Funktionentheorie

Ulrich Bunke*

6. Februar 2009

Inhaltsverzeichnis

*Regensburg, ulrich.bunke@mathematik.uni-regensburg.de

1 Komplexe Differenzierbarkeit

Sei V ein komplexer Vektorraum. Wir können die skalare Multipliplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ auf die reellen Zahlen einschränken und erhalten eine skalare Multiplikation $\mathbb{R} \times V \to V$. Mit dieser Struktur wird V ein reeller Vektorraum, welchen wir mit $V_{|\mathbb{R}}$ bezeichnen. Er wird als der **unterliegende reelle Vektorraum** von V bezeichnet.

Seien V, W komplexe Vektorräume. Dann können wir die Menge der reell linearen Abbildungen $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}, W_{|\mathbb{R}})$ von V nach W betrachten. Wir haben eine Inklusion der komplex linearen Abbildungen

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}, W_{|\mathbb{R}}) \ .$$

In der Tat ist eine reell lineare Abbildung $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}, W_{|\mathbb{R}})$ genau dann komplex linear, wenn $\phi(iv) = i\phi(v)$ für alle $v \in V$ gilt. Dann ist nämlich für $z = x + iy$ auch

$$\begin{aligned}\phi(zv) &= \phi((x+iy)v) = \phi(xv+iyv) = \phi(xv) + \phi(iyv) \\ &= \phi(xv) + i\phi(yv) = x\phi(v) + iy\phi(v) = (x+iy)\phi(v) = z\phi(v) \ .\end{aligned}$$

1. Ist U ein dritter komplexer Vektorraum, dann gilt

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,W) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U_{|\mathbb{R}},V_{|\mathbb{R}}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}},W_{|\mathbb{R}}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U_{|\mathbb{R}},W_{|\mathbb{R}}) \end{tikzcd} \ .$$

2. Sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, $f_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}, W_{|\mathbb{R}})$ die unterliegende reell lineare Abbildung und sei $g_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_{|\mathbb{R}}, V_{|\mathbb{R}})$ invers zu $f_{\mathbb{R}}$. Dann ist $g_{\mathbb{R}}$ die unterliegende reell lineare Abbildung einer inversen Abbildung $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V)$ von f. In der Tat komponieren wir $f_{\mathbb{R}}(iv) = if_{\mathbb{R}}(v)$ mit $g_{\mathbb{R}}$ und setzen $v = g_{\mathbb{R}}(w)$. Dann gilt $ig_{\mathbb{R}}(w) = g_{\mathbb{R}}(iw)$.

3. Die Abbildung $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\phi(u) := \bar{u}$ ist nicht komplex linear. In der Tat gilt $\phi(iu) = -i\phi(u)$.

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dann ist $V_{|\mathbb{R}}$ auch endlich-dimensional. Es gilt

$$2 \dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}) \ .$$

Insbesondere hat die unterliegende Menge von V (oder, was dasselbe ist, von $V_{|\mathbb{R}}$) eine natürliche Topologie. Wir können also über offene Teilmengen in einem endlich-dimensionalen komplexen Vektorraum reden.

Sei nun U ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $S \subseteq U$ offen. Sei weiter $f : S \to V$ eine Abbildung in einen weiteren endlich-dimensionalen komplexen Vektorraum. Sei $s \in S$. Wir können S als Teilmenge von $U_{|\mathbb{R}}$ und f als Abbildung mit Werten in $V_{|\mathbb{R}}$ betrachten. Insbesondere ist dann der Begriff der Differenzierbarkeit von f im Punkt s erklärt.

Wir nehmen an, daß f im Punkt s differenzierbar ist. Dann ist die Ableitung $df(s) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U_{|\mathbb{R}}, V_{|\mathbb{R}})$.

Definition 1.1. *Die Funktion $f : S \to V$ heißt im Punkt s* ***komplex differenzierbar****, wenn sie in s differenzierbar ist und $df(s) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ gilt.*

In anderen Worten, wir fordern, daß $df(s)$ komplex linear ist.

Definition 1.2. *Die Funktion $f : S \to V$ heißt* ***holomorph****, wenn sie in jedem Punkt von S komplex differenzierbar ist. Mit $\mathcal{O}(S)$ bezeichnen wir die Menge der $\mathbb{C}$-wertigen holomorphe Funktionen auf S.*

Wir betrachten einen weiteren endlich-dimensional komplexen Vektorraum W und eine auf einer offenem Teilmenge $T \subseteq V$ definierten Abbildung $g : T \to W$. Wir nehmen an, daß $f(S) \subseteq T$ gilt so daß $g \circ f : S \to W$ definiert ist. Sei $t := f(s)$.

Lemma 1.3. *Ist g in t komplex differenzierbar, dann ist $g \circ f$ in s komplex differenzierbar.*

Proof. Nach der Kettenregel gilt $d(g \circ f)(s) = dg(t) \circ df(s)$. Diese Komposition komplex-linearer Abbildungen ist wieder komplex linear. □

Folgerung 1.4. *Sind f und g holomorph, so auch $g \circ f$.*

1. Die Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist homolorph.

2. Jede komplex-lineare Abbildung $A : V \to W$ ist holomorph. Insbesondere ist $Add : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $A(u_1, u_2) = u_1 + u_2$ holomorph.

3. Die Abbildung $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\phi(u) := \bar{u}$, ist nicht holomorph. In der Tat ist $d\phi(u)(z) = \bar{z}$.

4. Die Abbildung $Prod : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $Prod(u_1, u_2) := u_1 u_2$ ist holomorph. In der Tat gilt $dProd(u_1, u_2)(x_1, x_2) = x_1 u_2 + x_2 u_1$. Diese Abbildung ist komplex linear.

5. Seien U_i, V_i, $i = 1, 2$ endlich-dimensionale komplexe Vektorräume, $S_i \subseteq U_i$ offen, $s_i \in S_i$ und $f_i : S_i \to V_i$ s_i komplex differenzierbar. Dann ist $(f_1, f_2) : S_0 \times S_1 \to V_1 \times V_2$ in (s_1, s_2) komplex differenzierbar. In der Tat ist $d(f_1, f_2)(s_1, s_2)(u_1, u_2) = (df_1(s_1)(u_1), df_2(s_2)(u_2))$. Diese Abbildung ist komplex linear.

6. Seien $f, g : S \to V$ in s komplex differenzierbar. Dann ist auch $f + \lambda g$ in s komplex differenzierbar. In der Tat ist $f + \lambda g = Add \circ (\mathrm{id}, \lambda) \circ (f, g)$.

7. Seien $f, g : S \to \mathbb{C}$ in $s \in S$ komplex differenzierbar. Dann ist $fg : S \to \mathbb{C}$ in s komplex differenzierbar. In der Tat ist $fg = Prod \circ (f_1, f_2)$ eine Komposition komplex differenzierbarer Abbildungen. Insbesondere ist das Produkt holomorpher Funktionen wieder holomorph.

8. Wir betrachten ein Polynom $pol \in \mathbb{C}[z]$ als Abbildung $pol : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dann ist pol holomorph.

9. Im folgenden identifizieren wir $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$. Sei $dz : \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ durch $dz(u) = \mathrm{id}$ gegeben. Damit können wir die Ableitung einer holomorphen Funktion $U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-wertige Funktion verstehen, indem wir $df = f' dz$ schreiben. Wir zeigen durch Induktion $(z^n)' = nz^{n-1}$. Es ist klar, daß $(z^1)' = 1$. Wir rechnen

$$d(z^n) = dProd(z^{n-1}, z) = z(n-1)z^{n-2}dz + z^{n-1}dz = nz^{n-1}dz \ .$$

10. Sei $f : S \to V$ in s komplex differenzierbar mit einer auf $f(S) =: T \subseteq V$ definierten Umkehrfunktion und in $t := f(s)$ differenzierbaren Umkehrfunktion $g : T \to V$. Dann ist g auch komplex differenzierbar. In der Tat ist $dg(t) = df(s)^{-1}$.

11. Die Abbildung $Inv : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $Inv(z) = z^{-1}$ ist holomorph. Es gilt $Prod \circ (\mathrm{id}, Inv) = 1$. Damit ist

$$0 = dProd(z, z^{-1})(u, dInv(z)(u)) = \frac{u}{z} + zdInv(z)(u) \ .$$

Daraus folgt

$$dInv(z)(u) = -\frac{u}{z^2} dz \ .$$

Wir können also schreiben

$$(z^{-1})' = -z^{-2} \ .$$

12. Wir zeigen durch Induktion, daß $(z^{-n})' = -nz^{-n-1}$. In der Tat ist

$$d(z^{-n}) = dProd(z^{-n+1}, z^{-1}) = z^{-1}(-n+1)z^{-n}dz - z^{-n+1}z{-}2dz = -nz^{-n-1}dz \ .$$

Wir betrachten jetzt eine offene Teilmenge $S \subseteq \mathbb{C}$, einen Punkt $s \in S$ und eine Funktion $f : S \to \mathbb{C}$. Wir schreiben komplexe Zahlen in der Form $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

Lemma 1.5. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die Abbildung f ist in s komplex differenzierbar.*

2. *Es gelten die **Cauchy-Riemanngleichungen***

$$\partial_x \mathrm{Re}(f)(s) = \partial_y \mathrm{Im}(f)(s) \ , \quad \partial_x \mathrm{Im}(f)(s) = -\partial_y \mathrm{Re}(f)(s) \ .$$

3. *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \ .$$

Es gilt dann auch

$$f'(s) = \lim_{h \to 0} \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \ .$$

Proof. Wir zeigen $1 \Longleftrightarrow 2$. Wir setzen $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(v)$. Die Jacobimatrix von $df_{\mathbb{R}} = (u, v)$ im Punkt s ist durch

$$J := \begin{pmatrix} \partial_x u(s) & \partial_y u(s) \\ \partial_x v(s) & \partial_y v(s) \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Multiplikation mit i ist durch die Matrix

$$I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Funktion f ist in s genau dann komplex differenzierbar, wenn $IJ = JI$ gilt. Diese Gleichung ist explizit

$$\begin{pmatrix} -\partial_x v(s) & -\partial_y v(s) \\ \partial_x u(s) & \partial_y u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y u(s) & -\partial_x u(s) \\ \partial_y v(s) & -\partial_x v(s) \end{pmatrix} \ .$$

Diese Identität ist zu den Cauchy-Riemann Gleichungen äquivalent.

Wir zeigen nun 3 $\Longrightarrow$ 1. Wir setzen $A := \lim_{h\to 0} \frac{f(s+h)-f(s)}{h}$. Dann können wir

$$f(s+h) = f(s) + Ah + r(h)$$

schreiben, wobei $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$ gilt. Damit ist $A = df_{\mathbb{R}}(s)$. Die Abbildung $u \to Au$ is offensichtlich komplex linear. Damit ist f in s komplex differenzierbar und $f'(s) = A$.

Schließlich zeigen wir 1 $\Longrightarrow$ 3. Wir schreiben $f(s+h) = f(s) + df(s)h + r(h)$ mit $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$. Da $df(s) : \mathbb{C}_{|\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{|\mathbb{R}}$ komplex linear ist, gilt $df(s)(u) = Au$ für eine komplexe Zahl A. Damit ist $\frac{f(s+h)-f(s)}{h} = A + \frac{r(h)}{h}$ und $A = \lim_{h\to 0} \frac{f(s+h)-f(s)}{h}$ existiert. □

Sei $S \subset V$ eine offene Teilmenge eines endlich-dimensionalen rellen Vektorraumes und W ein weiterer reller Vektorraum.

Definition 1.6. *Eine Abbildung $S \to \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt **W-wertige 1-Form**. Mit $\Omega^1(S, W)$ bezeichnen wir den Vektorraum der W-wertigen 1-Formen*[1].

1. $dz \in \Omega^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ist eine komplexe 1-Form.

2. Ist $f : S \to W$ differenzierbar, dann ist $df : S \to \mathrm{Hom}(V, W)$ ein Beispiel für eine W-wertige 1-Form. Wir haben also eine Abbildung $d : C^1(S, W) \to \Omega^1(S, W)$.

3. Ist $\omega \in \Omega^1(S, W)$ und $h : S \to \mathbb{R}$, dann ist durch $hw\omega(s) := h(s)\omega(s)$ ein Element in $\Omega^1(S, W)$ gegeben. Ist $\omega = df$ für $f \in C^1(S, W)$ und $h \in C^1(S, \mathbb{R})$, dann gilt $d(hf) = fdh + hdf$, wobei fdh durch $fdh(v) := dh(v)f$ erklärt wird.

4. Ist W komplex, $f \in C^1(S, W)$ und $h \in C^1(S, \mathbb{C})$, dann gilt auch $d(hf) = fdh + hdf$.

Sei jetzt W komplex.

Definition 1.7. *Wir definieren den **komplex-konjugierten Vektorraum** $\bar{W}$, indem wir die komplexe Multiplikation auf dem unterliegenden reellen Vektorraum durch $zw := \bar{z}w$ auf $\mathbb{C}$ erweitern.*

Seien V, W komplexe Vektorräume.

[1] Wir werden später noch Differenzierbarkeitsforderungen dazunehmen.

Definition 1.8. *Eine Abbildung $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}, W_{|\mathbb{R}})$ ist* ***antilinear****, wenn $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \bar{W}) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}, W_{|\mathbb{R}})$ gilt.*

Beachte daß $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{V}, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{V}, W)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{V}, \bar{W})$ als Teilmengen von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}, W_{|\mathbb{R}})$ gilt. Alle diese sind komplexe Vektorräume (mit der von W indzuierten Struktur). Also komplexe Vektoräume gilt allerdings

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{V}, W) = \overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \bar{W})} \ , \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) = \overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{V}, \bar{W})} \ .$$

Lemma 1.9. *Es gilt*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}, W_{|\mathbb{R}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \bar{W}) \ .$$

Proof. Es gilt $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \cap \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \bar{W}) = 0$. In der Tat, ist $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}, W_{|\mathbb{R}})$ gleichzeitig linear und antilinear, dann gilt $i\phi(v) = \phi(iv) = -i\phi(v)$ für alle $v \in V$, woraus $\phi = 0$ folgt.

Wir definieren eine lineare Abbildung $P : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}, W_{|\mathbb{R}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{|\mathbb{R}}, W_{|\mathbb{R}})$ durch

$$P(\phi)(v) := \frac{1}{2}(\phi(v) - i\phi(iv)) \ .$$

Wir zeigen, daß $P^2 = P$, $P(\phi)$ komplex linear und $(1 - P)(\phi)$ komplex antilinear ist. Wir können damit jedes ϕ eindeutig in einen linearen und anti-linearen Teil zerlegen.

1. Es gilt

$$\begin{aligned} P(\phi)(iv) &= \frac{1}{2}(\phi(iv) - i\phi(iiv)) \\ &= \frac{1}{2}(\phi(iv) - i\phi(-v)) \\ &= \frac{1}{2}(\phi(iv) + i\phi(v)) \\ &= i\frac{1}{2}(-i\phi(iv) + \phi(v)) \\ &= iP(\phi)(v) \end{aligned}$$

2. Es gilt

$$(1 - P)(\phi)(v) = \phi(v) - \frac{1}{2}(\phi(v) - i\phi(iv)) = \frac{1}{2}(\phi(v) + i\phi(iv)) \ .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(1-P)(\phi)(iv) &= \frac{1}{2}(\phi(iv)+i\phi(iiv)) \\ &= \frac{1}{2}(\phi(iv)+i\phi(-v)) \\ &= \frac{1}{2}(\phi(iv)-i\phi(v)) \\ &= -i\frac{1}{2}(\phi(v)+i\phi(iv)) \\ &= -iP(\phi)(v)\end{aligned}$$

3. Es gilt

$$P(P(\phi))(v) = \frac{1}{2}(P(\phi)(v) - iP(\phi)(iv)) = \frac{1}{2}(P(\phi)(v) + P(\phi)(v)) = P(\phi)(v)\ .$$

□

Seien jetzt V, W endlich-dimensional, $S \subseteq V$ offen und $\omega \in \Omega^1(S, W)$. Dann haben wir eine Zerlegung $\omega = P\omega + (1-P)\omega$ in einen linearen und antilinearen Teil.

Wir haben die Formen $dx, dy, dzd\bar{z} \in \Omega^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Es gilt

$$dz = dx + idy\ ,\quad d\bar{z} = dx - idy\ ,\quad dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})\ ,\quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})\ .$$

Damit gilt etwa

$$\begin{aligned}df &= \partial_x f dx + \partial_y f dy \\ &= \partial_x f \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) + \partial_y f \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)dz + \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)d\bar{z}\end{aligned}$$

Wir schreiben

$$\Omega^{1,0}(S, W) := P\Omega^1(S, W)\ , \Omega^{0,1}(S, W) := (1-P)\Omega(S, W)\ .$$

Hierbei wird P auf die Werte der 1-Formen angewendet. Dann gilt

$$\Omega^1(S, W) = \Omega^{1,0}(S, W) \oplus \Omega^{0,1}(S, W)\ .$$

Sei $f : S \to W$ differenzierbar. Dann setzen wir

$$\partial f := Pdf\ ,\quad \bar{\partial} f := (1-P)df\ .$$

Es gilt

$$\partial f \in \Omega^{1,0}(S,W)\ ,\quad \bar\partial f \in \Omega^{0,1}(S,W)\ ,\quad \partial f + \bar\partial f = df\ .$$

Explizit ist

$$\partial f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)dz\ ,\quad \bar\partial f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)d\bar z\ .$$

Folgerung 1.10. *Die Funktion f ist genau dann holomorph, wenn $\bar\partial f = 0$ gilt.*

1. Es gilt für $n \in \mathbb{Z}$ $\bar\partial z^n = 0$ und $\partial z^n = nz^{n-1}dz$.
2. Es gilt für eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion $\partial \bar f = \overline{\bar\partial f}$.
3. Es gilt $\partial \bar z^n = 0$ und $\bar\partial \bar z^n = n\bar z^{n-1}d\bar z$.
4. Es gilt

$$\partial(z^n\bar z^m) = nz^{n-1}\bar z^m dz\ ,\quad \bar\partial(z^n\bar z^m) = mz^n\bar z^{m-1}d\bar z\ .$$

2 Potenzreihen

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen und $z_0 \in \mathbb{C}$.

Definition 2.1. *Unter einer komplexen Potenzreihe versteht man eine Reihe der Form*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)\ .$$

Der Konvergenzbereich der Potenzreihe ist die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konvergiert}\}\ .$$

Der Konvergenzbereich der komplexen Potenzreihe ist also die Menge der komplexen Zahlen z, für welche die Reihe konvergiert. Eine Potenzreihe definiert auf ihrem Konvergenzbereich $S \subseteq \mathbb{C}$ eine Funktion

$$S \ni z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\ .$$

Satz 2.2. *Sei $r \in [0,\infty]$ durch*

$$\frac{1}{r} := \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

gegeben. Dann gilt für den Konvergenzbereich S der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

$$B(z_0,r) \subseteq S \subseteq \bar{B}(z_0,r)$$

Eine Potenzreihe konvergiert auf den Inneren ihres Konvergenzbereiches absolut und lokal gleichmäßig.

Proof.

1. Sei $R > 0$ derart, daß $\sup |a_n R^n| = M < \infty$. Dann konvergiert die Potenzreihe auf $B(z_0,R)$ lokal gleichmäßg. Sei dazu $r_1 < R$. Wir zeigen gleichmäßige Konvergenz auf $B(z_0,r_1)$. In der Tat gilt für $z \in B(z_0,r_1)$ und $s := \frac{r_1}{R} < 1$

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|R^n \frac{|z-z_0|^n}{R^n} \leq M\frac{|z-z_0|^n}{R^n} \leq M\frac{r^n}{r_1^n} \leq Ms^n \ .$$

   Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} Ms^n$ ist also eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $z \in B(z_0,r_1)$.

2. Sei $\frac{1}{r} := \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Dann ist für $R < r$ auch $a_n < \frac{1}{R^n}$ für fast alle n und deshalb $(a_n R^n)$ beschränkt. Damit konvergiert die Potenzreihe auf $B(z_0,R)$ lokal gleichmäßig für alle $R < r$. Das zeigt $B(z_0,R) \subseteq S$.

3. Sei nun $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(0,r)}$. Dann ist $|z-z_0| > r$, also $|a_n(z-z_0)^n| > 1$ für unendlich viele n. Damit bilden die Glieder der Potenzreihe für solche z keine Nullfolge. Die Reihe konvergiert deshalb nicht. Es gilt $S \subseteq \overline{B(0,r)}$.

□

Definition 2.3. *Die Zahl*

$$r := \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

heißt ***Konvergenzradius*** *der Potenzreihe.*

Da eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen gegen eine stetige Funktion konvergiert, gilt folgendes.

Folgerung 2.4. *Die Potenzreihe definiert im Inneren ihres Konvergenzbereiches eine stetige Funktion.*

Sei $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in [0,\infty]$.

Lemma 2.5. *Die Reihe der Ableitungen*

$$\sum_{n=0}^\infty n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

hat dann auch den Konvergenzradius r. *Es gilt auf* $B(z_0,r)$

$$d\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^\infty n a_n (z-z_0)^{n-1} dz \ .$$

Proof. Es ist klar, daß die Reihe für $z = z_0$ konvergiert. Sei jetzt $z \neq 0$. Dann setzen wir

$$\sum_{n=0}^\infty n a_n (z-z_0)^{n-1} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^\infty n a_n (z-z_0)^n \ .$$

Es gilt wegen $\lim_n n^{\frac{1}{n}} = 1$ auch

$$\limsup_n n^{\frac{1}{n}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{r} \ .$$

Für $R < r$ hatten wir gesehen, daß es eine konvergente Majorante $\sum_n M(\frac{R}{r})^n$ für die Reihe $\sum_{n=0}^\infty n a_n (z-z_0)^{n-1}$ auf ganz $B(z_0,R)$ gibt. Damit kann unter dem Summenzeichen differenziert werden. □

Folgerung 2.6. *Eine Potenzreihe* $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ *mit dem Konvergenzradius* r *definert auf* $B(z_0,r)$ *eine holomorphe Funktion.*

1. Die Reihe
$$e^z := \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$$
hat den Konvergenzradius ∞. Es gilt
$$e^{y+z} = e^y e^z \ , \quad (e^z)' = e^z$$

2. Die Reihen
$$\sin(z) := \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \quad \cos(z) := \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
haben den Konvergenzradius ∞.

3. Es gelten

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \ , \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ .$$

Daraus folgt

$$\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$$

und

$$\sin'(z) = \cos(z) \ , \quad \cos'(z) = -\sin(z) \ .$$

Wir schreiben $z = x + iy$. Dann gilt

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \ .$$

Daraus schließen wir

$$\{e^z = 1\} = \{e^x = 1\} \cap \{\cos(y) + i\sin(y) = 1\} = \{2n\pi i \mid n \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Wir finden weiter

$$\{e^z = -1\} = \{e^x = 1\} \cap \{\cos(y) + i\sin(y) = -1\} = \{(2n+1)\pi i + \ \mid n \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Es gilt also die Periodizität

$$e^{z+2\pi i n} = e^z \ .$$

Es gilt

$$\{\sin(z) = 0\} = \{e^{iz} = e^{-iz}\} = \{e^{2iz} = 1\} = \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Ananlog findet man

$$\{\cos(z) = 0\} = \{e^{2iz} = -1\} = \{\pi(\frac{1}{2} + n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Es gilt

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \ .$$

4. Auf $\mathbb{C} \setminus \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ definieren wir

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \ .$$

Auf $\mathbb{C} \setminus \{\pi(\frac{1}{2} + n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ definieren wir

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \ .$$

5. Die Potenzreihe
$$\ln(z) := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}$$
hat den Konvergenzradius 1. Die Identität $\ln(e^x) = x$ für $x \in (-\infty, \ln(2))$ dehnt sich aus auf $\{-\infty < \mathrm{Re}(z) < \ln(2)\}$.

Hier sind eine Reihe weiterer interessanter wichtiger Funktionen.

1. Sei $h \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion derart, daß für gewisse $C, c > 0$ gilt
$$|h|(x) \leq Ce^{-c|x|}\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}\ .$$
Dann ist
$$f(z) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}h(x)dx$$
eine holomorphe Funktion auf $S := \{\mathrm{Im}(z) < c\}$ In der Tat ist $de^{izx}h(x) = e^{izx}h(x)dz$ und $|de^{izx}h(x)| \leq Ce^{(|\mathrm{Im}(z)|-c)x}$. Sei jetzt $0 < c_1 < c$. Die Funktion $Ce^{(c_1-c)x}$ ist eine integrable Majorante für die Ableitung $(e^{izx}h(x))'$ nach z für alle $z \in S := \{\mathrm{Im}(z) < c_1\}$. Damit kann man unter dem Integral differenzieren und es gilt
$$\bar{\partial}f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\partial}e^{izx}h(x)dx = 0\ .$$
Es gilt weiter
$$\partial f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}ixh(x)dx\ .$$
Insbesondere, wenn h beschränkt und supp$h$ kompakt ist, dann ist $f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

2. Wir betrachten die Riemannsche Zetafunktion
$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ .$$
Wir haben $\frac{1}{n^z} = e^{-z\ln(n)}$. Damit ist $s \mapsto n^s$ holomorph. Es gilt $d\frac{1}{n^z} = -\ln(n)\frac{1}{n^z}dz$. Sei $r > 1$. Dann gilt für alle $z \in \{\mathrm{Re}(z) > r\}$, daß
$$\limsup_n \frac{\ln(n)}{|n^z|} < \frac{1}{n^r}\ .$$
Die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$$

ist eine konvergente Majorante für alle $z \in \{\mathrm{Re}(z) > r\}$. Folglich ist die Riemannsche Zetafunktion auf $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$ definiert und holomorph.

