MU(1); \mathbb{F}_p)$ die Thomklasse ist. Interpretiert man Th geometrisch als den Nullschnitt von D , dann ist diese Paarung gerade die Selbstschnittzahl von $S^2 \subset BU(1) \xrightarrow{\text{Nullschnitt}} MU(1)$. Diese Zahl ist 1.

Allgemeiner gilt $e(a_k) = y_{k-1}$. In der Tat ist $Th = e(c_1)$. Sei $\Phi_* : H_{*+2}(MU; \mathbb{F}_p) \rightarrow H_*(BU(1); \mathbb{F}_p)$ der Thomisomorphismus in Homologie, und Φ^* der Thomisomorphismus in Kohomologie. Dann gilt $\langle c_1^{k-1}, \Phi(e(a_k)) \rangle = \langle \Phi^*(c_1^{k-1}), e(a_k) \rangle = \langle c_1^k, a_k \rangle = 1$.

Da τ mit der \mathcal{A}^* -Komodulstruktur

$$\psi : H_*(MU, \mathbb{F}_p) \rightarrow \mathcal{A}^* \otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(MU, \mathbb{F}_p)$$

vertauscht, gilt

$$\psi(H_*(MU, \mathbb{F}_p)) \subset \mathcal{B} \otimes_{\mathbb{F}_p} H_*(MU, \mathbb{F}_p) .$$

Wir definieren

$$T := \mathbb{F}_p[z_k | k \geq 1, k+1 \neq p^r] .$$

Wir definieren weiter einen Algebrhomomorphismus

$$g : H_*(MU, \mathbb{F}_p) \rightarrow T$$

durch

$$g(y_k) := \begin{cases} z_k & k+1 \neq p^r \\ 0 & k+1 = p^r \end{cases}$$

($H_*(MU, \mathbb{F}_p)$ ist frei!). Dann betrachten wir den Algebrhomomorphismus

$$\gamma : H_*(MU, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\psi} \mathcal{B} \otimes H_*(MU, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{1 \otimes g} \mathcal{B} \otimes T .$$

Wenn wir die \mathcal{A}^* -Komodulstruktur auf der zweiten und dritten Algebra von der Komodulstruktur von \mathcal{B} induzieren, dann ist γ ein Homomorphismus von \mathcal{A}^* -Komoduln.

Sowohl $H_*(MU, \mathbb{F}_p)$ als auch $\mathcal{B} \otimes T$ sind Polynomialgebren mit jeweils einem Generator in jedem geraden positiven Grad. Wenn die Bilder $\gamma(y_k)$ unzerlegbar sind, dann muß γ ein Isomorphismus sein. Wir berechnen mit Lemma 4.16, daß für $k+1 = p^n$

$$\begin{aligned} \gamma(y_k) &= \gamma(\tau(a_{k+1})) = (1 \otimes g) \circ (1 \otimes \tau) \circ \psi(a_{k+1}) \\ &= (1 \otimes g)(1 \otimes \tau)(1 \otimes a_{k+1} + \xi_n \otimes a_1) + \text{zerlegbare} \\ &= (1 \otimes g)(1 \otimes y_k + \xi_n \otimes 1) + \text{zerlegbare} \\ &= \xi_n \otimes 1 + \text{zerlegbare} \end{aligned}$$

(unzerlegbare Elemente sind notwendiger Weise von der Form $1 \otimes \dots$ oder $\dots \otimes 1$) Wenn $k+1 \neq p^r$ ist, dann gilt

$$\gamma(y_k) = (1 \otimes g) \circ (1 \otimes \tau) \circ \psi(a_{k-1}) = (1 \otimes g) \circ (1 \otimes \tau)(1 \otimes a_{k-1}) + \text{zerlegbare} = 1 \otimes z_k + \text{zerlegbare} .$$

□

Es ist hier nicht gesagt, daß die y_k mit $k+1 \neq p^r$ primitiv sind. Eine Basis der primitiven Elemente ist aber von der Form $(y_k + \text{lower order})_{k+1 \neq p^r}$.

