Herrn Schicke 21.4.09

Analysis 4

Topologische Vorbereitungen

Def: Ein topologischer Raum heißt **metrisierbar**, wenn seine Topologie durch eine Metrik induziert wird.

Satz: metrisierbar $\Rightarrow$ Hausdorff

$\Rightarrow$ jeder Punkt hat abzählbare Umgebungsbasis (**1. Abzählbarkeitsaxiom**)

$\Rightarrow$ jeder Teilraum ist auch metrisierbar

Def. $x \in U$

offene Umgebungen von x

$(U_i)_{i \in I}$ ist **Umgebungsbasis** von x falls für jede Umgebung U von x ein $i \in I$ ex., s.d. $U_i \subset U$ gilt

Def: Ein top. Raum erfüllt das **2. Abzählbarkeitsaxiom**, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Bsp:
- $\mathbb{R}^n$ erfüllt 2. AA ($B(x, \varepsilon)$ mit $x \in \mathbb{Q}^n$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$)
- $\mathbb{R}_{disc}$ erfüllt 2AA nicht
- $\coprod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}^n$ erfüllt 2AA nicht

  $\coprod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{disc}$

Def: Ein metrischer Raum heißt **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt

Bsp:
- $\mathbb{R}^n$ separabel $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$
- $(\mathbb{R}, d_{disc})$ nicht separabel

Satz: separabel $\overset{\overset{?}{\Leftarrow}}{\Rightarrow}$ 2. AA.

Def: Ein top. Raum heißt regulär (normal) wenn in ihm abgeschlossene Teilmengen von Punkten (abgeschlossenen Teilmengen) getrennt werden können

Satz: Ein metrischer Raum ist regulär und normal

Satz: ~~Urysohn~~

Ein regulärer Hausdorffraum, der das 2. AA erfüllt ist metrisierbar

Def: Eine Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ einer Menge X heißt ~~lokal~~ endlich, wenn für alle $x\in X$ die Menge $\{i\in I \mid x\in U_i\}$ endlich ist.

Def: Eine Teilüberdeckung von $(U_i)_{i\in I}$ von X ist eine Überdeckung der Form $(U_j)_{j\in J}$ mit $J\subseteq I$.

Def: Ein topologischer Raum heißt parakompakt, wenn ~~man aus~~ jeder offenen Überdeckung eine lokal endliche ~~Teilüberdeckung~~ Verfeinerung hat. ~~auswählen kann~~ Verfeinerung: $(\underbrace{(V_j)_{j\in J}}_{\text{offene Überdeckung}}, \alpha: J\to I)$ mit $V_j\subseteq U_{\alpha(j)}$ $\forall j\in J$

Satz: Ein parakompakter Hausdorffraum ist metrisierbar (Dieudonné)

Satz: Stone

Ein metrisierbarer Raum ist parakompakt.

parakompakt + Hausdorff $\Leftrightarrow$ metrisierbar

auf abgeschl. Teilmengen

Satz: normal, regulär, parakompakt, 2AA werden vererbt

Def: Eine der offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X untergeordnete Zerlegung der Eins ist eine Familie von Funktionen $(\varphi_i)_{i\in I}$ mit

1) $\varphi_i: X\to[0,1]$ stetig

2) für alle $x\in X$ ist $\{i\in I \mid \varphi_i(x)\neq 0\}$ endlich

3) $\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq U_i$

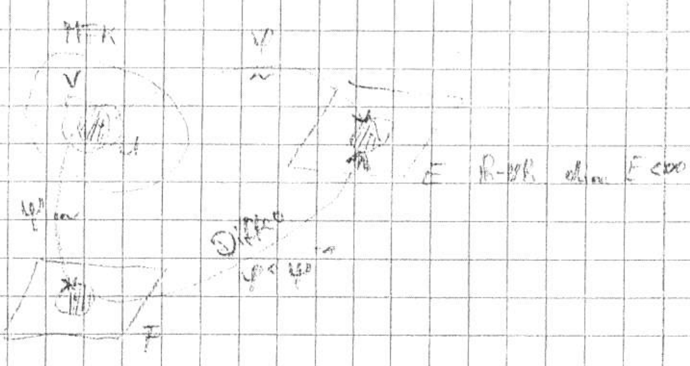
4) $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1 \quad \forall\, x \in X$

Satz: Ist X Hausdorff + parakompakt dann gibt es für jede Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der 1.

Bem: Untermannigfaltigkeiten vom $\mathbb{R}^n$ sind als top. Räume metrisierbar, 2AA, Hausdorff, parakompakt

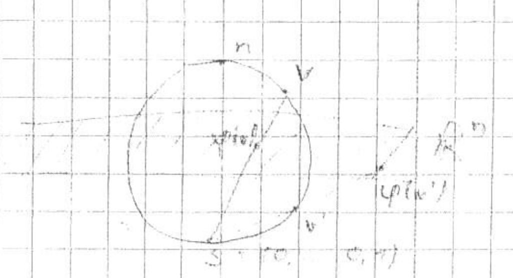
Mannigfaltigkeiten

X top. Raum



Def: Eine Karte von X ist ein Paar (U, φ) mit $U \subseteq X$ offen und $\varphi: U \to E$ stetig und E $\mathbb{R}$-VR, $\dim E < \infty$, φ ist Homöomorphismus aufs Bild (offene Teilmenge $\varphi(U) \subseteq E$)
$\dim E$ heißt die Dimension der Karte

Bsp:
- V $\mathbb{R}$-VR $\dim V = n < \infty$
  $(b_i)_{i=1\dots n}$ Basis
  $\varphi: V \to \mathbb{R}^n$, durch
  $v = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v)_i b_i$ definiert
  (V, φ) ist Karte von V
- $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$
  $U := S^n \setminus \{s\}$
  def $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ durch
  $\varphi(x)$ ist eind. Punkt in $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\}$
  auf der Geraden durch s und x



$\varphi(x) = \frac{x'}{-x_{n+1}+1}, \quad x = (x', x_{n+1})$

φ ist Homöo. auf $\mathbb{R}^n$

$\varphi^{-1}(x') = s + 2\frac{(x',0)-s}{\|v\|^2+1}$

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}: \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \text{ stetig} \\ & \searrow & \uparrow \\ & & S^n \end{array}$$

(U, φ) ist Karte von S^n

Analog $V = S^n \setminus \{n\}$

$\psi(x) = \frac{x'}{x_{n+1}-1}$

Dann ist (V, ψ) auch eine Karte

Def: Zwei Karten (U, φ), (V, ψ) von X heißen verträglich, wenn die Abbildung $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ ein glatter Diffeomorphismus ist
(symmetrische, reflexive Relation)

Bsp: • (b') weitere Basis

$\varphi': V \rightarrow \mathbb{R}^n$

(V, φ')

$\varphi' \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin. Iso, also Diffeo

$(V, \varphi) \sim (V, \varphi')$

• $(U, \varphi) \sim (V, \psi)$, denn

$\varphi(U \cap V) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \psi(U \cap V)$

24. 4.09 $\quad \varphi \circ \psi^{-1}(v) = \frac{v}{\|v\|^2}$ glatt, Diffeo

Abkürzungen:

T_2 Hausdorff

T_3 regulär

T_4 normal

A_1 jeder Punkt hat abzählbare Umgebungsbasis

A_2 2. AA

Def: Ein **Atlas** eines topologischen Raumes X ist eine Familie von Karten $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ von X mit

1) paarweise verträglich
2) $(U_i)_{i\in I}$ Überdeckung

Def: Zwei Atlanten A und A' von X heißen **äquivalent**, wenn $A \cup A'$ ein Atlas ist. (Jede Karte von A ist mit jeder Karte von A' verträglich)

Satz: Äquivalenz von Atlanten ist eine Äquivalenzrelation

Def: Eine **differenzierbare Struktur** auf einem topologischen Raum ist eine Äquivalenzklasse von Atlanten.

Def: Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** ist ein Paar $(X, [A])$ aus einem top. Raum X, der metrisierbar und A_2 ist, und einer differenzierbaren Struktur $[A]$.

Bsp:
- $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

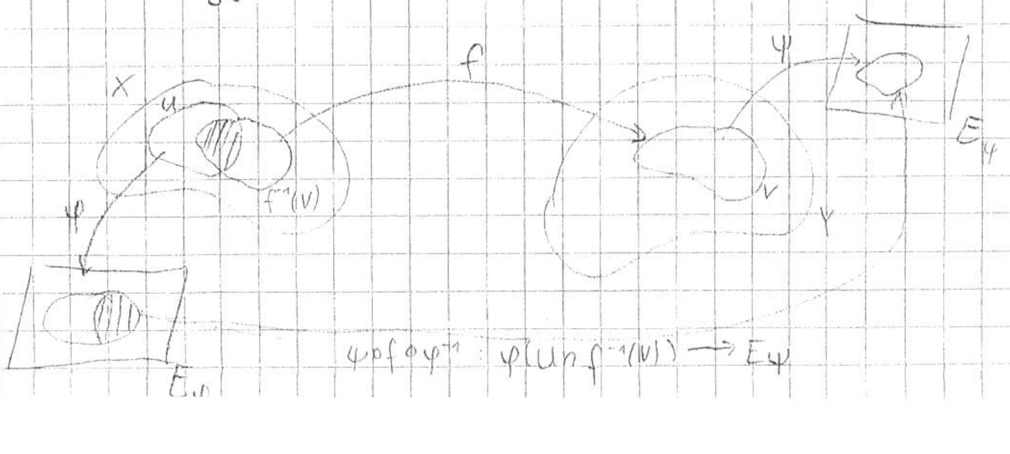
  $\{(U,\varphi), (V,\psi)\} = A$

  $(S^n, [A])$ ist eine diffbare MFK, die n-Sphäre
- $(\mathbb{R}^n, [(\mathbb{R}^n, id)])$

Sei $(X, [A])$ eine diffbare MF, (U,φ) eine Karte

Def: (U,φ) ist **diffbar** bzgl. A, wenn (U,φ) mit allen Karten aus A verträglich ist

Bem: Unabhängig von der Wahl von $A \in [A]$.



$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to E_\psi$

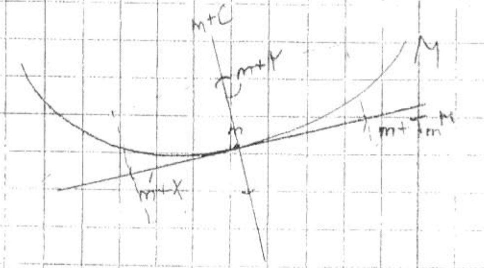
Def: Eine <u>diffbare Abb.</u> zwischen diff'baren MF $X \xrightarrow{f} Y$ ist eine stetige Abb. der unterliegenden top. Räume, s.d. für alle diffbaren Karten (U, φ) von X und (V, ψ) von Y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to E_\psi$ diffbar ist.

Satz: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ diffbar, so auch $g \circ f$ diffbar.

Bsp: $X \xrightarrow{id} X$ diffbar

Def: Kategorie $\mathcal{MF}$ der diffbaren MF (Isomorphie, etc sind def)

<u>Untermannigfaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten</u>



Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ UMF

M ist metrisierbar und A_2

Sei $m \in M$, $T_m M \subseteq \mathbb{R}^n$

wähle Komplement $C \subseteq \mathbb{R}^n$

$T_m M \oplus C \cong \mathbb{R}^n$

so ex. $X \subseteq T_m M$, $Y \subseteq C$ offene Umgebungen von 0

und glatte Abb. $g : X \to Y$, s.d.

$M \cap m + (X \times Y) = m + \Gamma(g)$

$pr : \mathbb{R}^n \to T_m M$ Projektion entlang C

$U := M \cap m + (X \times Y)$

$\varphi : U \to T_m M$ durch $\varphi(x) = pr(x - m)$

Beh: (U, φ) ist Karte

Bew: $\varphi^{-1} : X \to M$

$\varphi^{-1}(x) = m + (x, g(x))$

$X \subseteq T_m M$ offen

Def: (U, φ) heißt <u>UMF-Karte</u>

Beh: Je zwei UMF-Karten sind verträglich

Bew: Sei (V, ψ) UMF-Karte

$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow E_\psi$ Diffeo (z.z.)

$$\begin{tikzcd}
\varphi(U \cap V) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \arrow[dd, bend right] & \\
U \cap V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & E_\psi \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\tilde{\psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

ψ dehnt sich auf $\mathbb{R}^n$ aus durch

$\tilde{\psi} : \mathbb{R}^n \to T_m M$, $\tilde{\psi}(x) = pr(x - m)$

Analog $\varphi \circ \psi^{-1}$ diffbar

UMF-Atlas = (alle UMF-Karten)

$(M, [\text{UMF-Atlas}]) = M$

Bsp: • Der projektive Raum $\mathbb{R}P^n$

$\mathbb{R}P^n$ als Menge: Geraden in $\mathbb{R}^{n+1}$

$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ surj.

$\pi(x) = \mathbb{R}x$

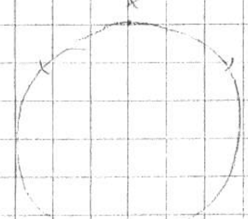
$\pi(x) = [x] = [x_0 : \ldots : x_n]$

$\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ immer noch surj.

Def Metrik: $d(u,v) := \min \{ \|x - y\| \mid x, y \in S^n, \pi(x) = u, \pi(y) = v \}$

Metrik? endl. Menge $\Rightarrow$ min existiert.

Symm. klar, $\triangle$ klar, $d = 0 \Leftrightarrow u = v$ klar



$$\begin{tikzcd}
x \in S^n \arrow[d, "\pi"] & B(x, 1/4) \arrow[d, "?\ \text{isometrie}"] \\
u \in \mathbb{R}P^n & B(u, 1/4)
\end{tikzcd}$$

separabel $\Leftarrow$ S^n separabel

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}P^n$ ist A_2 metrisierbar (top. Raum)

Def Karten:

$i = 0, \ldots, n$

$U_i := \{ [x] \mid x_i \neq 0 \}$ offen, denn:

Sei $u \in U_i$, $x \in S^n$, $[x] = u$, dann $x_i \neq 0$

$\min(|x_i|, 1/4) > \varepsilon > 0$

Beh: $B(u, \varepsilon) \subseteq U_i$

$B(x,\varepsilon) \xrightarrow{\sim} B(u,\varepsilon)$

Für $y \in B(x,\varepsilon)$ gilt $y_i \neq 0$, da $|y_i - x_i| < \varepsilon$ □

$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$

$\varphi_i([x]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \overset{\text{weglassen}}{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{R}^n$

φ_i ist stetig, denn:

$$\begin{tikzcd}
 & u \in U_i \arrow[r, "\varphi_i"] & \mathbb{R}^n \\
 & B(u,\varepsilon) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur, "\varphi_i"] & \\
x \arrow[uur, bend left, "\pi"] & B(x,\varepsilon) \arrow[u, "?"] \arrow[uur, bend right, "\varphi_i\ \text{stetig}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

$\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$

$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_i$ stetig?

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r] \arrow[dr] & U_i \\
 & \pi^{-1}(U_i) \arrow[u, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_i)$

$v \mapsto \dfrac{(v_1, \dots, 1, \dots, v_n)}{\sqrt{1 + \|v\|^2}}$

$\Rightarrow \varphi_i$ ist Homöo aufs Bild

Verträglichkeit:

$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$

Sei $j = 0$:

$\varphi_i \circ \varphi_0^{-1}(v) = \left(\frac{1}{v_i}, \frac{v_1}{v_i}, \dots, \frac{\hat{v_i}}{v_i}, \dots, \frac{v_n}{v_i}\right)$ diffbar

$\varphi_0(U_i \cap U_0) = \{ v \mid v_i \neq 0 \}$

$A = ((U_i, \varphi_i)_{i=0\dots n})$ Atlas von $\mathbb{RP}^n$

$\mathbb{RP}^n$ als MF ist $(\mathbb{RP}^n_{top}, [A])$ 28.4.08

Kategorie MF

$\mathcal{C}$ Kategorie

$X, Y \in \mathcal{C}$

Produkt von X und Y ist ein Tripel (Z, a, b)

mit $Z \in \mathcal{C}$

$a \in \mathcal{C}(Z, X)$, $b \in \mathcal{C}(Z, Y)$

Bem: $T \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{C}(T, Z) \xrightarrow{(a_*, b_*)} \mathcal{C}(T, X) \times \mathcal{C}(T, Y)$$

s.d. (a_*, b_*) eine Bijektion ist (Univ. Eigensch.)

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend left] \arrow[dr, bend right] & Z \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"] & Y \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Bem: Ein Produkt ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig

(Z', a', b') Produkt

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
Z' \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[urr, bend left, "a'"] \arrow[drr, bend right, "b'"'] & Z \arrow[l, shift left, "v"] \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "b"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

z.z. $u \circ v = id$

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
Z \arrow[r, shift left, "id"] \arrow[r, shift right, "u \circ v"'] \arrow[urr, bend left, "a"] \arrow[drr, bend right, "b"'] & Z \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "b"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

Bsp:
- Set: Produkt von X und Y $(X \times Y,\ X \times Y \to X,\ X \times Y \to Y)$
- K-Vekt: $(X \oplus Y, pr_X, pr_Y)$
- Top: $(X \times Y, pr_X, pr_Y)$ mit Produkttopologie

Satz: In MF ex. Produkte

Bew: Zentralübung

Def: Summe von X und Y ist ein Tripel (Z, i, j)

$Z \in \mathcal{C}$

$i: X \to Z$

$j: Y \to Z$

$$\mathcal{C}(Z, T) \xrightarrow{(i^*, j^*)} \mathcal{C}(X, T) \times \mathcal{C}(Y, T)$$

s.d. (i^*, j^*) eine Bijektion ist

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left] & & \\
 & Z \arrow[r] & T \\
Y \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Eine Summe ist bis auf kanonische Isomorphie bestimmt.