3. Wir betrachten das Integral

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx \ .$$

Wegen $|x^{z-1}| = x^{\mathrm{Re}(z)-1}$ konvergiert das Integral für $\mathrm{Re}(z) > 0$. Die Ableitung des Integranden ist $e^{-x}\ln(x) x^{z-1} dz$. Wir überzeugen uns wieder, daß man die Ableitung unter das Integral ziehen kann und schließen, daß $\Gamma(z)$ auf $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ holomorph ist.

Wir rechnen weiter für $\mathrm{Re}(z) > 0$, daß

$$\begin{aligned} z\Gamma(z) &= z\int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x}\partial_x x^z dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\partial_x x^z dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[-\int_0^t \partial_x e^{-x} x^z dx + e^{-t} t^z \right] \\ &= \int_0^\infty e^{-x} x^z dx \\ &= \Gamma(z+1) \end{aligned}$$

Wir erhalten durch Iteration

$$\begin{aligned} \Gamma(z+k) &= (z+k-1)\Gamma(z+k-1) \\ &= (z+k-1)(z+k-2)\Gamma(z+k-2) \\ &\dots \\ &= \prod_{n=0}^{k-1} (z+n)\Gamma(z) \end{aligned}$$

Durch Umstellen

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{\prod_{n=0}^{k-1}(z+n)} \ .$$

Mit dieser Formel können wir $\Gamma(z)$ zu einer holomorphen Funktion auf die offene Menge $\{\mathrm{Re}(z) > -k\} \setminus \{0, -1, -2, \dots, -k+1\}$ fortsetzen. Da wir k beliebig groß wählen können, ist $\Gamma(z)$ eine holomophe Funktion auf

$$\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots, -n, \dots\} \ .$$

Wir werden später sehen, daß eine solche Fortsetzung immer eindeutig ist. Wir berechnen noch einige spzielle Werte. Es gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \ .$$

Damit ist

$$\Gamma(1+k) = \prod_{n=0}^{k-1} (1+k)\Gamma(1) = k! \ .$$

Weiter gilt mit der Substitution $x = z^2$, $dx = 2zdz$

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-z^2} z^{-1} 2z dz \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-z^2} dz \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

4. Sei $a \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty a^n z^n$$

hat den Konvergenzradius $|a|^{-1}$. Auf $B(0, |a|^{-1})$ definiert sie die holomorphe Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{1 - az} \ .$$

In der Tat hat diese Funktion eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{a^{-1}\}$.

3 Integration über 1-Ketten, Stammfunktionen

Ist S eine Menge und R ein Ring, so ist $R[S]$ der freie R-Modul mit der Basis S. Die Elemente von $R[S]$ können in der Form

$$\sum_{s \in S} n_s s$$

geschrieben werden, wobei nur endlich viele der Koeffizienten n_s von Null verschieden sind. Eine Abbildung $f : T \to S$ von Mengen induziert eine Abbildung $f_* : R[T] \to R[S]$ von R-Moduln durch

$$f_* \sum_{t \in T} n_t t := \left(\sum_{t \in f^{-1}(s)} n_t \right) s \ .$$

In der Tat gibt für jeden R-Modul V und jede Menge S eine in S und V natürliche Bijektion[2]

$$\mathrm{Hom}_{Mengen}(S,V) \cong \mathrm{Hom}_{R-Moduln}(R[S],V) \ , \quad f \Longleftrightarrow g$$

durch

$$f(s) = g(\sum_{t \in S} \delta_s(t)t) \ , \quad g(\sum_{s \in S} n_s s) = \sum_{s \in S} n_s f(s) \ .$$

Mit $[n]$ bezeichnen wir die geordnete endliche Menge $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$.

Definition 3.1. *Das n-**dimensionale Simplex** $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}[[n]]$ ist die Teilmenge*

$$\Delta^n := \{\sum_{i=0}^n t_i \boldsymbol{i} \mid \ , t_i \geq 0 \ , \ i = 0, \ldots, n \ , \sum_{i=0}^n t_i = 1\} \ .$$

Wir können $\mathbb{R}[[n]]$ mit dem Raum der signierten Maße auf $[n]$ identifizieren. Dann ist $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}[[n]]$ genau die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße.

1. Δ^0 ein Punkt, nämlich $\mathbf{0} \in \mathbb{R}[[0]]$.
2. Wir identifizieren Δ^1 mit dem Intervall $[0,1]$ wie folgt:

$$[0,1] \ni t \mapsto t\mathbf{0} + (1-t)\mathbf{1} \in \mathbb{R}[[1]] \ .$$

Eine Abbildung $f : [n] \to [m]$ von Mengen induziert eine Abbildung $f_* : \mathbb{R}[[n]] \to \mathbb{R}[[m]]$. Wenn wir die Elemente von $\mathbb{R}[[n]]$ als signierte Maße interpretieren, dann ist f_* genau der push-forward von Maßen. Dieser erhält inbesondere Wahrscheinlichkeitsmaße, so daß wir durch Einschränkung eine Abbildung $f_* : \Delta^n \to \Delta^m$ bekommen.

Insbesondere haben wir die Abbildungen

$$\sigma_0, \sigma_1 : [0] \to [1] \ , \sigma_i(\mathbf{0}) := \mathbf{i} \ .$$

[2]Wir haben es hier mir dem Funktor $S \mapsto R[S]$ von Mengen in S-Moduln und dem Vergißfunktor $V \mapsto F(V)$ von R-Moduln in Mengen zu tun, welcher dem R-Modul V die unterliegende Menge zuordnet. Die Funktoren bilden ein adjungiertes Paar

$$R[\ldots] : Mengen \leftrightarrows R - Moduln : F$$

Diese induzieren Abbildungen $\sigma_{i,*} : \Delta^0 \to \Delta^1$, nämlich die Einbettungen der Endpunkte des Intervalls.

Der Raum $\mathbb{R}[[n]]$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine abgeschlossene Teilmenge der Hyperebene

$$H = \{\sum_{i=0}^{n} t_i \ \mathbf{i} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\} \ .$$

Eine Funktion $f : \Delta^n \to V$ in einen endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V ist differenzierbar, wenn es eine offene Umgebung U von $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}[[n]]$ und eine differenzierbare Funktion $\tilde{f} : U \cap H \to V$ gibt, welche f fortsetzt.

Definition 3.2. *Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraumes. Ein **differenzierbarer n-Simplex** in U ist eine glatte Abbildung $\Delta^n \to U$. Mit $\mathtt{Sing_n(U)}$ bezeichnen wir die Menge der differenzierbaren n-Simplizes.*

1. Ein differenzierbarer 0-Simplex in U ist also einfach ein Punkt in U.
2. Ein differenzierbarer 1-Simplex in U ist ein differenzierbarer Weg $[0, 1] \cong \Delta^1 \to U$.

Eine Abbildung $f : [n] \to [m]$ induziert eine Abbildung $f^* : \mathtt{Sing_m(U)} \to \mathtt{Sing_n(U)}$, welche das m-Simplex $\phi : \Delta^m \to U$ auf das n-Simplex $f^*\phi = \phi \circ f_* : \Delta^n \to U$ abbildet. Ist $\phi \in \mathtt{Sing_1(U)}$ ein Weg, dann sind $\sigma_i^*\phi$, $i = 0, 1$ die beiden Endpunkte des Weges.

Sei $U \subseteq V$ eine Teilmenge eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraumes.

Definition 3.3. *Eine **n-Kette** in U ist ein Element aus $\mathbb{Z}[\mathtt{Sing_n(U)}]$.*

Wir werden auch die Bezeichnung

$$C_n(U) := \mathbb{Z}[\mathtt{Sing_n(U)}]$$

benutzen. Ist $f : U \to V$ eine Abbildung zwischen Teilmengen endlich-dimensionaler reeller Vektorräume, dann erhalten wir eine Abbildung $f_* : \mathtt{Sing_n(U)} \to \mathtt{Sing_n(V)}$ durch $f_*\phi := f \circ \phi$, $\phi \in \mathtt{Sing_n(U)}$. Diese dehnt sich linear aus zu einer Abbildung $f_* : C_n(U) \to C_n(V)$. Ist $\sigma : [n] \to [m]$, dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} C_m(U) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "(\sigma^*)_*"] & C_m(V) \arrow[d, "(\sigma^*)_*"] \\ C_n(U) \arrow[r, "f_*"] & C_n(V) \end{tikzcd} \ .$$

1. Eine 0-Kette in U is also eine endliche formale Linearkombination von Punkten aus U mit ganzen Koeffizienten. Ist etwa $\gamma \in \mathtt{Sing_1(U)}$ ein Weg, dann ist die Differenz der Endpunkte $\delta(\gamma) := \sigma_1^*\gamma - \sigma_0^*\gamma \in C_0(U)$ eine Nullkette.

2. Eine 1-Kette ist eine formale Linearkombination von Wegen in U mit ganzen Koeffizienten.

Wir haben insbesondere die Abbildungen $\delta_i := (\sigma_i^*)_* : C_1(U) \to C_0(U)$. Wir setzen

$$\delta := \delta_1 - \delta_0 : C_1(U) \to C_0(U) \ .$$

Definition 3.4. *Eine Kette $c \in C_1(U)$ heißt **geschlossen**, wenn $\delta(c) = 0$ ist.*

1. Ist $\phi : [0,1] \cong \Delta^1 \to U$ ein geschlossene Weg, gilt also $\phi(0) = \phi(1)$, dann ist $\delta(\phi) = \phi(1) - \phi(0) = 0$. Folglich ist $\phi \in C_1(U)$ eine geschlossene Kette.

2. Sind $\phi, \psi : \Delta^1 \to U$ Wege mit $\phi(0) = \psi(1)$, dann ist $c = \phi(0) + \phi(1)$ eine 1-Kette und $\delta(c) = \phi(1) - \phi(0) + \psi(1) - \psi(0) = \phi(1) - \psi(0)$. Ist auch $\phi(1) = \psi(0)$, dann ist c geschlossen.

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\phi \in \mathtt{Sing_0(U)}$ ein 0-Simplex. Dann definieren wir

$$\int_\phi f := f(\phi(0)) \ .$$

Wir haben damit eine Abbildung von $\mathbb{Z}$-Moduln,

$$\int_{\dots} f : \mathtt{Sing_0(U)} \to \mathbb{R}$$

welche wir einedeutig zu einer linearen Abbildung

$$\int_{\dots} f : C_0(U) = \mathbb{Z}[\mathtt{Sing_0(U)}] \to \mathbb{R}$$

ausdehnen können. Explizit gilt für eine 0-Kette $c \in C_0(U)$, $c = \sum_{\phi \in \mathtt{Sing_0(U)}} n_\phi \phi$

$$\int_c f := \sum_{\phi \in \mathtt{Sing_0(U)}} n_\phi \int_\phi f \ .$$

Die Abbildung

$$C_0(U) \times \mathbb{C}^U \ni (c, f) \mapsto \int_c f \in \mathbb{C}$$

ist $\mathbb{Z}$-linear im ersten und $\mathbb{C}$-linear im zweiten Argument.

Ist $h : U \to W$ eine Abbildung zwischen Teilmengen endlich-dimensionaler Vektorräume, dann gilt die Identität

$$\int_{h_* c} f = \int_c h^* c \ .$$

Wir betrachten jetzt eine stetige 1-Form

$$\omega \in \Omega^1(U, \mathbb{C}) \ .$$

Ist $\phi \in \mathtt{Sing_1(U)}$ ein 1-Simplex, dann setzen wir

$$\int_\phi \omega = \int_0^1 \omega(\phi(t))(\phi'(t))dt \ .$$

Hierbei betrachten ϕ als Abbildung

$$\phi : [0,1] \cong \Delta^1 \to U \ .$$

Durch lineare Ausdehnung der Abbildung $\int_{\dots} \omega : \mathtt{Sing_1(U)} \to \mathbb{R}$ erhalten wir

$$C_1(U) \ni c \mapsto \int_c \omega \in \mathbb{C} \ ,$$

welche der Kette $\sum_{\phi \in \mathtt{Sing_1(U)}} n_\phi \phi$

$$\int_c \omega := \sum_{\phi \in \mathtt{Sing_1(U)}} n_\phi \int_\phi \omega$$

zuordnet. Die Abbildung

$$C_1(U) \times \Omega^1(U, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

ist $\mathbb{Z}$-linear im ersten und $\mathbb{C}$-linear im zweiten Argument.

Ist $h : U \to W$ eine differenzierbare Abbildung zwischen offenen Teilmengen, dann definieren wir

$$h^* : \Omega^1(W, \mathbb{C}) \to \Omega^1(U, \mathbb{C}) \ , \quad h^*\omega(u)(\xi) := \omega(h(u))(dh(u)(\xi)) \ .$$

Mit dieser Formel gilt (Kettenregel)

$$dh^* f = h^* df$$

für $f \in C^1(W,\mathbb{C})$[3]. Für $c \in C_1(U)$ gilt dann weiter

$$\int_c h^*\omega = \int_{h_c} \omega \ .$$

In der Tat gilt für $\phi \in \mathtt{Sing_1(U)}$

$$\begin{aligned}
\int_{h_*\phi} \omega &= \int_0^1 \omega(h\circ\phi(t))((h\circ\phi)'(t))dt \\
&= \int_0^1 \omega(h(\phi(t)))(dh(\phi(t))\phi'(t))dt \\
&= \int_0^1 (h^*\omega)(\phi(t))(\phi'(t))dt \\
&= \int_\phi h^*\omega
\end{aligned}$$

Lemma 3.5. *Es gilt für $f \in C^1(U,\mathbb{C})$ und $c \in C_1(U)$*

$$\int_c df = \int_{\delta c} f \ .$$

Proof. Sei $f \in C^1(U,\mathbb{C})$. Dann ist nach der Kettenregel

$$df(\phi(t))(\phi'(t)) = (f\circ\phi)'(t) \ .$$

Wir erhalten also nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_\phi df = \int_0^1 (f\circ\phi)'(t)dt = f(\phi(1)) - f(\phi(0)) = \int_{\delta\phi} f \ .$$

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in C(U,\mathbb{C})$.

Definition 3.6. *Eine holomorphe Funktion $F \in \mathcal{O}(U)$ heißt* ***Stammfunktion*** *von f, wenn $F' = f$ gilt.*

In anderen Symbolen, es gilt

$$dF = fdz \ .$$

Eine Stammfunktion ist bis auf eine Konstante bestimmt.

Lemma 3.7. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *f besitzt eine Stammfunktion.*

[3] was mit der naheliegenden Formel $h^*\omega(u)(\xi) := \omega(h(u))(\xi)$ nicht stimmen würde.

2. *Für jede geschlossene Kette $c \in C_1(U)$ gilt $\int_c f dz = 0$.*

Proof. $1 \Longrightarrow 2$. Es gilt $f dz = dF$ und deshalb für eine Kette $c \in C_1(U)$ mit $\delta c = 0$

$$\int_c f dz = \int_c dF = \int_{\delta c} F = 0 \ .$$

$2 \Longrightarrow 1$. Wir können annehmen, daß U wegzusammenhängend ist. Anderfalls behandeln wir die Komponenten separat. Wir fixieren einen Punkt x_0. Für jeden Punkt $x \in U$ existiert ein Weg $\phi : [0,1]$ mit $\phi(0) = x_0$ und $\phi(1) = x$. Wir setzen

$$F(x) := \int_\phi f dz \ .$$

Wir müssen zeigen, daß $F(x)$ unabhängig von der Wahl des Weges ist. Sei ψ ein weiterer solcher Weg. Dann ist $c := \phi - \psi$ eine geschlossene Kette. Es gilt

$$\int_\phi f dz - \int_\psi f dz = \int_c f dz = 0 \ .$$

Damit haben wir $F : U \to \mathbb{C}$ wohldefiniert.

In der Tat gilt sogar für jede Kette c mit $\delta c = x - x_0$ daß $\int_c f dz = F(x)$ ist. Dann ist nämlich $c - \phi$ geschlossen und deshalb

$$0 = \int_{c-\phi} f dz = \int_c f dz - \int_\phi f dz = \int_c f dz - F(x) \ .$$

Wir müssen jetzt zeigen, daß $F \in C^1(U, \mathbb{C})$ und $F' = f$ gilt. Wir fixieren $x \in U$ und einen Weg ϕ von x_0 nach x. Dann gibt es einen Ball $B(x,r) \subseteq U$. Für $y \in B(x,r)$ betrachten wir den Weg $\psi_y(t) := x + t(y-x)$. Wir haben die Kette $\phi + \psi_y \in C_1(U)$ mit $\delta(\phi + \psi_y) = y - x_0$ und deshalb

$$F(y) = \int_{\phi+\psi_y} f dz = F(x) + \int_{\psi_y} f dz \ .$$

Nun ist $\psi_y'(t) = y - x$ und deshalb $dz(\phi_y'(t)) = y - x$. Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung bekommen wir

$$\int_{\psi_y} f dz = \int_0^1 f(x + t(y-x))(y-x) dt = (y-x) f(x + \xi(y-x))$$

für ein $\xi \in [0,1]$. Wir schließen, daß

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x + \xi(y-x))$$

und
$$\lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x) \ .$$
Dies zeigt $F'(x) = f(x)$. □

4 Der Cauchysche Integralsatz

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ und W ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum.

Definition 4.1. *Eine W-wertige 2-Form auf S identifizieren wir mit einer Funktion $f : S \to W$. Wir werden 2-Formen in der Form $fdx \wedge dy$ notieren, um sie von Funktionen zu unterscheiden.* [4] *Wir schreiben $\Omega^2(S,W)$ für den Raum der W-wertigen 2-Formen.*

Definition 4.2. *Wir definieren das Differential $d : \Omega^1(S,W) \to \Omega^2(S,W)$ durch*
$$d\omega = (\partial_x\omega_y - \partial_y\omega_x)dx \wedge dy \ , \quad \omega = \omega_x dx + \omega_y dy \ , \quad \omega_x, \omega_y \in C^1(S,W) \ .$$

Sei $f \in C^2(S,W)$. Dann ist $df \in \Omega^1(S,W)$ differenzierbar und wir können $ddf \in \Omega^2(S,W)$ bilden.

Lemma 4.3. *Es gilt*
$$dd(f) = 0 \ .$$

Proof. In der Tat ist $df = \partial_x f dx + \partial_y f dy$ und deshalb $ddf = (\partial_x\partial_y f - \partial_y\partial_x f)dx \wedge dy = 0$. □

Wir erhalten also einen Komplex
$$\Omega^0_{C^2}(S,W) \xrightarrow{d} \Omega^1_{C^1}(S,W) \xrightarrow{d} \Omega^2_{C^0}(S,W) \ ,$$
wobei wir die jeweilige Regularität durch einen Index anzeigen.

Wir haben die Abbildungen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 : [1] \to [2]$, welche durch folgende Wertetabellen gegeben sind.

i	**0**	**1**
$\sigma_0(\mathbf{i})$	**1**	**2**

,

i	**0**	**1**
$\sigma_1(\mathbf{i})$	**0**	**2**

,

i	**0**	**1**
$\sigma_2(\mathbf{i})$	**0**	**1**

.

[4] Im Gegensatz zu den 1-Formen ist Definition ist nur deshalb korrekt, weil $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}_{|\mathbb{R}}) = 2$ ist. In späteren Vorlesungen werden n-Formen ordentlich einführen und diese Notation besser motivieren.

Diese induzieren Abbildungen $\sigma_{i,*} : \Delta^1 \to \Delta^2$. Sei $t \in [0,1] \cong \Delta^1$. Dann ist

$$\sigma_{0,*}(t) = t\mathbf{1} + (1-t)\mathbf{2}\ , \quad \sigma_{1,*}(t) = t\mathbf{0} + (1-t)\mathbf{2}\ , \quad \sigma_{2,*}(t) = t\mathbf{0} + (1-t)\mathbf{1}\ .$$

Das sind gerade die Parametrisierungen der drei Seiten des Dreiecks Δ^2. Wir erhalten weiter induzierte Abbildungen $\sigma_i^* : \mathtt{Sing_2(S)} \to \mathtt{Sing_1(S)}$ und damit $(\sigma_i^*)_* : C_2(S) \to C_1(S)$. Explizit gilt

$$(\sigma_i^*)_*(\sum_{\phi \in \mathtt{Sing_2(S)}} n_\phi \phi) = \sum_{\phi \in \mathtt{Sing_2}} n_\phi \phi \circ \sigma_{i,*}\ .$$

Wir setzen

$$\delta := (\sigma_0^*)_* - (\sigma_1^*)_* + (\sigma_2^*)_* : C_2(S) \to C_1(S)\ .$$

Lemma 4.4.

$$C_2(S) \stackrel{\delta}{\to} C_1(S) \stackrel{\delta}{\to} C_0(S)$$

ist ein Komplex.

Proof. Wir müssen zeigen, daß $\delta \circ \delta = 0$. Dazu betrachten wir ein einzelnes Simplex $\phi \in \mathtt{Sing_2(S)}$. Es reicht aus, zu zeigen, daß $\delta\delta\phi = 0$. Dann folgt die Behauptung durch lineare Ausdehnung. Wir rechnen

$$\delta\phi = \phi \circ \sigma_{0,*} - \phi \circ \sigma_{1,*} + \phi \circ \sigma_{2,*}\ .$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\delta\delta\phi &= \delta\phi(1) - \delta\phi(0) \\
&= \phi \circ \sigma_{0,*}(1) - \phi \circ \sigma_{1,*}(1) + \phi \circ \sigma_{2,*}(1) - \phi \circ \sigma_{0,*}(0) - \phi \circ \sigma_{1,*}(0) + \phi \circ \sigma_{2,*}(0) \\
&= \phi(\mathbf{1}) - \phi(\mathbf{0}) + \phi(\mathbf{0}) - \phi(\mathbf{2}) + \phi(\mathbf{2}) - \phi(\mathbf{1}) \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

□

Wir verallgemeinern jetzt die Integration von 1-Formen über 1-Ketten auf 2-Formen und 2-Ketten[5]. Dazu definieren wir zunächst das Integral über 2-Simplizes. Wir wählen auf Δ^2 die Koordinaten

$$[0,1] \times [0,1] \ni (s,t) \mapsto \kappa(s,t) := (st)\mathbf{0} + s(1-t)\mathbf{1} + (1-s)\mathbf{2}\ .$$

[5] In späteren Vorlesungen werden wir n-Formen über n-Ketten integrieren.

Sei $\phi \in \mathtt{Sing_2(S)}$, $\phi : \Delta^2 \to S$. Wir schreiben $\phi \circ \kappa(s,t) = \phi_x(s,t) + i\phi_y(t)$ für reelle Funktionen $\phi_i : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Die Jacobimatrix von $\kappa^*\phi$ ist demnach

$$J(\kappa^*\phi) = \begin{pmatrix} \partial_s\phi_x & \partial_t\phi_x \\ \partial_s\phi_y & \partial_t\phi_y \end{pmatrix} .$$

Wir definieren für $fdx \wedge dy \in \Omega^2(S,\mathbb{C})$

$$\int_\phi fdx \wedge dy := \int_0^1 \int_0^1 f(\phi(\kappa(s,t)) \det J(\kappa^*\phi)(s,t)dsdt .$$

Für $c \in C_2(S)$, $c = \sum_{\phi \in \mathtt{Sing_2(S)}} n_\phi \phi$ definieren wir

$$\int_c \omega := \sum_{\phi \in \mathtt{Sing_2(S)}} n_\phi \int_\phi \omega$$

durch lineare Fortsetzung. Das folgende Lemma verallgemeinert Lemma 3.5 auf den Grad-2 Fall[6].

Sei $h : S \to S'$ eine differenzierbare Abbildung zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$. Wir definieren[7]

$$h^* : \Omega^2(S',\mathbb{C}) \to \Omega^2(S,\mathbb{C}) \ , h^*(fdx \wedge dy) := (h^*f) \det(J(h))dx \wedge dy .$$

Mit dieser Formel gilt nämlich für $c \in C_2(S)$ und $\omega \in \Omega^2(S',\mathbb{C})$

$$\int_{h_*c} \omega = \int_c h^*\omega$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \int_{h_*\phi} \omega &= \int_0^1 \int_0^1 f(h(\phi(\kappa(s,t)))) \det J(h \circ \kappa^*\phi)(s,t)dsdt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (h^*f)(\phi(\kappa(s,t))) \det J(h)(\phi(s,t)) \det J(\kappa^*\phi)(s,t)dsdt \\ &= \int_\phi h^*\omega . \end{aligned}$$

Lemma 4.5. *Es gilt für $\omega \in \Omega^1_{C^1}(S',\mathbb{C})$*

$$h^*d\omega = dh^*\omega .$$

[6] Dies ist eine Form des Stokeschen Satzes, den wir in späteren Vorlesungen in beliebigem Grad besprechen werden.

[7] und nicht $h^*(fdx \wedge dy) = (h^*f)dx \wedge dy$. Diese Formel macht den Unterschied zwischen Funktionen und 2-Formen aus.)