5 Die Homotopie von MU

5.1 Cotor

5.1.1 Sei (A, ψ) eine Koalgebra über einem Körper k , (M, λ_M) ein rechter A -Komodul und (N, λ_N) ein linker A -Komodul. Wir haben die beiden Abbildungen

$$\lambda_M \otimes \text{id}_N, \text{id}_M \otimes \lambda_N : M \otimes N \rightarrow M \otimes A \otimes N ,$$

wobei alle unbezeichneten Tensorprodukte über k sind.

Definition 5.1 Wir definieren das Kotensorprodukt $M \square_A N$ als den Equalizer

$$M \otimes_A N \rightrightarrows M \otimes A \otimes N$$

von $\lambda_M \otimes \text{id}_N, \text{id}_M \otimes \lambda_N$.

5.1.2 Das Kotensorprodukt ist der zum Tensorprodukt duale Begriff. Durch

$$A^* \otimes A^* \xrightarrow{\text{can}} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\lambda^*} A^*$$

wird A^* eine Algebra. In analoger Weise werden M^* ein rechter und N^* ein linker A^* -Modul. Wenn A, M, N \mathbb{Z} -graduier und vom endlichen Type sind (in jedem Grad endlich-dimensional), dann gilt $A \cong A^{**}$, $M \cong M^{**}$ und $N \cong N^{**}$. Direkt aus der Konstruktion von $M^* \otimes_{A^*} N^*$ als Kolimes folgt und der Definition von $M \square_A N$ als Limes folgt

$$[M^* \otimes_{A^*} N^*]^* \cong M \square_A N .$$

5.1.3 Wenn wir N festhalten, so ist $M \mapsto M \square_A N$ ein Funktor von der Kategorie $A - \text{comod}$ der A -Komoduln in die Kategorie $k - \text{vect}$ der k -Vektorräume. Da der Equalizer ein Limes ist, ist dieser Funktor linksexakt und besitzt einen rechtsabgeleiteten Funktor. Wir bezeichnen diesen mit $\dots \square_A^R N : D^+(A - \text{comod}) \rightarrow D^+(k - \text{vect})$.

Definition 5.2 Wir definieren $\text{Cotor}_A^*(\dots, N) := H^*(\dots \square_A^R N)$.

5.1.4 Es gilt $A \square_A N \cong N$. Weil das Kotesorprodukt als ein Limes definiert ist, gilt für eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von A -Komoduln und N vom endlichen Typ, daß

$$\left(\prod_{i \in I} M_i \right) \square_A N \cong \prod_{i \in I} (M_i \square_A N) .$$

5.1.5 Sei $B \rightarrow A$ ein Homomorphismus von Koalgebren. Ist M ein B -Komodul, so wird er ein A -Komodul durch

$$M \rightarrow M \otimes B \rightarrow M \otimes A .$$

Da Kern und Kokern einer Abbildung von K -Moduln auf der Ebene der unterliegenden Vektorräume gebildet wird, ist dieser Funktor offensichtlich exakt. Die linke vertikale Abbildung im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M \square_B N & \longrightarrow & M \otimes N & \rightrightarrows & M \otimes B \otimes N \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M \square_A N & \longrightarrow & M \otimes N & \rightrightarrows & M \otimes A \otimes N \end{array}$$

induziert eine Transformation

$$\mathbf{Cotor}_B(M, N) \rightarrow \mathbf{Cotor}_A(M, N) .$$

5.1.6 Der Komomodul (A, ψ) ist injektiv (beachte, daß Injektivität von A dual zur Projektivität von A^* ist). Allgemeiner ist für einen k -Vektorraum V der kofreie A -Komodul $V \otimes A$ injektiv. In der Tat sei

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N \\ & & \downarrow \phi & \nearrow & \\ & & V \otimes A & & \end{array}$$

gegeben, wobei der gepunktete Pfeil gesucht ist. Wir erweitern mit der Koeins zu

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N \\ & & \downarrow \phi & \nearrow & \\ & & V \otimes A & \xrightarrow{s} & \\ & & \downarrow \eta & \nearrow & \\ & & V & & \end{array}$$

wobei die Existenz von s aus der Injektivität von V in $k\text{-vect}$ folgt. Mittels der Kowirkungen erweitern wir zu