Bsp. ~~Ko~~ Set: $X \sqcup Y$, $X \hookrightarrow X \sqcup Y$, $Y \hookrightarrow X \sqcup Y$

K-Vekt: $X \oplus Y$ $\quad X \hookrightarrow X \oplus Y$, $x \longmapsto (x \oplus 0)$ $\quad Y \hookrightarrow X \oplus Y$, $y \longmapsto 0 \oplus y$

Top: $\underset{\text{top. Summe}}{X \sqcup Y}$

MF: $(\underset{\text{top. Summe}}{X \sqcup Y}, [A \cup B])$

$\mathcal{C}$, $X, Y \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{E} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & Y \end{tikzcd} \quad \underline{\text{Equalizerdiagramm}}$$

Def: Ein Equalizer von $\mathcal{E}$ ist ein Paar (Z, π) mit $\pi \in \mathcal{C}(Y, Z)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d] \\ & & T \end{tikzcd}$$

i) $\pi \circ a = \pi \circ b$

ii) $\forall T \in \mathcal{C}$ ist

$\mathcal{C}(Z, T) \xrightarrow{\pi^*} \{ f \in \mathcal{C}(Y, T) \mid f \circ a = f \circ b \}$

eine Bijektion

Satz: Ein Equalizer ist bis auf eind. Isomorphie eindeutig

Bew:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & Z \arrow[d, shift right, "u"'] \\ & & Z' \arrow[u, shift right, "v"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi"'] & Z \arrow[d, shift right, "id"'] \arrow[d, shift left, "v \circ u"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

u, v eind. $\qquad \Rightarrow v \circ u = id$ $\qquad \square$

G Gruppe, $X \in \mathcal{C}$

$G \underset{\text{Homo}}{\longrightarrow} Aut(X) \subset \mathcal{C}(X, X)$ Gruppenwirkung

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, bend left, "pr"] \arrow[r, bend right, "\mu"'] & X \arrow[r] & X/G \end{tikzcd}$$

$\coprod_G X$

$\mu(g, x) = g \cdot x$

Bsp: $\cdot$ Set $\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & Y \end{tikzcd}$

def. Äquivalenzrelation auf Y minimal mit $a(x) \sim b(x) \quad \forall x \in X$

$Z := Y/\sim \qquad \pi : Y \to Z$, $y \mapsto [y]$ kan. Proj.

Erfüllt univ. Eigensch.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & & T \end{tikzcd}$$

$\bar{f}([y]) := f(y)$ damit Diagramm kommutiert

Wohldef.?

f ind. $y \approx y' \Leftrightarrow f(y) = f(y')$

$\sim \subseteq \approx$

$y \sim y' \Rightarrow f(y) \overset{!}{=} f(y')$ wegen $f \circ a = f \circ b$

$\circ$ K-Vekt $\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & Y \end{tikzcd}$

$V = \langle a(x) - b(x) \mid x \in X \rangle_K$

$Z := Y/V, \quad \pi : Y \to Z$ kan. Proj.

Prop. Equalizer ex. in Top

Bew: $\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & Y \arrow[r, "\pi"] & Y/\sim \end{tikzcd}$

$\sim$ wie in Mengen

Top. auf $Y/\sim$: von π koinduziert: feinste Top., s.d. π stetig

$U \subset Y/\sim$ offen gdw. $\pi^{-1}(U) \subset Y$ offen

$U \subset Y$ offen $\not\Rightarrow \pi(U)$ offen

Univ. Eigensch:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & Y/\sim \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & & T \end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ ex. eindeutig als Abb. zw. Mengen. $\bar{f}$ stetig?

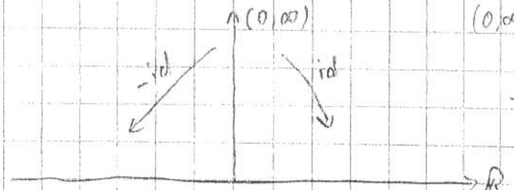
$V \subseteq T$ offen

$\pi^{-1} \circ \bar{f}^{-1}(V) = f^{-1}(V)$ $\qquad$ $\pi^{-1}(U)$ offen $\Rightarrow$ U offen

offen da f stetig $\rightarrow \bar{f}^{-1}(V)$ offen

Satz: In MF gibt es Equalizer nicht immer

Bsp:



$$\begin{tikzcd} (0,\infty) = X \arrow[d, bend right, "-id"'] \arrow[d, bend left, "id"] \\ Y \end{tikzcd}$$

Für dieses Diagramm ex der Equalizer nicht.

Indirekt: (Z, π) sei Equalizer

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow Z$$

(U, φ) Karte von $\pi(0)$, OBdA $\varphi(\pi(0)) = 0$

$\varphi \circ \pi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ glatt

$(\varphi \circ \pi)(x) = (\varphi \circ \pi)(-x)$

$(\varphi \circ \pi)'(0) = 0$

$$\begin{tikzcd} (0,\infty) \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[r, bend right, "-x"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f(x)=x^2"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ & & Z \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

$\bar{f}_u = \bar{f} \circ \varphi^{-1}$ glatte Kartendarstellung von $\bar{f}$

$\bar{f}_u \circ \varphi \circ \pi = f$

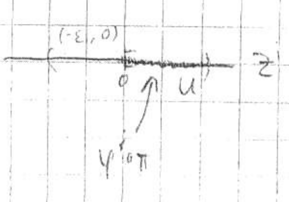
$f''(0) = 2$

$\Rightarrow (\varphi \circ \pi)''(0) \neq 0$ $\qquad$ OBdA $\underbrace{(\varphi^i \circ \pi)''(0)}_{i\text{ Komponente}} \neq 0$

$\Rightarrow$ ex. $V \subset \pi^{-1}(U)$ Umgebung von 0

mit $(\varphi^i \circ \pi)(V) \subseteq [0, \infty)$ $\quad \forall i = 1 \ldots n$

Beh: ex. i: $(\varphi^i \circ \pi)(\pi^{-1}(U)) \cap (-\varepsilon, 0) = \emptyset$ für genügend kleines ε



Andernfalls ex. Folge (x_k) in $\pi^{-1}(U)$

mit $\varphi^i \circ \pi(x_k) \nearrow 0 \quad \forall i$

$0 \leftarrow \bar{f}_U(\varphi \circ \pi(x_k)) = f(x_k)$

da $\bar{f}_U(0) = 0$, also $x_k \to 0$

also $x_k \in V \quad \forall k > N \gg 0$

$\varphi^i \circ \pi(x_k) \geq 0 \quad \forall k > N$ ↯ da $\varphi^i \circ \pi(x_k) \nearrow 0$ □

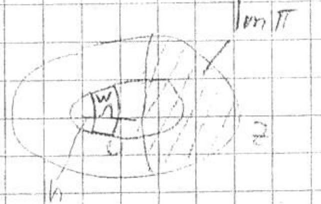
$W := \{x^i \in (-\varepsilon, 0)\} \cap \varphi(U) \subset \varphi(U)$ offen

$\varphi \circ \pi(\pi^{-1}(U)) \cap W = \emptyset$

$h \in C_c^\infty(W)$

$(\varphi^* h) : Z \to \mathbb{R}$

fortgesetzt auf 0



$$\begin{tikzcd}
(0,\infty) \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "-x"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{R} \\
& & Z \arrow[u, "0,\, \tilde{h}"']
\end{tikzcd}$$

Zwei Faktorisierungen von $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

nämlich $0, \tilde{h} : Z \to \mathbb{R}$ ↯ zur Eindeutigkeit

Bsp

RAA

G Gruppe abzählbar (damit G zur MF wird: G_{disc})

G wirke auf MF M

$G \xrightarrow[\text{Homo}]{\varphi} \mathrm{Aut}_{MF}(M)$

äquivalent:

$G \times M \overset{pr}{\underset{\mu}{\rightrightarrows}} M$

$\mu(g, m) = \varphi(g)(m)$

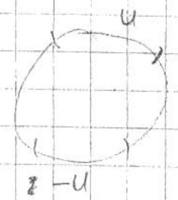
Equalizer in dieser Situation heißt Quotient $(M/G, \pi : M \to M/G)$

Satz: Wenn für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ offen ex, s.d. $U \cap gU = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{1\}$, dann ex. der Quotient $(M/G, \pi)$ in MF.

Bsp: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wirkt auf S^n

$\varphi([n])(x) = (-1)^n x$

hat diese Eigenschaft



$U := B(x, 1/4)$

$-U \cap U = \emptyset$

$(\mathbb{R}P^n, \pi: S^n \to \mathbb{R}P^n)$ ist der Quotient.

5.5.09

Def: $U \subseteq M$ heißt klein, wenn aus $U \cap gU \neq \emptyset \Rightarrow g = id$

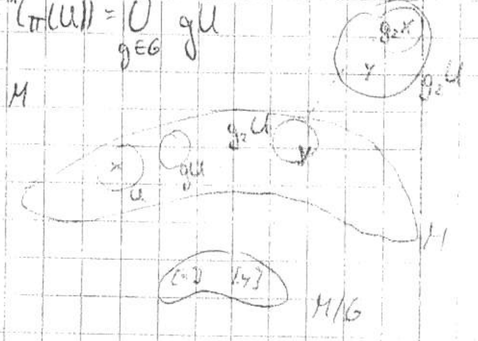
Bed: Jeder Punkt von M hat kleine Umgebung

(G wirkt eigentlich diskontinuierlich)

Bew: unterliegender top. Raum M/G = top. Quotient

$\pi: M \to M/G$

Bem: U offen $\Rightarrow \pi(U)$ offen, da $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$



- Hausdorff: $[x] \neq [y] \in M/G$, $x, y \in M$

  Wähle kleine Umgebung U von x

  mit $y \notin U$, $\tilde{U} := \pi^{-1}(\pi(U))$

  falls $y \in \tilde{U}$. Verkleinere U, s.d.

  für neue Wahl $y \notin \tilde{U}$

  $M \setminus \tilde{U}$ abgeschl.

  ~~H regulär~~ ... Übung

- regulär: Sei $[x] \in M/G$, A abgeschl. in M/G

  $\pi^{-1}([x])$, $\pi^{-1}(A)$ abgeschl., da $[x]$ abgeschl. wg. Hausdorff

  Wähle kleine Umgebung U von x mit $U \cap \pi^{-1}(A) = \emptyset$

  $\Rightarrow gU \cap \pi^{-1}(A) = \emptyset \quad \forall g \in G$

  also $\pi^{-1}(\pi(U)) \cap \pi^{-1}(A) = \emptyset$

  wähle Umgebung $V \subseteq U$ von x mit $\overline{V} \subseteq U$

  $\bigcup_{g \in G} g\overline{V}$ abgeschl.

Finde offene Umgebung W von $\pi^{-1}(A)$ mit $W \cap \bigcup_{g\in G} g\bar{V} = \emptyset$ (Normalität von M)

$$\underset{[x]\,\in}{\pi(V)} \cap \underset{A\,\subset}{\pi(W)} = \emptyset$$

- A_2: $(U_i)_{i\in I}$ abzählbare Basis von Top von M

  $(\pi(U_i))_{i\in I}$ Basis der Top. von M/G

  $\Rightarrow G/M$ metrisierbar

- Karten:

$$\begin{tikzcd} x \in M \arrow[d, "\pi"] & U \text{ klein} \arrow[d, "\pi_{|U}", "\wr"'] \\ {[x]} \in M/G & \pi(U) \end{tikzcd}$$

Bijektion, stetig, $\pi_{|U}^{-1}$ stetig $\Rightarrow$ Homöo

Sei (U, φ) glatte Karte von M mit U klein

$(\pi(U), \varphi \circ \pi_{|U}^{-1})$ Karte von M/G

- Verträglichkeit: Seien (U,φ) (V,ψ) Karten von M

$$\begin{tikzcd} \psi(\bigcup g^{-1}U\cap V) & \bigcup_{g\in G} g^{-1}U \cap V \arrow[l, "\psi"'] \arrow[d] & \bigcup_{g\in G} U\cap gV \arrow[l, "\sqcup_{g\in G} g^{-1}", "\sim"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & \varphi(\bigcup_{g\in G} U\cap gV) \arrow[lll, bend right, "\sqcup_{g\in G}\psi g^{-1}\varphi^{-1} \text{ glatt}"'] \\ & \pi(U)\cap\pi(V) \arrow[r, equal] \arrow[ul] & \pi(U)\cap\pi(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\psi(\bigcup g^{-1}U\cap V) = \bigcup_{g\in G} \psi(g^{-1}U \cap V) \qquad \varphi(\bigcup_{g\in G} U\cap gV) = \bigcup_{g\in G} \varphi(U\cap gV)$$

$((\pi(U), \varphi\circ\pi_{|U}^{-1}))$ Atlas von M/G

- Universelle Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} G\times M \arrow[r, shift left, "pr"] \arrow[r, shift right, "\mu"'] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & M/G \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & & T \end{tikzcd}$$

$f \circ pr = f \circ \mu$

$\Rightarrow f(m) = f(gm) \quad \forall g, m$

M/G ist top. Quotient $\Rightarrow \bar{f}$ ex. eind. als stetige Abb.

z.z. $\bar{f}$ glatt

Sei U in M klein

reicht z.z. $\bar{f}_{|\pi(U)}$ glatt

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \pi(U) \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[dd, bend left=60, "\text{glatt?}"] \\ M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & M/G \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & T \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \pi(U) \arrow[r, "\pi^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "\bar{f} \text{ glatt}"'] & U \arrow[r, "f"] & T \end{tikzcd}$$

$\square$

Bsp: • $\mathbb{Z}^n$ wirkt auf $\mathbb{R}^n$

$(g, x) \longmapsto g + x$

$T^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ heißt n-dim Torus

wohldef: $x \in \mathbb{R}^n$ wähle $B(x, 1/3)$ als kleine Umgebung

Saalübung: $S^1 \cong T^1$

$S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1 \cong T^n$

• $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$

$G = \mathbb{Z}/_{k}\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$

G wirkt auf $\mathbb{C}^n$ durch $([e], z) \mapsto e^{\frac{2\pi i e}{k}} \cdot z$

auf S^{2n-1} hat G keine Fixpunkte

$\overset{\text{Gendl.}}{\underset{\text{Saal}}{\Longrightarrow}}$ eigentlich diskontinuierlich

$L_k^{2n-1} := S^{2n-1}/_{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ Linsenräume

<u>Tangentialbündel</u>

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ UMF

$x \in M \longmapsto T_x M \subset \mathbb{R}^n$

Satz: $TM := \{(x, v) \mid x \in M,\ v \in T_x M\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist UMF, denn: ist Vektorbündel

Im Sinne von UMF $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^k$ def $U \cap M$

$F: U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, $F(x, \xi) = (f(x), df(x)(\xi))$

F def $TM \cap (U \times \mathbb{R}^n)$

$dF(x, \xi)(y, \eta) = (df(x)(y), df(x)(\eta) + d^2 f(x)(\xi, y))$ surj?

$(z, \varkappa)$ gegeben

finde y, s.d. $df(x)(y) = z$

finde η, s.d. $df(x)(\eta) = \varkappa - d^2 f(x)(\xi, y)$

$dF(y, \xi)(y, \eta) = (z, \varkappa)$

Verallgemeinerung:

$x \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ UMF

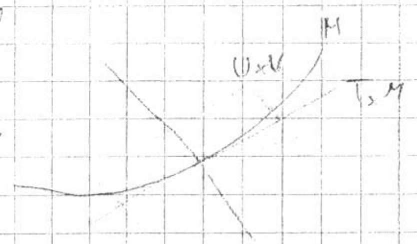
$v \in T_x M$

finde Kurve $(-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{\gamma} M \subseteq \mathbb{R}^n$

mit $\dot\gamma(0) = v$, $\gamma(0) = x$

wähle $\gamma(t) = (x + vt, g(\cancel{\ } vt))$

$\dot\gamma(0) = (v, dg(0)(v)) = (v, 0)$



$U \times V \cap M = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}$

$g: U \to V$

Def: $\gamma_0 \sim \gamma_1$ gdw

$\dot\gamma_0(0) = \dot\gamma_1(0)$

mit γ_0, γ_1 Kurven durch x

$T_x M$ = { Menge der Äquivalenzklassen von Kurven durch x }

Sei M allg. MF

$x \in M$

γ_0, γ_1 Kurven durch x $\left(\begin{array}{c}\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{\text{glatt}} M \\ \gamma(0) = x\end{array}\right)$

$\gamma_0 \sim \gamma_1$ gdw.

für alle Karten (U, φ) mit $x \in U$

gilt $(\varphi \circ \gamma_0)'(0) = (\varphi \circ \gamma_1)'(0)$

(Es reicht, das für eine Karte zu zeigen)

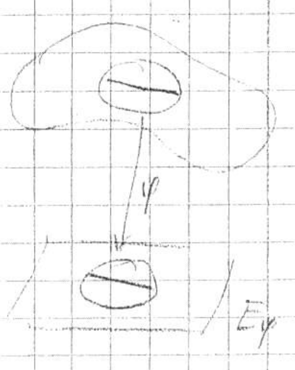
Def: $T_x M$ = { Menge der Äquivalenzklassen von Kurven durch x }

Tangentialraum von M an x

(U, φ) Karte, $x \in U$

$$\begin{tikzcd}
 & T_x M \ni [\gamma] \arrow[dl, "d\psi(x)"', "\sim"] \arrow[dr, "d\varphi(x)", "\sim"'] \arrow[r, mapsto] & (\varphi \circ \gamma)'(0) = d\varphi(x)[\gamma] \\
E_\psi \arrow[rr, "v \mapsto d(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x))(v)"'] & & E_\varphi
\end{tikzcd}$$

lin. iso



$\Rightarrow T_x M$ erhält durch $d\varphi(x): T_x M \xrightarrow{\sim} E_\varphi$

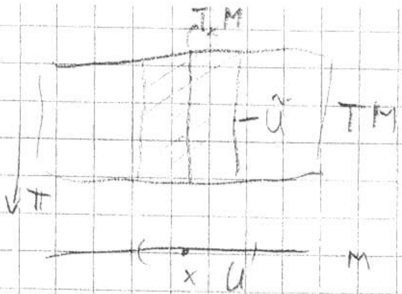
eine $\mathbb{R}$-VR-Struktur (unabh. von der Wahl d. Karte)

8.5.09

Def: $TM := \bigsqcup_{x\in M} T_x M$ (im Sinne von M[?] als Menge)

$\downarrow \pi$ Fußpunkt

M



- Karten: (U, φ) Karte von M

$\hat{U} := \pi^{-1}(U)$

$\tilde{\varphi}: \hat{U} \to E_\varphi^2$

$\tilde{\varphi}([\gamma]) = (\varphi(y), \underbrace{d\varphi(y)}_{\text{Iso} \Rightarrow \text{Homöo}}([\gamma])) \Rightarrow \tilde{\varphi}(\hat{U})$ offen

$\gamma \in T_y M$, $y \in U$

- Übergänge: $(V, \psi) \to (\hat{V}, \tilde{\psi})$

$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(a, b) = (\psi\circ\varphi^{-1}(a), \; d\psi(y)\circ(d\varphi(y))^{-1}(b)) =$

mit $y := \varphi^{-1}(a)$

$[\varphi^{-1}(a+tb)] = d\varphi(y)^{-1}(b)$

$d\psi(y) \circ d\varphi(y)^{-1}(b) = (\psi\circ\varphi^{-1})^{\cdot}(a+tb)|_{t=0} = d(\psi\circ\varphi^{-1})(a)(b)$

Übergang ist Diffeo.