Proof. Seien $s + it$ die Koordinaten in S und $x + iy$ in S'. Wir schreiben $h(s + it) = h_x(s+it) + ih_y(s+it)$ für reelle Funktionen h_x, h_y. Weiter definieren wir komplexwertige Funktionen α_s, α_t auf S durch

$$h^*\omega = \alpha_s ds + \alpha_t dt \ .$$

Es gilt

$$\alpha_s = h^*\omega_x \, \partial_s h_x + h^*\omega_y \, \partial_s h_y \ , \alpha_t = h^*\omega_x \, \partial_t h_x + h^*\omega_y \, \partial_t h_y \ .$$

Wir schreiben $d\omega = f dx \wedge dy$. Wir müssen zeige, daß

$$(h^*f) \det J(h) = \partial_s \alpha_t - \partial_t \alpha_s$$

gilt. In der Tat ist die linke Seite durch

$$h^*(\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x)(\partial_s h_x \partial_t h_y - \partial_t h_x \partial_s h_y)$$

gegeben. Wir werten jetzt die rechte Seite aus:

$$\begin{aligned}
\partial_s \alpha_t - \partial_t \alpha_s &= \partial_s(h^*\omega_x \, \partial_t h_x + h^*\omega_y \, \partial_t h_y) - \partial_t(h^*\omega_x \, \partial_s h_x + h^*\omega_y \, \partial_s h_y) \\
&= h^*\partial_x \omega_x \partial_s h_x \partial_t h_x + h^*\partial_y \omega_x \partial_s h_y \partial_t h_x \\
&\quad + h^*\partial_x \omega_y \partial_s h_x \partial_t h_y + h^*\partial_y \omega_y \partial_s h_y \partial_t h_y \\
&\quad - h^*\partial_x \omega_x \partial_t h_x \partial_s h_x - h^*\partial_y \omega_x \partial_t h_y \partial_s h_x \\
&\quad - h^*\partial_x \omega_y \partial_t h_x \partial_s h_y - h^*\partial_y \omega_y \partial_t h_y \partial_s h_y \\
&\quad + h^*\omega_x \partial_s \partial_t h_x + h^*\omega_y \partial_s \partial_t h_y - h^*\omega_x \partial_t \partial_s h_x - h^*\omega_y \partial_t \partial_s h_y \\
&= h^*(\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x)(\partial_s h_x \partial_t h_y - \partial_t h_x \partial_s h_y)
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.6. *Für $\omega \in \Omega^1_{C^1}(S, \mathbb{C})$ und $c \in C_2(S)$ gilt*

$$\int_c d\omega = \int_{\delta c} \omega \ .$$

Proof. Es gilt

$$\int_\phi f dx \wedge dy = \int_0^1 \int_0^1 f(\phi(\kappa(s,t)) \det J(\kappa^*\phi)(s,t) ds dt \ .$$

Nun ist

$$(\phi \circ \kappa)^* f(dx \wedge dy) = f(\phi(\kappa(s,t)) \det J(\kappa^* \phi)(s,t) ds \wedge dt \ .$$

Wir schreiben

$$(\phi \circ \kappa)^* \omega := \alpha_s ds + \alpha_t dt \ .$$

Dann gilt

$$(\phi \circ \kappa)^* d\omega = d(\phi \circ \kappa)^* \omega = (\partial_s \alpha_t - \partial_t \alpha_s) ds \wedge dt \ .$$

Wir rechnen nun

$$\int_\phi d\omega = \int_0^1 \int_0^1 (\partial_s \alpha_t - \partial_t \alpha_s) ds dt = \int_0^1 (\alpha_t(1,t) - \alpha_t(0,t)) dt - \int_0^1 (\alpha_s(s,1) - \alpha_s(s,0)) ds \ .$$

Wir beobachten jetzt, daß $\partial_t \kappa(0,t) = 0$ so daß $\partial_t \kappa^* \phi(0,t) = 0$. Daraus folgt $\alpha_t(0,t) = 0$. Desweiteren ist

$$\begin{aligned}
\phi(\kappa(1,t)) &= \phi(t\mathbf{0} + (1-t)\mathbf{1}) = \sigma_2^* \phi(t) \\
\phi(\kappa(s,0)) &= \phi(s\mathbf{1} + (1-s)\mathbf{2}) = \sigma_0^* \phi(s) \\
\phi(\kappa(s,1)) &= \phi(s\mathbf{0} + (1-s)\mathbf{2}) = \sigma_1^* \phi(s)
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_t(1,t) &= \omega(\sigma_2^* \phi(t))((\sigma_2^* \phi)'(t)) \\
\alpha_s(s,1) &= \omega(\sigma_1^* \phi(s))((\sigma_1^* \phi)'(s)) \\
\alpha_s(s,0) &= \omega(\sigma_0^* \phi(s))((\sigma_0^* \phi)'(s))
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int_\phi df = \int_{\sigma_2^* \phi} f - \int_{\sigma_1^* \phi} f + \int_{\sigma_0^* \phi} f = \int_{\delta \phi} f \ .$$

Durch lineare Ausdehnung folgt

$$\int_c df = \int_{\delta c} f$$

für jede 2-Kette $c \in C_2(U)$. □

Definition 4.7. *Eine Kette $c \in C_1(S)$ ist ein* ***Rand****, wenn $c = \delta b$ für eine 2-Kette $b \in C_2(S)$ gilt.*

Beachte, daß wegen Lemma 4.4 jeder Rand geschlossen ist.

Folgerung 4.8 (Cauchy Integralsatz - 1. Variante)**.** *Sei f eine holomorphe Funktion auf S. Dann gilt für jeden Rand $c \in C_1(S)$*

$$\int_c f dz = 0 \ .$$

Proof. Es gilt $d(f dz) = 0$. Desweiteren gilt für ein geeignetes $b \in C_2(S)$ mit $\delta b = c$ $\int_c f dz = \int_b d(f dz) = 0$ □

Wir untersuchen nun das Verhältnis von geschlossene 1-Ketten und Rändern. Dazu führen wir folgende Begriff ein.

Definition 4.9. *Die Gruppe*

$$H_1(S) := \frac{\ker(\delta : C_1(S) \to C_0(S))}{\mathrm{im}(\delta : C_2(S) \to C_1(S))}$$

ist die erste ***singuläre Homologie*** *von S.*

Folgerung 4.10 (Cauchy Integralsatz -2. Version)**.** *Gilt $H_1(S) = 0$ und ist f auf S holomorph, dann gilt $\int_c f dz = 0$ für jede geschlossene 1-Kette in S. Insbesondere hat f eine Stammfunktion.*

Es ist also interessant, Bedingungen zu finden, welche $H_1(S) = 0$ implizieren.

Definition 4.11. *Das Gebiet S heißt* ***sternförmig****, wenn es einen Punkt $x \in S$ gibt, so daß für jedes $y \in S$ die Strecke $\{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$ in S liegt.*

Wir nennen diesen Punkt x einen zentralen Punkt. Insbesondere ist ein konvexes Gebiet sternförmig und jeder Punkt ist zentral.

Lemma 4.12. *Ist S sternfömig, dann ist $H_1(S) = 0$.*

Proof. Wir müssen zeigen, daß jede geschlossene Kette c ein Rand ist. Sei $c = \sum_{\phi \in \mathtt{Sing_1(S)}} n_\phi \phi$. Wir wählen einen zentralen Punkt $x \in S$. Für jedes $\phi \in \mathtt{Sing_1(S)}$ definieren wir $\tilde{\phi} \in \mathtt{Sing_2(S)}$ durch

$$\tilde{\phi}(st\mathbf{0} + s(1-t)\mathbf{1} + (1-s)\mathbf{2}) := s\phi(t\mathbf{0} + (1-t)\mathbf{1}) + (1-s)x$$

In der Tat ist $\tilde{\phi}$ wohldefiniert, da die rechte Seite für $s = 0$ unabhängig von t immer den Wert x ergibt. Es gilt

$$\delta\tilde{\phi} = \overline{\phi(\mathbf{1})x} - \overline{\phi(\mathbf{0})x} + \phi \ ,$$

wobei

$$\overline{\phi(\mathbf{1})x}(t) = t\phi(\mathbf{1}) + (1-t)x \ , \overline{\phi(\mathbf{0})x}(t) = t\phi(\mathbf{0}) + (1-t)x$$

sind. Wir können das suggestiv als

$$\delta\tilde{\phi} = \overline{\delta\phi x} + \phi$$

schreiben. Wir dehnen die Konstruktion auf linear auf Ketten aus, indem wir

$$\tilde{c} := \sum_{\phi \in \mathtt{Sing}_1(\mathtt{S})} n_\phi \tilde{\phi}$$

setzen. Dann gilt $\delta\tilde{c} = \overline{\delta c x} + c$. Wenn c geschlossen ist, dann gilt $\delta\tilde{c} = c$. □

Folgerung 4.13 (Cauchy Integralsatz -3. Version)**.** *Ist S sternförmig und f auf S holomorph, dann gilt $\int_c f dz = 0$ für jede geschlossene 1-Kette in S. Insbesondere hat f eine Stammfunktion.*

Proof. Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen, f auf S holomorph, $x \in S$ und $r > 0$ so daß $\overline{B(x,r)} \subset S$. Sei $y \in \overline{B(x,r)}$ ein Randpunkt. Wir definieren für $0 < u < t$ die geschlossenen Ketten. $\phi_u(t) := x + e^{2\pi i t}((y-x))$. Wir werden diese Kette oft auch mit $\partial\overline{B(x,r)}$ bezeichnen. Sei $u \in B(x,r)$ und $0 < R < r - |u-x|$. Dann ist $\overline{B(u,R)} \subset B(x,r)$. Wir wählen einen Punkt $v \in \partial\overline{B(u,R)}$.

Lemma 4.14. *$\partial\overline{B(x,r)} - \partial\overline{B(z,v)}$ ist ein Rand in $S \setminus \{x\}$.*

Proof. Wir definieren zunächst eine Abbildung $\kappa : [0,1]^2 \ni (s,t) \to S$ durch

$$\kappa(s,t) := sx + (1-s)z + e^{2\pi i t}(s(y-x) + (1-s)(v-z)) \ .$$

Man überzeugt sich leicht, daß $\kappa(s,t) \in \overline{B(x,r)}$ für alle $s,t \in [0,1]^2$ gilt. Wir zerlegen nun das Quadrat $[0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ in die Bilder der zwei Simplizes $\psi_0, \psi_1 \in \mathtt{Sing_2}([0,1]^2)$, $\psi_i : \Delta^2 \to [0,1]^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi_0(a_0\mathbf{0} + a_1\mathbf{1} + a_2\mathbf{2}) &:= a_0(0,0) + a_1(1,0) + a_2(0,1) \\ \psi_1(a_0\mathbf{0} + a_1\mathbf{1} + a_2\mathbf{2}) &:= a_0(1,0) + a_1(0,1) + a_2(1,1) \end{aligned}$$

Dann ist

$$\delta\psi_0 = \overline{(1,0)(0,1)} - \overline{(0,0)(0,1)} + \overline{(0,0)(1,0)}\ , \delta\psi_1 = \overline{(0,1)(1,1)} - \overline{(1,0)(1,1)} + \overline{(1,0)(0,1)}\ ,$$

wobei $\overline{ab}$ das 1-Simplex bezeichnet, welches durch den linearen Weg von a nach b gegeben wird. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\delta\kappa_*(\psi_0 - \psi_1) &= \kappa_*\overline{(1,0)(0,1)} - \kappa_*\overline{(0,0)(0,1)} + \kappa_*\overline{(0,0)(1,0)} \\
&\quad -\kappa_*\overline{(0,1)(1,1)} + \kappa_*\overline{(1,0)(1,1)} - \kappa_*\overline{(1,0)(0,1)} \\
&= -\kappa_*\overline{(0,0)(0,1)} + \kappa_*\overline{(0,0)(1,0)} - \kappa_*\overline{(0,1)(1,1)} + \kappa_*\overline{(1,0)(1,1)} \\
&= -\kappa_*\overline{(0,0)(0,1)} + \kappa_*\overline{(1,0)(1,1)} \\
&= \partial\overline{B(z,R)} - \partial\overline{B(x,r)}
\end{aligned}$$

Sei jetzt f auf S holomorph und $z \in B(x,r)$. Dann ist $\frac{f(w)}{w-z}$ auf $S \setminus \{x\}$ holomorph und $\frac{f(w)dw}{w-z}$ eine geschlossene 1-Form.

Satz 4.15 (Cauchy Integralformel)**.** *Es gilt*

$$\int_{\partial\overline{B(x,r)}} \frac{f(w)dw}{w-z} = 2\pi i f(z)\ .$$

Proof. Wegen Lemma 4.14 und Folgerung 4.8 gilt

$$\int_{\partial\overline{B(x,r)}} \frac{f(w)dw}{w-z} = \int_{\partial\overline{B(z,R)}} \frac{f(w)dw}{w-z}$$

für beliebige $0 < u \le r$ und damit

$$\int_{\partial\overline{B(x,r)}} \frac{f(w)dw}{w-z} = \lim_{R\to 0} \int_{\partial\overline{B(z,R)}} \frac{f(w)dw}{w-z}\ .$$

Es gilt wegen $\partial\overline{B(z,R)}'(t) = 2\pi i R e^{2\pi i t}(v-z)$

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to 0} \int_{\partial\overline{B(z,R)}} \frac{f(w)dw}{w-z} &= \lim_{R\to 0} \int_0^1 \frac{f(z + R(v-z)e^{2\pi i t})}{R(v-z)e^{2\pi i t}} R 2\pi i e^{2\pi i t}(v-z)dt \\
&= \lim_{R\to 0} \int_0^1 2\pi i f(x + R(v-z)e^{2\pi i t})dt \\
&= \int_0^1 2\pi i f(z)dt \\
&= 2\pi i f(z)
\end{aligned}$$

□

1. Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ Polynome, $x \in \mathbb{C}$ eine einfache Nullstelle von q und $r > 0$ derart, daß q in $B(x,r)$ keine weitere Nullstelle besitzt. Dann existiert $\lim_{z\to x} \frac{q(z)}{z-x}$ und es gilt

$$\int_{\partial \overline{B(x,r)}} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \lim_{z\to x} \frac{p(x)(z-x)}{q(z)} \ .$$

In der Tat können wir $q(z) = (z-x)\tilde{q}(z)$ schreiben, wobei $\tilde{q}$ in $\overline{B(x,r)}$ keine Nullstelle besitzt. Damit ist $\frac{p(z)}{\tilde{q}(z)}$ auf einer Umgebung von $\overline{B(x,r)}$ holomorph, und nach der Cauchy Integralformel gilt

$$\int_{\partial \overline{B(x,r)}} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{\partial \overline{B(x,r)}} \frac{p(z)}{\tilde{q}(z)} \frac{1}{z-x} dz = \frac{p(x)}{\tilde{q}(x)} \ .$$

2. Es gilt

$$\int_{\partial \overline{B(x,1)}} \frac{1}{\sin(z)} dz = 2\pi i \ .$$

In der Tat hat $\sin(z)$ auf $\overline{B(x,1)}$ nur die Nullstelle $z = 0$. Wir schreiben

$$\sin(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} = z \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j+1)!}$$

Die Funktion $z \to \frac{\sin(z)}{z} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j+1)!}$ ist auf $\overline{B(x,1)}$ holomorph und hat dort keine Nullstellen. Weiter hat sie in $z = 0$ den Wert 1. Damit gilt

$$2\pi i = \int_{\partial \overline{B(x,1)}} \frac{z}{\sin(z)} \frac{1}{z-0} dz = \int_{\partial \overline{B(x,1)}} \frac{1}{\sin(z)} dz \ .$$

3. Die Funktion $e^z - 1$ hat die Nullstellen $z = 2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = \frac{e^z - 1 - z}{(e^z - 1)z} = \frac{z}{e^z - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} \ .$$

Diese Funktion hat offensichtlich eine holomorphe Fortsetzung nach $z = 0$ da

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

bei $z = 0$ nicht verschwindet.. Sei nun $2\pi\mathbb{Z} \not\ni R > 0$ gegeben. Wir betrachten

$$f(z) := \frac{1}{e^z - 1} - \sum_{k\in\mathbb{Z} \ ,2\pi|k|<R} \frac{1}{z - 2\pi i k} \ .$$

Falls $n \in \mathbb{Z}$ der Ungleichung $2\pi|n| < R$ genügt, gilt

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \sum_{k\in\mathbb{Z} \ ,2\pi|k|<R} \frac{1}{z - 2\pi i k} = \left(\frac{1}{e^{z-2\pi i n} - 1} - \frac{1}{z - 2\pi i n} \right) - \sum_{n\neq k\in\mathbb{Z} \ ,2\pi|k|<R} \frac{1}{z - 2\pi i k} \ .$$

Die erste Klammer ist bei $z = 2\pi in$ holomorph. Die restlichen Terme sind es aber auch. Damit ist f auf $B(0,R)$ holomorph. Es gilt damit

$$\int_{\partial\overline{B(0,R)}} f(z)dz = 0 \ .$$

Folglich

$$\begin{aligned}\int_{\partial\overline{B(0,R)}} \frac{dz}{e^z - 1} &= \int_{\partial\overline{B(0,R)}} \sum_{k\in\mathbb{Z}\ ,2\pi|k|<R} \frac{dz}{z - 2\pi ik} \\ &= \sharp\{k \in \mathbb{Z} \mid 2\pi|k| < R\}\end{aligned}$$

4. Die Funktion $f(z) := \frac{1}{z}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Es gilt

$$\int_{\partial\overline{B(0,r)}} \frac{dz}{z} = 2\pi i \ .$$

Damit hat die Funktion keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dieses Gebiet ist aber auch nicht sternförmig. Das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty,]\}$ ist sternförmig mit Zentrum 1. Auf diesem Gebiet hat die Funktion $1/z$ eine Stammfunktion. Wenn wir diese durch 0 im Punkt 1 normieren, muß diese mit $\ln(z)$ auf $(0,\infty)$ übereinstimmen. Wir erhalten damit eine holomorphe Fortsetzung $\ln : \mathbb{C} \setminus \{(-\infty,]\} \to \mathbb{C}$ von $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Wir können den Weg $\partial\overline{B(0,r)}$ als geschlossen Weg mit Anfang und Ende in $-r$ interpretieren. Die Berechnung des Integrals von $\frac{dz}{z}$ entlang dieses Weges zeigt

$$\lim_{\epsilon\to 0}(\ln(r + i\epsilon) - \ln(r - i\epsilon)) = \int_{\partial\overline{B(0,r)}} \frac{dz}{z} = 2\pi i \ .$$

Die komplexe Logarithmusfunktion hat also einen Sprung von $2\pi i$ entlang der negativen reellen Halbachse. Auf der der positiven reellen Halbachse gilt $e^{\ln(z)} = z$. Wir werden später sofort mit dem Identitätsatz 5.7 schließen können, daß sich diese Identität auf $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty,]\}$ ausdehnt.

5 Analytische Eigenschaften holomorpher Funktionen

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(S)$. Zur Erinnerung, dies bedeutet, daß $f : S \to \mathbb{C}$ auf S differenzierbar ist und $\bar\partial f = 0$ gilt.

Lemma 5.1. *Die Funktion ist auf S glatt. Für $x \in S$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{B(x,r)} \subset S$ gilt*

$$2\pi i f^{(n)}(x) = \int_{\partial\overline{B(x,r)}} \frac{f(w)dw}{(w - x)^{n+1}} \ .$$

Proof. Sei $x \in S$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{B(x,r)} \subset S$. Dann gilt für $z \in B(x,r)$ daß

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(x,r)}} \frac{f(w)dw}{w-z} .$$

Sei $0 < s < r$. Die Funktion $z \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$ ist für $z \in B(x,s)$ beliebig oft differenzierbar. Es gilt

$$\left(\frac{f(w)}{w-z}\right)^{(n)} = n! \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} .$$

Da

$$\sup_{w \in \partial \overline{B(x,r)}} \sup_{z \in B(x,s)} |\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}| < \infty$$

ist, können wir die Ableitungen unter das Integral ziehen. Es gilt also

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(x,r)}} \frac{f(w)dw}{(w-x)^{n+1}} .$$

□

Lemma 5.2. *Sei $x \in S$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{B(x,r)} \subset S$. Dann gilt für $z \in B(x,r)$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (z-x)^n .$$

Proof. Wir starten mit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(x,r)}} \frac{f(w)dw}{w-z} .$$

Wir schreiben

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-x-z+x} = \frac{1}{w-x} \frac{1}{1-\frac{z-x}{w-x}} = \frac{1}{w-x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-x}{w-x}\right)^n ,$$

da $|\frac{z-x}{w-x}| < 1$. Für festes $z \in B(x,r)$ konvergiert die Reihe gleichmäßig und kann mit dem Integral vertauscht werden:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-x)^n}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(x,r)}} \frac{f(w)dw}{(w-x)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (z-x)^n \end{aligned}$$

□

Eine auf S holomorphe Funktion wird also lokal durch ihre Taylorreihe dargestellt.

Folgerung 5.3. *Ist $f : S \to \mathbb{C}$ holomorph, dann sind auch alle Ableitungen $f^{(n)} : S \to \mathbb{C}$ holomorph.*

Folgerung 5.4. *Der Konvergenzradius der Taylorreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(z-x)^n$$

von f im Punkt $x \in S$ wird also durch

$$\sup\{r | \overline{B(x,r)} \subseteq S\}$$

von unten abgeschätzt.

Lemma 5.5. *Sei $x \in \mathbb{C}$ und $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x)^n$ eine durch Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r dargestellte holomorphe Funktion auf $B(x,r)$. Dann gibt es keine holomorphe Fortsetzung von f auf einen größeren Ball $B(x,r')$, $r' > r$.*

Proof. In der Tat, gäbe es eine solche Fortsetzung, dann wäre der Konvergenzradius der Taylorreihe von f im Punkt x größer oder gleich r'. Diese Taylorreihe ist aber die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x)^n$, und die hat den Konvergenzradius r. □

Lemma 5.6. *Ist S zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(S)$ holomorph, $x \in S$ und verschwinden alle Ableitungen von f im Punkt x, dann verschwindet f identisch.*

Proof. Wir zeigen, daß die Menge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f^{(n)} = 0\}$ in S sowohl offen als auch abgeschlossen ist. In der Tat ist $\{f^{(n)} = 0\}$ abgeschlossen, da $f^{(n)}$ stetig ist. Damit ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f^{(n)} = 0\}$ abgeschlossen.

Für jeden Punkt $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f^{(n)} = 0\}$ existiert eine Umgebung, auf welcher f durch die Taylorreihe in y dargestellt wird. Damit verschwindet f auf dieser Umgebung identisch und somit auch alle Ableitungen.

Da die Menge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f^{(n)} = 0\}$ nicht leer ist, muß sie mit S zusammenfallen.

Lemma 5.7. *Sei S zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(S)$ holomorph, $M \subseteq S$ nicht diskret und $f(m) = 0$ für alle $m \in M$. Dann verschwindet f identisch.*

Proof. Da M nicht diskret ist, gibt hat M einen Häufungspunkt. Sei (z_n) eine Folge in M mit $\lim_{n\to\infty} z_n = x$ und $z_n \neq x$ für alle x. Wir zeigen, daß $f^{(k)}(x) = 0$ für alle $k \geq 0$. Damit verschwindet f wegen Lemma 5.6 identisch. Dazu betrachten wir die Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(z-x)^k$$

welche auf einem Ball um x konvergiert. Unter der Annahme, daß

$$f^{(0)}(x) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(x) = 0$$

zeigen wir, daß $f^{(m)}(x) = 0$. In der Tat gilt

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(z-x)^k = (z-x)^m \left(f^{(m)}(x) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(z-x)^{k-m} \right) .$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 = f^{(m)}(x) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(z_n - x)^{k-m} .$$

Die Reihe $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(z_n - x)^{k-m}$ konvergiert geichmäßig auf einer Umgebung von x. Wenn wir den Grenzwert $n \to \infty$ bilden, dann erhalten wir $0 = f^{(m)}(x)$. $\square$

Die Menge der Nullstellen eine auf S holomorphen Funktion kann also keine Häufungspunkte in S haben. Am Rande von S ist das aber möglich. Als Beispiel betrachte man

$$f(z) := \sin(\frac{1}{z})$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Menge der Nullstellen ist $\{\frac{1}{n\pi} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und hat den Häufungspunkt 0.

1. Die Ausdehnungen e^z und $\sin(z), \cos(z), \tan(z), \cot(z)$ der e-Funktion und der trigonometrischen Funktionen von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ (bzw. entsprechende Teilmengen) sind eindeutig.

2. Wir hatten die Γ-Funktion von $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ auf $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0$ forgesetzt. Nach Lemma 5.6 ist dies die einzige Fortsetzung. In der Tat ist $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0$ zusammenhängend. Wäre $\tilde{\Gamma}$ eine weitere Fortsetzung, dann würde $\Gamma - \tilde{\Gamma}$ auf $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ identisch verschwinden. Damit verschwände diese Differenz aber auf der ganzen Menge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$.

3. Ist $h \in C^\infty([0,1])$. Dann konvergiert das Integral

$$f(z) := \int_0^1 h(t)t^{z-1}dt$$

auf $\mathrm{Re}(z) > 0$. Wir schreiben

$$h(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} t^k + t^{k+1} r(t)$$

für eine stetige Funktion $r \in C([0,1])$. Dann gilt

$$\int_0^1 h(t)t^{z-1}dt = \sum_{n=0}^{k} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 t^{z-1+n} + \int_0^1 t^{z+k} r(t)dt = \sum_{n=0}^{k} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \frac{t^{z+n}}{z+n} + \int_0^1 t^{z+k} r(t)dt \,.$$

Die Summe ist offensichtlich holomorph auf $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0$, während das Integral für $\mathrm{Re}(z) > -k-1$ konvergiert. Wir erhalten also mit dieser Formel eine Ausdehnung f_k von f auf $\{\mathrm{Re}(z) > -k-1\}$. Da $f_k = f = f_{k'}$ auf $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ gilt, müssen diese Ausdehnungen alle übereinstimmen. Wir erhalten somit eine holomorphe Ausdehnung auf $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0$.

4. Wir können die Logarithmusfunktion $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ im Punkt $r > 0$ entwickeln. Es gilt für $n > 0$

$$\ln^{(n)}(t) = (-1)^{n-1}(n-1)!t^{-n} \,.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n-1)!}{n!r^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{r}$$

hat die Taylorreihe

$$\ln_r(x) := \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-r)^n}{r^n n}$$

den Konvergenzradius r. In der Tat könnten wir keinen größeren Radius erwarten, da ln im Punkt 0 singulär ist.