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & M \otimes A & \longrightarrow & N \otimes A & & \\ & & \searrow \phi \otimes \eta & & \downarrow s \otimes \text{id}_A & & \\ & & & & V \otimes A & & \end{array}$$

5.1.7 Man kann $\mathbf{Cotor}_A(M, N)$ mittels einer injektiven Auflösung berechnen. Insbesondere kann man einen kofreie Auflösung benutzen. Jeder A -Komodul M besitzt eine solche Auflösung. Hier ist die Konstruktion. Wir starten mit $\lambda_M := \eta_0 : M \rightarrow M \otimes A =: F_0$. Wir konstruieren die Auflösung

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\eta_0} F_0 \xrightarrow{\eta_1} F_1 \xrightarrow{\eta_2} \dots$$

Wenn wir F_n konstruiert haben, dann sei K_n durch

$$F_{n-1} \xrightarrow{\eta_n} F_n \rightarrow K_n \rightarrow 0$$

gegeben. Wir setzen $F_{n+1} := K_n \otimes A$ und lassen $\eta_n : F_n \rightarrow K_n \rightarrow K_n \otimes A \cong F_{n+1}$ durch die Komodulstruktur von K_n induziert sein.

5.1.8 Die Kategorien $A - \text{comod}$, $(A \otimes A) - \text{comod}$ etc sind k -lineare Katgeorien. Das Tensorprodukt über k induziert einen Funktor

$$\otimes : A - \text{comod} \otimes A - \text{comod} \rightarrow (A \otimes A) - \text{comod} .$$

Dieser Funktor ist exakt. Für linke A -Komoduln N_0, N_1 kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A - \text{comod} \otimes A - \text{comod} & \xrightarrow{\otimes} & (A \otimes A) - \text{comod} \\ \downarrow \dots \square_A N_0 \otimes \dots \square_A N_1 & & \downarrow \dots \square_{A \otimes A} N_0 \otimes N_1 \\ k - \text{vect} \otimes k - \text{vect} & \xrightarrow{\otimes} & k - \text{vect} \end{array} .$$

Dies induziert eine natürlichen Isomorphismus

$$(M_0 \square_A^R N_0) \otimes (M_1 \square_A^R N_1) \rightarrow (M_0 \otimes M_1) \square_{A \otimes A}^R (N_0 \otimes N_1) . \quad (2)$$

5.1.9 Wir nehmen jetzt an, daß A eine Hopfalgebra ist. Die Multiplikation $A \otimes A \rightarrow A$ ist eine Abbildung von Koalgebren. Dann haben wir nach 5.1.5 einen Funktor

$$R : (A \otimes A) - \text{comod} \rightarrow A - \text{comod} .$$

Sei N ein linker $(A \otimes A)$ -Komodul. Dann haben wir die Abbildung

$$M \square_{A \otimes A}^R N \rightarrow R(M) \square_A^R R(N) .$$

Wir nehmen nun an, daß M und N zusätzlich Algebren in $A - \text{comod}$ sind. Dann erhalten wir die folgende Komposition

$$\begin{aligned} (M \square_A^R N) \otimes (M \square_A^R N) &\cong (M \otimes M) \square_{A \otimes A}^R (N \otimes N) \\ &\rightarrow R(M \otimes M) \square_A^R R(N \otimes N) \\ &\rightarrow M \square_A^R N \end{aligned}$$

Damit wird $\text{Cotor}^*(M \square_A^R N)$ eine graduierte Algebra in $k - \text{vect}$. Sind M und N graduiert-kommutativ, so ist es auch $\text{Cotor}^*(M \square_A^R N)$.

Insbesondere ist k eine Algebra über A (die Komodulstruktur ist durch die Eins $k \rightarrow A \cong A \otimes k$ gegeben). Ist M eine graduiert kommutative Algebra über A , dann ist $\text{Cotor}_A^*(M, k)$ eine graduiert-kommutative k -Algebra.