- Topologie:

$X \subseteq TM$ offen gdw.

$\tilde{\varphi}(X \cap \hat{U}) \subseteq E_\varphi^2$ offen $\forall$ Karten (U, φ) von M

abgeschl. unter $\bigcup$

abgeschl. unter endl. $\bigcap$

$TM, \emptyset \in \mathcal{T}$

- Sei $X \subseteq \hat{U}$ mit $\tilde{\varphi}(X)$ offen

Beh: X offen, denn sei (V, ψ) weitere Karte

$\tilde{\psi}(X \cap \hat{V})$ offen?

$(\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}^{-1})(\tilde{\varphi}((X \cap \hat{V}) \cap (\hat{U} \cap \hat{V}))$

Homöo

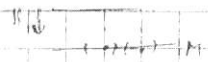
$\tilde{\varphi}(\hat{U} \cap \hat{V}) = \varphi(U \cap V) \times E_\varphi$ offen

- $\Rightarrow \tilde{\varphi}$ Homöo, denn

$W \subseteq E_\varphi^2$ offen

$\tilde{\varphi}^{-1}(W)$ offen in $\hat{U} \Rightarrow \tilde{\varphi}$ ~~offen~~ stetig

Sei $X \subseteq \hat{U}$ offen $(\tilde{\varphi}^{-1})^{-1}(X) = \tilde{\varphi}(X)$ offen $\Rightarrow \tilde{\varphi}^{-1}$ ~~offen~~ stetig

- Hausdorff: klar 

- $\pi : TM \to M$ stetig.

glatt?

$$\begin{tikzcd}
E_\varphi \times E_\varphi \arrow[d, "pr_1"'] & \tilde{U} \arrow[l, "\tilde{\varphi}"'] \arrow[r, hook] \arrow[d] & TM \arrow[d, "\pi"] \\
E_\varphi & U \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

- $f : M \to N$ glatt

$x \in M$

$df(x) : T_x M \to T_{f(x)} N$

$df(x)([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ wohldef?, linear? (Übung)

$df : TM \to TN$ glatt?

$$\coprod_{x\in M} df(x) \quad \coprod_{x\in M} T_x M \xrightarrow{\coprod_{x\in M} df(x)} \coprod_{y\in N} T_y N, \quad df|_{T_x M} = df(x)$$

$$\begin{array}{ccc}
TM & \xrightarrow{df} & TN \\
\cup & & \cup \\
\tilde{U} & \longrightarrow & \tilde{V} \\
\downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow \tilde{\psi} \\
E_\varphi \times E_\varphi & \longrightarrow & E_\psi \times E_\psi
\end{array}$$

(U, φ) Karte von M

(V, ψ) Karte von N

$(a,b) \longmapsto (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(a), d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(a)(b))$ glatt

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(a + tb)|_{t=0} = d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(a)(b)$$

- Funktor $T : MF \to MF$

$$M \longmapsto TM$$

$$(M \xrightarrow{f} N) \longmapsto (TM \xrightarrow{df} TN)$$

$d(f \circ g) = df \circ dg$ (Übung)

$\forall M$:

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "df"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "f"] \\
TN \arrow[r, "\pi"] & N
\end{tikzcd}$$

natürliche Abb.

$T \xrightarrow{\pi} id$

Funktor

$$\begin{array}{ll}
T(M) \xrightarrow{\pi_M} id(M) & \text{natürliche Trafo} \\
T(N) \xrightarrow{\pi_N} id(N) &
\end{array}$$

Tangentialvektoren und Derivationen

M MF $\rightsquigarrow C^\infty(M)$ Algebra $/\mathbb{R}$

$x \in M$ $\quad (U,f)$ $\quad x \in U \subseteq M$ offen, $f \in C^\infty(U)$

$$(U,f) \sim (V,g) \Leftrightarrow \exists \underset{\underset{x}{\Psi}}{W} \subseteq U \cap V \text{ offen mit } f|_W = g|_W$$

$\underset{\Psi}{C^\infty_{M,x}} = \{(U,f)\}/\sim$ Algebra

$[U,f]$ Keim

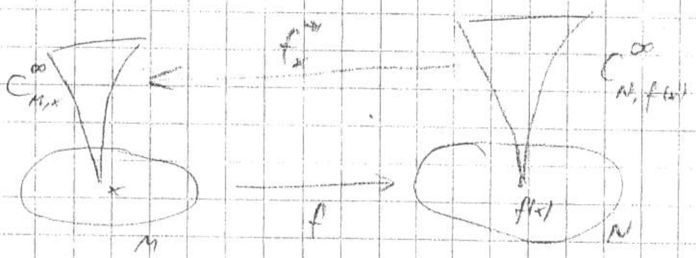
$$[U,f] \overset{\cdot}{+} [V,g] = [U \cap W, f \overset{\cdot}{+} g]$$

$$C^\infty_{M,x} \underset{\varepsilon}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \mathbb{R} \qquad \varepsilon([U,f]) = f(x)$$

$$\begin{array}{l} f: M \longrightarrow N \\ \quad\;\; \cup\!\!| \;\nearrow \\ \quad\;\; U \\ \quad\;\; \Psi \\ \quad\;\; x \end{array}$$

$\rightsquigarrow f_x^* : C^\infty_{N,f(x)} \longrightarrow C^\infty_{M,x}$ ist Algebrahomo.

$$f_x^*([U,\varphi]) := [f^{-1}(U), f^*\varphi]$$



R/K kommut. Algebra mit K Körper

$$R \underset{\varepsilon}{\overset{1}{\leftrightarrows}} K$$

(R,ε)

$\underset{\mathrm{Der}_K(R,K)}{\mathrm{Der}_K(R)} = \{X \in \mathrm{Hom}_K(R,K) \mid X(ab) = \varepsilon(a)X(b) + X(a)\varepsilon(b)\}$ K-VR

Basis (später)

$C^\infty_{\mathbb{R}^n,0}$ $\qquad \partial_i \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_{\mathbb{R}^n,0})$

$$\partial_i([U,\varphi]) = (\partial_i \varphi)(0)$$

$$\partial_i([U,\varphi][V,\psi]) = \partial_i(\varphi \cdot \psi)(0) =$$

$$= \partial_i \varphi(0)\,\psi(0) + \varphi(0)\,\partial_i \psi(0)$$

$$= \partial_i([U,\varphi])\,\varepsilon([V,\psi]) + \varepsilon([U,\varphi])\,\partial_i([V,\psi])$$

$$X(1) = X(1^2) = \varepsilon(1)X(1) + X(1)\varepsilon(1) = 2X(1)$$

$$\Rightarrow X(1) = 0$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "h"] & R' \\ \mathbb{K} \arrow[u, bend left] \arrow[u, "\varepsilon"'] \arrow[ur, "\varepsilon'"] \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

$h^*: Der_K(R') \longrightarrow Der_K(R)$

$(h^* X)(a) := X(h(a))$

Spezialfall:

$f_x^*: C^\infty_{N,f(x)} \longrightarrow C^\infty_{M,x}$

$(f_x^*)^* =: \partial f(x) : Der_{\mathbb{R}}(C^\infty_{M,x}) \longrightarrow Der_{\mathbb{R}}(C^\infty_{N,f(x)})$

$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\neq d$

Def: $\Phi_{M,x} : T_x M \longrightarrow Der_{\mathbb{R}}(C^\infty_{M,x})$

$\Phi([\gamma])([U,\varphi]) := (\varphi \circ \gamma)'(0)$ wohldef? Übung

Derivation wegen Leibnizregel

$f: M \to N$

$$\begin{tikzcd} T_x M \arrow[r, "\Phi_{M,x}"] \arrow[d, "df(x)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Der_{\mathbb{R}}(C^\infty_{M,x}) \arrow[d, "\partial f(x)"] \\ T_{f(x)} N \arrow[r, "\Phi_{N,f(x)}"'] & Der_{\mathbb{R}}(C^\infty_{N,f(x)}) \end{tikzcd}$$

$\partial f(x)(\Phi_{M,x}([\gamma]))([U,\varphi]) =$

$= \Phi_{M,x}([\gamma])([f^{-1}(U), \varphi \circ f]) =$

$= (\varphi \circ f \circ \gamma)'(0)$

Andererseits $\Phi_{N,f(x)}(df(x)[\gamma])([U,\varphi]) =$

$= (\varphi \circ f \circ \gamma)'(0)$

Satz: $\Phi_{M,x} : T_x M \longrightarrow Der_{\mathbb{R}}(C^\infty_{M,x})$ ist ein $\overset{\text{lin.}}{\text{Iso}}$.

Bew: $(W, \varkappa)$ Karte von M um x, $\varkappa(x) = 0$, $E_\varkappa = \mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} T_x M \arrow[r, "\Phi_{M,x}"] \arrow[d, "d\varkappa(x)"', "\wr"] & Der_{\mathbb{R}}(C^\infty_{M,x}) \arrow[d, "\partial\varkappa(x)", "\wr"'] \\ T_0 \mathbb{R}^n \arrow[r, "\Phi_{\mathbb{R}^n,0}"] & Der_{\mathbb{R}}(C^\infty_{\mathbb{R}^n,0}) \end{tikzcd}$$

z.z. $\Phi_{\mathbb{R}^n,0}$ ist lin. Iso.

1) linear:

$v, w \in \mathbb{R}^n$

$[tv], [tw] \in T_0\mathbb{R}^n$

$[tv] + [tw] = [t(v+w)]$

$\phi_{\mathbb{R}^n,0}([t(v+w)])[U,\varphi] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(t(v+w)) =$

$= d\varphi(0)(v+w) = d\varphi(0)(v) + d\varphi(0)(w) = \phi_{\mathbb{R}^n,0}([tv])([U,\varphi]) +$

$+ \phi_{\mathbb{R}^n,0}([tw])([U,\varphi])$

- Isomorphismus

$\phi([\gamma]) = 0$

$\phi([tw])([U,\varphi]) = 0 \quad \forall [U,\varphi]$

$d\varphi(0)(w) = 0 \quad \forall \varphi$

$(dx_i)(0)(w) = w_i \quad \text{mit } w = (w_1, \dots w_n)$

$\qquad \overset{\shortparallel}{0} \quad \forall i \Rightarrow w = 0 \Rightarrow \phi$ injektiv

$\varphi \in C^\infty(B(0,\varepsilon))$ hat eine Darstellung

$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \underbrace{x^i}_{i\text{-te Koordinatenfkt}} + \psi(x)^2 \varphi(x)$

mit $\psi \equiv 0$ nahe 0 (Bew. später)

Sei $X \in \mathrm{Der}$

$X(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} X(x^i) \cdot \varphi_i(0) = \sum_{i=1}^{n} \overset{\mathbb{R}}{\overset{\in}{X(x_i)}} \partial_i(\varphi)$

$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X(x_i) \partial_i$

$\partial_i = \phi([t e_i])$

$\Rightarrow \phi$ surjektiv

12.5.09

Beh: $f \in C^\infty(B(0,\varepsilon))$

$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{C^\infty}{\overset{\in}{f_i(x)}} \left(+ r(x) \quad \text{mit } r(x) \equiv 0 \text{ nahe } 0 \right)$

Bew: $\left(\text{Wähle } \varphi \in C^\infty(B(0,\varepsilon)),\ \varphi \equiv 1 \text{ auf } B(0,\tfrac{\varepsilon}{2}) \right.$

$\left. \varphi(x) \equiv 0 \text{ für } |x| > \tfrac{3\varepsilon}{4} \right)$

$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\,dt + f(0) =$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\int_0^1 (\partial_i f)(tx)\,dt}_{=: f_i(x)} + f(0)$

Vektorfelder

Sei M glatte MF

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "X"] \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

Def: **Vektorfelder** $= \{ X \in MF(M, TM) \mid \pi \circ X = \mathrm{id} \}$

$$= \underset{\text{Schnitt}}{C^\infty(M, TM)} = \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$$

$T_x M$ VR

$(X+Y)(x) := X(x) + Y(x)$

$(\lambda X) := \lambda X(x)$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

also $\mathfrak{X}(M)$ ist $\mathbb{R}$-VR.

Karten (U, φ) Karte von M

$\rightsquigarrow (\hat{U}, \tilde{\varphi})$ Karte von TM

$d\varphi(a)(X(\varphi^{-1}(a))) = (\varphi \circ (X(\varphi^{-1}(a))))'(0)$

$(\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1})(a) = (a, X_\varphi(a))$ mit $X_\varphi \; \varphi(U) \longrightarrow E_\varphi$ glatt

$(X+Y)_\varphi = X_\varphi + Y_\varphi$

$(\lambda X)_\varphi = \lambda X_\varphi$

$f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M) \rightsquigarrow ((fX))(x) = f(x) X(x)$

$f_\varphi := f \circ \varphi^{-1}$

$(fX)_\varphi = f_\varphi \cdot X_\varphi$

Def: Sei A kommut. Algebra $/K$, M sei A-Modul

$\mathrm{Der}_K(A, M) = \{ X \in \mathrm{Hom}_K(A, M) \mid X(ab) = aX(b) + X(a)b \}$

$\mathrm{Der}_K(A, A) =: \mathrm{Der}_K(A)$

$\mathfrak{X}(M) \xhookrightarrow{\text{iso}} \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$ Umkehrabb. $D \longmapsto (f \longmapsto D(f)(x))$

$X \longmapsto X(f)(x) = \underset{T_x M}{X(x)}([M, f]) \quad [M,f] \in C^\infty_{M,x}$

$$X(f\cdot g)(x) = X(x)(f\cdot g) = X(x)(f)\,g(x) + f(x)\,X(x)(g) =$$
$$= (X(f)g + f\,X(g))(x)$$

$$X(f): M \xrightarrow{X} TM \xrightarrow{df} T\mathbb{R} \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R}$$ (Bew Saalübung)

$$T\mathbb{R} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Bem: • $\mathrm{Der}_K(A)$ ist A-Modul durch

$a \in A,\ X \in \mathrm{Der}_K(A)$

$(aX)(b) := a\,X(b)$

• $\mathrm{Der}_K(A)$ ist Liealgebra durch

~~$[\,,\,]\ A\otimes A \longrightarrow A$~~

$[\,,\,]: \mathrm{Der}_K(A) \otimes_K \mathrm{Der}_K(A) \longrightarrow \mathrm{Der}_K(A)$ Kommutator

$[X,Y](a) := X(Y(a)) - Y(X(a))$

Beh: Das ist tatsächlich eine Derivation (Übung)

Satz $X, Y \in \mathcal{X}(M)$

$[X,Y]$ ist Vektorfeld, d.h. liegt im Bild von $\mathcal{X}(M) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_M)$

Bew: $\underbrace{[X,Y](x)}_{\in \mathrm{Der} \cong T_xM}([M,f]) := X(Y(f))(x) - Y(X(f))(x)$

ist • wohldefiniert $[U,\tilde{f}] = [M,f]$ global, f ist Fortsetzung von $\tilde{f}$ durch 0

$\forall$ Keim $\exists$ globaler Repräsentant

• $f \equiv g$ nahe x

$A \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$

$A(f)(x) = A(g)(x)$, denn:

$(f-g) = (f-g)\,\psi$ mit $\psi \equiv 0$ nahe x

$A(f)(x) - A(g)(x) = A(f-g)(x) = A(\psi\cdot(f-g))(x) =$

$= A(\psi)(f-g)(x) + \psi(x)\,A(f-g)(x) = 0$

$[X,Y](x) \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_{M,x}, \mathbb{R})$

$[X,Y]_\varphi$

$X(f)_\varphi(x) = df_\varphi(x)(X_\varphi(x))$

$Y(X(f))_\varphi = d^2f_\varphi(x)(X_\varphi(x))(Y_\varphi(x)) + df_\varphi(x)(dX_\varphi(x)(Y_\varphi(x)))$

$$Y(X(f))_\varphi(x) - X(Y(f))_\varphi(x) \overset{\text{Schwarz}}{=} df_\varphi(x)\big(\underbrace{dX_\varphi(x)(Y_\varphi(x)) - dY_\varphi(x)(X_\varphi(x))}_{X_\varphi(Y_\varphi)(x) - Y_\varphi(X_\varphi)(x)}\big)$$

Notation $[X,Y]_\varphi = X_\varphi(Y_\varphi) - Y_\varphi(X_\varphi)$

$[X,Y]^i_\varphi = X^j_\varphi \partial_j Y^i_\varphi - Y^j_\varphi \partial_j X^i_\varphi$ Formal Summe über j

$X \in \mathfrak{X}(M)$

$x \in M$

Def Eine <u>Integralkurve</u> von X durch x ist eine Kurve

$\gamma : \Omega \to M$ mit

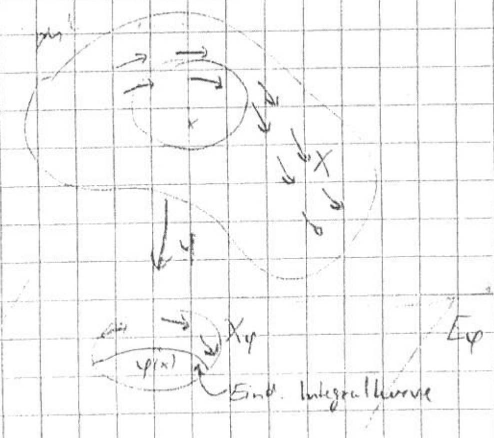
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen Intervall, $0 \in \Omega$
- $\gamma(0) = x$
- $d\gamma_t(\partial_t) = X(\gamma_t) =: \dot{\gamma}_t$

Mit $\partial_t \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$; $\partial_t(x) = [x, t]$

Satz: Für jeden Punkt ex. eine eind. max. Integralkurve von X durch x.