Man zeigt leicht, daß für $x \in (0,2r)$ auch $f(x) := e^{\ln_r(x)} = x$ gilt. In der Tat gilt $f(r) = e^{\ln_r(r)} = r$ und

$$f'(x) = f(x)r^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-r)^{n-1}}{r^{n-1}} = \frac{e^{\ln_r(x)}}{x} \,.$$

Die einzige Lösung des Anfangswertproblems

$$f' = \frac{f}{x} \,, \quad f(r) = r$$

ist $\ln(f) = \ln(x)$, also $f(x) = x$. Damit stimmt aber $\ln_r$ mit ln auf $(0, 2r)$ überein. Wir schließen, daß $\ln_r$ und $\ln_{r'}$ auf $B(r,r) \cap B(r',r')$ übereinstimmen. Es gilt $\bigcup_{r>0} B(r,r) = \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Wir erhalten also eine holomorphe Ausdehnung von ln auf $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Dort gilt dann die Identität $e^{\ln(z)} = z$, was wiederum aus Lemma 5.6 folgt. In der Tat hat $e^{\ln(z)} - z$ in 1 eine verschwindende Taylorentwicklung.

Lemma 5.8. *Sei $f : S \to \mathbb{C}$ stetig und gelte für alle geschlossenen 1-Ketten $c \in C_1(S)$ auch $\int_c f dz = 0$, dann ist f holomorph.*

Proof. Nach Lemma 3.7 hat f eine holomophe Stammfunktion F. Damit ist aber $f = F'$ auch holomoph nach Folgerung 5.3. □

Satz 5.9 (Hebarkeitssatz)**.** *Sei $x \in S$ und $f : S \setminus \{x\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn f auf einer Umgebung von x beschränkt ist, dann hat f eine holomorphe Fortsetzung auf S.*

Proof. Wir betrachten die Funktion

$$F(z) := \begin{cases} (z-x)^2 f(z) & z \neq x \\ 0 & z = x \end{cases} .$$

Diese Funktion ist auf S stetig und auf $S \setminus \{x\}$ holomorph. In der Tat ist diese Funktion auch in x stetig differenzierbar. Damit gilt aber auch $\bar{\partial} F(x) = \lim_{z \to x} \bar{\partial} f(x) = 0$. Folglich ist F auf S holomorph. Wir können F auf einem Ball $B(x,r)$ um x in eine Potenzreihe entwickeln

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x)}{n!} (z-x)^n .$$

Nun ist jedoch $F(x) = 0$ und

$$F'(x) = \lim_{z \to x} \frac{(z-x)^2 f(z)}{z-x} = 0$$

und damit

$$F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x)}{n!} (z-x)^n = (x-z)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n+2)}(x)}{(n+2)!} (z-x)^n .$$

Folglich gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n+2)}(x)}{(n+2)!} (z-x)^n$$

und diese Funktion is holomorph. $\square$

Folgerung 5.10. *Sei $M \subset S$ diskret, $f \in C(S)$ und $f : S \setminus M \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist f auf S holomorph.*

Sei $f : S \to \mathbb{C}$ holomorph und $x \in S$.

Definition 5.11. *Die Zahl $\nu_f(x) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid f^{(n)}(x) \neq 0\}$ heißt die* ***Vielfachheit*** *(der Nullstelle) von f im Punkt x. Wir setzen $\nu_f(x) = \infty$, wenn alle Ableitungen verschwinden.*

Wenn $\nu_f(x) = 0$ ist, dann hat f in x also gar keine Nullstelle.

Lemma 5.12. *Wir können $f(z) = (z-x)^{\nu_f(x)} g(z)$ für eine holomorphe Funktion g schreiben.*

Proof. Für $z \neq 0$ definieren wir g durch

$$g(z) := f(z)(z-x)^{-\nu_f(x)} \ .$$

Es folgt aus der Taylorreihenentwicklung, daß g stetig in x fortgesetzt werden kann. Diese stetige Fortsetzung ist damit holomorph. $\square$

1. Es gilt $\nu_{\sin}(n\pi) = 1$.

2. Es gilt $\nu_\Gamma(-n) = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Ein topologischer Raum X heißt **lokal kompakt**, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Endlichdimensionale reelle Vektorräume und deren Teilräume sind lokalkompakt. Sei X ein lokalkompakter topologischer Raum und (f_n) eine Folge von Abbildung in einen metrischen Raum (Y, d). Die Folge konvergiert **lokal gleichmäßig** gegen eine Abbildung $X \to Y$, wenn für jeden Punkt in X eine kompakte Umgebung K existiert, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in K} d(f_n(y), f(y)) = 0$$

gilt. Ein lokal gleichmäßiger Grenzwert einer Folge stetiger Abbildunge ist stetig. Eine lokal gleichmäßig konvergente Folge konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge gleichmäßig.

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Satz 5.13. *Ist (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf S und konvergiere $f_n \to f$ lokal gleichmäßig. Dann ist f holomorph.*

Proof. Da holomorphe Funktionen stetig sind und ein lokal gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig ist, ist f stetig. Für jede geschlossene 1-Kette $c \in C_1(U)$ gilt

$$\int_c f dz = \int_c \lim_{n\to\infty} f_n dz = \lim_{n\to\infty} \int_c f_n dz = 0 \ .$$

Nach Lemma 5.8 ist f holomorph. □

Lemma 5.14. *Sei f eine holomorphe Funktion auf S, $x \in S$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{B(x,r)} \subset S$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \in (0,r]$ und $z \in \overline{B(x,r-s)}$*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r}{s}\frac{n!}{s^n} \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f| \ .$$

Proof. Wir benutzen die Formel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(x,r)}} \frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}}.$$

Der Integrand wird durch

$$|\frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}}| \leq \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f| \frac{1}{s^{n+1}}$$

abgeschätzt. Daraus folgt direkt

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r}{s}\frac{n!}{s^n} \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f| \ .$$

□

Für $s = r$ erhalten wir

Folgerung 5.15.
$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f| \ .$$

Mit dieser Formel kann man noch einmal einsehen, daß der Konvergenzradius der Taylorreihe größer als r ist. Für $s = \frac{r}{2}$ erhalten wir:

Folgerung 5.16.
$$\sup_{z \in B(x,\frac{r}{2})} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{2^{n+1}n!}{r^n} \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f| \ .$$

Lemma 5.17. *Sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf S, welche gegen eine Funktion f lokal gleichmäßig konvergiert. Dann ist f holomorph und die Folge der k-ten Ableitungen $(f_n^{(k)})$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.*

Proof. □

Wir wissen schon, daß f holomorph ist. Sei jetzt $x \in S$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{B(x,r)} \subset S$. Dann gilt nach Folgerung 5.16

$$\sup_{z \in \overline{B(x,\frac{r}{2})}} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{2^{k+1}k!}{r^k} \sup_{\partial \overline{B(x,r)}} |f_n - f| \ .$$

Da $\partial \overline{B(x,r)}$ eine kompakte Teilmenge von S ist, geht die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen Null. Damit gilt $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ gleichmäßig auf dem Ball $\overline{B(x,\frac{r}{2})}$. □

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Definition 5.18. *Für eine Funktion $f \in C(S,\mathbb{C})$, einen Punkt $x \in S$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{B(x,r)} \subset S$ definieren wir den Mittelwert*

$$M_r(f,x) := \int_0^1 f(x + re^{2\pi i t})dt$$

Definition 5.19. *Eine Funktion $f \in C(S,\mathbb{C})$ hat die **Mittelwerteigenschaft**, wenn für jedes $x \in S$ ein $R > 0$ existiert, so daß $\overline{B(x,R)} \subset S$ und*

$$M_r(f,x) = f(x)$$

für alle $0 < r \leq R$ gilt.

Lemma 5.20. *Holomorphe Funktionen haben die Mittelwerteigenschaft.*

Proof. Es gilt nach der Cauchy-Integralformel

$$M_r(f,x) = \int_0^1 f(x + re^{2\pi it})dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \overline{B(x,r)}} \frac{f(w)dw}{w-x} = f(x) \ .$$

□

Lemma 5.21. *Wir nehmen an, daß $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend ist. Ist $f \in C(S,\mathbb{C})$ eine Funktion mit der Mittelwerteigenschaft und besitzt $|f|$ in S ein globales Maximum, dann ist f konstant. Hat $|f|$ in $x \in S$ ein lokales Maximum, dann ist f auf einer Umgebung von x konstant.*

Proof. Möge $|f|$ in x ein globales Maximum haben. Wir zeigen, daß $A := \{|f| \leq |f(x)|\}$ offen und abgeschlossen ist. Da diese Menge nicht leer ist, fällt sie mit S zusammen. Die Menge ist offensichtlich abgeschlossen. Sei $y \in A$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{B(y,r)} \subset S$ und $M_s(f,y) = f(y)$ für alle $s \leq r$ gilt. Damit gilt jedoch

$$|f(x)| = |f(y)| = |M_s(f,y)| \leq M_s(|f|,y) \leq |f(y)| \ .$$

Die Gleichheit $M_s(f,y) = |f(x)|$ zusammen mit $|f| <\leq |f(x)|$ kann aber nur gelten, wenn f auf $\partial\overline{B(x,s)}$ konstant den Wert $f(x)$ annimmt. Damit ist $|f(z)| = |f(x)|$ auf einer ganzen Umgebung $\overline{B(x,r)}$ von x. Das zeigt die Offenheit von A.

Habe jetzt f in $x \in S$ ein lokales Maximum. Dann hat $f_{|B(x,r)}$ in x ein globales Maximum für ein geeignetes $r > 0$. Damit ist $f_{|B(x,r)}$ konstant gleich $f(x)$. □

Folgerung 5.22. *Sei $S \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt und $f \in C(\bar{S},\mathbb{C})$ erfülle die Mittelwerteigenschaft auf S (z.B. weil f dort holomorph ist). Dann nimmt $|f|$ das Maximum auf ∂S an.*

Proof. Die Aussage ist klar, wenn f konstant ist. Da $\bar{S}$ kompakt ist, muß die stetige Funktion $|f|$ auf $\bar{S}$ ein Maximum annehmen. Da $|f|$ auf S kein lokales Maximum haben kann, muß das lokale Maximum auf $\partial\bar{S}$ angenommen werden. □

Definition 5.23. *Ein* ***ganze Funktion*** *ist eine holomorphe Funktion auf* $\mathbb{C}$.

Eine ganze holomorphe Funktion ist also um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickelbar, welche unendlichen Konvergenzradius hat. Beispiele sind Polynome, e^z und $\sin(z)$, $\cos(z)$. Ganze Funktionen, die keine Polynome sind, heißen transzendente Funktionen.

Satz 5.24. *Eine ganze Funktion f ist genau dann ein Polynom vom Grad n, wenn es Konstanten $M, R > 0$ gibt, so daß*

$$|f(z)| \leq M|z|^n \ , \quad \forall z \in \{|z| > R\} \ .$$

Proof. Ein Polynom $f = a_n z^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad n erfüllt diese Ungleichung. Dazu betrachten wir $R := 1$. Die Abbildung

$$\{\mathrm{Re}(z) > R\} \ni z \mapsto |f(z)||z^{-n}| = |a_n + a_{n-1}\frac{z^{n-1}}{|z^n|} + \cdots + a_0 \frac{1}{|z|^n}|$$

ist durch eine Konstante M beschränkt. Wir können zum Beispiel

$$M := |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$$

nehmen. Möge umgekehrt $|f(z)| \leq M|z|^n$ für alle $|z| > R$ gelten. Dann folgt für alle $r > R$

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(0,r)} \frac{f dw}{w^{k+1}} \ ,$$

also

$$|f^{(k)}(0)| \leq k! M r^{n-k} \ .$$

Damit gilt $f^{(k)}(0) = 0$ für $k > n$.

Folgerung 5.25. *Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Folgerung 5.26 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Ist $f \in \mathbb{C}[z]$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann hat f in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.*

Proof. Wir nehmen an, daß f keine Nullstelle hat. Dann wäre $f^{-1}(z)$ auch eine ganze holomorphe Funktion. Sei $f = a_n z^n + \cdots + a_0$. Wir schreiben für $z \neq 0$

$$f(z) = z^n(a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}) \ .$$

Es gibt also ein $R > 0$ derart, daß aus $|z| > R$ folgt $|a_n| > 2|a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}|$. Damit gilt aber für $|z| > R$, daß

$$|f(z)| \geq \frac{|z|^n a_n}{2} \ .$$

Die Funktion f^{-1} ist auf $\{|z| \leq R\}$ beschränkt aus Stetigkeitsgründen. Wegen obiger Ungleichung ist f^{-1} auch auf $\{|z| \geq R\}$ durch $\frac{2}{R^n|a_n|}$ beschränkt. Folglich ist f^{-1} eine ganze beschränkte Funktion und damit konstant. Damit ist f auch konstant. □

Lemma 5.27. *Sei f eine ganze transzendente Funktion und $w \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to \infty$ und $f(z_n) \to w$.*

Proof. Möge es für $w \in \mathbb{C}$ keine solche Folge geben. Dann ist $\frac{1}{f(z)-w}$ im unendlichen beschränkt. Außerdem ist die Menge der 0-Stellen von $f(z) - w$ endlich. Die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - w}{\prod_{f(x)=w}(z - x)^{\nu_f(x)}}$$

hat keine 0-Stellen mehr. Wir erhalten damit eine Abschätzung der Form $|\frac{1}{g(z)}| \leq M|z|^k$, wobei $k := \sum_{f(x)=w} \nu_f(x)$ ist. Wir schließen, daß $\frac{1}{g(z)}$ ein Polynom ist. Damit wäre aber auch f ein Polynom und nicht transzendent. □

Dieses Lemma trifft also auf die e-Funktion und die Funktionen $\sin(z), \cos(z)$ zu.

6 Harmonische Funktionen

Definition 6.1. *Der Differentialoperator auf $\mathbb{R}^n$*

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial_i^2}$$

heißt ***Laplaceoperator****. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(S, \mathbb{C})$. Dann heißt f* ***harmonisch****, wenn $\Delta f = 0$ gilt.*

Wir betrachten zwei-dimensionale Elektrostatik, das heißt das zeitlich konstante elektrische Feld in Situationen, welche in einer Richtung translationsinvariant sind. Wir wollen etwa das elektrische Potential U in einem Gebiet $S \subseteq \mathbb{R}^2$ bestimmen, auf dessen Rand es schon festgelegt ist durch $U_0 \in C(\partial S, \mathbb{R})$. Das entsprechende elektrische Feld ist $E := -\text{grad}(U)$. Das Potential U wird bestimmt durch

$$\Delta U = 0 \ , \quad U_{|\partial S} = U_0 \ .$$

Das ist das **Dirichlet Problem**. Wir werden weiter unten eine Lösung des Dirichlet-Problems für $S = B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$ durch die Poissonformel angeben.

Als zweites Beispiel betrachten wir das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit, welche durch das Gebiet $S \subseteq \mathbb{R}^2$ strömt. In diesem Fall geben wir die Normalenkomponente $u^\perp$ der Strömung am Rand vor. Das Geschwindigkeitsfeld $u : S \to \mathbb{R}^2$ wird dabei durch ein Potential $U : S^2 \to \mathbb{R}$ beschrieben:

$$u = \mathrm{grad}(U), \quad u^\perp = f \in C(\partial\bar{S}, \mathbb{R}) \ .$$

Das Potential wird dann durch das **Neumann-Problem**

$$\Delta U = 0 \ , \quad (\mathrm{grad} U)^\perp_{|\partial\bar{S}} = f$$

bestimmt.

Das Dirichlet und das Neumannproblem für eine harmonische Funktion unterscheidet sich durch durch die Art der Randbedingung.

Auf $\mathbb{C}$ können wir Differentialoperatoren $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ durch

$$df = \partial_z f dz + \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}$$

definieren. In anderen Worten

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \ , \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \quad .$$

Insbesondere ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ also holomorph, wenn $\partial_{\bar{z}} f = 0$ ist. In diesem Fall gilt $f' = \partial_z f$. Wir rechnen

$$4\partial_z\partial_{\bar{z}} = 4\partial_{\bar{z}}\partial_z = \partial_x^2 + \partial_y^2 = \Delta \ .$$

Folgerung 6.2. *Ist f holomorph, dann sind $f, \bar{f}, \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$ harmonisch.*

Proof. In der Tat ist $\Delta f = 4\partial_z\partial_{\bar{z}} f = 0$. Desweiteren gilt $\overline{\Delta f} = \Delta \bar{f} = 4\partial_{\bar{z}}\partial_z \bar{f} = 0$. Damit sind aber auch $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ und $\mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$ harmonisch. □

Hier sind einige Beispiele harmonischer Funktionen

1. $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$

2. $\mathrm{Re}(e^z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{\bar{z}}) = \frac{1}{2}e^x(e^{iy} + e^{-iy}) = e^x \cos(y)$

3. $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Lemma 6.3. *Wir nehmen an, daß $H_1(S) = 0$ gilt. Ist $h \in C^2(S, \mathbb{R})$ harmonisch, dann existiert eine holomorphe Funktion $f : S \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(f) = h$.*

Proof. Wir definieren den Operator $* : \Omega^1(S) \to \Omega^1(S)$ durch $C(S, \mathbb{C})$-lineare Fortsetzung von $*dx := -dy$ und $*dy = dx$. Es folgt $*dz = idz$ und $*d\bar{z} = -id\bar{z}$. Wir rechnen ferner (mit $dz \wedge d\bar{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2idx \wedge dy$)

$$\begin{aligned} d * dg &= d * \partial_z g dz + d * \partial_{\bar{z}} g d\bar{z} \\ &= id\partial_z g dz - id\partial_{\bar{z}} g \\ &= i\partial_{\bar{z}}\partial_z g d\bar{z} \wedge dz - i\partial_z \partial_{\bar{z}} g dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{i}{2}\Delta g dz \wedge d\bar{z} \\ &= \Delta g dx \wedge dy \ . \end{aligned}$$

Wir setzen $\alpha := \frac{1}{2}(dh + *idh)$. Dies ist gerade die Projektion von dh auf den komplex-linearen Teil. Wir haben $d\alpha = \frac{1}{2}(d^2h + d * idh) = 0$, da $d^2h = 0$ und $d * dh = \Delta h = 0$ gilt. Wir schreiben $\alpha = ldz$ Dann gilt $dh = ldz + \bar{l}d\bar{z}$. Die Funktion $l : S \to \mathbb{C}$ hat eine Stammfunktion f nach Lemma 4.10. Wir rechnen

$$\begin{aligned} d(\mathrm{Re}(2f) - h) &= df + d\bar{f} - dh \\ &= \partial_z f dz + \overline{\partial_z f} d\bar{z} - dh \\ &= \alpha + \overline{\partial_z f} d\bar{z} - dh \\ &= (ldz + \bar{l}d\bar{z}) - dh \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Es gibt also eine Konstante c derart, daß $\mathrm{Re}(2f + c) = h$. □

Folgerung 6.4. *Harmonische Funtionen sind glatt. Ist S zusammenhängend, $\emptyset \neq U \subseteq S$ offen, $f \in C^2(S, \mathbb{C})$ harmonisch und $f_{|U} = 0$. Dann gilt $f = 0$.*

Proof. Lokal können wir $f = \mathrm{Re}(h)$ für eine holomorphe Funktion h schreiben. Mit h ist auch $\mathrm{Re}(h)$ glatt.

Wir zeigen, daß

$$T := \{x \in S \mid \exists \text{ Umgebung } V \text{ von } x \text{ mit } f_{|V} = 0\}$$

nicht leer, offen und abgeschlossen ist. In der Tat ist diese Menge nicht leer nach Voraussetzung und offen nach Definition. Sei jetzt $x \in \bar{T} \setminus T$. Dann existiert eine Umgebung $B(x,r) \subset S$ von x so daß $f_{|B(x,r)} = \mathrm{Re}(h)$ für eine holomorphe Funktion $f : B(x,r) \to \mathbb{C}$. Nun ist aber $B(x,r) \cap T$ offen und nicht leer, und $h_{|B(x,r)\cap T} = 0$. Damit ist $h = 0$ und folglich $f_{|B(x,r)} = 0$. Daraus folgt $x \in T$. Also gilt $\bar{T} = T$.

Wir schließen, daß $T = S$ gilt. □

Wir können auch aus $f_{|U} = const$ schließen, daß $f = const$ ist. Dazu betrachten wir einfach $f - const$.

Satz 6.5. *1. Harmonische Funktionen haben die Mittelwertseigenschaft*[8].

2. Sei S zusammenhängend. Hat eine harmonische Funktion $f \in C^2(S, \mathbb{R})$ in $x \in S$ ein lokales Extremum, dann ist f konstant.

3. Ist S beschränkt und $f \in C(\bar{S}, \mathbb{R}) \cap C^2(S, \mathbb{R})$ in S harmonisch, dann nimmt f das Maximum und Minimum auf ∂S an.

Proof. 1 Ist f harmonisch, so auch $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$. Es reicht deshalb aus, die Mittelwerteigenschaft für reelle harmonische Funktionen zu zeigen. Sei $x \in S$ und $R > 0$ derart, daß $T := B(x,r) \subset S$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $h : T \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(h) = f_{|T}$. Damit gilt für jedes $0 < r < R$, daß

$$M_r(f,x) = \mathrm{Re}(M_r(h,x)) = \mathrm{Re}(h(x)) = f(x) \ .$$

2 Hat f in $x \in S$ ein lokales Maximum, dann hat auch $g = f - f(x) + 1$ ein lokales Maximum in x. Da $g(x) = 1$ ist, ist g in einer Umgebung von x positiv. Damit hat auch $|g|$ ein lokales Maximum in x. Die Funktion g erfüllt auch die Mittelwerteigenschaft. Nach 5.21 ist g konstant auf einer Umgebung von x. Damit ist g konstant. Lokales Minima werden analog behandelt.

[8] Die Umkehrung wird in 6.12 gezeigt.

3 folgt wie 5.22. □

Wir formen jetzt die Cauchy-Integralformel etwas um mit dem Ziel, ein reelle Formel zu erhalten. Wir starten mit

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\overline{B(0,r)}}\frac{f(w)dw}{w-z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(re^{2\pi it})r2\pi ie^{2\pi it}dt}{re^{2\pi it}-z} \\ &= \int_0^1 \frac{f(re^{2\pi it})rdt}{r-e^{-2\pi it}z} \\ &= \int_0^1 \frac{f(re^{2\pi it})r^2dt}{r^2-re^{-2\pi it}z}\ . \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$g(\xi) := \frac{f(\xi)r^2}{r^2-\xi\overline{z}}\ .$$

Diese Funktion ist für festes $z \in B(0,r)$ auf einer Umgebung von $\overline{B(0,r)}$ holomorph. Wir setzen diese Funktion für f in obige Formel ein und erhalten

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^1 \frac{g(re^{2\pi it})r^2dt}{r^2-re^{-2\pi it}z} \\ &= \int_0^1 \frac{f(re^{2\pi it})r^4dt}{(r^2-re^{-2\pi it}z)(r^2-re^{2\pi it}\overline{z})} \\ &= \int_0^1 \frac{f(re^{2\pi it})r^2dt}{|r-e^{-2\pi it}z|^2} \\ f(z) &= \int_0^1 \frac{f(re^{2\pi it})(r^2-|z|^2)dt}{|r-e^{-2\pi it}z|^2} \\ &= \int_0^1 \frac{f(re^{2\pi it})(r^2-|z|^2)dt}{|e^{2\pi it}r-z|^2} \end{aligned}$$

Definition 6.6. *Die Funktion*

$$P(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}$$

heißt Poissonkern.

Es gilt für eine auf einer Umgebung von $\overline{B(0,r)}$ holomorphen Funktion f

$$f(z) = 2\pi\int_0^1 P(z,re^{2\pi it})f(re^{2\pi it})dt\ . \tag{1}$$

Wir beobachten jetzt, daß der Poissonkern eine reelle Funktion ist. Es gilt also

$$\mathrm{Re}(f) = 2\pi \int_0^1 P(z, re^{2\pi it})\mathrm{Re}(f(re^{2\pi it}))dt \ . \tag{2}$$

Satz 6.7. *Ist h eine auf einer Umgebung von $\overline{B(0,r)}$ harmonische Funktionm, dann gilt*

$$h(z) = 2\pi \int_0^1 P(z, re^{2\pi it})h(re^{2\pi it})dt \ .$$

Proof. Wir können annehmen, daß h reell ist. Dann ist $h = \mathrm{Re}(f)$ für eine holomorphe Funktion. Damit folgt die Formel aus (2). □

Satz 6.8. *Sei $\phi \in C(\partial\overline{B(0,r)})$. Dann definieren wir*

$$h(z) := \begin{cases} 2\pi \int_0^1 P(z, re^{2\pi it})\phi(re^{2\pi it})dt & z \in B(x,r) \\ \phi(z) & z \in \partial\overline{B(0,r)} \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig auf $\overline{B(0,r)}$ und harmonisch auf $B(0,r)$.

Proof. Wir zeigen zuerst, daß h auf $B(0,r)$ harmonisch ist. Dazu beobachten wir, daß für festes $\xi \in \partial\overline{B(0,r)}$

$$P(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{r^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}(\frac{\xi + z}{\xi - z})$$

gilt und damit $P(z,\xi)$ in z harmonisch ist. In der Tat ist

$$\frac{\xi + z}{\xi - z} + \frac{\bar{\xi} + \bar{z}}{\bar{\xi} - \bar{z}} = 2\frac{r^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} \ .$$

Wir können den Laplaceoperator unter das Integral ziehen.

$$\Delta_z h(z) = 2\pi \int_0^1 \Delta_z P(z, re^{2\pi it})\phi(re^{2\pi it})dt = 0 \ .$$

Wir zeigen nun die Stetigkeit. Auf $B(0,r)$ folgt die Stetigkeit aus der Harmonizität. Es reicht also aus zu zeigen, daß für jede Folge (z_n) in $B(0,r)$ mit $z_n \to \xi \in \partial\overline{B(0,r)}$ gilt $h(z_n) \to \phi(\xi)$.