5.1.10 Wir nehmen jetzt an, daß A, M und N vom endlichen Typ sind. Weiter sei N ein A -Komodul und gleichzeitig ein A^* -Modul so daß die von der A -Komodulstruktur induzierte A^* -Modulstruktur auf N^*

$$A^* \otimes N^* \cong A^* \otimes \text{Hom}_k(N, k) \cong \text{Hom}_k(A \otimes N, k) \rightarrow \text{Hom}(N, k) \cong N^*$$

mit der A^* -Modulstruktur

$$A^* \otimes N^* \cong A^* \otimes \text{Hom}(N, k) \xrightarrow{a^* \otimes \phi \mapsto \phi \circ a^*} \text{Hom}(N, k) \cong N^*$$

übereinstimmt.

Lemma 5.3 *Es gilt*

$$\text{Ext}_{A^*}(M^*, N^*) \cong \text{Cotor}_A^*(M, N^*) .$$

Proof : Sei $0 \rightarrow M \rightarrow F$ eine kofreie Auflösung von M . Dann ist $F^* \rightarrow M^* \rightarrow 0$ eine freie Auflösung von M^* .

$$\begin{aligned}
\text{Ext}_{A^*}^*(M^*, N^*) &\cong H^*(\text{Hom}_{A^*}(F^*, N^*)) \\
&\cong H^*(\text{Hom}_{A^*}(F^*, \text{Hom}_k(N, k))) \\
&\cong H^*(\text{Hom}_k(F^* \otimes_{A^*} N, k)) \\
&\cong H^*(\text{Hom}_k(F^* \otimes_{A^*} N, k)) \\
&\cong H^*([F^* \otimes_{A^*} N]^*) \\
&\cong H^*(F \square_A N^*) \\
&\cong \text{Cotor}_A(M, N^*) .
\end{aligned}$$

□

Wenn A eine Hopfalgebra ist, dann kann man dieses Lemma auf den Fall $N \cong k$ anwenden.

5.2 Berechnung von Cotor

5.2.1 Sei A eine Hopfalgebra und $B \subseteq A$ eine Unterhopfalgebra. Wir definieren B^+ durch

$$0 \rightarrow B^+ \rightarrow B \rightarrow k \rightarrow 0 .$$

Wir nennen B normal (und schreiben $B \leq A$) wenn $AB^+ = B^+A$ gilt. Wir definieren in diesem Fall

$$A//B := A/B^+A$$

mit der von A induzierten Hopfalgebrastruktur. Es gilt

$$A//B \cong k \otimes_B A .$$

Sei $\pi : A \rightarrow A//B$ die Projektion. Durch

$$\psi : A \xrightarrow{\lambda} A \otimes A \xrightarrow{\pi \otimes \text{id}_A} A//B \otimes A$$

wird A ein $A//B$ -Komodul.

5.2.2 Es gilt

$$k \square_{A//B} A \cong B .$$

Hier ist eine etwas umständliche Begründung. In der Tat ist

$$k \square_{A//B} A \cong \ker(\psi - 1 \otimes \text{id} : A \rightarrow A//B \otimes A) .$$

Sei $\lambda(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum_{\alpha} a_{\alpha}^1 \otimes a_{\alpha}^2$ das Koproduct von A mit $a_{\alpha}^1, a_{\alpha}^2 \in A^+$. Dann gilt

$$(\psi - 1 \otimes \text{id}_A)(a) = (a + AB^+) \otimes 1 + (1 + AB^+) \otimes a + \sum_{\alpha} (a_{\alpha}^1 + AB^+) \otimes a_{\alpha}^2 - (1 + AB^+) \otimes a .$$

Aus $(\psi - 1)(a) = 0$ folgt unmittelbar, daß $a \in AB^+$ sein muß. Möge a homogen sein und $a \notin B$ gelten. Dann wäre $a = \sum_i a_i b_i$ mit linear unabhängigen $b_i \in B^+$ und $a_i \notin AB^+$.

$$0 = (\psi - 1 \otimes \text{id}_A)\left(\sum_i a_i b_i\right) = \sum_i (a_i + AB^+) \otimes b_i + \sum_i \sum_{\alpha} (a_i)_{\alpha}^1 \otimes (a_i)_{\alpha}^2 b_i$$

(wir haben alle Terme mit Einträgen in AB^+ in der ersten Komponente gar nicht mehr hingeschrieben). Aus Gradgründen beeinflussen sich die erste und die zweite i -Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung nicht. Dann ist diese Gleichung unmöglich.