Bew: 1) lokale Existenz und Eindeutigkeit

2) lokal $\Rightarrow$ global (abstraktes Argument siehe 2. Semester)



Satz: Es gibt einen eind. max. <u>Fluss</u>

$$\Phi : \underset{\mathbb{R}\times M}{\overset{\cap\ \text{offen}}{U}} \to M$$

$(t,m) \mapsto \Phi_t(m)$

mit 1) für alle $m \in M$ ist $U_m := U \cap (\mathbb{R} \times \{m\})$ Intervall $\ni 0$

2) für alle $m \in M$ ist $\overset{t\mapsto}{\Phi_t(m)}$ max IK von X durch m

Bew: 1) lokale Flüsse

2) lokal zu global

Bem: $\Phi_0 = id$

$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{s+t}$ (da wo definiert)

Satz: Wenn M kompakt ist, dann ist der max Fluss von X auf $\mathbb{R} \times M$ definiert

Bew: Sachübung (folgenkompakt)

Sei M glatte MF

$X \in \mathfrak{X}(M)$

Φ Fluss zu X

$f \in C^\infty(M)$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t^*(f)(m) = df(m)(X(m))$, denn

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \times M \arrow[r, "\Phi"] & M \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \arrow[u, "i_m(x) = (x,m)"] \arrow[urr, "f \circ \Phi \circ i_m"'] & & \end{tikzcd}$$

$[\Phi \circ i_m(0+t)] = [\Phi_t(m)] = X(m)$

$df(\Phi(i_m(0)))(d\Phi(i_m(0)) \, di_m(0)(\partial_t))$

$= df(m)(X(m))$

Def: $F : M \xrightarrow{\sim} M$ diffeo

$F^*(X)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "dF"] \arrow[d, "\pi"] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "F"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TM & TM \arrow[l, "dF^{-1}"'] \\ M \arrow[u, "F^*X"] \arrow[r, "F"] & M \arrow[u, "X"'] \end{tikzcd}$$

damit $F^*X(x) \in T_x$

Satz: $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t^*(Y) = [X, Y]$, denn Kommutator ist infinitesimale Wirkung

$(F^*X)(f) = pr_2 \circ df \circ \underbrace{dF^{-1} \circ X \circ F}_{F^*X} = pr_2 \, d(F^{-1*} f) \circ X \circ F =$

$= F^*(X(F^{-1*} f))$

$\Phi_t^*(Y)(f) = \Phi_t^*(Y(\Phi_t^{-1*}f))$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t^*(Y)(f) = X(Y(f)) + Y((-X)(f)) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

15.5.09

Vektorbündel

$TM \xrightarrow{\pi} M$

$T_xM = \pi^{-1}\{x\}$ $\mathbb{R}$-VR

$TM_{|\tilde{U}} = \varphi(U) \times E_\varphi$ mit (U,φ) Karte von M

Def.: Allgemeiner Vektor(raum)bündel

- $\pi: E \longrightarrow M$ glatte Abb.
- $E_x := \pi^{-1}\{x\}$ $\mathbb{R}$-V.R. Faser
- E lokal trivial, d.h. jeder Punkt $x \in M$ hat Umgebung $U \subseteq M$, s.d. $E_{|U} := \pi^{-1}(U) \overset{\phi \text{ Diffeo}}{\cong} U \times V_\phi$ mit V_ϕ $\mathbb{R}$-VR

s.d. ~~$\phi(u,\ldots)$~~ E_u

$$\begin{tikzcd} E_{|U} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & U \times V_\phi \arrow[d, "pr_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

$\phi(u,\ldots): \overset{\text{Faser}}{E_u} = \pi^{-1}(\{u\}) \longrightarrow \{u\} \times V_\phi \cong V_\phi$ lin. Iso.

$E_{|U}$ heißt ~~triviale~~ lokale Trivialisierung

Übergang:

$$\begin{tikzcd} U \times V_\psi \arrow[dr] & E_{|U} \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & U \times V_\phi \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

mit $\phi \circ \psi^{-1}: U \times V_\psi \to U \times V_\phi$

$\phi \circ \psi^{-1}(u,v) = (u, \varkappa(u)v)$ mit $\varkappa(u) \in Hom_{\mathbb{R}}(V_\psi, V_\phi)$ Iso

und $\varkappa: U \longrightarrow Hom_{\mathbb{R}}(V_\psi, V_\phi)$ glatt.

Im Fall von TM:

$\phi = \tilde{\varphi}$

Für Karten φ, ψ

$\psi = \tilde{\psi}$

$\varkappa(u) = d(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(u)) \in Hom(V_\psi, V_\varphi)$

Bsp: · $TM \longrightarrow M$

· $M \times V \xrightarrow{pr_1} M$ mit V $\mathbb{R}$-V.R.

triviales Vektorbündel

wird durch id global trivialisiert.

· $TS^2 \not\cong S^2 \times \mathbb{R}^2$ global ($\rightarrow TS^2$ kein triv. Vektorbündel)

$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$ Kategorie der endl. dim. $\mathbb{R}$-V.R.

$\cup$

$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin,*}$ Unterkategorie: nur mit invertierbaren Homos.

Def: $F: \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin,*} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$ Funktor $F(f)$ ist immer Iso

heißt glatt, falls $F: \mathrm{Iso}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(V), F(W))$ glatt

Bsp: · i Einbettung

· $V \longmapsto V^*$
$f \longmapsto (f^*)^{-1}$ damit Funktor kovariant wird

· $V \longmapsto V \otimes V$

$f \longmapsto f \otimes f$

· $T^s_r(V) = V^{\otimes s} \otimes V^{*\otimes r}$

$f \longmapsto f^{\otimes s} \otimes f^{*-1\,\otimes r}$

· $S^k(V) = T^k(V)/R$

$R = \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_k - x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)} \mid \sigma \in \underset{}{\overset{\text{symmt. Gruppe}}{\Sigma_k}} \rangle$

$S^k(f)$ wird repräsentiert durch $f^{\otimes k}$

· $\Lambda^k(V) = T^k(V)/R'$ falls char $K \neq 2$

$R' = \langle x_1 \otimes \dots \otimes V_k - \mathrm{sign}(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)} \rangle$

· $V \longmapsto \Lambda^{\dim V} V = \det(V)$ 1-dim VR

$f \longmapsto \det f \in \mathrm{End}(\det(V)) \overset{kan}{\cong} \mathbb{R}$

Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ VBdl.

$\Phi: \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin,*} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{fin}$

Def: $\underbrace{\Phi(E)}_{\text{MF durch:}} \xrightarrow{\Phi(\pi)} M$ VBdl.

$\Phi(E) := \bigsqcup_{x \in M} \Phi(E_x) \xrightarrow{\Phi(\pi)} M$ als Menge

$E|_U \xrightarrow{a} U \times V_a$

$E_x \underset{\sim}{\xrightarrow{a_x}} V_a \quad , x \in U$

$\Phi(E)|_U \xrightarrow{\Phi(a)} U \times \Phi(V_a)$

$\Phi(a)|_{\Phi(E_x)} := \Phi(a_x)$

- Übergang:

$E|_U \xrightarrow{b} U \times V_b$

$$\begin{tikzcd} U \times \Phi(V_b) \arrow[dr] & \Phi(E)|_U \arrow[l, "\Phi(b)"'] \arrow[r, "\Phi(a)"] \arrow[d] & U \times \Phi(V_a) \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$(u,v) \longmapsto \Phi(b_u)^{-1}(v) \longmapsto \Phi(a_u)(\Phi(b_u)^{-1}(v)) = \Phi(a_u \circ b_u^{-1})(v)$

$\kappa(u) := a_u \circ b_u^{-1}$

$(u,v) \longmapsto (u, (\Phi \circ \kappa(u)) \cdot v)$ glatt, da Φ und κ glatt, Diffeo.

- Topologie:

$W \subseteq \Phi(E)$ offen $\Longleftrightarrow \Phi(a)(W \cap \Phi(E)|_U) \subset U \times \Phi(V_a)$ offen

mit dieser Topologie wird $\Phi(E)$ zu A_2 und metrisierbar

und $\Phi(a)$ sind Homöos.

Bsp: • M MF, $TM \xrightarrow{\pi} M$

$TM^* \longrightarrow M$ Kotangentialbündel (Funktor $V \longrightarrow V^*$)

• $T_r^s M \longrightarrow M$ (Funktor $V \longrightarrow T_r^s(V)$)

s-fach kovarianten und r-fach kontravarianten Tensoren

• $\Lambda^k T^*M \longrightarrow M$ (Funktor $V \longrightarrow \Lambda^k V^*$)

Bündel der k-Formen

$(\Lambda^1 T^*M = T^*M)$

Def: Kategorie der Vektorbündel Vect/M

Morphismus:
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & F \arrow[dl, "\pi_F"] \\ & M & \end{tikzcd}$$
A glatt,

$A_x: E_x \longrightarrow F_x$ linear $\forall x \in M$

Sei $E \longrightarrow M$ VRBdl

$\Phi : \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{fin},*} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{fin}}$

$\rightsquigarrow \Phi(E) \longrightarrow M$

Funktor

$\mathrm{Funct}(\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{fin},*}, \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{fin}}) \xrightarrow{F_E} \mathrm{Vect}/_M$

$F_E(\Phi) = \Phi(E)$

$(\varphi, v) \longmapsto \varphi(v)$

$$\begin{tikzcd}
V^* \otimes V \arrow[r, "\langle \cdot,\cdot \rangle"] \arrow[d, "f^{*-1} \otimes f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \arrow[d, equal] \\
W^* \otimes W \arrow[r, "\langle \cdot,\cdot \rangle"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

mit $f : V \to W$

$T_1^1(V) \longrightarrow V^* \otimes V$

~~$\mathrm{id}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$~~

$T_1^1 \xrightarrow{\langle \cdot,\cdot \rangle} \mathrm{Const}_{\mathbb{R}}$ nat. Trafo

$\mathrm{Const}_{\mathbb{R}}(V) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Const}_{\mathbb{R}}(V \xrightarrow{f} W) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

$T_r^s \longrightarrow T_{r-k}^{s-k}$

Φ Objekt in $\mathrm{Funct}(\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{fin},*}, \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{fin}})$

Morphismen sind die <u>nat. Trafos</u>:

$\Phi \xrightarrow{a} \Psi \; : \; \Phi(V) \xrightarrow{a_V} \Psi(V) \; \forall V$

s.d. für $V \xrightarrow{f} W$

$$\begin{tikzcd}
\Phi(V) \arrow[r, "a_V"] \arrow[d, "\Phi(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Psi(V) \arrow[d, "\Psi(f)"] \\
\Phi(W) \arrow[r, "a_W"] & \Psi(W)
\end{tikzcd}$$

$a : \Phi \longrightarrow \Psi \Rightarrow F_E(a) : F_E(\Phi) \longrightarrow F_E(\Psi)$

Kollektion von $a_V : \Phi(V) \to \Psi(V)$ $\forall V \in \mathrm{Vect}$

$$\begin{tikzcd}
F_E(\Phi) \arrow[r] \arrow[d, equal] & F_E(\Psi) \arrow[d, equal] \\
\Phi(E) \arrow[r] & \Psi(E)
\end{tikzcd}$$

$\Phi(E) = \coprod_{x \in M} \Phi(E_x)$

$\coprod_{x \in M} \Psi(E_x) = \Psi(E)$

$\coprod a_{E_x} : \coprod_{x \in M} \Phi(E_x) \longrightarrow \coprod_{x \in M} \Psi(E_x)$

$$\begin{tikzcd}
\Phi(E)|_U \arrow[r, "F_E(a)"] \arrow[d, "\Phi(\alpha)"', "\wr"] & \Psi(E)|_U \arrow[d, "\Psi(\alpha)", "\wr"'] \\
U \times \Phi(V_\alpha) \arrow[r] & U \times \Psi(V_\alpha)
\end{tikzcd}$$

$E|_U \overset{\alpha}{\cong} U \times V_\alpha$

$(u, v) \longmapsto (u, a_{V_\alpha}(v))$

$T^*M \otimes TM = T_1^1 M \xrightarrow{\langle \cdot,\cdot \rangle} M \times \mathbb{R}$

Sei M MF

Karte (U, φ) $\quad \varphi : U \to \mathbb{R}^n$

$x^1, \dots, x^n \in C^\infty(U)$ Komponenten von φ

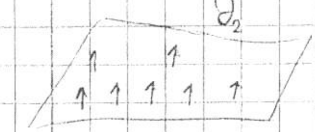
andere Karte auf U $\quad (U, \psi)$ $\quad \psi : U \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "Y"] \arrow[d, "X"'] & \mathbb{R}^n \arrow[dl, bend left, "X(Y)"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, bend right, "Y(X)"'] & \end{tikzcd}$$

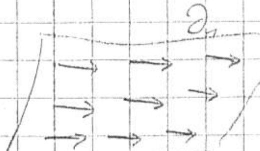
$y^1, \dots, y^n$ Komponenten von ψ

$Y^i(X) = y^i(x^1, \dots x^n) = \psi^i \circ \varphi^{-1}$ $\qquad X := X^1, \dots, X^n$

$X^j(Y)$ genauso $\qquad Y := Y^1, \dots, Y^n$



$\Gamma \cancel{\mathcal{H}}(TM_{|U}) \ni \partial_1, \dots, \partial_n : M_{|U} \to TM_{|U}$ $\qquad \partial_i p = d\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(p))(e_i)$



$\in TM$

$\partial_i(x)(x^j) = \partial_i(x^j)(x) \in C^\infty(M)$

$\partial_i(x^j) = \delta_i^j$ $\quad$ Charakterisiert die $\partial_1, \dots \partial_n$ abh. von Karte

Bilden in jedem Punkt eine Basis von $T_x M$ (Detail)

$T_x M \ni \xi^i \partial_i(x)$ Summe!

Koordinaten von $TM_{|U}$

$(x^1, \dots x^n, \xi^1, \dots \xi^n)$

Komponenten von $\tilde{\varphi}$

Sei $v \in TM_{|U}$

$x^i(v) = x^i(\pi(v)) = \varphi^i(\pi(v))$; $\quad \xi^i(v)$ bestimmt durch $v = \sum \xi^i(v) \partial_i(x)$

$\xi^i(v) = v(x^i) = d\varphi^i(x)(v)$

$y \rightsquigarrow (y^1, \dots y^n, \eta^1, \dots \eta^n)$ zu $\tilde{\psi}$

Übergang

$y^i = y^i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\eta^i(x, \xi) = \xi^j \partial_j y^i(x)$ Summe! $\Rightarrow \eta = J(y(x)) \xi$

$$\eta = \underbrace{d(\psi \circ \varphi^{-1})(x)}_{= J(y(x))}(\xi)$$

Def: $\quad T^*M \to M$

$x^1, \dots, x^n \qquad dx^i \in C^\infty(U, T^*M_{|U})$

1-Form $\quad dx^i(u) \in T_u^* M$

$dx^i(u)(\partial_j(u)) = \delta_j^i$ $\quad$ duale Basis

dx^i ist Schnitt

Def: $E \to M$ VBdl.