Wegen der Rotationssymmetrie der Situation reicht es aus, diese Bedingung bei $\xi = -r$ zu zeigen. Für $\frac{1}{2} > c > 0$ spalten wir das Integral auf in $h(z) = h_1(z) + h_2(z)$ mit

$$h_1(z) := 2\pi \int_{\frac{1}{2}-c}^{\frac{1}{2}+c} P(z, re^{2\pi it})\phi(re^{2\pi it})dt \ , \quad h_2(z) := 2\pi \int_{t\in[0,1], |t-\frac{1}{2}|>c} P(z, re^{2\pi it})\phi(re^{2\pi it})dt \ .$$

Auf $t \in [0, \frac{1}{2} - c] \cup [\frac{1}{2} + c, 1]$ existiert

$$\lim_{z \to -r} P(z, re^{2\pi i t})\phi(re^{2\pi i t}) = 0$$

gleichmäßig in t. Damit gilt

$$\lim_{z \to -r} h_2(z) = 0 \ .$$

Sei $\phi_0 \in C(\partial \overline{B(0,r)})$ die konstante Funktion mit dem Wert $\phi(-r)$. Da die konstante Funktion mit diesem Wert holomorph ist, gilt für alle $z \in B(0,r)$ wegen (1)

$$\phi(-r) = 2\pi \int_0^1 P(z, re^{2\pi i t})\phi(-r)dt \ .$$

Wir können auch dieses Integral aufteilen und sehen, daß

$$\lim_{z \to -r} 2\pi \int_{t \in [0,1], |t - \frac{1}{2}| > c} P(z, re^{2\pi i t})\phi(-r)dt = 0$$

gilt. Damit ist

$$\lim_{z \to -r} (h(z) - h(-r)) = \lim_{z \to -r} 2\pi \int_{\frac{1}{2} - c}^{\frac{1}{2} + c} P(z, re^{2\pi i t})(\phi(re^{2\pi i t}) - \phi(-r))dt \ .$$

Da $P(z, \xi)$ für $z \in B(0,r)$ und $|\xi| = r$ positiv ist, gilt für jede Folge (z_n) in $B(x,0)$ mit $z_n \to -r$

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \to \infty} |h(z_n) - h(-r)| &\leq \limsup_{n \to \infty} 2\pi \int_{\frac{1}{2} - c}^{\frac{1}{2} + c} P(z_n, re^{2\pi i t}) \sup_{|t - \frac{1}{2}| < c} |\phi(re^{2\pi i t}) - \phi(-r)| dt \\
&\leq \limsup_{n \to \infty} \sup_{|t - \frac{1}{2}| < c} |\phi(re^{2\pi i t}) - \phi(-r)| 2\pi \int_0^1 P(z_n, re^{2\pi i t})dt \\
&= \sup_{|t - \frac{1}{2}| < c} |\phi(re^{2\pi i t}) - \phi(-r)| \ .
\end{aligned}$$

Damit gilt aber

$$\limsup_n |h(z_n) - h(-r)| \leq \lim_{c \to 0} \sup_{|t - \frac{1}{2}| < c} |\phi(re^{2\pi i t}) - \phi(-r)| = 0$$

wegen der Stetigkeit von ϕ. Wir sehen also, daß $\lim_{n \to \infty} h(z_n) = h(-r)$. □

Der Beweis zeigt noch etwas mehr:

Folgerung 6.9. *Ist $\phi : \partial\overline{B(0,r)} \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist*

$$h(z) := 2\pi \int_0^1 P(z, re^{2\pi it})\phi(re^{2\pi it})dt$$

in $B(0,r)$ harmonisch und es gilt $\lim_{z\to\xi} h(z) = \phi(\xi)$ in allen Punkten $\xi \in \partial\overline{B(0,r)}$, in denen ϕ stetig ist.

Sei $S \subset \mathbb{C}$ beschränkt und $\phi \in C(\partial\bar{S})$.

Lemma 6.10. *Das Dirichlet-Problem für $h \in C(\bar{S}) \cap C^2(S)$*

$$\Delta h = 0 \quad \text{auf } S \ , \quad h_{|\partial\bar{S}} = \phi$$

hat höchstens eine Lösung.

Proof. Sei h' eine weitere Lösung. Dann ist die Differenz $h - h'$ reellwertig, harmonisch auf S und stetig auf $\bar{S}$. Folglich nimmt sie das Minimum und das Maximum auf $\partial\bar{S}$ an. Es gilt aber $(h-h')_{|\partial\bar{S}} = 0$. Damit ist $h - h' = 0$. □

Satz 6.11. *Das Dirichlet Problem für den Ball $B(0,r)$ hat für jedes $\phi \in C(\partial\overline{B(0,r)})$ genau eine Lösung.*

Proof. Die Eindeutigkeit ist 6.10. Die einzige Lösung wird nach 6.8 durch die Poissonformel

$$h(z) = 2\pi \int_0^1 P(z, re^{2\pi it})\phi(re^{2\pi it})dt$$

gegeben. □

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Satz 6.12. *Eine stetige Funktion auf S ist genau dann harmonisch, wenn sie die Mittelwerteigenschaft hat.*

Proof. Harmonische Funktionen haben die Mittelwerteigenschaft. Möge nun umgekehrt $f \in C(S)$ die Mittelwerteigenschaft haben. Sei $x \in S$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{B(x,r)} \subset S$. Dann gibt es eine harmonische Funktion $g \in C(\overline{B(x,r)})$ mit $g_{|\partial\overline{B(x,r)}} = f_{|\partial\overline{B(x,r)}}$. Nun haben f und g auf $B(x,r)$ beide die Mittelwerteigenschaft. Damit nimmt $f-g$ Maximum und Minimum auf $\partial\overline{B(x,r)}$ an. Da aber $f-g$ auf diesem Rand verschwindet folgt $f=g$ auf $B(x,r)$ und f ist dort harmonisch. $\square$

Für andere Teilmengen $S \subset \mathbb{C}$ als Bälle kann man Lösungsformeln für das Dirichlet-Problem durch Transformation finden. Die fundamentale Beobachtung ist:

Lemma 6.13. *Sei $g : T \to S$ holomorph und $f : S \to \mathbb{R}$ harmonisch, dann ist $g^*f : T \to \mathbb{R}$ harmonisch.*

Proof. Sei $t \in T$ und $s = g(t)$. Es gibt eine in einer Umgebung V von s holomorphe Funktion h derart, daß $f_{|V} = \mathrm{Re}(h)$ gilt. Damit ist aber $g^*_{|g^{-1}(V)}f = \mathrm{Re}(g^*_{|g^{-1}(V)}h)$ harmonisch, da $g^*_{|g^{-1}(V)}h$ holomorph ist. $\square$

Sei $\phi \in C(\partial\bar{T})$, $g : \bar{T} \to \bar{S}$ stetig und $g_{|T} \to S$ holomorph, dann gilt:

Folgerung 6.14. *Ist $f \in C(\bar{S}) \cap C^2(S)$ eine Lösung des Dirichlet-Problems*

$$\Delta f = 0 \ \ \textit{auf}\, S\ , \quad f_{|\partial\bar{S}} = \phi\ ,$$

dann ist $h := g^*f \in C(\bar{T}) \cap C^2(T)$ eine Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta h = 0 \ \ \textit{auf}\, T\ , \quad f_{|\partial\bar{T}} = h^*\phi\ .$$

Wir spezialisieren nun auf $S = B(0,r)$ und nehmen an, daß $g : \bar{T} \to \bar{S}$ ein Diffeomorphismus ist. Es gilt

$$f(z) = 2\pi \int_0^1 P(z, re^{2\pi it})\phi(re^{2\pi it})dt\ .$$

Wir schreiben das Integral in koordinateninvarianter Form auf. Sei $\gamma(t) := re^{2\pi it}$. Dann ist $\gamma'(t) = 2\pi i\gamma(t)$ und

$$2\pi dt = \frac{dz}{iz}(\gamma(t))(\gamma'(t))dt\ .$$

Folglich

$$f(z) = \int_{\partial\overline{B(0,r)}} \frac{P(z,\xi)\phi(\xi)}{i\xi}d\xi\ .$$

Wir definieren den Zyklus

$$\partial\bar{T} := g_*^{-1}(\partial\overline{B(0,r)}) \in C_1(\bar{T}) \ .$$

Dann ist mit $\phi = g^{-1,*}\psi$, $\psi \in C(\partial\bar{T})$

$$\begin{aligned} f(g(t)) &= \int_{g_*\partial\bar{T}} \frac{P(g(t),\xi)\phi(\xi)}{i\xi} d\xi \\ &= \int_{\partial\bar{T}} g^*(\frac{P(g(t),\xi)\phi(\xi)}{i\xi} d\xi) \\ &= \int_{\partial\bar{T}} \psi g^*(\frac{P(g(t),\xi)}{i\xi} d\xi) \ . \end{aligned}$$

Beachte, daß $g^*d\xi = dg$ gilt. Wir definieren den **Poissonkern von** T durch

$$P_T(t,\nu) := \frac{P(g(t),g(\nu))}{ig(\nu)} g'(\nu)d\nu \ .$$

Dann gilt

$$g^*f(t) = \int_{\partial\bar{T}} P_T(t,\nu)\psi(\nu)d\nu \ .$$

Folgerung 6.15. *Sei $T \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt, $g : \bar{T} \to \overline{B(0,r)}$ ein im Inneren vom T holomorpher Diffeomorphismus und*

$$P_T(t,\nu) = \frac{P(g(t),g(\nu))}{ig(\nu)} g'(\nu)d\nu \ .$$

Dann wird die eindeutig bestimmte Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta h = 0 \ \ \textit{auf } T \ , \quad h_{|\partial\bar{T}} = \psi \in C(\partial\bar{T})$$

durch

$$h(t) = \int_{\partial\bar{T}} P_T(t,\nu)\psi(\nu)d\nu \ .$$

gegeben.

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{dz}{iz} &= \frac{\bar{z}dz}{i|z|^2} \\ &= \frac{(x-iy)(dx+idy)}{i|z|^2} \\ &= \frac{xdx+ydy+i(xdy-ydx)}{i|z|^2} \\ &= \frac{d|z|^2}{2i|z|^2} + \frac{xdy-ydx}{|z^2|} \\ &= \frac{1}{i} d\ln(|z|) + \frac{xdy-ydx}{|z^2|} \end{aligned}$$

Für $g : \bar{T} \to \overline{B(0,r)}$ gilt

$$\frac{g' d\nu}{ig} = g^* \frac{dz}{iz} = g^*(\frac{1}{i} d\ln(|z|) + \frac{xdy - ydx}{|z|^2}) = \frac{1}{i} d\ln(|g| + g^* \frac{xdy - ydx}{|z|^2}) \ .$$

Da $|g|$ auf $\partial\bar{T}$ konstant ist, verschwindet der erste Term auf $\partial\bar{T}$. Wenn wir $g(\nu) = g_x + ig_y$ für reelle Funktionen g_x, g_y schreiben, dann gilt

$$\frac{g' d\nu}{ig} = \frac{g_x dg_y - g_y dg_x}{|g|^2} \ .$$

Insbesondere ist $P_T(t,\nu)$ also reell.

Im Hinblick auf die Folgerung 6.15 ist die Frage interessant, für welche Gebiete $T \subseteq \mathbb{C}$ ein solche Abbildung $g : \bar{T} \to B(0,r)$ existiert. Diese Frage wird im wesentlichen durch den **Riemannschen Abbildungssatz** geklärt.

Satz 6.16. *Ist $T \subset \mathbb{C}$ eine echte offene Teilmenge und gilt $H_1(T) = 0$, dann gibt es einen biholomorphen Diffeomorphismus $T \xrightarrow{\sim} B(0,1)$.*

Die für unsere Anwendung wichtige Regularität am Rand von T muß separat geklärt werden.

7 Singularitäten

Wir betrachten für $0 < r < R < \infty$ den Ring

$$K := K(a,r,R) = B(a,R) \setminus \overline{B(a,r)} \ .$$

Wir setzen $U := B(a,R)$ und $V := \mathbb{C} \setminus \overline{B(a,r)}$. Es gilt $U \cap V = K$. Wir betrachten eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(K$.

Lemma 7.1. *Es gibt eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen $u \in \mathcal{O}(U)$ und $v \in \mathcal{O}(V)$ derart, daß*

1. $u_{|K} + v_{|K} = f$
2. $\lim_{z\to\infty} v(z) = 0$.

Proof. Für $r < s < R$ definieren wir eine holomorphe Funktion $u_s : B(a,s) \to \mathbb{C}$ durch

$$u_s(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(a,s)}} \frac{f(w)dw}{w-z} \; .$$

Für $0 < s < s' < R$ gilt nach dem Cauchy-Integralsatz $u_s = (s_{s'})_{|B(a,s)}$. Das System $(u_s)_{r<s<R}$ legt damit eine holomorphe Funktion $u : U \to \mathbb{C}$ fest.

Analog definieren wir holomorphe Funktionen $v_s : \mathbb{C} \setminus \overline{B(a,s)}$

$$v_s := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\partial \overline{B(a,s)}} \frac{f(w)dw}{w-z}$$

welche eine Funktion $v : V \to \mathbb{C}$ festlegen. Es gilt $\lim_{z\to\infty} v(z) = 0$.

Sei nun $z \in K$ und $\epsilon > 0$ derart, daß $\overline{B(z,\epsilon)} \subset K$. Es gilt für $r < s < |z-a| - \epsilon < |z-a| + \epsilon < s' < R$ in $H_1(K)$

$$[\partial \overline{B(z,\epsilon)}] = [\partial \overline{B(a,s')}] - [\partial \overline{B(a,s)}] \; .$$

Deshalb gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(z,\epsilon)}} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(a,s')}} \frac{f(w)dw}{w-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\partial \overline{B(a,s)}} \frac{f(w)dw}{w-z} = u(z) + v(z) \; .$$

Sei $f = u' + v'$ eine weitere solche Zerlegung. Dann gilt $0 = (u-u') + (v-v')$. Wir betrachten die ganze Funktion

$$h(z) := \begin{cases} u(z) - u'(z) & |z| < R \\ v'(z) - v(z) & |z| > r \end{cases} \; .$$

Diese Funktion is wohldefiniert. Da sie beschränkt ist, gilt $h = const$. In der Tat ist $h = 0$ wegen $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$. Damit gilt $u = u'$ und $v = v'$. $\square$

Folgerung 7.2. *Ist $f \in \mathcal{O}(K)$, dann hat f eine eindeutige lokal-gleichmäßig konvergente Darstellung*

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(a,s)}} \frac{f(w)dw}{(w-a)^{n+1}} \; .$$

Proof. Es gilt

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

und

$$v(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^{-n} \ .$$

□

Definition 7.3. *Eine Reihe der Form $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ heißt* ***Laurentreihe****. Sie konvergiert im Punkt z, wenn die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ und $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n$ konvergieren.*

Folgerung 7.4. *Konvergiert eine Laurentreihe an zwei Punkten z_1, z_2, dann konvergiert sie auf dem Kreisring $K(0, |z_1|, |z_2|)$ lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion. Der Konvergenzbereich S einer auf einer offenen Teilmenge konvergenten Laurentreihe erfüllt also $K(a, r, R) \subseteq S \subseteq \overline{K(a, r, R)}$ für geeignete $0 \leq r < R \leq \infty$.*

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und $x \in S$. Sei $f : S \setminus \{x\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Definition 7.5. *Wir sagen, daß f in x eine* ***isolierte Singularität*** *hat.*

Wir können $f \in \mathcal{O}(S \setminus \{x\})$ in einer Umgebung von x in eindeutiger Weise durch eine konvergente Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-x)^n$$

darstellen.

Definition 7.6. *$f \in \mathcal{O}(S \setminus \{x\})$ hat in x* ***einen Pol****, wenn es ein $N \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a_n = 0$ für alle $n < N$. In diesem Fall definieren wir die* ***Vielfachheit*** *von f im Punkt x durch*

$$\nu_f(x) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\} \ .$$

Wenn f in x keinen Pol hat, da sagen wir, daß f dort eine ***wesentliche Singularität*** *hat.*

Folgerung 7.7. *Eine nichtverschwindende holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(S \setminus \{x\})$ hat in x genau dann einen Pol der Vielfachheit $\nu_f(x)$, wenn $h(z) := (z-x)^{-\nu} f(z)$ eine holomorphe Fortsetzung auf S mit $h(x) \neq 0$ hat. Das zu reicht es, daß $h(z)$ in der Nähe von z beschränkt bleibt (Satz 5.9).*

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Definition 7.8. *Eine* ***meromorphe Funktion*** *auf S ist eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(S \setminus M)$ für eine geeignete diskrete Menge $M \subset S$ derart, daß f in jedem Punkt von M einen Pol hat.*

Lemma 7.9. *Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Die Menge $\mathcal{M}(S)$ der auf S meromorphen Funktionen bildet einen Körper. In der Tat ist $\mathcal{M}(S)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(S)$.*

Proof. Es ist einfach zu sehen, daß $\mathcal{M}(S)$ eine abelsche Gruppe bildet. Wir sehen weiter ein, daß das Produkt zweier meromorpher Funktionen ebenfalls eine meromorphe Funktion ist. Seien $f, g \in \mathcal{M}(S)$ meromorph. Dann gibt es diskrete Teilmengen $F, G \subset S$ derart, daß f auf $S \setminus F$ und g auf $S \setminus G$ holomorph sind. Wir setzen $H := F \cup G$. Dann ist fg auf $S \setminus H$ holomorph. Es bleibt zu zeigen, daß h in $x \in H$ einen Pol hat. Wir betrachten $\phi(z) := (z-x)^{-\nu_f(x)-\nu_g(x)}$. Dann ist $\phi(z)h = [(z-x)^{-\nu_f(x)}f][(z-x)^{-\nu_g(x)g}]$ in der Nähe von x holomorph. Damit bildet $\mathcal{M}(S)$ eine Ring.

Sei nun $f \in \mathcal{M}(S)$ und $f \neq 0$. Wir müssen zeigen, daß $f^{-1} \in \mathcal{M}(S)$. Sei $x \in S$. Da f nirgends konstant sein kann, gilt $f(z) = (z-x)^{\nu_f(x)}h(z)$, wobei h auf einer Umgebung von x holomorph ist und $h(x) \neq 0$ gilt. Die Funktion $h^{-1}(z)$ hat dieselben Eigenschaften. Damit ist aber auf dieser Umgebung $f^{-1}(z) = (z-x)^{\nu_f(x)}h^{-1}(z)$ meromorph. Dies zeigt $f^{-1} \in \mathcal{M}(S)$. Damit ist $\mathcal{M}(S)$ in Körper.

Den zweiten Teil lassen wir als Übungsaufgabe. □

Seien nun $S, T \subseteq \mathbb{C}$ offen, $h : S \to T$ holomorph und nirgends konstant und $f \in \mathcal{M}(T)$.

Lemma 7.10. *Dann gilt $h^*f \in \mathcal{M}(S)$.*

Proof. Sei $F \subset T$ diskret derart, daß $f \in \mathcal{O}(T \setminus F)$. Wir zeigen zuerst, daß $G := h^{-1}(T) \subseteq S$ diskret ist. Wir nehmen an, daß G nicht diskret sei. Sei (g_i) eine Folge in G mit $g_j \to g \in S$ und $g_j \neq g$ für alle j. Dann gilt $h(g_j) \to h(g)$. Wenn $h(g_j) = h(g)$ für unendlich viele j wäre, dann wäre h in einer Umgebung von g konstant. Also gilt $h(g_j) \neq h(g)$ für fast alle j. Da diese Punkte aber in F liegen, wäre damit F nicht diskret.

Sei nun $g \in G$ und $x = h(g)$. In der Nähe von x gilt $f(z) = (z-x)^{\nu_f(x)} g(z)$ für eine bei x holomorphe Funktion ψ. Damit gilt $(h^* f)(w) = (h(w)-x)^{\nu_f(x)} \psi(h(w))$. Sei $h(w) = \sum_{n \geq 0} a_n (w-g)^n$ die Taylorreihe von h in g. Es gilt $a_0 = x$. Damit ist $(h(w) - x)^{\nu_f(x)} = (\sum_{n \geq 1} a_n (w-g)^n)^{\nu_f(x)}$. Da h nirgends konstant ist, gibt es ein minimales $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N \neq 0$. Wir schreiben

$$\sum_{n \geq 1} a_n (w-g)^n = (w-g)^N \sum_{n \geq 0} a_{n+N} (w-g)^n \ .$$

Die Summe $\sum_{n \geq 0} a_{n+N}(w-g)^n$ ist nahe dem Punkt $w = g$ holomorph und verschwindet dort nicht. Damit ist $\left(\sum_{n \geq 0} a_{n+N}(w-g)^n\right)^{\nu_f(x)}$ nahe g holomorph. Wir haben damit eine Darstellung $(h^* f)(w) = (w-g)^{\nu_f(x) N} \phi(w)$ mit einer bei g holomorphen Funktion ϕ gefunden. □

1. Rationale Funktionen $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $q \neq 0$ sind meromorph.
2. $\tan, \cot, \Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.
3. $\ln(z), e^{\frac{1}{z}}$ sind nicht meromorph auf $\mathbb{C}$.

Wir betrachten eine offene Teilmenge $S \subseteq \mathbb{C}$, $x \in \S$ und $f \in \mathcal{O}(S \setminus \{x\})$.

Definition 7.11. *Entweder gilt $f \in \mathcal{M}(S)$ oder für jede Umgebung $W \subseteq S$ von x ist $f(W) \subseteq \mathbb{C}$ dicht.*

Proof. Sei $u \notin \overline{f(W)}$. Dann ist $h(z) := \frac{1}{f(z)-u}$ auf $W \setminus \{x\}$ beschränkt. Damit besitzt h eine holomorphe Fortsetzung auf W. Wir erhalten $f(z) = u + \frac{1}{h(z)}$. Diese Funktion ist auf W meromorph. Damit hat f in x einen Pol.

Wenn f in x einen Pol hat, dann existiert $\lim_{z \to x} |f(z)| \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann gibt es aber Umgebungen $W \subseteq S$ von x derart, daß $f(W)$ nicht dicht ist. □

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und $x \in S$. Wir betrachten eine holomorphhe 1-Form $\alpha = f dz$ auf $S \setminus \{x\}$, also mit $f \in \mathcal{O}(S \setminus \{x\})$. Wir sagen, daß α in x eine isolierte Singularität hat. Insbesondere hat α in x einen Pol, wenn f einen Pol hat.

Eine 1-Form auf S mit isolierten Singularitäten ist eine holomorphe 1-Form α auf $S \setminus F$ für eine geeignete diskrete Teilmenge $F \subset S$. Die 1-Form ist meromorph, wenn sie in der Form $\alpha = f dz$ mit $f \in \mathcal{M}(S)$ geschrieben werden kann.

Sei nun α eine holomorphe 1-Form mit einer isolierten Singularität in x. Wir betrachten die Laurentreihe $\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-x)^n dz$.

Definition 7.12. *Wir definieren wir das Residuum*

$$\mathrm{res}_x(\alpha) := a_{-1} \ .$$

Die Bedeutung dieses Begriffs ergibt sich aus der folgenden Formel:

Lemma 7.13. *Für genügend kleine $r > 0$ gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\partial B(x,r)}} \alpha = \mathrm{res}_x(\alpha) \ .$$

Proof. Es gibt eine Zahl $0 < R$ derart, daß die Laurentreihe von f auf den Ring $B(x,R) \setminus \{x\}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Dann gilt für $0 < s < R$ daß

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\partial B(x,s)}} \alpha = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\partial B(x,s)}} a_n (w-x)^n dw \ .$$

Wir berechnen die Summanden explizit:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\partial B(x,s)}} (w-x)^n dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 (s e^{2\pi i t})^n s 2\pi i t e^{2\pi i t} dt \\
&= s^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i t(n+1)} dt \\
&= \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 1 & n = -1 \end{cases} \ .
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\partial B(x,s)}} \alpha = a_{-1} = \mathrm{res}_x(\alpha) \ .$$

□

Wir zeigen nun eine Reihe von Rechenregeln für das Residuum.

Lemma 7.14. *1. Die Abbildung $\alpha \mapsto \mathrm{res}_x(\alpha)$ ist linear.*

2. $\mathrm{res}_x(df) = 0$ *für eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität in* x.

3. $\mathrm{res}_x(fdg) = -\mathrm{res}_x(gdf)$ *für holomorphe Funktionen mit einer isolierten Singularität in* x.

4. *Wenn* f *in* x *keine wesentliche Singularität hat, dann gilt* $\mathrm{res}_x(\frac{df}{f}) = \nu_x(f)$

5. *Wenn* f *in* x *einen Pol der Ordnung* $n \geq 1$ *hat, dann gilt für die bei* z *holomorphe Funktion* $g(z) := (z-x)^n f(z)$

$$\mathrm{res}_x(fdz) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(x) \ .$$

6. *Wenn* f *in* x *holomorph ist und eine Nullstelle der Ordnung* 1 *hat, dann gilt* $\mathrm{res}_x(f^{-1}dz) = \frac{1}{f'(x)}$.

Proof. Die Linearität des Residuums ist klar.

Sei $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-x)^n$. Dann ist

$$df(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n n (z-x)^{n-1} dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n+1}(n+1)(z-x)^n dz \ .$$

Es folgt $\mathrm{res}_x(df) = a_{-1+1}(-1+1) = 0$.