5.2.3 Sei A eine Hopfalgebra über einem Körper k und $B \leq A$ eine normale Hopfunteralgebra. Dann gilt

Lemma 5.4 ([4])

$$\text{Cotor}_A^*(B, k) \cong \text{Cotor}_{A//B}^*(k, k) .$$

Proof : Sei $F := V \otimes A//B$ eine kofreie Auflösung von k in $A//B$ – comod. Dann ist

$$F \square_{A//B} A \cong V \otimes A$$

eine kofreie Auflösung von $k \square_{A//B} A \cong B$ als A -Komodul. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Cotor}_{A//B}^*(k, k) &\cong H^*(F \square_{A//B} k) \\ &\cong H^*((V \otimes A//B) \square_{A//B} k) \\ &\cong H^*(V \otimes k) \\ &\cong H^*((V \otimes A) \square_A k) \\ &\cong \text{Cotor}_A^*(B, k) . \end{aligned}$$

□

5.2.4 Wir betrachten die äußere Algebra $E[x]$ mit einem Erzeugenden x im Grad $|x|$. Wir erweitern diese zu einer Hopfalgebra durch $\psi(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ (wir erklären x zu einem primitiven Element).

Lemma 5.5 *Es gilt*

$$\text{Cotor}_{E[x](k,k)} \cong k[y]$$

mit einem Erzeugenden $y \in \text{Cotor}_{E[x](k,k)}^1$ im Grad $|x|$.

Proof : Wir definieren die DG-Algebra $F := k[y] \otimes E[x]$ mit dem Differential $d(x) = y$ und $d(y) = 0$. Durch Sortieren nach den Potenzen von y erhalten wir die kofreie Auflösung

$$k \rightarrow E[x] \rightarrow y \otimes E[x] \rightarrow y^2 \otimes E[x] \rightarrow \dots$$

Wir erhalten einen Ringisomorphismus

$$\text{Cotor}_{E[x]}(k, k) \cong H^*(F \square_{E[x]} k) \cong H^*(k[y]) \cong k[y] .$$

5.2.5 Wir betrachten eine geordnete Menge I . Sei $E := E[x_i | i \in I]$ die äußere Algebra über k mit Erzeugern x_i im Grad $|x_i|$. Wir erweitern E zu einer Hopfalgebra, indem wir alle x_i als primitiv erklären. Das Koprodukt ist also durch $\psi(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$ gegeben. Wir nehmen an, daß die Folge der Grade $|x_i|$ monoton wächst und gegen ∞ strebt.

Lemma 5.6 *Es gilt $\text{Cotor}_B(k, k) = k[y_i | i \in I]$ als Algebra mit $|y_i| = (1, |x_i|)$ (der erste Grad ist der kohomologische Grad).*

Proof : Sei $I_n \subset I$ die Menge der ersten n Elemente aus I . Dann gilt

$$E = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} E_n$$

mit $E_n = E[x_i | i \in I_n]$. Nun gilt $E_n \cong \otimes_{i \in I_n} E[x_i]$. Es gilt nach Lemma 5.5 und mit (2)

$$\text{Cotor}_{E_n}^*(k, k) \cong k[y_i | i \in I_n] .$$

Es gilt nun mit 5.1.5

$$\text{Cotor}_E(k, k) \cong \text{colim}_{n \rightarrow \infty} k[y_i | i \in I_n] \cong k[y_i | i \in I] .$$

□

5.3 Die Homotopiegruppen von MU

5.3.1 Wir benutzen die Adams-Spektralsequenz 3.2. Die E_2 -Seite dieser Spektralsequenz ist durch

$$E_2^{*,*} \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^*(H^*(MU; \mathbb{F}_p); \mathbb{F}_p)$$

gegeben. Die Homotopiegruppen $\pi_t(MU)$ besitzen eine absteigende Filtrierung

$$\dots \subseteq F^k \pi_t(MU) \subseteq F^{k-1} \pi_t(MU) \subseteq \dots$$

und die Adams-Spektralsequenz konvergiert gegen

$$\text{Gr}(\pi_*(MU))_{(p)} .$$

5.3.2 Wir benutzen nun Lemma 5.3:

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}_p}^*(H^*(MU; \mathbb{F}_p); \mathbb{F}_p) \cong \text{Cotor}_{\mathcal{A}_p^*}(H_*(MU; \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p) .$$