$\underline{C^\infty(M,E)} := \{ S \in MF(M,E) \mid \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "s"] \arrow[r] & M \end{tikzcd} \}$

<u>Schnitte</u>

Koordinaten von $T^*M|_U$

$(x^1, \dots, x^n, w_1, \dots, w_n)$

$\alpha \in T_u^*M \quad \alpha = \sum w_i(\alpha)\, dx^i(u) \qquad \omega_i(\alpha) = \alpha(\partial_i(\pi(\alpha)))$

$x^i(\alpha) = x^i(u)$ bestimmt $w_i(\alpha)$

19.5.09

Sei M MF

$x^1, \dots, x^n$ lokale Koord. von M

$x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n$ lok. Koord von TM

$y^1 \dots y^n$ andere lok. Koord. von M

$y^1 \dots y^n, \eta^1 \dots \eta^n$

$(x^i) \longmapsto (y^i)$ Koordinatenwechsel

$(x^i \xi^i) \longmapsto (y^i, \xi^j \partial_j y^i)$

Sei $A \in \mathfrak{X}(M)$

lokal $A = A^i \partial_{x^i} = B^i \partial_{y^i}$

A wird lokal bestimmt durch die Komponenten $x \longmapsto A^i(x)$

$B^i(y^{(x)}) = A^j(x) \partial_{x^j} y^i(x)$

$x^1 \dots x^n, \omega_1, \dots, \omega_n$ Koord. von T^*M

$\sigma = \omega_i\, dx^i$ 1-Form

$y^1, \dots y^n, \alpha_1, \dots \alpha_n$ "

$$\left[\begin{array}{l} x^j(y(x)) = x^j \quad | \cdot \partial_k \\ (\partial_l x^j)\, \partial_k y^l = \delta_{jk} \end{array} \right.$$

Koordwechsel:

$(x^i \omega^i) \longmapsto (y^i, (\partial_{y^i} x^j)(y(x))\, \omega_j$

Def: $\underline{C^\infty(M, \Lambda^k T^*M) = \Omega^k(M)}$ k-Formen

Sei $\sigma \in \Omega^1(M)$

lokal $\sigma = \sigma_i \, dx^i = \tau_i \, dy^i$

σ bestimmt durch $(\sigma_i)_{i=1}^n$

$$\tau_i = \partial_i x^j(y) \, \sigma_j \quad \Rightarrow \tau = J(x \circ y^{-1})^T \sigma$$

- $T_r^s(M)$

$$\Big(\underset{i=1,\dots,n}{x^i} \quad \underset{i_k, j_k = 1,\dots,n}{\xi^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r}} \Big) = \xi^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} \, \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes \partial x^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_r}$$

$$\left(y^i, \eta^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} \right)$$

$$\left(x^i, \xi^{\dots}_{\dots} \right) \longmapsto \left(y^i, \eta^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} = \partial_{k_1} y^{i_1} \dots \partial_{k_s} y^{i_s} \, \partial_{j_1} x^{l_1}(y) \dots \partial_{j_r} x^{l_r}(y) \, \xi^{k_1 \dots k_s}_{l_1 \dots l_r} \right)$$

- Sei $e_1, \dots, e_n$ Basis von V

$(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 0 < i_1 < \dots < i_k \leq n)$ Basis von $\Lambda^k V$

$dx^i(u)$ Basis von $T_u^* M$

$\omega \in \Omega^k(M)$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \, dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$$

$$\alpha_{i_1, \dots, i_k} = \partial_{i_1} x^{l_1} \dots \partial_{i_k} x^{l_k} \, \omega_{l_1 \dots l_k}$$

- Sei $E \to M$ Vbdl.

$$E^* \otimes E \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} M \times \mathbb{R}$$

$$\Gamma(E) := C^\infty(M, E)$$

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(E^*) \times \Gamma(E) \arrow[d] & \ni (e, f) \arrow[d, mapsto] \\
\Gamma(E^* \otimes E) \arrow[d, "\langle \cdot, \cdot \rangle"] & \ni (e \otimes f)(x) := e(x) \otimes f(x) \in E_x^* \otimes E_x \arrow[d, mapsto] \\
\Gamma(M \times \mathbb{R}) = C^\infty(M) & \ni \langle e, f \rangle (x) := e(x)(f(x)) = \langle e(x), f(x) \rangle
\end{tikzcd}$$

glatt → Saalübung

$\Gamma(E)$ ist $C^\infty(M)$ - Modul $\qquad \varphi \in C^\infty(M)$

$\langle \varphi e, f \rangle = \varphi \langle e, f \rangle = \langle e, \varphi f \rangle$

$\langle \varphi e, f \rangle(x) = (\varphi e)(x)(f(x)) = \varphi(x)\, e(x)(f(x)) =$

$= \varphi \langle e, f \rangle (x)$

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinear

- $\omega \in \Gamma(E^*)$

$\Gamma(E) \ni e \longmapsto \omega(e) := \langle \omega, e \rangle \in C^\infty(M)$

$C^\infty(M)$ - linear

Satz: Beh: $\Gamma(E^*) \overset{\Phi}{\cong} \{ \omega : \Gamma(E) \longrightarrow C^\infty(M) \mid C^\infty(M) \text{ linear} \}$ Iso von $C^\infty(M)$-Moduln

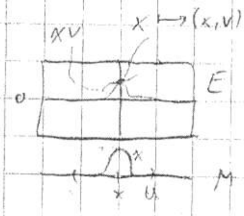
- Sei $\omega : \Gamma(E) \longrightarrow C^\infty(M)$

gesucht $A \in \Gamma(E^*)$ mit $\Phi(A) = \omega$

$A(x)(e) = ?$ mit $e \in E_x$

$e \in E_x$ gegeben. Dann ex $\hat{e} \in \Gamma(E)$ mit

$\hat{e}(x) = e$, denn:



$E|_U = U \times V$

$(e) \longmapsto (x, v)$

wähle $\chi \in C_c^\infty(U)$ mit $\chi(x) = 1$

bilde $\chi v \rightsquigarrow C_c(U, E)$

$A(x)(e) = \omega(\hat{e})(x)$ wohldef?

Seien $\hat{e}, \hat{f} \in \Gamma(E)$ mit $\hat{e}(x) = \hat{f}(x)$

möchte $\hat{e} - \hat{f} = \varkappa \hat{g}$ mit $\hat{g} \in \Gamma(E)$, $\varkappa \in C^\infty(M)$, $\varkappa(x) = 0$, dann

$\omega(\hat{e})(x) - \omega(\hat{f})(x) = \omega(\hat{e} - \hat{f})(x) = \omega(\varkappa \hat{g})(x) \overset{\omega \text{ ist } C^\infty(M)\text{-lin.}}{=}$

$= \varkappa(x)\, \omega(\hat{g})(x) = 0$

in Trivialisierung

$(\hat{e} - \hat{f})(y) \hat{=} (y, g(y))$ $\qquad g: U \longrightarrow V \hat{=} \mathbb{R}^N$, $g \mapsto (g^1, \ldots, g^N)$

$g^i(x) = 0 \; \forall i$

$g^i(y) \overset{\text{Lemma}}{=} \sum (y^j - x^j)\, h^i_j(y)$

$\hat{e} - \hat{f} = \chi^2(\hat{e} - \hat{f}) + (1 - \chi^2)(\hat{e} - \hat{f})$

$\chi^2 g^i(y) = \sum \big(\overbrace{\chi(y^j - x^j)}^{\varkappa^j}\big)\big(\overbrace{h^i_j(y)\,\chi}^{\hat{g}^i_j}\big)$

$\tilde{e} - \hat{f} = (1-\chi^{i2})(\hat{e}-\hat{f}) + \sum \chi^{ij} \hat{g}_j$

$A : M \longrightarrow E^*$ Schnitt. glatt?

$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^* \arrow[dl] \\ M & \end{tikzcd}$

lokale Trivialisierung:

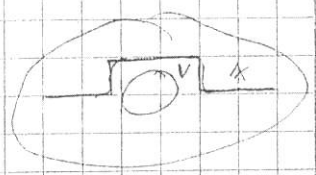
$E_{|U} = U \times V$ $\quad v_1, \dots, v_n$ Basis

$E^*_{|U} = U \times V^*$ $\quad v^1, \dots, v^n$ duale Basis

$A = \sum A_i v^i$

z.z. $A_i \in C^\infty(U)$

$V \in \overline{V} \subset U$ $\quad y \mapsto (y, v_i)$



wähle $\chi \in C_c^\infty(U)$ mit $\chi_{|V} \equiv 1$

$y \mapsto (y, v_i)\, \chi(y) \in C_c^\infty(U, E_{|U})$

$A_{i|V} = \omega(\tilde{v}_i)_{|V} \in C^\infty(V)$

$\Rightarrow \Phi$ surjektiv

- Injektivität:

$\Phi(A) = 0 \quad \Phi(A)(e) = 0 \quad \forall e \in \Gamma(E)$

$\Phi(A)(e)(x) = 0$

$\overset{\shortparallel}{A(x)(e(x))}$ also $A(x) = 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow A = 0$ $\square$

- $f \in C^\infty(M)$

$df \in \Omega^1(M)$ definiert durch

$df(X) := X(f) \in C^\infty(M) \quad X \in \mathfrak{X}(M)$

$df(\varphi X) = \varphi X(f)$ mit $\varphi \in C^\infty(M)$

$\Rightarrow df$ ist $C^\infty(M)$-linear

In Koordinaten: $x^1, \dots, x^n$

$df = ?_i\, dx^i \qquad ?_i = df(\partial_i) = \partial_i f$

$= \partial_i f\, dx^i$

Korollar: $\Omega^1(M) \cong \{\omega : \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M) \mid \omega$ ist $C^\infty(M)$-linear$\}$

$= \mathrm{Hom}\,(\Gamma(TM), C^\infty(M))$

22.5.09

Sei V $\mathbb{R}$-VR, $\dim V < \infty$

Satz: $\Lambda^k V^* \overset{\sim}{\underset{\phi}{=}} Alt^k V$ OBdA $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k V^*$ □

$$\phi(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \; \alpha_1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha_k(v_{\sigma(k)})$$

Satz: $\Gamma(\Lambda^k E^*) \overset{\sim}{\underset{\psi}{=}} \{ \omega : \Gamma(E) \times \ldots \times \Gamma(E) \longrightarrow C^\infty(M) \mid \omega$ ist $C^\infty(M)$-linear und alternierend $\}$ ~~$= Alt^k \Gamma(E)$~~

$\phi(\psi^{-1}(\omega)(x))(e_1, \ldots, e_k) =$ $e_i \in E_x$, wähle $\tilde{e}_i \in \Gamma(E)$ mit $\tilde{e}_i(x) = e_i$

$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma \; \omega(\tilde{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \tilde{e}_{\sigma(k)})(x)$

wohldef: siehe letzter Satz

Sei V K-VR K Körper

$T^k(V) = V^{\otimes k}$, $V^{\otimes 0} := K$

Def: $T(V) = \bigoplus_{k \geq 0} T^k(V)$ assoziative Algebra

$$\underset{\in T^k(V)}{x_1 \otimes \ldots \otimes x_k} \cdot \underset{\in T^l(V)}{y_1 \otimes \ldots \otimes y_l} = \underset{\in T^{l+k}(V)}{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_l}$$

$\mathbb{Z}$-graduiert

Sei G Gruppe

Def: Eine G-graduierte Algebra über K ist eine Algebra A über K mit einer Zerlegung $A = \bigoplus_{g \in G} A^g$ s.d.
$A^g \cdot A^h \subseteq A^{gh}$

Def: $\Lambda(V) := \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k(V)$ $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$

$I(V) := \bigoplus_{n \geq 0} I^n(V)$, $I^n(V) = \langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} \rangle$

$I(V)$ ist zweiseitiges Ideal:

$T(V)\, I(V)\, T(V) = I(V)$

$\Rightarrow \Lambda(V)$ ist Algebra durch

$(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k) \cdot (y_1 \wedge \ldots \wedge y_l) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_l$

$0 \longrightarrow I(V) \longrightarrow T(V) \longrightarrow \Lambda(V) \longrightarrow 0$

$\Lambda(V)$ ist $\mathbb{Z}$-graduiert

$\Lambda(V) = T(V) / I(V)$

$\Lambda(V)$ ist graduiert kommutativ

Tensoralgebra nicht kommutativ nur assoziativ

~~$\chi: G \longrightarrow \{\pm 1\}$ Homo~~ „absoluter Unsinn"

~~Def: A ist (χ) kommutativ, wenn für $x \in A^g$ und $y \in A^h$ gilt $x \cdot y$ "~~

$x \in \Lambda^k(V)$, $y \in \Lambda^l(V)$

Satz: $x \wedge y = (-1)^{kl} y \wedge x$ (= graduiert kommutativ)

Bew: $(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k)(y_1 \wedge \ldots \wedge y_l) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_l = \operatorname{sgn}(\pi)\, y_1 \wedge \ldots \wedge y_l \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_k =$

$= (-1)^{kl} y \wedge x$

Def: $\Omega(M) := \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M)$

$\mathbb{Z}$-graduierte Algebra über $C^\infty(M)$

Sei $\omega \in \Omega^k(M)$, $\alpha \in \Omega^l(M)$, $\omega \wedge \alpha \in \Omega^{k+l}(M)$

$(\omega \wedge \alpha)(x) := \omega(x) \wedge \alpha(x)$

$(f\omega \wedge \alpha) = (\omega \wedge f\alpha) = f(\omega \wedge \alpha)$ für $f \in C^\infty(M)$

$\omega \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge \omega$

$T(V^*)$, $X \in V$

Def: $i_X: T(V^*) \longrightarrow T(V^*)$

$i_X(\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_n) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \omega_i(X)\, \omega_1 \otimes \ldots \otimes \hat{\omega}_i \otimes \ldots \otimes \omega_n$

- wohldef
- $i_X: T^l(V^*) \longrightarrow T^{l-1}(V^*)$

  i_X hat Grad -1
- i_X ist linear
- $i_X(\alpha \otimes \omega) = i_X(\alpha) \otimes \omega + (-1)^{|\alpha|} \alpha \otimes i_X(\omega)$

  mit $\alpha \in T^{|\alpha|}(V^*)$

$\Rightarrow i_X$ ist graduierte Derivation

Def: A $\mathbb{Z}$-Algebra, $d \in \mathrm{Hom}(A, A)$

d hat ~~Grad~~ i, falls $d(A^l) \subseteq A^{l+i}$

d ist graduierte Derivation, wenn

$d(ab) = d(a)b + (-1)^{i|a|} a\, d(b)$

$i_X \in \mathrm{Der}^{-1}(T(V^*), T(V^*))$ ← Grad

Satz: $i_X(I(V^*)) \subset I(V^*)$ (Beh. 1)

$I(V^*) = T(V^*)\, I^2(V^*)\, T(V^*)$ (Beh. 2)

$i_X(I^2(V^*)) = 0$ (Beh. 3)

Bew: Beh 2+3 $\Rightarrow$ Beh 1

$$i_X(\overset{T(V^*)}{\alpha} \otimes \overset{I^2(V^*)}{\beta} \otimes \overset{T(V^*)}{\gamma}) = i_X(\alpha)\otimes\beta\otimes\gamma + (-1)^{|\alpha|}\alpha\otimes \overset{0 \text{ (Beh 3)}}{i(\beta)}\otimes\gamma + (-1)^{|\beta|}\alpha\otimes\beta\otimes i_X(\gamma) \in I(V^*)$$

Beh 3: $\alpha\otimes\beta + \beta\otimes\alpha$ ← Alles wird erzeugt von dem, $\alpha, \beta \in V^*$

$$i_X(\alpha\otimes\beta + \beta\otimes\alpha) = i_X(\alpha)\beta - \alpha\, i_X(\beta) + i_X(\beta)\alpha - \beta\, i_X(\alpha) = 0$$

Beh 2: $(1,2)(2,3) = \sigma \in S_3$

$$I^3 \ni x_1\otimes x_2\otimes x_3 - x_{\sigma(1)}\otimes x_{\sigma(2)}\otimes x_{\sigma(3)} \overset{!}{\in} T(V^*)\, I^2(V^*)\, T(V^*)$$

$$= x_1\otimes x_2\otimes x_3 + x_1\otimes x_3\otimes x_2 - x_1\otimes x_3\otimes x_2 - x_3\otimes x_1\otimes x_2$$

$$\underset{T}{\underset{\cap}{x_1}}\otimes \underset{I^2}{\underbrace{(x_2\otimes x_3 + x_3\otimes x_2)}} - \underset{I^2}{\underbrace{(x_1\otimes x_3 + x_3\otimes x_1)}}\otimes \underset{T}{\underset{\cap}{x_2}}$$

i.a. benutze, dass jedes $\sigma \in S_k$ als Komposition von Flips geschrieben werden kann.

~~Def~~ Kor: $\Rightarrow$ erhalte $i_X \in \mathrm{Der}^{-1}(\Lambda(V^*), \Lambda(V^*))$ durch

$$i_X(\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n) = \sum (-1)^n \alpha_i(X)\, \alpha_1\wedge\ldots\wedge\hat{\alpha_i}\wedge\ldots\wedge\alpha_n$$

$$\begin{tikzcd} T(V^*) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\pi"] & T(V^*) \arrow[d, "\pi"] \\ T(V^*)/I(V^*) \arrow[r, "i_X"] & T(V^*)/I(V^*) \end{tikzcd}$$

$X \in \mathfrak{X}(M)$, $i_X : \mathrm{Der}^{-1}_{C^\infty(M)}(\Omega(M), \Omega(M))$

Def: $(i_X\omega)(x) := i_{X(x)}\,\omega(x)$ $\omega \in \Omega(M)$, $x \in M$

$i_X\omega = \omega(X, \ldots)$
Einsetzen ins 1. Arg.

$d: \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$

$(df)(X) := X(f)$ $X \in \mathfrak{X}(M)$

$d(fg) = df\,g + f\,dg$

Satz: d hat Ausdehnung zu $d \in \mathrm{Der}^1_{\mathbb{R}}(\Omega(M), \Omega(M))$
diese ist eindeutig ~~und es gilt~~ s.d. $d^2 = 0$

Bew: • Eindeutigkeit: Seien $f_i \in \Omega^0(M)$

Sei $\omega = f_0 \, df_1 \wedge \ldots \wedge df_k$, dann

$d\omega = df_0 \wedge \ldots \wedge df_k$

Jedes $\omega \in \Omega^k(M)$ ist Summe von Formeln dieser Form, denn:

1. Zerlegung von ω auf Kartengebiete
2. Koordinatendarstellung
3. lokale Darstellung durch 0 auf M fortsetzen

Sei $\omega \in \Omega^k(M)$, (U_α, x_α) Überdeckung von M (Karten), $(\chi_\alpha)_\alpha$ Zerlegung der 1, s.d. $\chi_\alpha \in C^\infty_c(U_\alpha)$

$$\omega = \sum_\alpha \chi_\alpha \omega = \sum_{\alpha, I} (\chi_\alpha \omega_I) \, dx_\alpha^I = (*)$$

$$\omega|_{U_\alpha} = \sum_I \omega_I \, \underset{\substack{\shortparallel \\ dx_\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{i_k}}}{dx_\alpha^I} \quad \text{mit } I = (i_1 < \ldots < i_k) \text{ Multiindex}$$

$C^\infty_c(U_\alpha) \ni \tilde{\chi}_\alpha$

$\tilde{\chi}_\alpha|_{\mathrm{supp}\, \chi_\alpha} \equiv 1$

$$(*) = \sum_{\alpha, I} (\chi_\alpha \omega_I) \, \underbrace{d(\tilde{\chi}_\alpha x_\alpha^{i_1})}_{= d\tilde{\chi}_\alpha x_\alpha^{i_1} + (-1)^0 \tilde{\chi}_\alpha dx_\alpha^{i_1}} \wedge \ldots \wedge d(\tilde{\chi}_\alpha x_\alpha^{i_k})$$

da $d\tilde{\chi}_\alpha \chi_\alpha = 0$

$\tilde{\chi}_\alpha \chi_\alpha = \chi_\alpha$

• Existenz:

Sei $\omega \in \Omega^p(M)$, $X_0, \ldots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$

$$(d\omega)(X_0, \ldots, X_p) := \sum_{i=0}^p (-1)^i X_i(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_p)) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p)$$

• definiert eine Form $d\omega$ ($C^\infty(M)$-linear)

• Für $\omega = f_0 \, df_1 \ldots df_n$

$\Rightarrow d\omega = df_0 \wedge \ldots \wedge df_k$

• erfüllt $d^2 = 0$ und ist Derivation vom Grad 1

26.5.09

$$d: \underset{\substack{\shortparallel \\ C^\infty(M)}}{\Omega^0(M)} \longrightarrow \Omega^1(M)$$

$$f \longmapsto df: M \ni p \mapsto df_p: T_pM \to \mathbb{R}, \quad X_p \mapsto X_p(f)$$

In Koordinaten: $df_p = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \overbrace{f(\varphi^{-1}(x))}^{\in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} \overbrace{(dx^i)}^{\in T_p^*M}$ gemeint ist $dx^i(p)$

kurz: $df_p = \frac{\partial}{\partial x_i} f \, dx^i$
↑ Koord. Darstellung

$\Omega(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M)$

Satz: Es ex. eindeutige Fortsetzung (lineare)

$d : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(M)$

s.d. 1) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\eta$

für homogene $\omega \in \Omega^{\deg \omega}(M)$

2) $d \circ d = 0$ ($\Rightarrow$ Differential)

Bew.