Wir schreiben $d(fg) = gdf + fdg$. Damit ist

$$\mathrm{res}_x(fdg) + \mathrm{res}_x(gdf) = \mathrm{res}_x(d(fg)) = 0 \ .$$

Wir betrachten die Entwicklungen

$$f(w) = \sum_{n\geq \nu_f(x)} b_n (w-x)^n \ , \quad f'(w) = \sum_{n\geq \nu_f(x)-1} b_{n+1}(n+1)(w-x)^n \ .$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \frac{f'(w)}{f(w)} &= \frac{\sum_{n\geq\nu_f(x)-1} b_{n+1}(n+1)(w-x)^n}{\sum_{n\geq\nu_f(x)} b_n (w-x)^n} \\ &= \frac{1}{w-x} \frac{\sum_{n\geq 0} b_{n+\nu_f(x)}(n+\nu_f(x))(w-x)^n}{\sum_{n\geq 0} b_{n+\nu_f(x)}(w-x)^n} \ . \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{\sum_{n\geq 0} b_{n+\nu_f(x)}(n+\nu_f(x))(w-x)^n}{\sum_{n\geq 0} b_{n+\nu_f(x)}(w-x)^n}$$

in $w = x$ regulär und hat den Wert $\nu_f(x)$. Daraus folgt

$$\mathrm{res}_x(\frac{df}{f}) = \nu_f(x) \ .$$

Sei $f(z) = \sum_{k\geq -n} a_k(z-x)^k$. Dann ist $g(z) = \sum_{k\geq -n} a_k(z-x)^{k+n}$ und $g^{(n-1)}(x) = (n-1)!a_{-1}$.

Wenn f in x eine Nullstelle erster Ordnung hat, dann gilt

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(z-x)^n = (z-x)\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(z-x)^n \ .$$

Die Funktion $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(z-x)^n$ ist in $z = x$ nicht Null. Deshalb gilt $f^{-1}(z) = \frac{1}{(z-x)} \frac{1}{\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(z-x)^n}$ und deshalb $\mathrm{res}_x(f^{-1}dz) = \frac{1}{f'(x)}$. □

1. Die Funktion $\tan(z)$ hat in $z = 0$ Nullstelle der Ordnung 1. Es gilt $\tan'(z) = \frac{1}{\cos^2(z)}$. Damit ist $\mathrm{res}_0(\cot dz) = \frac{1}{\cos^2(0)} = 1$.
2. Es gilt $\mathrm{res}_x \frac{e^z}{z-x} dz = e^x$.
3. Es gilt $\mathrm{res}_x \frac{e^z}{(z-x)^3} dz = \frac{1}{2}e^x$.
4. Es gilt
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{\prod_{n=0}^{k-1}(z+n)} \ .$$
Wir schließen, daß mit $k = l+1$
$$\mathrm{res}_{-l}\Gamma dz = \frac{\Gamma(1)}{\prod_{n=0}^{l-1}(n-l)} = \frac{1}{l!} \ .$$

Seien $S, T \subseteq \mathbb{C}$ offen, $h : S \to T$ holomorph und α eine holomorphe 1-Form auf T mit isolierten Singularitäten.

Lemma 7.15. *Die Form $h^*\alpha$ ist eine holomorphe 1-Form auf S mit isolierten Singularitäten und es gilt*

$$\mathrm{res}_x h^*\alpha = \nu_{h-h(x)}(x)\mathrm{res}_{h(x)}\alpha \ .$$

Ist α meromorph, dann auch $h^*\alpha$.

Proof. Sei α auf $T \setminus F$ holomorph und $F \subset T$ diskret. Dann ist $h^{-1}(F) \subset S$ diskret und $h^*\alpha$ auf $S \setminus h^{-1}(F)$ holomorph. Damit hat $h^*\alpha$ isolierte Singularitäten. Sei $\alpha = fdz$ für $f \in \mathcal{M}(T)$ Dann ist $h^*\alpha = h^*fh'dw$. Nun ist $h^*fh' \in \mathcal{M}(S)$.

Sei $\mathrm{res}_{h(x)}(fdz) = 0$. Wir betrachten einen Ball $B(h(x), r)$ um $h(x)$, so daß $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - h(x))^n$ auf $B(h(x), r) \setminus \{h(x)\}$ gilt. Beachte, daß $a_{-1} = 0$ ist. Die Funktion $F(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{a_n}{n+1}(z-h(x))^{n+1}$ ist eine Stammfunktion von f auf $B(h(x), r)\setminus\{h(x)\}$.

Wir schließen

$$\mathrm{res}_x(h^*fdz) = \mathrm{res}_x(h^*dF) = \mathrm{res}_x(dh^*F) = 0 \ .$$

Im allgemeinen zerlegen wir $fdz = \frac{\mathrm{res}_{h(x)}(fdz)}{z-h(x)} + \tilde{f}dz$. Dann hat $\tilde{f}$ in $h(x)$ eine isolierte Singuarität und es gilt $\mathrm{res}_{h(x)}(\tilde{f}dz) = 0$. Es gilt

$$\mathrm{res}_x(h^*fdz) = \mathrm{res}_x h^*(\frac{\mathrm{res}_{h(x)}(fdz)dz}{z - h(x)}) + \mathrm{res}_x h^*(\tilde{f}dz) \ .$$

Nur der erste Term trägt bei. Es gilt

$$h^*(\frac{dz}{z - h(x)})(w) = \frac{h'(w)dw}{h(w) - h(x)} = \frac{d(h - h(x))}{h - h(x)}(w) \ ,$$

also

$$\mathrm{res}_x(h^*(\frac{dz}{z - h(x)})) = \nu_{h-h(x)}(x) \ .$$

8 Der Residuensatz

Sei $c \in C_*(S)$ eine Kette. Es gilt $c = \sum_{\sigma\in\mathtt{Sing}_*(\mathtt{S})} a_\sigma\sigma$.

Definition 8.1. *Wir definieren die* ***Spur von*** c *als die Menge*

$$|c| := \{s \in S \mid \exists\sigma \in \mathtt{Sing}_*(\mathtt{S}) \text{ mit } a_\sigma \neq 0 \text{ und } t \in \Delta^* \text{ derart, daß } \sigma(t) = x\} \ .$$

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und $c \in C_1(S)$ ein exakter Zyklus, also $c = \delta(r)$ für eine 2-Kette $r \in C_2(S)$. Sei weiter $x \in S \setminus |c|$. Dann können wir $c \in C_1(S \setminus \{x\})$ betrachten. Es gilt immer noch $\delta c = 0$, da aber nicht notwendig $r \in C_2(S \setminus \{x\})$ gilt, muß c nicht exakt sein.

Sei $r > 0$ so klein, daß $\overline{B(x, r)} \subset S$ gilt..

Satz 8.2. *Es gibt eine Zahl* $n \in \mathbb{Z}$ *derart, daß* $[c] = n[\partial\overline{B(x, r)}] \in H_1(S \setminus \{x\})$ *gilt.*

Wir werden diesen Satz erst in der algebraischen Topologie beweisen können. In der Tat ist die Zahl n sogar eindeutig. Dazu berechnen wir

$$\frac{n}{2\pi i}\int_{[\partial\overline{B(x,r)}]}\frac{dz}{z-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z-x}=n\ .$$

Die Zahl n heißt Umlaufzahl von c bezüglich x. Um keine unbewiesenen Tatsachen in unsere Definitionen einfließen zu lassen, machen wir die zweite Gleichung zur Definition. Sei $c\in C_1(S)$ ein exakter Zyklus und $x\in S\setminus\{|c|\}$.

Definition 8.3. *Wir definieren die **Umlaufzahl** $n_c(x)\in\mathbb{Z}$ durch*

$$n_c(x):=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{z-x}\ .$$

Der obige Satz zeigt, daß die Umlaufzahl eine topologische Eigenschaft von c und x ist.

Lemma 8.4. *Es gilt für alle $n\neq-1$*

$$\int_c(z-x)^n dz=0\ .$$

Proof. In der Tat ist nämlich $(z-x)^n dz=dF$ für $F(z):=\frac{1}{(n+1)}(z-x)^{n+1}$. Damit gilt

$$\int_c(z-x)^n dz=\int_c dF=\int_{\delta c}F=0\ .$$

□

Lemma 8.5. *Sei $c=\delta(r)$ mit $r\in C_2(S)$. Wenn $x\notin|r|$, dann gilt $n_c(x)=0$.*

Proof. Es gilt

$$n_c(x)=2\pi i\int_c\frac{dz}{z-x}=2\pi i\int_{\delta r}\frac{dz}{z-x}=0\ .$$

□

Satz 8.6 (Residuensatz)**.** *Sei $c\in C_1(S)$ ein exakter Zykus und α eine holomorphe 1-Form auf S mit isolierten Singularitäten, welche auf $|c|$ regulär ist. Dann gilt*

$$\int_c\alpha=2\pi i\sum_{x\in S\setminus|c|}n_c(x)\mathrm{res}_x(\alpha)\ ,$$

wobei in dieser Summe höchstens endlich viele Terme von Null verschieden sind.

Proof. Wir sehen zuerst ein, daß diese Summe endlich ist. Sei $c = \delta r$. Dann ist $|r|$ kompakt. Wenn $x \notin |r|$, dann gilt $c = \delta r$ in $C_2(S \setminus \{x\})$ und damit $n_c(x) = 0$. Folglich tragen nur die Punkte $x \in |r|$ zur Summe bei. Die Menge der Singularitäten der 1-Form α ist in S diskret und schneidet damit die kompakte Teilmenge $|r|$ in endlich vielen Punkten.

Sei M die endliche Menge der Singularitäten von α in $|r|$. Für $m \in M$ haben wir eine Entwicklung

$$\alpha(z) = \sum_{k<0} a(m)_k (z-m)^k dz + \sum_{k \geq 0} a(m)_k (z-m)^k dz = h(m) + \phi(m) \ .$$

Die Form $h(m)$ heißt Hauptteil von α in m und die Form $\phi(m)$ ist nahe m holomorph. In der Tat konvergiert die Reihe für $h(m)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{m\}$ lokal gleichmäßig und definiert eine dort holomorphe Funktion. Damit ist aber $\phi(m)$ auf $S \setminus F$ holomorph, wobei $F \subset S$ die Menge der Singularitäten von α bezeichnet. Beachte, daß $a(m)_{-1} = \mathrm{res}_m(\alpha)$ gilt.

Die 1-Form $\alpha - \sum_{m \in M} h(m) = \sum_{m \in M} \phi(m)$ ist dann auf $S \setminus \{F \setminus M\}$, also auch auf einer Umgebung von $|r|$, holomorph. Es gilt

$$\int_c (\alpha - \sum_{m \in M} h(m)) = \int_{\delta r} (\alpha - \sum_{m \in M} h(m)) = 0 \ .$$

Es gilt also mit Lemma 8.4

$$\int_c \alpha = \sum_{m \in M} \int_c h(m) = \sum_{m \in M} \mathrm{res}_m(\alpha) \int_c \frac{dz}{z-m} = 2\pi i \sum_{m \in M} \mathrm{res}_m(\alpha) n_c(m) = 2\pi i \sum_{x \in S \setminus |c|} n_c(x) \mathrm{res}_x(\alpha) \ .$$

Im letzten Schritt haben wir Lemma 8.5 angewendet. □

1. Wir wollen
$$\int_{\partial \overline{B(0,2)}} \frac{dz}{z^2 - 1}$$
berechnen. Die Pole des Integranden sind $z_\pm := \pm 1$ der Ordnung 1. Wir berechnen die Residuen. Dazu schreiben wir $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$. Es folgt $\mathrm{res}_1 \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}$ und $\mathrm{res}_{-1} \frac{dz}{z^2-1} = -\frac{1}{2}$. Es folgt
$$\int_{\partial \overline{B(0,2)}} \frac{dz}{z^2 - 1} = 0 \ .$$

2. Wir wollen
$$\int_{\partial \overline{B(0,2)}} \frac{e^z dz}{z^2 - 1}$$

berechnen. Die Pole des Integranden sind $z_\pm := \pm 1$ der Ordnung 1. Wir berechnen die Residuen. Dazu schreiben wir $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$. Es folgt $\mathrm{res}_1 \frac{dz}{z^2-1} = \frac{e}{2}$ und $\mathrm{res}_{-1}\frac{dz}{z^2-1} = -\frac{e^{-1}}{2}$. Es folgt

$$\int_{\partial \overline{B(0,2)}} \frac{e^z dz}{z^2-1} = \pi i (e^z - e^{-z}) \ .$$

3. Wir wollen

$$\int_{\partial \overline{B(0,2)}} \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+1)}$$

berechnen. Die Pole liegen in ± 1 und haben die Ordnung 2 in $z = 1$ und 1 in $z = -1$. Wir berechnen

$$\mathrm{res}_1 \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+1)} = (\frac{e^z}{(z+1)^2})'_{z=1} = \frac{e^z(z+1) - e^z}{(z+1)^2}_{z=1} = \frac{e}{4}$$

und $\mathrm{res}_{-1} \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{e^z}{(z-1)^2}_{z=-1} = \frac{e^{-1}}{4}$. Es folgt

$$\int_{\partial \overline{B(0,2)}} \frac{e^z dz}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{\pi i}{2}(e + e^{-1}) \ .$$

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und $c \in C_1(S)$ ein geschlossener Zyklus. Sei weiter $f \in \mathcal{M}(S)$ eine nichtverschwindende meromorphe Funktion ohne Singularitäten auf $|c|$. Aus 7.14.4 ziehen wir die folgende Konsequenz.

Folgerung 8.7. *Es gilt*

$$\int_c \frac{df}{f} = 2\pi i \sum_{x \in S} n_c(x) \nu_f(x) \ .$$

Mit dieser Formel kann man zum Beispiel Singularitäten in Bällen zählen. Wenn $\overline{B(x,r)} \subset S$ und f auf dem Rand dieses Balls keine Singularitäten hat, dann gilt

$$\int_{\partial \overline{B(x,r)}} \frac{df}{f} = 2\pi i \sum_{y \in B(x,r)} \nu_f(y) \ .$$

In der Tat ist $n_{\partial \overline{B(x,r)}}(y) = 1$ für alle $y \in B(x,r)$.

1. Für $0 < r \notin \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{\partial \overline{B(0,r)}} \frac{d\Gamma(z)}{\Gamma(z)} = -2\pi i (r+1) \ .$$

2. Es gilt

$$\int_{\partial \overline{B(0,(k+1/2)\pi)}} \cot(z) dz = 2\pi i (-1)^k$$

Eine offene Teilmenge $S \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Umgebung von ∞, wenn $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,R)} \subseteq S$ für ein genügend großes $R > 0$ gilt. Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ eine Umgebung von ∞ und α eine 1-Form auf S mit isolierten Sigularitäten, von denen höchstens endlich viele in einer eventuell kleineren Umgebung $W \subseteq S$ von ∞ liegen.

Sei $h : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ durch $h(z) := \frac{1}{z}$ gegeben. Es gibt dann einen Ball $B(0,r)$ derart, daß $h(B(0,r)) \subseteq S$ und die 1-Form $h^*\alpha$ isolierte Singularitäten auf $B(0,r)$ hat. Wir definieren

$$\mathrm{res}_\infty \alpha := \mathrm{res}_0 h^*\alpha \ .$$

Ist $\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n dz$ die Laurentreihe von α für große z, dann gilt

$$h^*\alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n} \frac{-dz}{z^2} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-2} dz \ .$$

Folglich gilt $-\mathrm{res}_\infty(\alpha) = a_{-1}$. In der Tat gilt $h(R^{-1}e^{2\pi i(-t)}) = Re^{2\pi it}$ und damit für genügend große R (so daß alle Singularitäten von α in $B(0,R)$ liegen)

$$h_*\partial\overline{B(0,R^{-1})} = -\partial\overline{B(0,R)}$$

und

$$\int_{-\partial\overline{B(0,R)}} \alpha = \int_{h_*\partial\overline{B(0,R^{-1})}} \alpha = \int_{\partial\overline{B(0,R^{-1})}} h^*\alpha = 2\pi i \mathrm{res}_0(h^*\alpha) = 2\pi i \mathrm{res}_\infty(\alpha) \ .$$

Lemma 8.8. *Sei α eine holomorphe 1-Form mit endlich vielen Singularitäten auf $\mathbb{C}$, dann gilt*

$$\sum_{x\in\mathbb{C}} \mathrm{res}_x(\alpha) + \mathrm{res}_\infty(\alpha) = 0 \ .$$

Proof. Sei $R > 0$ so groß, daß alle Singularitäten von α in $B(0,R)$ liegen. Dann gilt

$$\sum_{x\in\mathbb{C}} \mathrm{res}_x(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\overline{B(0,R)}} \alpha = -\mathrm{res}_\infty(\alpha) \ .$$

□

1. Sei $p \in \mathbb{C}[z]$. Dann ist $\mathrm{res}_\infty(pdz) = 0$.

2. Sei $p \in \mathbb{C}[z]$, $p = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \cdots + p_0$. Dann gilt $\mathrm{res}_\infty \frac{pdz}{z^k} = -p_{k-1}$.

3. Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom der Ordnung n (mit $p_n \neq 0$). Dann gilt

$$\mathrm{res}_\infty \frac{dp}{p} = -n \ .$$

In der Tat ist $h^* \frac{dp}{p} = \frac{d(h^*p)}{h^*p}$ und h^*p hat in $z = 0$ einen Pol der Ordnung n. Oder man sieht nochmal ein, daß p genau n Nullstellen (mit Vielfachheit) in $\mathbb{C}$ hat, also

$$\sum_{x \in \{p=0\}} \nu_p(x) = n$$

gilt.

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(S)$ nirgends konstant und $w \in \mathbb{C}$. Die Zahl $k := \nu_{f-w}(x) \in \mathbb{N}$ heißt Vielfachheit der w-Stelle x.

Satz 8.9 (Rouché)**.** *Es gibt eine Umgebung $W \subseteq \mathbb{C}$ von w und eine Umgebung $V \subseteq S$ von x derart, daß $W \subseteq f(V)$ und für jeden Wert $w' \in W$ die Menge $f^{-1}(w) \cap V$ aus genau k Punkten besteht.*

Proof. Da f nicht konstant ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, daß $\overline{B(x, \epsilon)}$ außer eventuell den Punkt x keineNullstellen von f' und w-Stellen von f enthält. Wir setzen $V := B(x, \epsilon)$. Die Menge $|f_* \partial \overline{B(x, \epsilon)}|$ enthält w nicht und ist kompakt und damit abgeschlossen. Sei $W \subset \mathbb{C} \setminus |f_* \partial \overline{B(x, \epsilon)}|$ diejenige Zusammenhangskomponente welche w enthält.

Für $w' \in W$ ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(x,\epsilon)}} \frac{df}{f - w'} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(x,\epsilon)}} f^*(\frac{dz}{z - w'}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f_* \partial \overline{B(x,\epsilon)}} \frac{dz}{z - w'} = n_{f_* \partial \overline{B(x,\epsilon)}}(w')$$

die Anzahl der w'-Stellen gezählt mit der Vielfachheit. Die rechte Seite zeigt, daß diese Zahl für alle $w' \in W$ die gleiche ist wie für $w' = w$, nämlich k. Wegen $f'(z) \neq 0$ für $w \neq w'$ haben die w'-Stellen mit $w' \neq w$ die Vielfachheit 1. □

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(S)$ nirgends konstant.

Folgerung 8.10. *Das Bild $f(S) \subseteq \mathbb{C}$ is offen.*

Proof. Ist $w = f(x)$ für $x \in S$. Es gibt eine Umgebung W von w derart, daß $f^{-1}(y)$ genau $\nu_{f-w}(x) \neq 0$ Punkte enthält. Deshalb gilt $W \subseteq f(S)$. □

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(S)$, $x \in S$ und $w = f(x)$.

Folgerung 8.11. *Genau dann, wenn $f'(x) \neq 0$ ist, dann gibt es Umgebungen $V \subseteq S$ von x und $W \subseteq \mathbb{C}$ von w derart, daß $f : V \to W$ eine Bijektion ist.*

Proof. Wenn es eine solche Bijektion gibt, dann ist die Vielfachheit der w-Stelle x gleich 1 und deshalb $f'(x) \neq 0$.

Wenn $f'(x) \neq 0$ ist, dann wählen wir zunächst W, V wie in Lemma 8.9. Dann ersetzen wir V durch $V := f^{-1}(W)$. □

1. Die Abbildung z^k hat eine Nullstelle der Vielfachheit k. In diesem Fall hat jedes $z \neq 0$ genau k verschiedene Urbilder.
2. Die Funktion e^z hat in 0 eine 1-Stelle der Vielfachheit 1. Jeder Punkt in $B(1, 1/10)$ hat genau ein Urbild in $B(0, 1)$. In $B(0, 10)$ gibt es aber mehrere Urbilder, etwa gilt auch $e^{2\pi i} = 1$.

9 Integralberechnungen mit dem Residuensatzes

Das Integral
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 3} dx$$
kann man wie folgt berechnen. Wir setzen
$$\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} - e^{-it}) , \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) .$$
Wir setzen weiter $e^{it} = z$ und betrachten die 1-Form[9]
$$h(z) = \frac{\frac{1}{2}(z + z^{-1})}{\frac{1}{2i}(z - z^{-1}) + 3} \frac{dz}{iz} .$$
Dann gilt
$$\int_{\partial \overline{B(0,1)}} h = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 3} dx .$$
Wir formen um
$$h(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3 - z + 6iz^2} dz .$$

[9] $dz = ie^{it}dt$, also $dt = \frac{dz}{iz}$

Wir berechnen nun Nullstellen des Nenners. Eine ist $z = 0$. Es bleiben die Nullstellen von $z^2+6iz-1$, nämlich $-3i \pm \sqrt{-9+1} = i(-3 \pm \sqrt{8})$. Davon liegt $i(\sqrt{8}-3)$ im Einheitsball. Wir berechnen jetzt die Residuen. Wir erhalten

$$\mathrm{res}_0 h = -1$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{i(\sqrt{8}-3)} h &= \frac{z^2+1}{z(z+i(3+\sqrt{8}))}_{|z=i(\sqrt{8}-3)} \\
&= \frac{-(\sqrt{8}-3)^2+1}{i(\sqrt{8}-3)(i(\sqrt{8}-3)+i((3+\sqrt{8}))} \\
&= \frac{-8+6\sqrt{8}-9+1}{i(\sqrt{8}-3)(2i\sqrt{8})} \\
&= \frac{-16-12\sqrt{2}}{-12\sqrt{2}-16} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3} dx = 2\pi i(1-1) = 0 \ .$$

Es gilt auch

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)+3} = \ln(\sin(x)+3)'$$

und damit zum Test

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3} dx = \ln(\sin(x)+3)|_0^{2\pi} = 0 \ .$$

Diese Methode funktioniert allgemein. Sei $R(x,y)$ eine rationale Funktion in x, y, also von der Form $\frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{C}[x,y]$. Wir nehmen an, daß $R(\sin(t), \cos(t))$ auf $[0, 2\pi]$ keine Singularitäten hat. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\sin(x), \cos(x)) dx = \int_{\partial \overline{B(0,1)}} R(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}) \frac{dz}{iz} \ .$$

Das rechte Integral läßt sich mit dem Residuensatz ausrechnen. Hier ist ein zweites Beispiel. Sei $a > 1$. Wir rechnen

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(t)} = \int_{\partial \overline{B(0,1)}} \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+z^{-1})} \frac{dz}{iz} = -2i \int_{\partial \overline{B(0,1)}} \frac{dz}{2az+z^2+1} \ .$$

Die Nullstellen des Nenners sind

$$-a \pm \sqrt{a^2 - 1}\ .$$

Davon liegt $-a + \sqrt{a^2-1}$ im Einheitskreis. Das Residum des Integranden ist

$$\frac{-2i}{(-a + \sqrt{a^2-1}) - (-2a - \sqrt{a^2-1})} = \frac{-i}{\sqrt{a^2-1}}\ .$$

Damit ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\ .$$

Wir wollen nun das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{x^4+1} dx$$

berechnen. Da die Ordnung des Nenners um zwei größer als die des Zählers ist, konvergiert dieses Integral. Sei $c_R : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch $c_R(t) := 2Rt - R$ gegeben.

$$\int_{-R}^{R} \frac{1+x}{x^4+1} dx = \int_{c_R} \frac{1+x}{x^4+1} dx$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{x^4+1} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{c_R} \frac{1+x}{x^4+1} dx\ .$$

Wir betrachten nun $b_R : [0,1] \to \mathbb{C}$, $b_R(t) = Re^{\pi i t}$. Dieser Weg ist der Kreisbogen vom Radius R von R nach $-R$ mit Zentrum 0. Es gilt

$$\left|\int_{b_R} \frac{1+x}{x^4+1} dx = \right| - \int_0^1 \frac{1 - Re^{-\pi i t}}{R^4 e^{-4\pi i t} + 1} R\pi i e^{-\pi i t} dt| \leq \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{\pi i R(1 - Re^{-\pi i t})}{R^4 e^{-4\pi i t} + 1}\right|\ .$$

Nun gilt

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{\pi i R(1 - Re^{-\pi i t})}{R^4 e^{-4\pi i t} + 1}\right| = 0\ .$$

Damit folgt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{b_R} \frac{1+x}{x^4+1} dx = 0$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{x^4+1} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{c_R + b_R} \frac{1+x}{x^4+1} dx\ .$$

Nun ist $\delta(c_R + b_R) = 0$ und $\frac{1+x}{x^4+1} dx$ hat isolierte Singularitäten in $\mathbb{C}$. Die Nullstellen von x^4+1 sind durch ξ^{2n+1}, $n = 0,1,2,3$ mit $\xi = e^{\frac{2\pi i}{8}}$ gegeben. In der Tat ist nämlich

$(e^{\frac{(2n+1)2\pi i}{8}})^4 = e^{\pi i} = -1$. Davon liegen ξ und ξ^3 in der oberen Halbebene und ξ^5, ξ^7 in der unteren. Es gilt für die Umlaufzahlen

$$n_{c_R+b_R}(\xi^n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n = 1,3 \\ 0 & n = 5,7 \end{array} \right\}$$

falls $R > 1$ ist. Daraus folgt

$$\int_{c_R+b_R} \frac{1+x}{x^4+1} dx = 2\pi i(\mathrm{res}_\xi + \mathrm{res}_{\xi^3})(\frac{1+x}{x^4+1}dx) \ .$$

Wir schreiben

$$x^4 + 1 = (x-\xi)(x-\xi^3)(x-\xi^5)(x-\xi^7) \ .$$

Dann ist

$$\mathrm{res}_\xi \frac{1+x}{x^4+1}dx = \frac{1+\xi}{(\xi-\xi^3)(\xi-\xi^5)(\xi-\xi^7)} = \frac{1+\xi}{\xi^3(1-\xi^2)(1-\xi^4)(1-\xi^6)} = \frac{\xi^5+\xi^6}{4}$$

$$\mathrm{res}_{\xi^3} \frac{1+x}{x^4+1}dx = \frac{1+\xi^3}{(\xi^3-\xi)(\xi^3-\xi^5)(\xi^3-\xi^7)} = \frac{1+\xi^3}{\xi^3(1-\xi^2)(1-\xi^2)(1-\xi^4)} = \frac{\xi^5+1}{-4i} \ .$$

Wir summieren und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{c_R+b_R} \frac{1+x}{x^4+1} dx &= 2\pi i \frac{i(\xi^5+\xi^6) - \xi^5 - 1}{4i} \\ &= \pi \frac{\xi^7 + 1 - \xi^5 - 1}{2} \\ &= \pi \frac{1 - i - (-1-i)}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ . \end{aligned}$$

Diese Methode funktioniert ganz allgemein. Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ mit $\mathrm{ord}(p) + 2 \leq \mathrm{ord}(q)$ derart, daß q keine reellen Nullstellen hat. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{x\in\mathbb{C} \ ,\mathrm{Re}(x)>0} \mathrm{res}_x(\frac{pdx}{q}) = -2\pi i \sum_{x\in\mathbb{C} \ ,\mathrm{Re}(x)<0} \mathrm{res}_x(\frac{pdx}{q}) \ .$$

In der Tat ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{c_R} \frac{p(x)}{q(x)} dx \ ,$$

$$\sup_{|x|=R} |\frac{p(x)}{q(x)}| \leq MR^{-2}$$

für große R und damit

$$\lim_{R\to\infty} \int_{b_R} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 0$$

und deshalb

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{c_R+b_R} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{x\in\mathbb{C}\ ,\mathrm{Re}(x)>0} \mathrm{res}_x(\frac{pdx}{q}) \ .$$

Die andere Formel folgt z.B. aus Lemma 8.8, oder man ersetze b_R durch $\bar{b}_R$.