Wir hatten (für $p \neq 2$)

$$H_*(MU; \mathbb{F}_p) \cong B_p \otimes PH_*(MU; \mathbb{F}_p)$$

für eine Unterhopfalgebra

$$B_p := \mathbb{F}_p[\xi_1, \dots] \subset \mathcal{A}_p^* \cong \mathbb{F}_p[\xi_1, \dots] \otimes E[\tau_1, \dots] .$$

Wir sehen, daß

$$\mathcal{A}_p^* // B_p \cong E[\tau_1, \dots] .$$

Das Koprodukt wird hier durch $\lambda(\tau_n) = 1 \otimes \tau_n + \tau_n \otimes \lambda$ (siehe (4.14)) gegeben. Wir können also Lemma 5.4 anwenden und bekommen

$$\text{Cotor}_{\mathcal{A}_p}(H_*(MU; \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p) \cong \text{Cotor}_{E[\tau_1, \dots]}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \otimes PH_*(MU; \mathbb{F}_p) .$$

Es gilt $|\tau_n| = 2p^n - 1$ und $PH_*(MU; \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[z_k | k \neq p^k - 1]$ mit $|z_k| = 2k$. Wir erhalten mit Lemma 5.6

$$\text{Cotor}_{\mathcal{A}_p}(H_*(MU; \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[Q_n, Y_k | k + 1 \neq p^n]$$

mit $|Q_n| = (1, 2p^n - 1)$ und $|Y_k| = (0, 2k)$. Hier ist der erste Grad der kohomologische Grad (welcher dem Filtrationsgrad entspricht). Diese Ergebnis gilt auch für $p = 2$.

5.3.3 Da alle Generatoren geraden Grad haben, entartet die Spektralsequenz. Das Element Q_0 ist die Multiplikation mit p . Da die Multiplikation mit Q_0 überall injektiv ist (und dies für alle Primzahlen p gilt), muß $\pi_*(MU)$ eine freie abelsche Gruppe sein.

5.3.4

Theorem 5.7 (Milnor [5]) *Es gibt einen Isomorphismus von graduierten Ringen*

$$\pi_*(MU) \cong \mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots]$$

mit $|y_k| = 2k$.

Proof : Das Hauptproblem ist hier, die Spektralsequenz richtig auszulesen. Wir folgen dem Argument in [9, Thm. 20.27].

5.3.5

Lemma 5.8 *Es gilt*

$$\pi_*(MU) \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p[P_1, \dots], \quad |P_i| = 2i.$$

Proof : Wir wählen Repräsentanten $P_i \in \pi_i(MU)$ der Polynomerzeuger Y_k und Q_n . Es ist klar aus der Spektralsequenzberechnung, daß diese Elemente eine Einbettung $\mathbb{F}_p[P_1, \dots] \rightarrow \pi_*(MU) \otimes \mathbb{F}_p$ induzieren. Wir zeigen nun, daß diese Einbettung ein Isomorphismus ist.

Es folgt aus der Spektralsequenz, daß $F^t \pi_{\leq n}(MU) \otimes \mathbb{F}_p = 0$ für genügend großes t (alle Elemente mit hohem Filtrationsgrad sind Vielfache von Q_0). Wir zeigen nun die Surjektivität durch Rückwärtsinduktion. Die Induktionsannahme ist, daß die Monome P^α vom Grad q mit Filtrationsgrad $\geq s$ die Gruppe $F^s \pi_q(MU) \otimes \mathbb{F}_p$ erzeugen. Seien jetzt $m^{\alpha_1}, m^{\alpha_2}, \dots$ die Monome in den Y_k, Q_n mit Filtrationsgrad $s-1$ und Grad q . Ist $x \in F^{s-1} \pi_q(MU) \otimes \mathbb{F}_p$, dann gilt $x \in \sum_i n_i P^{\alpha_i} + F^s \pi_q(MU) \otimes \mathbb{F}_p$ für geeignete $n_i \in \mathbb{F}_p$. Der Fehler in $F^s \pi_q(MU)$ kann als Linearkombination von Monomen der P_i geschrieben werden. \square