- Eindeutigkeit (letzte Stunde)
- Existenz: $d: \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$

$\omega \longmapsto (d\omega : M \ni p \longmapsto (d\omega)_p \in \Lambda^{k+1} T^*M)$

$X_0, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$

$C^\infty(M) \ni (d\omega)(X_0, \dots, X_k) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots \hat{X}_i, \dots X_k)) +$

$+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots \hat{X}_i \dots \hat{X}_j \dots X_k)$

ist • alternierend (Übung)

• $C^\infty(M)$-multilinear (Übung)

$v_0, \dots, v_k \in T_pM$, wähle dazu $X_0, \dots X_k \in \Gamma(TM)$

mit $X_{j,p} = v_j$ ($= X_j(p)$)

$(d\omega)_p(v_0, \dots v_k) := ((d\omega)(X_0, \dots X_k))_p$

ist wohldefiniert (Übung) $\alpha \in \Omega^1(M)$, $\alpha_p(v) := \alpha(X)_p$ mit $X_p = v = \tilde{X}_p$

$X - \tilde{X} = g(\cdot) Y$ mit $g(p) = 0$

$\alpha(X)_p - \alpha(\tilde{X})_p = \alpha(X - \tilde{X})_p = g(\cdot)\alpha(Y)_p = 0$

In lokalen Koord.: $\omega \in \Omega^k(M)$

OBdA: $\omega = f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$

$d\omega(\partial_2, \dots, \partial_{k+2}) = 0$

$(d\omega)\left(\frac{\partial}{\partial x^L}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^L} f & \text{für } L > k \\ 0 & \text{sonst (alternierend)} \end{cases}$

$d\omega = \underbrace{\sum_i \partial_i f \, dx^i}_{= df} \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$

$d(d\omega) = \sum_{ij} \underbrace{\partial_j \partial_i}_{\text{symm}} f \, \underbrace{dx^j \wedge dx^i}_{\text{a-symm}} \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = 0$

$\Rightarrow$ 2)

1) Sei $\eta = g\, dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^{k+l}$

$$d(\omega \wedge \eta) = d(fg\, dx^1 \wedge \ldots dx^k \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^{k+l}) =$$

$$= ((\partial_i f) g + f(\partial_i g))\, dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{k+l} =$$

$$= (\partial_i f)\, dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots dx^k \wedge g\, dx^{k+1} \wedge \ldots$$

$$+ (-1)^k f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k \wedge \ldots \partial_i g\, dx^i \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^{k+l}$$

$$= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$ $\square$

Zusammenfassung

$(\Omega(M), \wedge, d)$ ist eine differentiell graduierte Algebra (DGA), d.h.

- $\Omega(M)$ ist graduierter VR.
- mit graduiert kommutativem Produkt $\wedge$
- d ist Differential, graduiert derivativ

Sei $f: M \longrightarrow N$ glatte Abb.

$$Tf = \underset{\text{„}df\text{" von früher}}{f_*}: T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

$$v \longmapsto \big(\overset{df(p)(v)(\varphi)\text{ von früher}}{f_* v : \varphi \mapsto v(\varphi \circ f)}\big), \quad \varphi \in C^\infty(N)$$

Sei $\omega \in \Omega^k(N)$, $v_i \in T_pM$

$$\Omega f = (f^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) := \omega_{f(p)}(f_* v_1, \ldots, f_* v_k)$$

heißt die zurückgezogene k-Form von ω entlang f.

Satz (Zurückziehen von Formen)

$$f^*: \Omega(N) \longrightarrow \Omega(M)$$

ist ein Homomorphismus von DGA, d.h.

a) $f^*: \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$ $\mathbb{R}$-linear nicht $C^\infty(M)$-linear

b)
$$\begin{tikzcd}
\Omega(N) \times \Omega(N) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "f^* \times f^*"] & \Omega(N) \arrow[d, "f^*"] \\
\Omega(M) \times \Omega(M) \arrow[r, "\wedge"] & \Omega(M)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

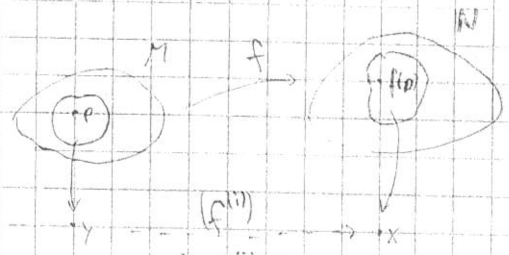
c)
$$\begin{tikzcd}
\Omega(N) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^*"] & \Omega(N) \arrow[d, "f^*"] \\
\Omega(M) \arrow[r, "d"] & \Omega(M)
\end{tikzcd}$$

kommutiert

Bew: a) klar.

b) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ klar

c) Zwischenüberlegung:



$$x^i = f^{(i)}(y)$$

Beh: $f^*(dx^i) = \frac{\partial}{\partial y^\mu} f^i(y)\, dy^\mu$ = i-te Zeile d. Jacobi-Matrix

Bew: $f^*(dx^i)\left(v^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = dx^i\left(f_*\left(v^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\right)$ $= d(\varphi(x))(\partial_{y^\alpha}(\cdot))$ $\quad v^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \in T_pM$

$f_*\left(v^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)(\varphi) = v^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(\varphi(f(y))\right) = v^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} f^j(y) \frac{\partial}{\partial x^j}\varphi(x) \qquad \varphi \in C^\infty(N)$

also: $dx^i\left(f_*\left(v^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\right) = v^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} f^i(y) = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} f^i(y)\, dy^\alpha\left(v^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)$ □

$\eta = g\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$

$d(f^*\eta) = d\left(g(f(-))\, f^*dx^1 \wedge \dots \wedge f^*dx^k\right) =$

$= \frac{\partial}{\partial y^\mu} g(f(y))\, dy^\mu \wedge f^*dx^1 \wedge \dots \wedge f^*dx^k =$

$= \frac{\partial}{\partial x^i} g(x) \frac{\partial}{\partial y^\mu} f^i(y)\, dy^\mu \wedge f^*dx^1 \wedge \dots \wedge f^*dx^k =$

$= \frac{\partial}{\partial x^i} g(f(-))\, f^*(dx^i) \wedge f^*(dx^1) \wedge \dots \wedge f^*(dx^k) =$

$= f^*\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g\; dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k\right) =$

$= f^*(d\eta)$

□

Beobachtung 1) $L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$, $\quad L \xrightarrow{f \circ g} N$

$g^* f^* \omega \qquad f^*\omega \qquad \omega \in \Omega^k(N)$

$\parallel$

$(f \circ g)^*\omega \qquad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

2) $M \xrightarrow{id} M$

$id^*(\omega) \qquad \omega \in \Omega^k(M)$

$\parallel$

ω

$id_M^* = id_{\Omega(M)}$

Zusammenfassung: Die Zuordnung

$\Omega \quad MF \longrightarrow DGA \qquad M \longmapsto \Omega(M)$

$(M \xrightarrow{f} N) \longmapsto (\Omega(M) \xleftarrow{f^*} \Omega(N))$

ist kontravarianter Funktor von der Kat. d. MF in die Kat. der DGA.

Def: $X \in \Gamma(TM)$

$\Phi_t : M \to M$ Fluss von X

$\omega \in \Omega^k(M)$

$\frac{d}{dt}\big|_{t=0} (t \longmapsto \Phi_t^*(\omega)) = L_X \omega$

heißt **Liesche Ableitung** von ω in Richtung X

29.5.09

Satz: <u>Cartans magische Formel</u>

$$L_X \omega = (d i_X + i_X d)(\omega) \qquad L_X = [d, i_X]$$

Bew: (1) Sei $f \in C^\infty(M)$, $L_X f = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi_t^* f = X(f) =$

$= X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} (dx^i(X)) = i_X df + d\,\overbrace{i_X f}^{=0}$

(2) $df \in \Omega^1(M)$, $L_X df = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi_t^* df = d\left(\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi_t^* f\right) =$

$= d(i_X df) = (d i_X) df + \overbrace{i_X d d f}^{=0}$

(3) $(d i_X + i_X d)(\omega \wedge \eta) = d(i_X \omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge i_X \eta) +$

$+ i_X (d\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge d\eta) = d i_X \omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|-1} i_X \omega \wedge d\eta +$

$+ (-1)^{|\omega|} d\omega \wedge i_X \eta + \omega \wedge d i_X \eta + i_X d\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|+1} d\omega \wedge i_X \eta +$

$+ (-1)^{|\omega|} i_X \omega \wedge d\eta + \omega \wedge i_X d\eta =$

$= \cancel{d i_X \omega \wedge \eta} \; \underbrace{((d i_X + i_X d)\omega)}_{L_X \omega} \wedge \eta + \omega \wedge \underbrace{(d i_X + i_X d)\eta}_{L_X \eta}$

(4) Induktion

$\square$

Bem: $L_X(\omega \wedge \eta) = (L_X \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (L_X \eta)$

$\Rightarrow$ Derivation

<u>Symplektische Geometrie (aka. Klassische Mechanik)</u>

Sei $M = T^*Q$, Q MF., $T^*Q \xrightarrow{\pi} Q$

$$\begin{tikzcd}
 & TQ & & \\
T(T^*Q) \arrow[ur, "T\pi"] \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & & TQ \times T^*Q \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[r, "\langle .,. \rangle"] & \mathbb{R} \\
 & T^*Q & &
\end{tikzcd}$$

$\alpha \in \Omega^1(T^*Q)$

α heißt **Kanonische 1-Form**

Seien $q^1, \dots, q^n$ Koordinaten auf Q

$\Rightarrow$ assoziierte Koordinaten in Faserrichtung $p_i(\omega) := \iota_{\frac{\partial}{\partial q^i}} \omega \equiv: \frac{\partial}{\partial q^i} \lrcorner\, \omega$

$\phantom{p_i(\omega) := \iota_{\frac{\partial}{\partial q^i}} \omega} \overset{\shortparallel}{\omega\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)}$

$\Rightarrow p_1 \ldots p_n$

$\exists\, P$ $\qquad$ $\omega(q) \in T_q^*Q$ $\qquad$ $\omega_q\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)$

$$TT^*Q \ni (\xi, \omega) = \left(\left(v^i \frac{\partial}{\partial q^i}, w^i \frac{\partial}{\partial p^i}\right), (\omega_q, \underset{\in Q}{q})\right) \xrightarrow{\alpha} \left(v^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \omega_q\right) = v^i p_i(\omega)$$

$$= (p_i\, dq^i)(\xi)$$

$\Rightarrow$ In lokalen Koordinaten $\alpha = p_i\, dq^i$

$\omega := -d\alpha$ in Koord. $\omega = dq^i \wedge dp_i = dq^i \otimes dp_i - dp_i \otimes dq^i$

$$\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial q^1} \ldots \frac{\partial}{\partial q^n}\ \frac{\partial}{\partial p_1} \ldots \frac{\partial}{\partial p_n} \\ \omega = \begin{pmatrix} 0 & +\mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \omega_{ij}$$

$$\omega = \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$$

= <u>Standard symplektische Matrix</u>

Def: $\omega \in \Omega^2(M)$ heißt <u>nicht ausgeartet</u>, wenn

$T_x M \longrightarrow T_x^* M$, $v \longmapsto i_v \omega$ Isomorphismus von VR. für alle $x \in M$ ist.

$\omega(v, \cdot) \equiv 0 \Rightarrow v = 0$

Def: $\omega \in \Omega^2(M)$ mit $d\omega = 0$ und ω nicht ausgeartet heißt <u>symplektische Form</u>. (M, ω) heißt <u>symplektische MF</u>.

Bem: $(T^*Q, \omega := -d\alpha)$ ist sympl. MF.

Für (M, ω) sympl. MF gibt es überall lokale Koord mit

$\omega = dq^i \wedge dp_i$ (Satz von Darboux)

Frage: Gibt es immer symplektische (exakte $\omega = d\alpha$) Form?

Antwort: Nein, z.B. (i) $\dim M$ muss gerade sein

(ii) auf S^{2n} mit $n > 1$ gibt es keine sympl. Form.

(iii) M kompakt (ohne Rand)

$\Rightarrow M$ hat keine exakte sympl. Form.

Def: (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) sympl. MF, $\varphi: M_1 \xrightarrow{\cong} M_2$ Diffeo

Dann heißt φ <u>Symplektomorphismus</u>, wenn $\omega_1 = \varphi^* \omega_2$

Problem: Entscheide, ob (M_1, ω_1) und (M_2, ω_2) symplektomorph sind.

Schwieriges Problem (ultra)

Beobachtung: Sei ϕ_t Fluss zu Vektorfeld X auf (M,ω)

Dann gilt ϕ_t symplektom. $\Leftrightarrow$ $\phi_t^* \omega = \omega$ $\Leftrightarrow$ $L_X \omega = 0$

Hamiltonsche Mechanik: (M,ω) ist Phasenraum = (Orte, Impulse)

Def: Sei $f \in C^\infty(M)$, dann gibt es ein eind. VF $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ mit

$i_{X_f} \omega = df$

$\hat{\omega}: X \longrightarrow i_X \omega$ Iso, $X_f := \hat{\omega}^{-1}(df)$

X_f heißt von f erzeugtes Hamiltonsches Vektorfeld

Sei $M := T^*Q$, $\omega = dq^i \wedge dp_i$ (lokal)

$df = \frac{\partial}{\partial q^i} f dq^i + \frac{\partial}{\partial p_i} f dp_i$

$i_{\frac{\partial}{\partial q^i}} \omega = dp_i$, $i_{\frac{\partial}{\partial p_i}} \omega = -dq^i$

Dann $\underset{\text{Energie}}{df} = \left(-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}\right) \lrcorner\, \omega$

$f = H \in C^\infty(T^*Q)$, Hamiltonsche Fkt.

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}\right\} \text{Hamiltonsche Bewegungsgleichungen}$$

$$H = \overbrace{\frac{1}{2m} \sum p_i p_i}^{\text{kin. Energie}} + \overbrace{V(q)}^{\text{pot. Energie}}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{1}{m} p_i \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial V}{\partial q^i} \end{aligned}\right\} a = \ddot{q}^i = \frac{1}{m}\dot{p}_i = -\frac{1}{m}\underbrace{\frac{\partial V}{\partial q^i}}_{\nabla E} \Rightarrow F = ma = -\nabla E$$

(M,ω) symplektisch $\Rightarrow$ $\dim M = 2n$

$\omega \wedge \ldots \wedge \omega = \omega^{\wedge n} \in \Omega^{2n}(M)$ und $\omega^{\wedge n}$ nirgends null.

In Koordinaten $\omega^{\wedge n} = dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n$ heißt

in der Mechanik Phasenraum-Volumen

Satz von Liouville: Hamiltonsche Flüsse erhalten das Phasenraum-Volumen

Bew: $L_{X_H} \omega^{\wedge n} = n\, \omega^{\wedge(n-1)} \wedge (L_{X_H}\omega)$

$L_{X_H}\omega = (d i_{X_H} + i_{X_H} d)(\omega) = d i_{X_H} \omega = ddH = 0$

$L_{X_H} H = X_H H = i_{X_H} dH = i_{X_H} i_{X_H} \omega = 0$

Sei: $0 = L_X \omega = (d i_X + i_X d)\omega = d i_X \omega = 0 \Rightarrow i_X \omega$ geschlossen

Frage: $\exists\, f \in C^\infty(M)$ mit $i_X \omega = df$? $i_X\omega$ exakt?