In der Fourieranalysis muß man of Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)} \tag{3}$$

ausrechnen, wobei λ reell ist, $p, q \in \mathbb{C}[z]$ mit $\mathrm{ord}(p) + 2 \leq \mathrm{ord}(q)$ gilt und q keine reellen Nullstellen auf $\mathbb{C}$ hat. Es gilt immer noch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{c_R} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)} dx \ .$$

Wegen $|e^{i\lambda x}| = e^{-\lambda \mathrm{Im}(x)}$ gilt für $\lambda > 0$

$$\sup_{|b_R|} |\frac{p(x)}{q(x)}| \leq MR^{-2} \ .$$

Damit ist immer noch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{x\in\mathbb{C}\ ,\mathrm{Re}(x)>0} \mathrm{res}_x(\frac{p(z)e^{i\lambda z}dz}{q(z)}) \ .$$

Falls $\lambda < 0$ ist, gilt

$$\sup_{|\bar{b}_R|} |\frac{p(x)}{q(x)}| \leq MR^{-2} \ .$$

Damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)} dx = -2\pi i \sum_{x\in\mathbb{C}\ ,\mathrm{Re}(x)<0} \mathrm{res}_x(\frac{p(z)e^{i\lambda z}dz}{q(z)}) \ .$$

Als Beispiel berechnen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}dx}{x^2+1} \ .$$

Es gilt wegen $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

$$\mathrm{res}_{\pm i} \frac{e^{i\lambda x}dx}{x^2+1} = \frac{e^{\mp\lambda}}{\pm 2i}$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}dx}{x^2+1} = \begin{cases} \pi e^{-\lambda} & \lambda > 0 \\ \pi e^{\lambda} & \lambda < 0 \end{cases}$$

Wenn $\mathrm{ord}(p) = \mathrm{ord}(q) - 1$ ist, dann konvergiert das unbestimmte Integral (3) nicht absolut Wir zeigen aber, daß es immer noch konvergent ist im Sinne daß

$$\lim_{R_1, R_2 \to \infty} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{p(x) e^{i\lambda x}}{q(x)}$$

existiert. Für $S > 0$ betrachten wir Wege

$$c_{R_1,R_2}(t) := -R_1 + (R_2 - R_1)t \ , \quad a_{R_1,S}(t) := -R_1 + iS - iSt$$

$$b_{R_1,R_2,S}(t) := R_2 + iS + (-R_1 - R_2)t \ , \quad d_{R_2,S}(t) := R_2 + iSt \ .$$

Dann ist $u_{R_1,R_2,S} := c_{R_1,R_2} + a_{R_1,S} + b_{R_1,R_2,S} + d_{R_2,S}$ geschlossen. Für genügend große S, R_1, R_2 gilt

$$\int_{u_{R_1,R_2,S}} \frac{p(x) e^{i\lambda x}}{q(x)} = \sum_{x \in \mathbb{C} \ , \mathrm{Re}(x) > 0} \mathrm{res}_x\left(\frac{p(z) e^{i\lambda z} dz}{q(z)}\right) \ .$$

Es gilt für $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

$$\sup_{|b_{R_1,R_2,S}|} \left|\frac{p(z) e^{i\lambda z}}{q(z)}\right)| \leq M e^{-\lambda S} S^{-1}$$

und damit

$$\left|\int_{b_{R_1,R_2,S}} \frac{p(z) e^{i\lambda z} dz}{q(z)}\right| \leq M(R_1 + R_2) S^{-1} e^{-\lambda S} \ .$$

Weiter gilt

$$\left|\frac{p(a_{R_1,S}(t)) e^{i\lambda a_{R_1,S}(t)}}{q(a_{R_1,S}(t))}\right)| \leq \sup_{|a_{R_1,S}|} \left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| e^{-St} \leq M R_1^{-1} e^{-St}$$

und damit

$$\left|\int_{a_{R_1,S}} \frac{p(x) e^{i\lambda x} dx}{q(x)}\right| \leq M R_1^{-1} \ .$$

Analog erhalten wir

$$\left|\int_{d_{R_2,S}} \frac{p(x) e^{i\lambda x} dx}{q(x)}\right| \leq M R_2^{-1} \ .$$

Die Konstante M hängt hier nicht von S, R_1, R_2 ab. Wir bilden nun

$$\lim_{R_1, R_2 \to \infty} \lim_{S \to \infty} \int_{u_{R_1,R_2,S}} \frac{p(x) e^{i\lambda x}}{q(x)} = \lim_{R_1, R_2 \to \infty} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{p(x) e^{i\lambda x}}{q(x)} \ .$$

Folglich gilt für $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x) e^{i\lambda x}}{q(x)} = \sum_{x \in \mathbb{C} \ , \mathrm{Re}(x) > 0} \mathrm{res}_x\left(\frac{p(z) e^{i\lambda z} dz}{q(z)}\right) \ .$$

Analog erhält man für $\lambda < 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)e^{i\lambda x}}{q(x)} = - \sum_{x\in\mathbb{C}\ ,\mathrm{Re}(x)<0} \mathrm{res}_x(\frac{p(z)e^{i\lambda z}dz}{q(z)}) \ .$$

Als Beispiel berechnen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}xdx}{x^2+1} = i\pi e^{-\lambda} \ .$$

Diese Techniken kann man weiter verfeinern. Wir berechnen etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)dx}{x} \ .$$

Der Integrand ist in $x = 0$ regulär. Wir ersetzen den Weg c_{R_1,R_2} durch die homologe Kette $c_{R_1,\epsilon} + c_{R_2,\epsilon} + f_\epsilon$, wobei

$$c_{R_1,\epsilon}(t) = -R_1 + (-\epsilon + R_1)t \ , \quad c_{R_2,\epsilon}(t) = \epsilon + t(R_2 - \epsilon) \ , \quad f_\epsilon(t) = -\epsilon e^{\pi it} \ .$$

Dann ist nach dem Integralsatz

$$\int_{c_{R_1,\epsilon}+c_{R_2,\epsilon}+f_\epsilon} \frac{\sin(x)dx}{x} = \int_{c_{R_1,R_2}} \frac{\sin(x)}{x} \ .$$

Wir schreiben nun $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Wir setzen

$$\int_{c_{R_1,\epsilon}+c_{R_2,\epsilon}+f_\epsilon} \frac{\sin(x)dx}{x} = \int_{c_{R_1,\epsilon}+c_{R_2,\epsilon}+f_\epsilon} \frac{e^{ix}dx}{2ix} - \int_{c_{R_1,\epsilon}+c_{R_2,\epsilon}+f_\epsilon} \frac{e^{-ix}dx}{2ix} \ .$$

Für den ersten Term erhalten wir wie oben

$$\lim_{R_1,R_2\to\infty} \int_{c_{R_1,\epsilon}+c_{R_2,\epsilon}+f_\epsilon} \frac{e^{ix}dx}{2ix} = \lim_{R_1,R_2\to\infty} \lim_{S\to\infty} \int_{a_{R_1,S}+d_{R_2,S}+b_{R_1,R_2,S}+c_{R_1,\epsilon}+c_{R_2,\epsilon}+f_\epsilon} \frac{e^{ix}dx}{2ix} = 0 \ .$$

Auf der andere Seite

$$\begin{aligned}
\lim_{R_1,R_2\to\infty} \int_{c_{R_1,\epsilon}+c_{R_2,\epsilon}+f_\epsilon} \frac{e^{-ix}dx}{2ix} &= \lim_{R_1,R_2\to\infty} \lim_{S\to\infty} \int_{\bar{a}_{R_1,S}+\bar{d}_{R_2,S}+\bar{b}_{R_1,R_2,S}+c_{R_1,\epsilon}+c_{R_2,\epsilon}+f_\epsilon} \frac{e^{ix}dx}{2ix} \\
&= -2\pi i \mathrm{res}_0 \frac{e^{-ix}dx}{2ix} \\
&= -\pi
\end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)dx}{x} = \pi$$

gilt.

Ähnliche Methoden funktionieren auch für andere Beispiele, etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x+i}dx}{x^2+1} \ .$$

Wir betrachten hier die Quadratwurzel auf $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ mit $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$. Wir haben die Abschätzung

$$|\frac{\sqrt{x+i}dx}{x^2+1}| \le MR^{-\frac{3}{2}}$$

für große x. Deshalb konvergiert dieses Integral. Wir schreiben wieder wegen

$$|\int_{b_R} \frac{\sqrt{x+i}dx}{x^2+1}| \le MR^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x+i}dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{c_R} \frac{\sqrt{x+i}dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{c_R+b_R} \frac{\sqrt{x+i}dx}{x^2+1} \ .$$

Es gilt

$$\int_{c_R+b_R} \frac{\sqrt{x+i}dx}{x^2+1} = 2\pi i \mathrm{res}_i \frac{\sqrt{x+i}dx}{x^2+1} = 2\pi i \frac{\sqrt{2i}}{2i} = \pi(1+i) \ .$$

Also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x+i}dx}{x^2+1} = \pi(1+i) \ .$$

10 Der Riemannsche Abbildungssatz

Satz 10.1. *Sei $S \subset \mathbb{C}$ eine echte offene Teilmenge und $H_1(S) = 0$. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung*

$$f : S \xrightarrow{\sim} B(0,1) \ .$$

Proof.

Lemma 10.2. *Ist $f : S \to T$ eine bijektive holomorphe Abbildung zwischen zwei offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$, dann ist f biholomorph.*

Proof. Es gibt eine inverse Abbildung $f^{-1} : T \to S$. Wir müssen einsehen, daß f^{-1} auch holomorph ist. Dazu benutzen wir den Satz über die Umkehrfunktion. Wir müssen also einsehen, daß $f'(z) \neq 0$ ist für alle $z \in S$. In der Tat, wäre $f'(z) = 0$, dann wäre $\nu_{f-f(z)}(z) \ge 2$ und f nach dem Satz 8.9 in einer Umgebung von z nicht injektiv. □

Lemma 10.3. *Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei $f \in \mathcal{O}(S)$ und (f_n) eine lokal gleichmäßig gegen f konvergente Folge in $\mathcal{O}(S)$ derart, daß $f_n : S \to f_n(S)$ biholomorph ist. Dann ist f entweder konstant oder $f(S) \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : S \to f(S)$ biholomorph.*

Proof. Sei f nicht konstant. Dann ist $f(S)$ nach 8.10 offen. Wir zeigen, daß f injektiv ist und wenden Lemma 10.2 an. Seien $z_0, z_1 \in S$ und $f(z_0) = f(z_1) = w$. Die Funktion $f - w$ hat Nullstellen in z_0, z_1 und ist nicht konstant. Es gibt also ein $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}|z_0 - z_1|)$ derart, daß $f(z) - w \neq 0$ ist, wenn $0 < |z - z_i| < \epsilon$. Es gilt

$$\nu_f(z_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(z_i,\epsilon)}} \frac{df}{f - w} \ .$$

Da mit $f_n \to f$ auch $f_n' \to f'$ lokal gleichmäßig gilt, finden wir ein $n > 0$ derart, daß $f_n - w$ auf $\partial \overline{B(z_i, \epsilon)}$ keine Nullstelle hat und

$$|\nu_f(z_i) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(z_i,\epsilon)}} \frac{df_n}{f_n - w}| < 1$$

ist. Da $\nu_f(z_i) \neq 0$ ist, gilt$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B(z_i,\epsilon)}} \frac{df_n}{f_n - w} \neq 0$. Damit hat f_n sowohl in $B(z_0, \epsilon)$ also auch $B(z_1, \epsilon)$ eine w-Stelle. Das ist aber nicht möglich, daß f_n injektiv und $B(z_1, \epsilon) \cap B(z_0, \epsilon) = \emptyset$ ist.

Eine Drehung ist eine Abbildung der Form $z \mapsto \lambda z$ mit $|\lambda| = 1$.

Lemma 10.4 (Schwarz)**.** *Sei $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorph mit $f(0) = 0$ und keine Drehung. Dann gilt $f'(0)| < 1$ und $|f(z)| < |z|$ für alle $z \in B(0,1)$.*

Proof. Da $f(0) = 0$ ist, können wir die Funktion $g(z) := z^{-1} f(z)$ holomorph in Null fortsetzen. Es gilt für $0 < r < 1$ und $|z| = r$, daß $|g(z)| \leq \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r}$. Nach dem Maximumprinzip gilt $|g(z)| < \frac{1}{r}$ für $|z| \leq r$. Für $r \to 1$ erhalten wir $|g(z)| \leq 1$ für alle $|z| < 1$. Wenn $g(z) = 1$ für ein $z \in B(0,1)$, dann wäre g nach dem Maximumprinzip konstant und f eine Drehung. Also gilt $g(B(0,1)) \subseteq B(0,1)$. Aus $f(z) = zg(z)$ folgt damit $|f(z)| \leq |z|$. Weiter folgt $f'(0) = g(0) < 1$. □

Lemma 10.5 (Satz von Montel)**.** *Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen, $C < \infty$ und (f_n) eine Folge in $\mathcal{O}(S)$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sup_S |f_n| < C$. Dann gibt es eine lokal gleichmäßig (gegen eine holomorphe Funktion) konvergente Teilfolge*

Proof. Sei $K \subset S$ kompakt. Sei $\epsilon > 0$ derart, daß für jedes $x \in K$ gilt $B(x, \epsilon) \subseteq S$. Dann gilt nach Lemma 5.14 für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K$

$$|f'(x)| \leq C\epsilon^{-1} .$$

Damit ist die Folge $(f_{n|K}) \in C(K)$ gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli besitzt sie eine auf K gleichmäßig konvergente Teilfolge. Wir schöpfen nun S durch eine Folge kompakter Teilmengen aus und finden die gesuchte Folge als Diagonalfolge. Eine lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen konvergiert gegen eine holomorphe Funktion (5.13). □

Für jeden Punkt $a \in B(0,1)$ haben wir eine biholomorphe Abbildung $f_a : B(0,1) \to B(0,1)$ mit $f_a(0) = -a$ und $f_a(a) = 0$

$$f_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} .$$

Es gilt $f_{-a} = f^{-1}$. In der Tat ist für $z \in B(0,1)$ auch $|\bar{a}z| < 1$ und deshalb f_a auf $B(0,1)$ holomorph. Es gilt $f_a(a) = 0$ und $f_a(0) = -a$. Weiter sehen wir

$$\begin{aligned} |1-\bar{a}z|^2 - |z-a| &= (1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2) - (|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2) \\ &= 1 - |z|^2 - |a|^2 + |a|^2|z|^2) \\ &= (1-|z|^2)(1-|a|^2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt für $|z| < 1$ auch $|f_a(z)| < 1$ und $f_a(B(0,1)) \subseteq B(0,1)$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} f_{-a}(f_a(z)) &= \frac{\frac{z-a}{1-\bar{a}z} + a}{1 + \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\bar{a}} \\ &= \frac{\frac{z-a+a-|a|z}{1-\bar{a}z}}{\frac{1-\bar{a}z+\bar{a}z-|a|}{1-\bar{a}z}} \\ &= z . \end{aligned}$$

Damit ist $f_a : B(0,1) \to B(0,1)$ injektiv und $f_{-a} : B(0,1) \to B(0,1)$ surjektiv. Durch Vertauschen der Rollen von a und $-a$ schließen wir, daß $f_a : B(0,1) \to B(0,1)$ bijektiv und damit biholomorph ist. □

Lemma 10.6. *Sei $S \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ zusammenhängend und gelte $H_1(S) = 0$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $\surd : S \to \mathbb{C}$ mit $\surd(z)^2 = z$ für jedes $z \in S$. Eine solche Funktion erfüllt weiter*

1. $\surd : S \to \surd(S)$ *ist biholomorph.*
2. $0 \notin \surd(S)$
3. $\mathbb{C} \setminus \surd(S)$ *hat innere Punkte.*

Proof. Die Funktion $h(z) := \frac{1}{z}$ ist auf S holomorph. Wegen $H_1(S) = 0$ hat sie eine Stammfunktion $H(z)$. Es gilt

$$(\frac{e^{H(z)}}{z})' = \frac{e^{H(z)}H'(z)z - e^{H(z)}}{z^2} = 0 \ .$$

Damit ist $e^{H(z)} = c$. Wir normieren die Stammfunktion H so, daß $e^{H(z)} = z$ in einem Punkt von S gilt. Da S zusammenhängend ist, gilt diese Identität dann auf ganz S.

Wir definieren nun

$$\sqrt{z} := e^{\frac{1}{2}H(z)} \ .$$

Dann gilt $\sqrt{z}^2 = (e^{\frac{1}{2}H(z)})^2 = e^{H(z)} = z$.

Für 1 genügt es zu zeigen, daß $\surd$ injektiv ist. Sei $\sqrt{z} = \sqrt{w}$. Dann gilt $z = \sqrt{z}^2 = \sqrt{w}^2 = w$.

Die Eigenschaft 2 ist klar.

Wir zeigen 3. Da $\sqrt{S}$ nicht leer und offen ist, gilt dies auch für $-\sqrt{S}$. Wir zeigen, daß $\sqrt{S} \cap -\sqrt{S} = \emptyset$. Die Punkte von $-\sqrt{S}$ sind also innere Punkte von $\mathbb{C} \setminus \sqrt{S}$. In der Tat, wäre $w \in \sqrt{S} \cap -\sqrt{S}$, dann wäre auch $-w \in \sqrt{S}$. Sei $w = \surd(z_0)$ und $-w = \surd(z_1)$. Dann wäre $z_0 = w^2 = (-w)^2 = z_1$. Daraus und der Injektivität von $\surd$ würde aber $w = 0$ folgen, was wir schon ausgeschlossen haben. $\square$

Lemma 10.7. *Sei $S \subset \mathbb{C}$ eine echte offene Teilmenge und $H_1(S) = 0$. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung $f : S \to f(S) \subset B(0,1)$ mit $0 \in f(S)$.*

Proof. Sei $a \in \mathbb{C} \setminus S$ und $T_a(z) = z - a$. Dann gilt $0 \notin T_a(S)$. Es gibt eine biholomorphe Abbildung $\surd : T_a(S) \to \surd(T_a(S))$, und $\mathbb{C} \setminus \surd(T_a(S))$ hat einen innneren Punkt w. Sei $r > 0$ derart, daß $B(w,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \surd(T_a(S))$. Dann betrachten wir $h(z) := \frac{r}{2(z-w)}$, eine Abbildung $h : \surd(T_a(S)) \to B(0,1)$. In der Tat gilt $|\frac{r}{2(z-w)}| \leq \frac{1}{2}$ und $h^{-1}(x) = \frac{r}{2x} + w$. Zuletzt wählen wir ein $b \in h(T_a(S))$. Wir setzen $f := T_{-b} \circ h \circ T_a$. Diese Abbildung hat die geforderten Eigenschaften. □

Wir müssen jetzt den Riemannschen Abbildungssatz nur noch für zusammenhängende offene Teilmengen $S \subset B(0,1)$ mit $H_1(S) = 0$ zeigen. Sei $\mathcal{M}$ die Menge der biholomorphen Abbildungen $f : S \to f(S) \subseteq B(0,1)$ mit $f(0) = 0$. Wir setzen

$$m := \sup_{f \in \mathcal{M}} |f'(0)| \in \bar{\mathbb{R}} \ .$$

In der Tat gilt $|f'(0)| \leq 1$ für alle $f \in \mathcal{M}$ so daß $m \leq 1$ gilt.

Lemma 10.8. *Es gibt ein $f \in \mathcal{M}$ mit $f'(0) = m$.*

Proof. Wir wählen eine Folge (f_n) in $\mathcal{M}$ mit $|f_n'(0)| \to m$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, daß $\sup_S |f| \leq 1$. Nach dem Satz von Montel 10.5 können wir die Folge durch eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge ersetzen. Sei $f_n \to f \in \mathcal{O}(S)$. Da dann auch $f_n'(0) \to f'(0)$ gilt, gilt $f'(0) = c \neq 0$. Damit ist f nicht konstant und deshalb nach Lemma 10.3 auch biholomorph. Zunächst gilt $f_n(S) \subseteq B(0,1)$ und damit $f(S) \subseteq \overline{B(0,1)}$. Nun ist jedoch $f(S)$ offen. Daraus folgt sofort $f(S) \subseteq B(0,1)$. □

Lemma 10.9. *Ist $f \in \mathcal{M}$ und gilt $f'(0) = m$, dann ist $f(S) = B(0,1)$.*

Proof. Wir nehmen das Gegenteil an. Sei $a \in B(0,1) \setminus f(S)$. Dann ist $0 \notin f_a(f(S))$. Es gibt folglich eine biholomorphe Abbildung $\surd : f_a(f(S)) \to \surd(f_a(f(S)))$. Nun folgt aus $|w^2| < 1$ auch $|w| < 1$. Deshalb ist $\surd(f_a(f(S))) \subseteq B(0,1)$. Wir setzen $g := f_{\sqrt{-a}} \circ \surd \circ f_a \circ f$. Es gilt $g \in \mathcal{M}$. Sei $q(z) := z^2$ und $h := f_{-a} \circ q \circ f_{-\sqrt{-a}} : B(0,1) \to B(0,1)$. Die Abbildung $f_{-\sqrt{-a}} : B(0,1) \to B(0,1)$ hat eine Umgebung von 0 im Bild. Da q dort nicht injektiv ist, ist auch h nicht injektiv. Damit ist h keine Drehung und erfüllt $h(0) = 0$. Nach dem Schwarzschen Lemma 10.4 gilt $|h'(0)| < 0$. Es gilt weiter

$$h \circ g = f_{-a} \circ q \circ f_{-\sqrt{-a}} \circ f_{\sqrt{-a}} \circ \surd \circ f_a \circ f = f \ .$$

Folglich ist

$$m = |f'(0)| = |h'(0)||g'(0)|$$

und damit gilt $|g'(0)| > m$. Das ist aber nach Definition von m nicht möglich. $\square$

Wir können nun den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes beenden. Nach Lemma 10.8 finden wir ein $f \in \mathcal{M}$ mit $f'(0) = 0$. Nach Lemma 10.9 ist diese eine biholomorphe Abbildung von $S \subseteq B(0,1)$ auf $B(0,1)$. $\square$

11 Hauptteilverteilungen

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{M}(S)$. Sei $x \in S$ und

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-x)^n$$

die Laurententwicklung von f im Punkte x.

Definition 11.1. *Die (endliche) Summe*

$$H_x(f)(z) := \sum_{n<0} a_n (z-x)^n \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$$

heißt ***Hauptteil*** *von f. Ist $f = H_x$, dann nennen wir f einen Hauptteil in x.*

Definition 11.2. *Eine* ***Hauptteilverteilung*** *ist eine Familie $(h_x)_{x \in M}$ wobei $M \subset S$ eine diskrete Teilmenge und h_x ein Hauptteil in x ist.*

Satz 11.3 (Mittag-Leffler)**.** *Ist $(h_x)_{x \in M}$ eine Hauptteilverteilung auf $\mathbb{C}$, dann gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, welche auf $\mathbb{C} \setminus M$ holomorph ist und $H_x(f) = h_x$ für alle $x \in M$ erfüllt (genannt* ***Lösung der Hauptteilverteilung****).*

Proof. Ist M endlich, dann hat

$$f := \sum_{x \in M} h_x$$

die geforderten Eigenschaften. Wir nehmen nun an, daß M unendlich ist.

Wir können annehmen, daß $0 \notin M$ gilt. In der Tat, wenn $0 \in M$ ist, dann betrachten wir eine Lösung $\tilde{f}$ für für die Hauptteilverteilung $(h_x)_{x \in M \setminus \{0\}}$ und setzen $f := h_0 + \tilde{f}$.