5.3.6

Lemma 5.9 *Sei R ein kommutativer graduierter Ring vom endlichen Typ mit $R \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p[P_1, \dots]$, $|P_i| = 2i$, für alle Primzahlen p . Dann gilt $\cong \mathbb{Z}[P_1, \dots]$ mit $|P_i| = 2i$.*

Proof : Sei $Q_{2i}(\dots)$ die Gruppe der unzerlegbaren Elemente im Grad $2i$. Es gilt $Q_{2i}(R) \otimes \mathbb{F}_p \cong Q_{2i}(R \otimes \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p$ für alle Primzahlen. Damit ist $Q_{2i}(R) \cong \mathbb{Z}$. Analog $Q_{2i+1}(R) \cong 0$.

Wir wählen Repräsentanten $M_i \in R_{2i}$ der Erzeugenden von $Q_{2i}(R)$. Durch $x_i \rightarrow M_i$ definieren wir einen Homomorphismus von Ringen $\Phi : \mathbb{Z}[x_1, \dots] \rightarrow R$. Dann ist $\Phi \otimes \text{id}_{\mathbb{F}_p} : \mathbb{Z}[x_1, \dots] \rightarrow R \otimes \mathbb{F}_p$ ein Isomorphismus für jedes p .

Wir zeigen, daß Φ ein Isomorphismus ist. Zuerst die Injektivität. Sei $\Phi(x) = 0$. Dann gilt $\Phi(x \otimes 1) = 0 \in R \otimes \mathbb{F}_p$ für alle p . Damit ist $\Phi(x)$ durch alle p teilbar. Weil R vom endlichen Typ ist, muß $x = 0$ gelten. Nun sind R_{2i} und $\mathbb{Z}[x_1, \dots]_{2i}$ freie Gruppen vom gleichen Rang. In der Tat gilt apriori $\text{rk}(R_{2i}) \leq \text{rk} \mathbb{Z}[x_1, \dots]_{2i}$, aber wegen der Injektivität von Φ liegt hier die Gleichheit vor.

Wenn $x \in \mathbb{Z}[x_1, \dots]_{2i}$ und $p|\Phi(x)$ so ist $\Phi(x \otimes \text{id}_{\mathbb{F}_p}) = 0$ und damit $p|x$. Damit bildet Φ primitive Elemente auf primitive Elemente ab. Folglich ist Φ surjektiv. \square

5.3.7 Der Satz 5.7 ist eine unmittelbare Konsequenz aus 5.3.2, 5.8 und 5.9. \square

Literatur

- [1] John Frank Adams. *Infinite loop spaces*, volume 90 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978. 1.7
- [2] A. Hatcher. *Spektralsequenzen 1*. 2.3.13
- [3] S. O. Kochman. *Bordism, stable homotopy and Adams spectral sequences*, volume 7 of *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. 1.1.3, 3.3.6, 4.3
- [4] Arunas Liulevicius. Notes on homotopy of Thom spectra. *Amer. J. Math.*, 86:1–16, 1964. 5.4
- [5] J. Milnor. On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue. I. *Amer. J. Math.*, 82:505–521, 1960. 5.7
- [6] John Milnor. The Steenrod algebra and its dual. *Ann. of Math. (2)*, 67:150–171, 1958. 4.4.4, 4.14
- [7] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966. 4.1.5

- [8] N. E. Steenrod. *Cohomology operations*. Lectures by N. E. Steenrod written and revised by D. B. A. Epstein. Annals of Mathematics Studies, No. 50. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962. 2.2.3, 2.2.4
- [9] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Reprint of the 1975 original [Springer, New York; MR0385836 (52 #6695)]. 1.3, 1.1.5, 5.3.4