Antwort: i. A. nicht.

globale Frage ⇒ schwierig

Def: $0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \to \ldots$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega^q_{\text{geschl.}}(M) = \operatorname{Ker} d_{|\Omega^q(M)} \\ \quad\cup \\ \Omega^q_{\text{exakt}}(M) = \operatorname{Im} d_{|\Omega^{q-1}(M)}\end{array}\right\} H^q(M) = \Omega^q_{\text{geschl.}}(M) / \Omega^q_{\text{exakt}}(M)$$

$H^q(M)$ heißt q-te de Rham Kohomologie

$\Omega_{\text{geschl.}}(M) \to H^q(M)$, $\omega \mapsto [\omega]$ heißt die Kohomologie-Klasse von ω

Beob: ω geschl., dann ist ω exakt $\Leftrightarrow [\omega] = 0$

Bsp: $H^0(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}$, $H^{q>0}(\mathbb{R}^0) = 0$

$H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $H^{q>0}(\mathbb{R}) = 0$

Poincaré-Lemma: $H^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$

$H^q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = n, 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

5.6.09

Nachtrag: <u>Transformationsformel für das Lebesguemaß</u>

$U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\phi: U \to V$ Diffeo (reicht C^1)

$J(\phi)$ Jacobimatrix

$f \in C_c(V)$

$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$ definiert, mit dx Lebesguemaß

$\phi^* f \in C_c(U)$

Satz: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi^* f)(y) \, |\det J(\phi(y))| \, dy$

Bem: $n = 1$: Trafoformel für Riemann-Integral

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(y)) \, |\phi'(y)| \, dy$

Wissen: $\int (\phi^* f)\, d\mu = \int f \, d(\phi_* \mu)$

dann Satz $\Leftrightarrow \phi_*(|\det J(\phi)| \mathcal{L}) = \underset{\text{Lebesguemaß}}{\mathcal{L}}$

Bew:

- 1. Spezialfall

$\Phi(x) = (\underset{\mathbb{R}^{n-1}}{x'}, \underset{\mathbb{R}}{\varphi(x)})$

$x = (x', x^n)$, $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$J(\Phi)(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n-1} & 0 \\ \partial_1 \varphi(x), \dots & \partial_n \varphi(x) \end{pmatrix}$$

$|\det J\Phi(x)| = |\partial_n \varphi(x)|$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x', \varphi(x)) \, |\det J\Phi(x)| \, dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x', \varphi(x)) \, |\partial_n \varphi(x', x^n)| \, dx^n \right) dx' =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x', x^n) \, dx^n \right) dx' \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx$$

- 2. Spezialfall: (Induktion)

$\Phi(x) = (\psi(x), x^n)$

$\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$

Ableiten nach x'

$$J\Phi(x) = \begin{pmatrix} J'\psi(x', x^n) & \partial_n \psi(x', x^n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|\det J\Phi(x)| = |\det J'\psi(x', x^n)|$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\psi(x', x^n), x^n) \, |\det J\Phi(x', x^n)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\psi(x', x^n), x^n) \, |\det J'\psi(x', x^n)| \, dx' \, dx^n$$

$$\overset{IV}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x', x^n) \, dx' \, dx^n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx$$

- allg. Fall:

$x \in U$, $\det J\Phi(x) \neq 0$

oBdA (nach Vertauschung der Koord.) $\Phi(x) = (\psi(x), \psi^n(x))$

mit $\det J'\psi(x', x^n) \neq 0$

$\Phi_1(x) := (\psi(x), x^n)$, $\det \Phi_1(x) \neq 0$

Φ_1 ist Diffeo in Umgebung um $x \in U_x \longrightarrow V_{\Phi_1(x)}$

$\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1 \quad \Rightarrow \Phi_2 = (\Phi \circ \Phi_1^{-1})$

$\Phi : U_x \longrightarrow \Phi(U_x)$

$\Phi_2(x', x^n) = (x', \varphi(x'))$ $\quad (\Rightarrow$ Spezialfall 1)

$J\Phi(x) = (\Phi_1^* J\Phi_2)(x) \, J\Phi_1(x)$

$|\det \Phi(x)| = \Phi_1^* |\det J\Phi_2|(x) \, |\det J\Phi_1(x)|$

$f \in C_c(U_x) \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Phi^* f)(x) \, |\det \Phi(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1^* (\Phi_2^* f(x)) \, \Phi_1^* |\det J\Phi_2|(x) \, |\det \Phi_1(x)| \, dx =$$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_2^* f(x) |\det \varphi_2(x)| dx \stackrel{!}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$

Aber $f \notin C_c(U_x)$, also

finde U_x für jedes $x \in \operatorname{supp} f$, $(U_x)_{x \in \operatorname{supp} f}$ überdecken $\operatorname{supp} f$

$\operatorname{supp} f$ kompakt $\Rightarrow$ finde $x_1, \dots x_r$ s.d. $(U_{x_i})_{i=1}^r$ Überdeckung ist.

Wähle Zerlegung der 1 $(\chi_i)_{i=1}^r$

$\sum \chi_i \equiv 1$ auf $\operatorname{supp} f$, $\chi_i \in C_c(U_{x_i})$

$f = \sum \chi_i f$

$\int \quad dx = \sum \int \Phi^* (\chi_i f)(x) |\det \Phi(x)| dx = \sum \int \chi_i f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ □

Bem.: $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ reicht

Sei M n-dim MF

$\omega \in \Omega_c^n(M)$

Ziel: $\int_M \omega$

1\. Versuch: Sei (U, x) Karte

$\operatorname{supp} \omega \subset U$

$\omega = \omega(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

$\int_M \omega := \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx$

andere Karte (U, x')

$\omega = \omega'(x') dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^n$

Frage: Gilt $\int \omega(x) dx = \int \omega'(x') dx'$?

$x' = x'(x)$

$dx'^i = \partial_j x'^i dx^j$

$\omega'(x') dx'^1 \wedge \dots \wedge dx'^n = \omega'(x') \partial_{j_1} x'^1 \dots \partial_{j_n} x'^n dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}$

$= \omega'(x') \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, \partial_{\sigma(1)} x'^1 \dots \partial_{\sigma(n)} x'^n}_{\det Jx'} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =$

$= \omega'(x') \det Jx' \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

$\Rightarrow \omega(x) = \omega'(x') \det Jx'$

$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \omega'(x') \det Jx' \, dx \stackrel{\text{Trafoformel}}{=} \int \omega'(x') dx'$

falls $\det Jx' > 0$ → Brauche Orientierung

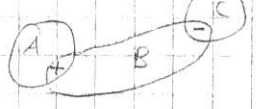
Orientierung

Seien (U,φ), (V,ψ) Karten

Def: orientierungserhaltend $:\Longleftrightarrow (U,\varphi) \sim_o (V,\psi)$

falls $\det(D(\varphi \circ \psi^{-1})) > 0$

Das ist keine Äquivalenzrelation:



$A \sim_o B$, $B \sim_o C$, $A \not\sim_o C$

Ein Atlas $\mathcal{A} \; ((U_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in I}$

heißt orientiert, wenn für alle α, α' gilt

$(U_\alpha, \varphi_\alpha) \sim_o (U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})$

Zwei orientierte Atlanten $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sind orientierungsäquivalent, wenn

$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ orientiert ist.

Das ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der

orientierten Atlanten

Eine Orientierung von M ist eine Äquivalenzklasse von orientierten

Atlanten

Sei M orientiert, (U,φ) Karte

heißt orientiert wenn $\mathcal{A} \cup \{(U,\varphi)\} \sim_o \mathcal{A}$

Weiter: (U,x), (U,x') orientiert $\Rightarrow \det \partial x' > 0$

$\int \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)\,dx$ Kartenunabh. für orientierte Karten.

Sei M orientiert

$\omega \in \Omega^n_c(M)$

Schreibe $\omega = \sum_{\text{endl.}} \omega_\alpha \; (*)$ mit $\omega_\alpha \in \Omega^n_c(M)$ und supp ω_α in

Kartenumgebung enthalten

$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\alpha \quad (**)$

Satz:
- ω hat Darstellung $(*)$
- $(**)$ unabh. von der Wahl der Darstellung

Bew: • $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ endliche Überdeckung von supp ω (da kompakt)

Wähle $(\chi_i)_{i\in I}$ Zerlegung der 1, also $\sum \chi_i = 1$ auf supp ω

und $\chi_i \in C_c(U_i)$

$\omega = \sum_{i\in I} \chi_i \omega$ $\chi_i \omega$ hat Träger in Kartenumgebung

• $\sum_\alpha \int \omega_\alpha = \sum_\alpha \int \sum_i \chi_i \omega_\alpha = \sum_{\alpha, i} \int \chi_i \omega_\alpha = \sum_i \int \sum_\alpha \chi_i \omega_\alpha =$
$= \sum \int \omega \chi_i$

□

Satz: Eine nirgends verschwindende Form $\alpha \in \Omega^n(M)$ bestimmt eine Orientierung und umgekehrt

Bew: „⇒" (U, x) ist α-orientiert, falls $\alpha = \alpha(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ mit $\alpha(x) > 0$

Konstruktion eines Atlas aus solchen α-orientierten Karten:

Wähle $\mathcal{A} = ((U_j, \varphi_j))_{j}$ Atlas mit U_j zusammenhängend.

Wenn (U_j, φ_j) orientiert dann füge zu $\hat{\mathcal{A}}$ hinzu.

nicht orientiert: $(U_j, \hat{\varphi}_j)$ in $\hat{\mathcal{A}}$

mit $\hat{\varphi}_j = (-\varphi_j^1, \varphi_j^2, \ldots, \varphi_j^n)$ α-orientiert

Dann ist $\hat{\mathcal{A}}$ orientierter Atlas. $[\hat{\mathcal{A}}]$ ist Orientierung, die durch α bestimmt ist.

9.6.09

„⇐" Zerlegung der Eins: $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ $U_i \subset M$ offen lokal endlich $\forall p\ \forall U \ni p : U \cap U_i \neq \emptyset$ für endl. viele

Satz: alle U_i Kartengebiete eines orientierten Atlanten

$\varphi_i : U_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ $p \mapsto (x_i^1, \ldots, x_i^n)$

$\chi_i : M \to [0,1]$ glatte Abb, supp $\chi_i \subset U_i$, $\sum \chi_i = 1$

Dann $\chi_i\, dx_i^1 \wedge \ldots \wedge dx_i^n$ Form auf M mit Träger enthalten in U_i

$\omega := \sum \chi_i\, dx_i^1 \wedge \ldots \wedge dx_i^n \in \Omega^n(M)$

$\omega_p \neq 0$? $p \in U \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$

$p \longmapsto (y^1, \ldots, y^n)$

$\omega_p = \sum \underbrace{\chi_i(p)}_{\geq 0} \underbrace{\det\left(\frac{\partial}{\partial y^k}(\varphi_i \circ \psi^{-1})^l(y)\right)_{kl}}_{>0} dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$

$>$ für ein i_0

$\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right) > 0$ $\square$

Def: Sei M n-dim MF

Eine Form $\omega \in \Omega^n(M)$, die nirgends verschwindet

heißt eine Volumenform auf M.

$K \subset M$, $\mathrm{Vol}(K) :=$ Volumen von K bzgl. der Volumenform ω

$$:= \int_K \omega$$

Bemerkung: • ω Volumenform, $f \in C^\infty(M)$ mit $f(p) \neq 0$ $\forall p$

$\Rightarrow$ $f\cdot\omega$ Volumenform

• ω, ω' zwei Volumenformen $\Rightarrow \exists f \in C^\infty(M)$ mit $f(p) \neq 0$ $\forall p$,

s.d. $\omega' = f\cdot\omega$ da $\dim \Omega^n(M) = 1$

Bsp: • $M = \mathbb{R}^{n+1}$

$\left(x \longmapsto (\omega_{kan})_x = dx^1 \wedge \dots dx^{n+1}\right) \in \Omega^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})$

$K \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\int_K \omega_{kan} = \int_K d\lambda_{n+1}$

• $M = S^n$

$j : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

Sei $Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^{n+1})$ kanonisches VF def. durch

$$Y: \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{R}^{n+1} & \cong & T_x\mathbb{R}^{n+1} \\ x & \longmapsto & x & \longmapsto & x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \end{array}$$

$$\omega_{S^n} := j^*(i_Y\, \omega_{kan}) \in \Omega^n(S^n)$$

$$= j^*\, \omega_{kan}(Y,\dots) = j^*\left(dx^1 \wedge\dots\wedge dx^{n+1}\left(\sum x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},\dots\right)\right) =$$

$$= j^*\left(\sum_k (-1)^{k-1} x^k\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^{n+1}\right)$$

ω_{S^n} verschwindet nirgends:

$v_1,\dots v_n \in T_pS^n$ Basis $\Rightarrow j_* v_1,\dots j_* v_n, Y(p) \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$ Basis

$(\omega_{S^n})_p(v_1,\dots v_n) = (\omega_{kan})_p(Y_p, v_1,\dots v_n) \neq 0$

$n=1$: $\omega_{S^1} = j^*(x\,dy - y\,dx)$

$$\begin{array}{ccc} U := S^1 \setminus \{(1,0)\} & \xrightarrow{\cong} & (0,2\pi) \\ \begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix} & \longleftarrow & \varphi \end{array}$$

$dx = (-\sin\varphi)\, d\varphi$

$dy = \cos\varphi\, d\varphi$

$\omega_{S^1}|_U = \cos\varphi\cos\varphi\, d\varphi - \sin\varphi(-\sin\varphi)\, d\varphi = d\varphi$

$\mathrm{Vol}(S^1) = \int_{S^1} \omega_{S^1} = \int_{S^1\setminus\{(1,0)\}} \omega_{S^1} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ (Kreisumfang)

$n=2$: $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\omega_{S^2} = j^*(x\, dy \wedge dz - y\, dx \wedge dz + z\, dx \wedge dy)$

$U := S^2 \setminus$ Nullmeridian $\xrightarrow{\cong} (0,\pi) \times (0,2\pi)$

$\begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \longleftarrow (\vartheta, \varphi)$

$j^* dx = -\sin\varphi \sin\vartheta\, d\varphi + \cos\varphi \cos\vartheta\, d\vartheta$

$j^* dy = \cos\varphi \sin\vartheta\, d\varphi + \sin\varphi \cos\vartheta\, d\vartheta$

$j^* dz = -\sin\vartheta\, d\vartheta$

$\omega_{S^2}|_U = \big((\cos\varphi\sin\vartheta)^2 \sin\vartheta + (\sin\varphi \sin\vartheta)^2 \sin\vartheta + (\sin\varphi \cos\vartheta)^2 \sin\vartheta +$
$+ (\cos\varphi\cos\vartheta)^2 \sin\vartheta\big)\, d\vartheta \wedge d\varphi = \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi$

$\mathrm{Vol}(S^2) = \int_{S^2} \omega_{S^2} = \int_U \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi$ (Kugeloberfläche)

- $M = \mathbb{RP}^n$, n ungerade

S^n
$\downarrow \pi$
$\mathbb{RP}^n = S^n/_\sim \qquad x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$

$R: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $x \longmapsto -x$ Reflexion

$R^*(i_Y \omega_{kan}) = R^*\left(\sum (-1)^{k-1} x^k dx^1 \wedge \ldots \widehat{dx^k} \wedge dx^{n+1}\right) =$

$= \sum (-1)^{k-1} (-x^k)(-dx^1) \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \ldots \wedge (-dx^{n+1}) =$

$= i_Y \omega_{kan}$

Sei $U \subset S^n$ offen, s.d. $\pi|_U : U \xrightarrow{\cong} \pi(U) \subset \mathbb{RP}^n$ ein Diffeo ist.

$\pi|_U^{-1} : \pi(U) \longrightarrow U \hookrightarrow S^n$

Erhalte $\pi|_U^{-1\,*} \omega_{S^n} \in \Omega^n(\pi(U))$

$(\omega_{\mathbb{RP}^n})_p := (\pi|_U^{-1\,*} \omega_{S^n})$ für eine offene Umgebung $U \ni \pi|_U^{-1}(p)$ mit $U \cong \pi(U)$

$\Rightarrow \omega_{\mathbb{RP}^n} \in \Omega^n(\mathbb{RP}^n)$ ist wohldef.

$\mathrm{Vol}(\mathbb{RP}^n) = \frac{1}{2} \mathrm{Vol}(S^n)$

20.07 Mannigfaltigkeiten mit Rand

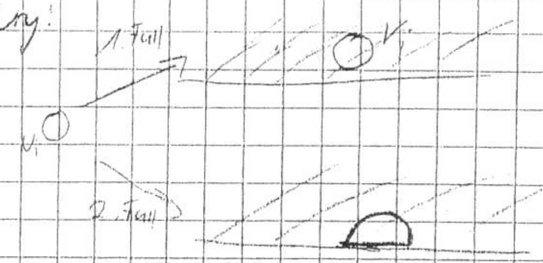
$\mathbb{H}^n = \{(x^1,\dots,x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$

Def.: • Eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist ein zweitabzählbarer Hausdorff ~~Raum~~scher topologischer Raum M zusammen mit einer offenen Überdeckung $M = \bigcup_i U_i$ mit Homöomorphismen

• $\varphi_i : U_i \to V_i \subseteq \mathbb{H}^n$

• M heißt glatt falls $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ Diffeomorphismus ist für alle i,j.

Bemerkung:



Def.: Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ heißt glatt an der Stelle $x = (x^1,\dots,x^{n-1}, x^n = 0)$ wenn sich φ lokal zu glatter Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ ausdehnen lässt

z.B.: $\mathbb{H}^1 \longrightarrow \mathbb{H}^1$

$x \longmapsto \sqrt{x}$ keine glatte Abb.