Wir wählen eine Funktion $\epsilon : M \to (0,1)$ mit $\sum_{x \in M} \epsilon_x < \infty$. Sei P_x die Taylorreihe von h_x im Punkt 0 bis zur Ordnung $k_x \in \mathbb{N}$, welche wir so festlegen, daß

$$\sup_{B(0,\frac{|x|}{2})} |h_x - P_x| < \epsilon_x \ .$$

Dann betrachten wir

$$f := \sum_{x \in M} h_x - P_x \ . \tag{4}$$

Sei $R > 0$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge

$$M_R := \{x \in M | \frac{|x|}{2} \le R\} \ .$$

Es gilt

$$\sup_{B(0,R)} \sum_{x \in M \setminus M_R} |h_x - P_x| \le \sum_{x \in M} \epsilon_x < \infty \ .$$

Damit konvergiert die Summe $\sum_{x \in M \setminus M_R} (h_x - P_x)$ auf $B(0,R)$ absolut und gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion. Auf $B(0,R)$ ist damit

$$f = \sum_{x \in M_R} h_x - P_x + \sum_{x \in M \setminus M_R} h_x - P_x$$

eine wohldefinierte meromorphe Funktion.

Da R beliebig gewählt werden kann, erhalten wir $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, welche offensichtlich die vorgegebenen Hauptteile hat. $\square$

Zwei Lösungen derselben Hauptteilverteilung unterscheiden sich additiv durch eine ganze Funktion.

Wir betrachten jetzt ein interessantes Beispiel. Die Funktion $\pi \cot(\pi z)$ hat einfache Pole in den Punkte von $\mathbb{Z}$ mit dem Residuum 1. Es gilt also

$$H_n(\pi \cot(\pi z)) = \frac{1}{z - n} \ .$$

Die Taylorpolynome von $\frac{1}{x-n}$ im Punkt 0 sind

$$\frac{1}{n} \ , \quad \frac{1}{n} - \frac{z}{n^2} \ , \dots \ .$$

Die Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$$

konvergiert nirgends absolut. Wir versuchen eine Korrektur mit den konstanten Taylorpolynomen.

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}) \ .$$

Wegen $|\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}| = \frac{z}{|(z-n)n|}$ konvergiert diese Reihe nun für alle $z \notin \mathbb{Z}$. Folglich gilt

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}) + \phi(z)$$

für eine geeignete ganze Funktion ϕ. Wir bestimmen nun ϕ explizit. Wir differenzieren beide Seiten der Gleichung.

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} + \phi'(z) \ . \tag{5}$$

Die ganze Funktion $\phi'(z)$ ist periodisch, d.h. es gilt

$$\phi'(z+k) = \phi(z) \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Desweiteren ist sie auf $\{|\mathrm{Im}| \geq 1\}$ beschränkt. In der Tat gilt dies für die Summe wie auch für $\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2}$. Damit ist ϕ' beschränkt. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\pi^2}{\sin(\pi i t)^2} = 0 \ , \quad \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{it^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(it-n)^2} \right] = 0 \ .$$

Daraus folgt $\phi' = 0$. Wir schließen, daß

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}) + c$$

für eine Konstante c gilt. Nun ist aber $\pi\cot(\pi z)$ wie auch $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n})$ ungerade. Deshalb gilt $c = 0$. Wir erhalten die Formel

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}) \ .$$

Daraus können wie die Taylorreihe von der Kotangensfunktion ablesen. Wir fassen die

Terme mit $n, -n$ zusammen. Für $|z| < 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\frac{1}{z-n}-\frac{1}{n}) &= \sum_{n>0}(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}) \\
&= \sum_{n>0}\frac{2z}{z^2-n^2} \\
&= \sum_{n>0}\frac{-2z}{n^2}\frac{1}{1-\frac{z^2}{n^2}} \\
&= \sum_{n>0}\frac{-2z}{n^2}\sum_{k\geq 0}(\frac{z^2}{n^2})^k \\
&= -2z^{-1}\sum_{k\geq 1}\sum_{n>0}\frac{1}{n^{2k}}z^{2k}
\end{aligned}$$

Wir schließen mit $\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} n^{-s}$

$$\pi z\cot(\pi z) = 1 - 2\sum_{k\geq 1}\zeta(2k)z^{2k} \ .$$

Aus dieser Formel können wir die Werte der Riemannschen Zetafunktion bestimmen. Wir berechnen

$$\pi z\cot(\pi z) = 1 - \frac{\pi^2 z^2}{3} - \frac{\pi^4 z^4}{45} - \frac{2\pi^6 z^6}{945} + \dots \ .$$

Daraus folgt

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \ , \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \ , \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \ .$$

Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Definition 11.4. *Eine Nullstellenverteilung auf S ist eine Funktion $\nu : S \to \mathbb{N}_0$ derart, daß $\{\nu \neq 0\} \subset S$ diskret ist.*

Satz 11.5. *Für jede Nullstellenverteilung $\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{C}$ gibt es ein ganze Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit $\nu_f = \nu$.*

Proof. Sei $M := \{\nu \neq 0\}$. Dann ist $(\frac{\nu(x)}{z-x})_{x\in M}$ eine Hauptteilverteilung. Sei zunächst g eine Lösung dieser Hauptteilverteilung. Dann gilt für jeden Rand $c \in C_1(S)$ mit $M \cap |c| = \emptyset$ daß

$$\int_c g dz = 2\pi i \sum_{x\in M} n_c(x) \in 2\pi i\mathbb{N}_0 \ .$$

Sei $z_0 \in \mathbb{C}\setminus M$. Dann ist für jedes $z \in \mathbb{C}\setminus M$ und Weg c in $S\setminus M$ von z_0 nach z der Wert des Integrals $\int_c g dz$ bis auf Vielfache von $2\pi i$ wohlbestimmt. Folglich ist

$$f(z) := e^{\int_c g dz}$$

wohldefiniert. Diese Funktion löst die Differentialgleichung

$$\frac{df}{f} = g \ , \quad f(z_0) = 1 \ .$$

Die Funktion f ist also ganz und hat die vorgegebene Nullstellenverteilung. $\square$

Wir berechnen jetzt g und f expliziter. Wir nehmen zur Vereinfachung an, daß $z_0 = 0$. Das Taylorpolynom von $\frac{n}{z-x}$ ist

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{k!}{k!}\frac{z^k}{(-x)^{k+1}} = -\frac{1}{x}\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{x^k} \ .$$

In der Tat können wir

$$g(z) := \sum_{x\in M}\left(\frac{\nu(x)}{z-x} + \frac{\nu(x)}{x}\sum_{k=0}^{k_x}\frac{z^k}{x^k}\right)$$

setzen, wobei wir die ganzen Zahlen k_x geeignet wählen. Eine Stammfunktion ist

$$\sum_{x\in M}\left[\nu(x)[\ln(z-x) - \ln(x)] + \nu(x)\sum_{k=0}^{k_x}\frac{1}{k+1}\frac{z^{k+1}}{x^{k+1}}\right] \ ,$$

wobei wir hier mit $\ln(a)$ eine Zahl bezeichnen, die exponentiert a ergibt. Folglich

$$f(z) = \prod_{x\in M}\left[(\frac{z}{x} - 1)\exp\Big\{\sum_{k=0}^{k_x}\frac{1}{k+1}\frac{z^{k+1}}{x^{k+1}}\Big\}\right]^{\nu(x)} \ .$$

Wir betrachten nun die Γ-Funktion genauer. Bisher wissen wir, daß sie Pole erster Ordnung genau in den Punkten $-n$, $n\in\mathbb{N}_0$ hat. Folglich hat $\frac{1}{\Gamma(z)}$ genau dort Nullstellen welche alle die Vielfachheit 1 haben. Bisher wissen wir nicht, ob $\Gamma(z)$ Nullstellen hat. Wir werden dies aber im Verlauf der folgenden Betrachtungen einsehen.

Wir machen den Ansatz

$$g(z) := e^{h(z)}z\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$$

für eine Funktion mit Nullstellen erster Ordnung genau in den Punkten $-\mathbb{N}_0$. Wir untersuchen das Produkt auf Konvergenz. Der Logarithmus des Produktes ist die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{z}{n}) - \frac{z}{n} \ .$$

Es gilt nach der Taylorformel

$$\ln(1+x) = x + \frac{x^2 R(x)}{2} \ ,$$

wobei der Rest die Ungleichung

$$|R(x)| \leq \sup_{t\in[1,x]} |\ln^{(2)}(1+t)| \leq 1$$

erfüllt. Also ist

$$|\ln(1+\frac{z}{n}) - \frac{z}{n}| \leq \frac{|z|^2}{2n^2}$$

und das zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Summe und damit des Produktes.

Die Γ-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \ , \quad \Gamma(1) = 1 \ .$$

Wir versuchen jetzt h so zu bestimmen, daß $\frac{1}{g(z)}$ die gleichen Identitäten erfüllt:

$$zg(z+1) = g(z) \ , \quad g(1) = 1 \ .$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\frac{zg(z+1)}{g(z)} &= e^{h(z+1)-h(z)}(z+1)\frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z+1}{n})e^{-\frac{z+1}{n}}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}} \\
&= e^{h(z+1)-h(z)}(z+1)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n+z+1}{n+z}e^{-\frac{1}{n}} \\
&= e^{h(z+1)-h(z)} \lim_{m\to\infty}(m+z+1)e^{-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}} \\
&= e^{h(z+1)-h(z)} \lim_{m\to\infty} me^{-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}} \ .
\end{aligned}$$

Der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \ln m$$

(der nach der Rechnung existieren muß) heißt **Eulersche Konstante**. Folglich gilt

$$\frac{zg(z+1)}{g(z)} = e^{-\gamma}e^{h(z+1)-h(z)} \ .$$

Wir wollen also

$$\gamma = h(z+1) - h(z)$$

erfüllen. Wir wählen $h(z) = \gamma z - c$ und bestimmen c derart, daß

$$g(1) = 1 = \lim_{z\to 0}\frac{g(z)}{z} = e^{c} \ .$$

Wir schließen, daß $c = 0$.

Sei

$$\Gamma_k(z) := e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_{n=1}^{k} (1 + \frac{z}{n})^{-1} e^{\frac{z}{n}} \ .$$

Wir formen um:

$$\begin{aligned}
\Gamma_k(z) &= \frac{k! e^{z(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \gamma)}}{z(z+1)\dots(z+k)} \\
&= \frac{k! e^{z\ln(k) + z(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \gamma - \ln(k))}}{z(z+1)\dots(z+k)} \\
\lim_{k\to\infty} \Gamma_k(z) &= \lim_{k\to\infty} \frac{k! k^z}{z(z+1)\dots(z+k)} \ .
\end{aligned}$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_0^k (1 - \frac{t}{k})^k t^{z-1} dt = \frac{k! k^z}{z(z+1)\dots(z+k)} \ .$$

Wir betrachten die Folge

$$f_k(t) = \chi_{[0,k]}(t)(1 - \frac{t}{k})^k t^{z-1}$$

von Funktionen auf $[0, \infty)$. Diese Folge konvergiert punktweise gegen $e^{-t} t^{z-1}$. Für $\mathrm{Re}(z) \geq 1$ gilt für alle $t \in [0, \infty)$

$$|f_k(t)| \leq t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t} \ .$$

Die rechte Seite ist also eine integrierbare Majorante. Nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz gilt

$$\lim_{k\to\infty} \Gamma_k(z) = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty f_k(t) dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z) \ .$$

Wir erhalten also die Darstellung der Γ-Funktion als unendliches Produkt

$$\Gamma(z) = e^{-\gamma z} z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n})^{-1} e^{\frac{z}{n}} \ .$$

Wir sehen insbesondere, daß die Γ-Funktion keine Nullstellen hat.

Die Funktion $\frac{\sin(\pi z)}{\pi}$ hat einfache Nullstellen genau in den Punkten $\mathbb{Z}$. Wir machen den Ansatz

$$s(z) := e^{h(z)} z \prod_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} (1 - \frac{z}{n}) e^{\frac{z}{n}} = e^{h(z)} z \prod_{n \geq 1} (1 - \frac{z^2}{n^2}) \ .$$

Diese Produkt konvergiert. Wir bilden die logarithmische Ableitung:

$$\frac{s'(z)}{s(z)} = h'(z) + z^{-1} - \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{n^2 - z^2} \ .$$

Auf der anderen Seite erhalten wir

$$\frac{\cos(\pi z)}{\frac{\sin(\pi z)}{\pi}} = \pi \cot(\pi z) = z^{-1} - \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{n^2 - z^2}.$$

Wir erhalten also $h'(z) = 0$. Die Konstante h bestimmen wir aus $s'(0) = e^h = \cos(0) = 1$. Folglich gilt

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi} = z \prod_{n\geq 1} (1 - \frac{z^2}{n^2}) \ .$$

Nun ist aber

$$z\Gamma(z)\Gamma(-z) = -z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})^{-1} = \frac{-\pi}{\sin(\pi z)} \ .$$

Wir erhalten die Relation

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \ .$$

Es folgt

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \ .$$

12 Aufaben

1. Wir identifizieren $\mathbb{C}_{|\mathbb{R}}$ mit $\mathbb{R}^2$ mit der Basis $(1, i)$. In dieser Basis ist eine lineare Abbildung $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}_{|\mathbb{R}}, \mathbb{C}_{|\mathbb{R}})$ durch eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ , \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Matrix der Multiplikation mit i und charakterisieren Sie diejenigen Matrizen A, die komplex linearen bzw. antilinearen Abbildungen entsprechen.

2. Mit den Bezeichnungen wie in 1 bestimmen Sie die Zerlegung $A = A^{1,0} + A^{0,1}$, die der Zerlegung der durch A gegebenen Abbildung in den linearen und antilinearen Teil entspricht.

3. Sei $p(u,v) \in \mathbb{C}[u,v]$ ein Polynom in zwei Variablen. Wir bilden die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := p(z,\bar{z})$. Zeigen Sie, daß f genau dann holomorph ist, wenn p im Unterraum $\mathbb{C}[u] \subset \mathbb{C}[u,v]$ liegt.

4. Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Zeige: *Wenn $f : S \to \mathbb{C}$ holomorph ist und nur reelle Werte annimmt, dann ist f konstant.*

5. Sei $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial_y^2}$ der Laplaceoperator auf $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}_{|\mathbb{R}}$. Zeige: *Ist $f \in C^2(S,\mathbb{C})$ holomorph, dann gilt $\Delta\mathrm{Re}(f) = 0$ und $\Delta\mathrm{Im}(f) = 0$.*

6. Zeigen Sie: *Wenn $f \in C^2(S,\mathbb{C})$ holomorph ist, dann ist f' auch holomorph.*

7. Wir definieren für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ die Wurzel $\sqrt{z}$ als die eindeutige Lösung der Bedingungen $\sqrt{z}^2 = z\ , \quad \mathrm{Re}(z) > 0$. Zeigen Sie, daß $\sqrt{z}$ wohldefiniert und holomorph ist. Bestimmen Sie $\partial\sqrt{z}$.

8. Verallgemeinern Sie 7 auf $n$te Wurzeln.

9. Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ derart, daß $e^{|x|^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B},\mu)$ gilt. Zeigen Sie, daß
$$f(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izx} d\mu(x)$$
eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion ist.

10. In der Situation von Aufgabe 9: Wir definieren $D(f) := f'$. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

    (a) Es gibt eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, daß $Df = \lambda f$.

    (b) $\mu = c\delta_\lambda$ für geeignete $c, \lambda \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

    Zeigen Sie auch folgende Verallgemeinerung: Wenn die Funktionen $(D^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ einen endlich-dimensionalen Vektorraum V aufspannen und $D : V \to V$ nur reelle Eigenwerte hat, dann ist μ eine endliche Linearkombination von Diracmaßen.

11. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ derjenigen $z \in \mathbb{C}$, für welche das Integral $f(z) = \int_0^1 t^{z-\lambda-1} dt$ existiert. Zeigen Sie weiter, daß sich f zu einer auf $\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$ holomorphen Funktion ausdehnen läßt.

12. Sei $h \in C^\infty([0,1])$. Zeigen Sie, daß das Integral
$$f(z) := \int_0^1 h(t) t^{z-1} dt$$

auf $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ konvergiert und eine holomorphe Funktion definiert. Zeigen Sie weiter, daß sich $f(z)$ zu einer auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ holomorphen Funktion ausdehnen läßt. *Hinweis: Für die Ausdehnung auf* $\{\mathrm{Re}(z) > -k\}$ *schreiben Sie*

$$h(t) = \sum_{l=0}^{k} \frac{h^{(l)}(0)}{l!} t^l + Rest(t) \ .$$

13. Berechnen Sie

$$\lim_{z \to -k} (z + k)\Gamma(z) \ .$$

14. Zeige, daß der Konvergenzradius von $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ gleich 1 ist. Zeige weiter, daß für jedes $\alpha \in \mathbb{Q}$

$$\limsup_{r \uparrow 1} |f(re^{2\pi i\alpha})| = \infty$$

gilt.

15. Sei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n=2}^{\infty} \tau(n) z^n$.

16. Sei (a_n) eine monoton fallende Folge reller Zahlen. Zeigen Sie, daß der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mindestens 1 ist. Zeigen Sie weiter, daß die Reihe für alle $z \neq 1$ mit $|z| = 1$ konvergiert (nicht notwendig absolut).

17. Wir betrachten eine endliche Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$. Für jedes $m \in M$ betrachten wir den geschlossene Weg $\gamma_m \in \mathtt{Sing}_1(\mathbb{C} \setminus \mathtt{M})$, $\gamma_m(t) := m + re^{2\pi it}$, wobei wir $r < \frac{1}{4}\min\{|m - m'| \mid m, m' \in M\}$ wählen. Zeigen Sie, daß durch $M \to H_1(S)$, $m \mapsto [\gamma_m]$ eine Injektion $\mathbb{Z}[M] \to H_1(S)$ induziert wird. *Hinweis: Betrachten Sie die Integrale*

$$\int_{\gamma_m} \frac{dz}{z - n}$$

für verschiedene Wahlen von $m, n \in M$.

18. Seien M und γ_m wie in Aufgabe 17. Sei weiter $R > 0$ so groß, daß $M \subset B(0, R)$. Zeigen Sie, daß in $H_1(S)$

$$[\partial\overline{B(0, R)}] = \sum_{m \in M} [\gamma_m]$$

gilt. *Hinweis: Zuerst für* $\sharp M = 2$ *zeigen und dann Induktion nach Anzahl der Elemente in* M

19. Berechnen Sie für $0 < R \notin \mathbb{N}$

$$\int_{\partial \overline{B(0,R)}} \Gamma(z) dz \ .$$

20. Sei f auf S holomorph, $x \in S$ und $f(x) = 0$. Berechnen Sie

$$\int_{\partial \overline{B(x,r)}} \frac{f' dz}{f}$$

für kleine $r > 0$.

21. Berechnen Sie für $0 < R \notin \pi\mathbb{N}$.

$$\int_{\partial \overline{B(x,R)}} \cot(z) dz \ .$$

22. Berechnen Sie für $R \notin \mathbb{N}$

$$\int_{\partial \overline{B(0,R)}} \frac{\Gamma'(z) dz}{\Gamma(z)} \ .$$

23. Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und $G \subset \mathbb{C}$ eine Gerade. Sei $f \in C(S, \mathbb{C})$ auf $S \setminus G$ holomorph. Zeigen Sie, daß dann f auf S holomorph ist.

24. Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Teilmenge. Zeigen Sie, daß es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \backslash A \to \mathbb{C}$ gibt, welche sich auf keine echt größere offene Teilmenge ausdehnen läßt. *Hinweis: Wählen Sie eine Folge* (z_n) *in* A *mit* $\overline{\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}} = A$*. Setzen Sie* $f(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{-n}}{z - z_n}$.

25. Sei $f : S \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige, daß $\ln |f|$ lokal integrierbar ist (d.h. für jedes $x \in S$ existiert eine kompakte Umgebung $x \in K \subset S$ derart, daß $\ln |f|_{|K} \in L^1(K)$ gilt, wobei wir bezüglich des Lebesguemaßes integrieren).

26. Sei f holomorph. Zeige, daß $\partial \bar{\partial} \ln |f| = 0$ außerhalb der Nullstellen von f gilt.

27. Sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf einer offenen Teilmenge $S \subseteq \mathbb{C}$ derart, daß es eine Konstante C gibt mit $|f_n(z)| < C$ für alle $z \in S$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, daß diese Folge eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge hat. *Hinweis: Betrachte eine kompakte Teilmenge* $K \subset S$*. Zeige, daß die Folge* $\sup_{z \in K} |f_n'(z)|$ *beschränkt ist. Finde auf* K *eine gleichmäßig-konvergente Teilfolge mit Arzela-Ascoli. Schöpfe dann* S *aus und benutze Diagonalfolgenargument.*

28. Analysieren sie das Problem: `Gesucht ist eine holomorphe Funktion` f, `welche die Differentialgleichung` $f' = -\frac{\lambda}{z} f$ `und` $f(1) = 1$ `erfüllt, wobei` $\lambda \in \mathbb{R}$ `ist?` Wieviele lokale Lösungen gibt es? Wie sehen maximale Fortsetzungen aus? Verhalten in der Nähe von $z = 0$?

29. Analysieren sie das Problem: `Gesucht ist eine holomorphe Funktion` f, `welche die Differentialgleichung` $z^k f' = f$ `erfüllt.` Wieviele lokale Lösungen gibt es? Wie sehen maximale Forsetzungen aus?

30. Zeigen Sie, daß wenn f und f^2 die Mittelwerteigenschaft haben, f holomorph oder antiholomorph sein muß.

31. Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : S \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Zeigen Sie, daß $f(S) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist.

32. Zeigen Sie, daß $f(z) := e^{z^n}$ transzendent ist.

33. Zeige durch ein Beispiel, daß die Lösung des Dirichletproblems nicht eindeutig bestimmt sein muß, wenn das Gebiet nicht beschränkt ist.

34. Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subset S$ kompakt. Sei (f_n) eine beschränkte Folge harmonischer Funktionen auf S. Zeige, daß es dann eine Teilfolge gibt, welche auf K gleichmäßig konvergiert.

35. Zeige: Ist f nichtkonstant und harmonisch, dann sind die Nullstellen von df isoliert.

36. Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen, $x \in S$ und $f : S \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt. Zeige, daß sich f zu einer harmonischen Funktion auf S fortsetzen läßt.

37. Finde alle radialsymmetrischen harmonischen Funktionen auf $\mathbb{C}$.

38. Seien $S, T \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : S \to T$ biholomorph. Wir definieren den Differentialoperator Δ_f durch $\Delta_f(\phi) := f^*\Delta(f^{-1*}\phi)$. Zeige, daß $\Delta_f = u\Delta$ für eine Funktion u ist. Bestimme u.

39. Sei $\phi \in L^1(\partial\overline{B(0,1)})$. Zeige, daß es genau eine harmonische Funktion $f : B(0,1) \to \mathbb{R}$ gibt, welche den Randwert ϕ in folgendem Sinne annimmt: Setze $\phi_r(\xi) := f(r\xi)$, $\xi \in \partial\overline{B(0,1)}$. Dann gilt $\lim_{r\to 1} \phi_r = \phi$ in $L^1(\partial\overline{B(0,1)})$. Hierbei parametrisieren wir $\partial\overline{B(0,1)}$ wie üblich durch $[0,1]$ mittels $t \mapsto e^{2\pi i t}$ und definieren $L^1(\partial\overline{B(0,1)})$ mit dem Lebesguemaß auf $[0,1]$.

40. Finde eine Lösungformel für das Dirichletproblem auf $\bar{S} := \overline{B(0,1)} \cap \{\mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ für Randwerte, welche auf $i[-1,1] \subset \partial\bar{S}$ verschwinden.

41. Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Zeigen Sie, daß $\mathcal{M}(S)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{O}(S)$ ist.

42. Bestimmen Sie die Vielfachheiten $\nu_f(x) \in \mathbb{Z}$ in folgenden Fällen:

    (a) $\sin(z) - 1$, $x = \frac{\pi}{2}$

    (b) $\ln(z) - 2$, $x = e^2$

    (c) $\Gamma'(z)$, $x = -2$.

43. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{z^n}{3^{|n|}} \ .$$

44. Bestimmen Sie die Residuen der 1-Formen α in allen ihren Singularitäten:

    (a) $\frac{(1-\cos(z))dz}{z^3}$

    (b) $\frac{z^2 dz}{(1+z)^3}$

    (c) $\frac{z dz}{e^z+1}$

45. Bestimmen Sie die Residuen der 1-Formen α im Punkt z in folgenden Fällen:

    (a) $\frac{\cos(z)dz}{\sin^n(z)}$, $z = 0$

    (b) $\frac{dz}{1-\sqrt{z+1}}$, $z = 0$

    (c) $\frac{e^{iz}dz}{(1-z)^2(1+z)}$, $z = 1$

46. Sei $h(z) := 1 + z^n$ und $\alpha(z) := \frac{dz}{z-1}$. Berechnen Sie $h^*\alpha$, $\mathrm{res}_1(\alpha)$ und $\mathrm{res}_0(h^*\alpha)$.

47. Eine Funktion f ist gerade (ungerade), wenn sie die Identität $f(z) = f(-z)$ ($f(z) = -f(-z)$) erfüllt. Zeigen Sie, daß für gerade (ungerade) f gilt $\mathrm{res}_z(f dz) = -\mathrm{res}_{-z}(f dz)$ ($\mathrm{res}_z(f dz) = \mathrm{res}_{-z}(f dz)$).

48. Sei f in a holomorph und $\nu_{f-f(a)}(a) = 2$. Drücken Sie $\mathrm{res}_a \frac{dz}{f-f(a)}$ durch die Ableitungen von f im Punkt a aus.