Bem.: • Nach dem Satz der inversen Funktion bildet $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ innere Punkte auf innere Punkte ab

• Wenn $\varphi_i(x) = (x^1,\dots,x^{n-1}, x^n = 0)$ für $x \in U_i$

$\Rightarrow \varphi_j(x) = (y^1,\dots,y^{n-1}, y^n = 0)$ falls $x \in U_j$

Def.: • $\partial M = \{m \in M \mid \varphi_i(m) = (x^1,\dots,x^{n-1}, x^n = 0)$ für eine Karte $\varphi_i\}$

heißt Rand von M

• $M \setminus \partial M$ heißt dass Innere von M

Bem.: • $(U_i \cap M\setminus\partial M, \varphi_i|_{U_i \cap M\setminus\partial M})$ ist ein Atlas von $M\setminus\partial M$ als Mannigfaltigkeit (ohne Rand)

• $U_i \cap \partial M$ ist offene Überdeckung von ∂M

$\hat{\varphi}_i(m) := (x^1(m), \dots, x^{n-1}(m)) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$\Rightarrow$ Atlas für ∂M als Mannigfaltigkeit (ohne Rand)

• M MFKT $\Leftrightarrow$ M MFKT mit Rand $\partial M = \emptyset$

• Insbesondere: $\partial(\partial M) = \emptyset$

∂M ist MFK der dim. $n-1$, M MFK $\rightsquigarrow$ Kartenmengen U_i sind homöo zu $\mathbb{R}^n$, nie zu $\mathbb{R}^{n-1}$ $\rightsquigarrow$ Rand leer

berandeten Mannigfaltigkeiten werden als Kartenbilder auch offene Mengen H^n zugelassen

: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Submersion (df surjektiv $\forall x$)

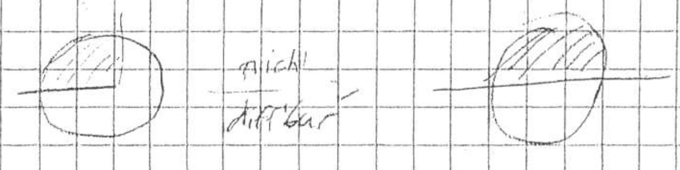
$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq 0\}$ ist Mannigfaltigkeit mit Rand $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$

: Wähle Koordinaten mit $x^n(x) = f(x)$ $\quad \psi: U \to \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(0) \to 0$ $\quad g^n(x) = f\psi^{-1}(x)$, $g^n \geq 0 \Leftrightarrow x \in \psi(U \cap M)$

: Lokal sehen alle Untermannigfaltigkeiten mit Rand von $\mathbb{R}^n$ so aus

: $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{1 - \|x\|}_{f(x)} \geq 0\}$ ist MFK mit Rand S^{n-1}

enbsp.:  $\subseteq \mathbb{R}^2$ Keine MFK mit Rand



p.: Sei M MFK mit Rand

(U_i, φ_i) orientierter Atlas

Dann ist der induzierte Atlas auf ∂M orientiert

: • $f = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ $\quad x^i = f^i(y^1, \dots, y^n)$

Nach Annahme $\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) > 0 \quad \forall y$

• induzierte Koordinatentrafo:

$x^i = f^i(y^1, \dots, y^{n-1}, y^n = 0)$ für $1 \leq i \leq n-1$

• z.z.: $\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial y_j}(y^1, \dots, y^{n-1}, 0)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} > 0$

• Für $n=2$:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1}(y^1, y^2=0) & \frac{\partial f^1}{\partial y^2}(y^2=0) \\ \underbrace{\frac{\partial f^2}{\partial y^1}(y^2=0)}_{=0} & \underbrace{\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(y^2=0)}_{>0} \end{pmatrix} > 0$$

- Da $f^2(y^1, y^2=0)=0 \quad \forall y^1$

$$\Rightarrow \frac{\partial f^2}{\partial y^1}(y^2=0) = 0$$

- $f^2(y^1, y^2) \gtrless 0$ für $y^2 \gtrless 0$ und

$$\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(y^1, y^2=0) > 0 \quad \text{da } f \text{ Diffeo}$$

- Nach letzter Zeile entwickeln

$$\Rightarrow 0 < \det(\ldots) = \det\left(\frac{\partial f^1}{\partial y^1}(y^2=0)\right) \underbrace{\left(\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(y^2=0)\right)}_{>0}$$

• Allgemein:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1}(y^n=0) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial y^n}(y^n=0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{\frac{\partial f^n}{\partial y^1}(y^n=0)}_{=0} & \underbrace{\cdots}_{=0} \cdots & \underbrace{\frac{\partial f^n}{\partial y^n}(y^n=0)}_{>0} \end{pmatrix}$$

Entwickle nach letzter Zeile

$\square$

Def.: Sei M Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M mit Orientierung. Dann ist die induzierte Orientierung auf ∂M:

→ die Orientierung des induzierten Atlas falls $\dim M$ gerade,

→ die umgekehrte Orientierung, falls $\dim M$ ungerade

Satz von Stokes:

Sei M orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, und ω eine $(n-1)$-Form mit kompakten Träger. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

B: 1. Fall: - $M = \mathbb{R}^n$

- ω Linearkomb. von Termen der Form $\alpha = f(x)\, dx^1 \wedge .. \wedge \hat{dx^i} \wedge .. \wedge dx^n$

$$\Rightarrow d(f dx^1 \wedge .. \wedge \hat{dx^i} \wedge .. \wedge dx^n) = \pm \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge .. \wedge dx^n$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} d\alpha \overset{\text{Fubini}}{=} \int \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right)}_{} dx^1 .. \hat{dx^i} .. dx^n$$

$$= f(x^1, ..., x^i = \infty, .., x^n) - f(x^1, .., x^i = -\infty, .., x^n) = 0$$

da supp f kompakt

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0 = \int_{\emptyset} \omega = \int_{\partial \mathbb{R}^n} \omega \quad \checkmark$$

2. Fall: - $M = \mathbb{H}^2$

- $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$

$$d\omega = \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy$$

$$\Rightarrow \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=0}^{\infty} -\frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y=0)\, dx$$

$$\int_{y=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial x} dx \right)}_{=0} dy = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{|\partial M} = \omega|_{\{y=0\}} = f(x,0)\,dx + \overbrace{g(x,0)\,dy}^{=0}$$

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y=0)\, dx = \int_M d\omega \quad \checkmark$$

3. Fall: - $M = \mathbb{H}^n$

- $\omega = \sum f_i\, dx^1 \wedge .. \wedge \hat{dx^i} \wedge .. \wedge dx^n$

$$d\omega = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x^i} (-1)^{i-1}\, dx^1 \wedge .. \wedge dx^n$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \int_{x^1=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{x^{n-1}=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x^n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial f^n}{\partial x^n} dx^n \right) dx^1 .. dx^{n-1} =$$

$$= \int_{x^1=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{x^{n-1}=-\infty}^{\infty} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n = 0)(-1)^n \underbrace{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}}_{\text{induzierte Volumenform}} =$$

$$= \int_{\partial H^n} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n = 0)(-1)^n \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} =$$

$$= \int_{\partial H^n} \omega$$

4. Fall: – M allgemein

– (U_i) offene Überdeckung

p_i Partition der 1 mit $\operatorname{supp} p_i \subset U_i$

$$\overset{(1.1.3)}{\Rightarrow} \int_{\partial M} p_i \omega = \int_M d p_i \omega$$

$$\omega = \sum p_i \omega$$

$\square$

Konsequenzen aus Stokes

Korollar: M Mannigfaltigkeit, $\partial M = \emptyset$, M kompakt,

$\alpha = d\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$

$$\Rightarrow \int_M \alpha = 0$$

Korollar: M kompakt, $\partial M = \emptyset$

$H^2(M) = 0$ (alle geschl. 2-Formen exakt)

$\Rightarrow M$ hat keine symplektische Form

Bew.: Sei $\omega \in \Omega^2(M)$ symplektisch $\Rightarrow \omega = d\alpha$, ω nicht ausgeartet

$\omega^{\wedge \frac{\dim M}{2}}$ ist Volumen-Form

$\omega^{\wedge \frac{\dim M}{2}} = d(\alpha \wedge \omega^{\wedge \frac{\dim M}{2} - 1}) \Rightarrow \int_M \omega^{\wedge top} = 0$ ↯

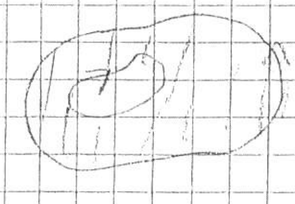
Bsp.: $H^2(S^n) = 0$ für $n > 2$

Bsp.: • f holomorphe Funktion $\Leftrightarrow f dz$ geschlossen

$$\int_{S^1} f dz = \int_{D^1} d(f dz) = \int_{D^1} 0 = 0$$

∂D^1

• Cauchyformel:



S: Sei ω Volumenform auf M, X Vektorfeld

$\Rightarrow \mathcal{L}_X \omega = (\mathrm{div}_\omega X)\,\omega$ für $\mathrm{div}_\omega X \in C^\infty M$

$\mathrm{div}_\omega X$ heißt Divergenz von X bzgl. ω

Tz: von Gauß

M Mannigfaltigkeit, ω Volumenform, X Vektorfeld

$S \subset M$ UMFK mit Rand

$\dim S = \dim M$

Dann gilt: $\int_S (\mathrm{div}_\omega X)\,\omega = \int_{\partial S} i_X \omega$

: $\mathcal{L}_X \omega = (d i_X + i_X d)\,\omega = d(i_X \omega) = (\mathrm{div}_\omega X)\,\omega$

Stokes $\Rightarrow$ $\square$

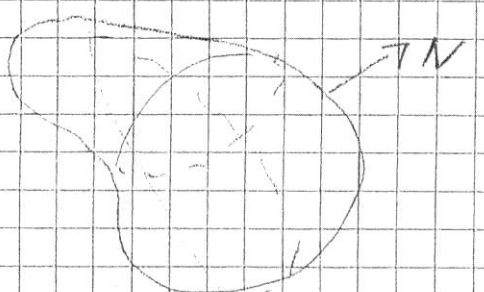
16.06.09

z von Gauß:

$\mathbb{R}^3$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ UMFK mit Kodim. 0

$\partial\Omega$ glatt

äußere Normale: $N: \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$



$\mathrm{vol}_{\partial\Omega} = i_N \,\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^3} \in \Omega^2(\partial\Omega)$

$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ Vektorfeld

$\rightsquigarrow \mathrm{div}\, X \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{L}_X \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^3} = \mathrm{div}\, X \cdot \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^3}$

Bsp $M = \mathbb{RP}^n$, n gerade, ist nicht orientierbar

Bew: indirekt. Sei $\omega \in \Omega^n(\mathbb{RP}^n)$ nirgends verschwindende Volumenform

$\underset{\pi^*\omega}{S^n} \xrightarrow{\pi} \underset{\omega}{\mathbb{RP}^n}$ π ist lokaler Diffeo. $\Rightarrow \pi^*\omega$ ist Volumenform auf S^n

$\Rightarrow \exists f: S^n \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ glatt, s.d. $\pi^*\omega = f\,\omega_{S^n}$

$R: S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$ Reflexion, dann $\pi \circ R = \pi$

$R^*\pi^*\omega = (\pi\circ R)^*\omega = \pi^*\omega = f\,\omega_{S^n}$

$ \,\|$

$R^*(f\,\omega_{S^n}) = R^*f \cdot R^*\omega_{S^n} = R^*f\,(-\omega_{S^n})$

$\Rightarrow f(x) = -f(-x)$

$\lightning$ da S^n zusammenhängend (ZWS)

Nächste Stunde:
- Volumenform auf Torus (Produkte)
- Stokes

$X = X^i \partial_i$

$\mathcal{L}_X \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^3} = \mathrm{div}\, X \cdot \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^3}$

$\|$

$(i_X d + d i_X)\,\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^3} = d \sum (-1)^{i+1} X^i dx^1 \wedge \ldots$

$= d\,(X^1 dx^2 \wedge dx^3 - X^2 dx^1 \wedge dx^3 + X^3 dx^1 \wedge dx^2) =$

$= (\partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

$= \mathrm{div}\, X \; dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

Satz: $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle X, N\rangle\, \mathrm{vol}_{\partial\Omega} = \int_\Omega \mathrm{div}\, X\, \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^3}$

Bsp: $X(x) := x = x^i \partial_i$

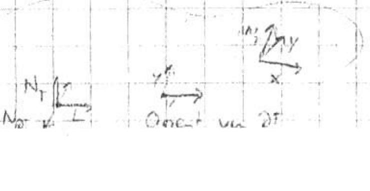
$\mathrm{div}\, X = 3$ $\quad \frac{x}{R}$

$\displaystyle\int_{S^2_R} \langle X, N\rangle\, \mathrm{vol}_{\partial\Omega} = R\, \mathrm{vol}_{S^2_R} = R^3 4\pi$

$\|$

$\displaystyle\int_{B_R} \mathrm{div}\, X\, \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^3} = 3\, \mathrm{vol}_{B^3_R} = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

Sei F UMF, codim $F = 1$, Rand ∂F, $F \subset \mathbb{R}^3$



wähle Normale N_F $\rightsquigarrow$ bestimmt Orientierung von F

bestimmt Orientierung von ∂F

$\rightsquigarrow$ äußeres Normalenfeld $N_{\partial F}$

$L \in \mathfrak{X}(\partial F)$ Einheitsfeld in Richtung der Orientierung

$(N_F, N_{\partial F}, L)$ orientierte Basis von $\mathbb{R}^3$

Sei $\alpha \in \Omega(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\partial F} \alpha = \int_F d\alpha$$

1-Formen zu Vektorfelder

benutzt die Metrik

$\alpha(u) = \langle X, u \rangle \quad \forall u \qquad \alpha \in \Omega^1(F), \; X \in \mathfrak{X}(F)$

$\alpha_i dx^i \quad \hat{=} \quad X^i \partial_i$

$\alpha_i = X^i$

$$\int_{\partial F} \alpha = \int_{\partial F} \alpha(L)\, vol_{\partial F} = \int_{\partial F} \langle X, L \rangle\, vol_{\partial F}$$

Nur im $\mathbb{R}^3$: 2-Formen zu Vektorfelder

benutzt Metrik und Kreuzprodukt

$\omega(A, B) = \langle X, A \times B \rangle$

$\beta : \mathfrak{X}(F) \longrightarrow \Omega^2(F)$

$\beta(\partial_1)(A, B) = \langle \partial_1, A \times B \rangle = A^2 B^3 - A^3 B^2$

$\beta(\partial_2)(A, B) = -A^1 B^3 + A^3 B^1$

$\beta(\partial_3)(A, B) = A^1 B^2 - A^2 B^1$

Vektorfeld für $d\alpha$:

Sei $X \hat{=} \alpha$, dann $\operatorname{rot} X \hat{=} d\alpha$

$X = X^i \partial_i, \qquad \alpha = X^i dx^i \qquad d\alpha = \sum \partial_j X^i dx^j \wedge dx^i$

$$\operatorname{rot} X := \begin{pmatrix} \partial_2 X^3 - \partial_3 X^2 \\ -\partial_1 X^3 + \partial_3 X^1 \\ \partial_1 X^2 - \partial_2 X^1 \end{pmatrix} =: \nabla \times X$$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{rot} : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

$$\int_F d\omega = \int_F \beta_{\mathrm{rot}\,X} = \int_F \beta_{\mathrm{rot}\,X}(e_1, e_2)\,\mathrm{vol}_F =$$
$$= \int_F \langle \mathrm{rot}\,X, e_1 \times e_2 \rangle = \int_F \langle \mathrm{rot}\,X, N_F \rangle\,\mathrm{vol}_F$$

Also:

$$\int_{\partial F} \langle X, L \rangle\,\mathrm{vol}_{\partial F} = \int_F \langle \mathrm{rot}\,X, N_F \rangle\,\mathrm{vol}_F$$ Klassischer Satz von Stokes

Maxwelltheorie

Elektromagnetismus

Ladungen: Dichte $\rho: \underset{\text{Zeit}}{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

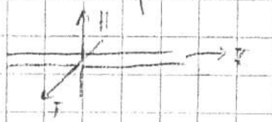
Elektrisches Feld: $E(t,x) \in \mathbb{R}^3$

Def: durch Kraft auf Testladung e

Kraft $= e \cdot E$

Magnetisches Feld $H(t,x) \in \mathbb{R}^3$

Def. durch Kraft auf stromdurchflossenen Leiter



$I \times H = F$

Strom = bewegte Ladung $j(t,x) \in \mathbb{R}^3$

1) Ladungen sind Quellen d. el. Feldes

$$\int_\Omega \rho = \int_{\partial\Omega} \langle E, N \rangle \quad \text{für festes } t.$$

$$E(x) = \frac{e \cdot x}{\|x\|^3}\frac{1}{4\pi}$$ Punktladung e

$$\int_{D_R} \rho = \int_{S_R} \langle E, N \rangle = \frac{e R^2}{R^3}\,\frac{4\pi}{4\pi} = e$$

2) keine magnetischen Ladungen

$$\int_{\partial\Omega} \langle H, N \rangle = 0$$

3) Induktionsgesetz

$$-\int_{\partial F} \langle E, L \rangle = \frac{\partial}{\partial t}\int \langle H, N_F \rangle$$

4) $$\int_{\partial F} \langle H, L \rangle = \int_F \langle j, N_F \rangle + \frac{\partial}{\partial t}\int \langle E, N_F \rangle$$

Äquivalente Beschreibung durch DGL

1) $\varrho = \operatorname{div} E$

2) $0 = \operatorname{div} H$

3) $\operatorname{rot} E = -\frac{\partial}{\partial t} H$

4) $\operatorname{rot} H = j + \frac{\partial}{\partial t} E$

- Punktladung: $\operatorname{div} E = \frac{e}{4\pi}\left(\frac{3}{|x|^3} + \frac{3}{2}\frac{\langle -x, 2x\rangle}{|x|^5}\right) = 0$ für $x \neq 0$

~~Für~~ $H = 0$,

$\operatorname{rot} E = 0$

- Wellenlösung: $\varrho = 0,\ j = 0,\ k \neq 0$

$$\xrightarrow[ke_2]{}$$

kein Quadrat

$$E(t,x) = u e^{ik(x^2 - t)}$$

$$\operatorname{div} E(t,x) = 0$$

$$\Rightarrow u^2 = 0 \Leftrightarrow u \perp ke_2$$

OBdA $u = e_1$

$$\operatorname{rot} E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -ik\, e^{ik(x^2 - t)} \end{pmatrix} = -\dot{H}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik(x^2 - t)}$$

$$\operatorname{rot} H = \begin{pmatrix} -ik \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik(x^2 - t)} = \dot{E}\ ✓$$

- $\partial_t \varrho = \partial_t \operatorname{div} E$

$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} H = \operatorname{div} j + \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} E$ $\qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} = „d \cdot d" = 0$

$\Rightarrow \dot{\varrho} + \operatorname{div} j = 0$ Kontinuitätsgleichung